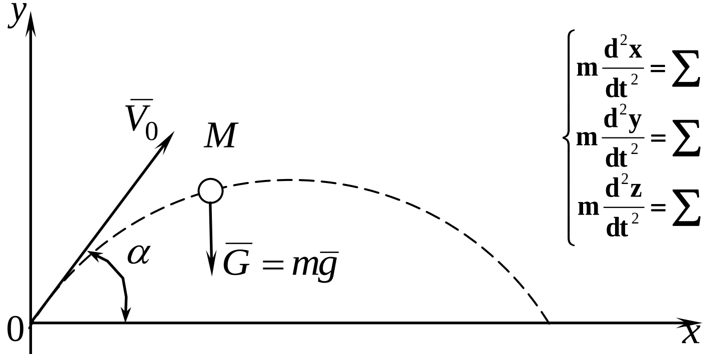
Кафедра прикладної механіки

Університету цивільного захисту України

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Розділ: Динаміка

Конспект лекцій



$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum X \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum Y \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum Z \end{cases}$$

Харків 2008

Кафедра прикладної механіки

Університету цивільного захисту України

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Розділ: Динаміка

Конспект лекцій

Харків 2008

Друкується за рішенням кафедри прикладної механіки УЦЗУ
Протокол від 31.03.08 № 28

Рецензенти: І.В. Лавинський, завідуючий кафедрою опору матеріалів НТУ "ХПІ", доктор технічних наук, професор;

В.М. Павленко, завідуючий кафедрою теоретичної механіки та машинознавства Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського "ХАІ", кандидат технічних наук, доцент.

Єременко С.Б., Вамболь С.О., Петренко О.В.
Теоретична механіка. Розділ: Динаміка: Конспект лекцій. – Х.:УЦЗУ, 2008. – 81 с.

Викладено питання теоретичної механіки розділ «Динаміка». Наведений теоретичний матеріал і приклади мають практичне значення.

Конспект лекцій може бути корисним для самостійного вивчення курсу теоретичної механіки, розділ «Динаміка». Може також використовуватися при при розв’язанні багатьох прикладних задач механіки. Розрахований на курсантів, студентів та слухачів всіх форм навчання.

ВСТУП

Механіка – одна з найдавніших наук. Термін «механіка» запровадив видатний стародавній вчений Аристотель (384-322 до н.е.). На всіх етапах свого розвитку механіка була тісно зв’язана з розвитком продуктивних сил суспільства і сприяла розвиненню техніки. Перші наукові основи вчення про рівновагу тіл можна знайти в працях видатного вченого Архімеда (287-212 до н.е.). Архімед дав обґрунтування начал статики, а також розвинув науку про, так звані, простіші машини, до яких відносяться блок, ворот, важіль, похила площина.

Розвинення динаміки починається значно пізніше. В XV-XVI століттях у багатьох країнах Європи почався бурхливий розвиток торгівлі, ремесел і військової справи. Це сприяло накопиченню великого досвідного матеріалу, систематизація і узагальнення якого привели в XVII сторіччі до відкриття законів динаміки. Особливий внесок в утворенні законів динаміки зробили Галілео Галілей (1564-1642) та Ісаак Ньютон (1643-1727). Ісаак Ньютон вперше систематизував основні закони механіки. Великий внесок в подальше розвинення механіки зробили такі вчені як Л. Ейлер, Ж. Даламбер, Ж. Лагранж та інші.

ЛЕКЦІЯ 1

ДИНАМІКА ТОЧКИ
ПРЯМА ТА ЗВОРОТНЯ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОЧКИ

Закони

1. Аксіоми динаміки

Динаміка – це частина теоретичної механіки, яка вивчає механічний рух тіл залежно від сил, що впливають на цей рух.

Динаміка ґрунтується на ряді положень, що є аксіомами і називаються законами динаміки. Перед тим, як перейти до вивчення цих законів, введемо поняття ізольованої матеріальної точки, тобто точки, на яку не діють інші матеріальні точки. Поняття ізольованої матеріальної точки є цілком умовним, оскільки у природі насправді ізольованих тіл не існує. Перший закон динаміки, який називають аксіомою інерції або першим законом Ньютона, стосовно матеріальної точки формулюється так:

Ізольована матеріальна точка перебуває або у стані спокою, або рухається прямолінійно і рівномірно.

Прямолінійний рівномірний рух – це єдиний вид руху, в якому прискорення дорівнює нулю. Тому аксіому інерції можна сформулювати так: *прискорення ізольованої матеріальної точки дорівнює нулю*.

Таким чином, ізольована матеріальна точка сама собі не може надати прискорення. Ця властивість називається *інерцією*, або *інертністю*.

Інерція або інертність – це властивість тіла зберігати свою швидкість за модулем і напрямом.

Змінити швидкість, тобто надати прискорення, може лише прикладена до тіла сила.

Залежність між силою і наданим нею прискоренням виражається другим законом динаміки, або другим законом Ньютона.

Цей закон формулюється так:

Прискорення, якого надає матеріальній точці сила, має напрям сили і пропорційне модулю сили.

Для даної матеріальної точки відношення сили до прискорення є величина стала. Це відношення позначимо m і назвемо масою даної точки:

$$\frac{P}{a} = m = const,$$

де P - прикладена сила до точки, a - прискорення точки.

Маса – одна з основних характеристик будь-якого матеріального об'єкта, що визначає його інертні властивості. Чим більше маса точки, тим більше силу треба прикласти, щоб надати їй потрібного прискорення.

Другий закон Ньютона має вигляд

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a}$$

Цей закон називають *основним рівнянням динаміки*. Можна його сформулювати ще так:

Сила – це вектор, що дорівнює добутку маси точки на її прискорення.

Основне рівняння динаміки – це рівняння руху матеріальної точки у векторній формі.

Відомо, що під дією притягання Землі тіла падають у пустоті в даному місці з однаковим прискоренням, яке називається прискоренням вільного падіння.

Сила тяжіння тіла дорівнює його масі, помноженій на прискорення вільного падіння.

$$G = m \cdot g\ .$$

Прискорення вільного падіння g у різних місцях земної поверхні різне. Воно зменшується від полюса до екватора. На полюсах $g = 9{,}83$ м/с^2, на екваторі $g = 9{,}78$ м/с^2.

Рух під дією сталої сили може бути прямолінійним і криволінійним. В останньому випадку матеріальна точка має початкову швидкість, вектор якої не збігається з лінією дії сил.

До основних законів динаміки відносять також аксіому взаємодії, або третій закон Ньютона.

Для матеріальної точки цей закон можна сформулювати так:

Сили взаємодії двох матеріальних точок за модулем рівні між собою і мають протилежний знак.

2. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Нехай до матеріальної точки A прикладені сили $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, рівнодіюча яких $\vec{P}$ (рис. 1.1).

За аксіомою паралелограма запишемо

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} \qquad (1.1)$$

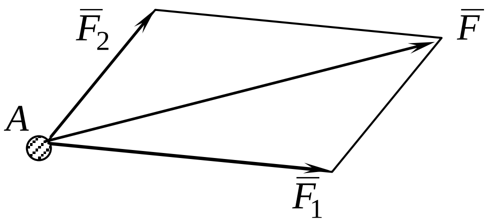


Рис. 1.1

Поділивши обидві частини рівності на масу точки m, дістанемо

$$\frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} = \frac{\vec{F}}{m},$$

звідки

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a} \qquad (1.2)$$

Якщо на матеріальну точку одночасно діє кілька сил, то прискорення руху буде таким, якого б надавала рівнодіюча сила

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

Рівнодіючу силу можна визначити застосовуючи послідовно аксіому паралелограма або побудованого силового многокутника.

Отже можна записати

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (1.3)$$

Спроектуємо векторну рівність (1.3) на три взаємно перпендикулярні осі координат x, y і z.

Тоді рівняння руху матеріальної точки у координатній формі будуть мати такий вигляд:

$$\begin{cases} F_x = \sum X = ma_x \\ F_y = \sum Y = ma_y \\ F_z = \sum Z = ma_z \end{cases} \tag{1.4}$$

Рівняння (1.4) можемо записати у вигляді диференціального рівняння руху матеріальної точки.

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum X \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum Y \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum Z \end{cases}, \tag{1.5}$$

де $\sum X$, $\sum Y$ і $\sum Z$ - алгебраїчні суми проекцій сил, які діють на точку, на відповідній координатній осі.

3. Пряма та зворотна задачі динаміки

За допомогою рівнянь (1.5) розв'язують дві основні задачі динаміки:

1) За заданим рухом точки треба визначити сили, які діють на неї;

2) Знаючи сили, які діють на точку, треба визначити її рух.

Коли під час розв'язування задач маємо справу з невільною матеріальною точкою, то треба застосувати принцип звільнюваності, тобто відкинути зв'язки і замінити їх реакціями. Далі треба враховувати ці реакції у рівняннях руху так само, як активні сили, що діють на точку.

Приклад 1. Рух тіла, маса якого 2 кг, задано рівняннями

$$x = 4t \qquad y = 2 + 3t - 4t^2,$$

де x і y - у метрах; t - у секундах.

Визначити силу, яка діє на тіло.

Розв'язання. Цей приклад належить до першої задачі динаміки. Спочатку визначимо проекції прискорення на осі x і y:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ м/с}^2; \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -8 \text{ м/с}^2$$

Визначаємо проекції сил:

$$X = ma_x = 2 \cdot 0 = 0 \ н$$

$$Y = ma_y = 2 \cdot (-8) = -16 \ н$$

Таким чином видно, що сила, яка діє на тіло паралельна осі ординат, спрямована у бік від'ємних ординат і за модулем дорівнює

$$F = \sqrt{x^2 + y^2} = |Y| = 16 \ н.$$

Приклад 2. На матеріальну точку масою 6 кг, яка лежить на гладенькій горизонтальній площині, діє горизонтальна сила $F = 24$ *н*. З якою швидкістю рухатиметься матеріальна точка через $t = 5$ с, якщо до прикладення сили ця точка була в стані спокою?

Розв'язання. Цей приклад належить до другої задачі динаміки. Оскільки матеріальна точка лежить на гладенькій горизонтальній площині, то під дією горизонтальної сталої сили $\overline{F}$ точка буде рухатися прямолінійно рівноприскорено. Спрямуємо вісь x вздовж траєкторії точки і спроектуємо силу $\overline{F}$ на цю вісь. Тоді

$$ma_x = F_x,$$

або $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{F}{m} = \dfrac{24}{6} = 4$.

Проінтегруємо це рівняння

$$V = \frac{dx}{dt} = 4t + C_1.$$

Оскільки $V_0 = 0$, то $C_1 = 0$.

Підставив значення, дістанемо

$$V = 4 \cdot 5 = 20 \text{ м/с}.$$

4. Рух матеріальної точки, кинутої під кутом до горизонту

Розглянемо матеріальну точку M масою m, що кинута з точки поверхні з початкової швидкістю V_0 під кутом α до горизонту (рис. 1.2). Визначимо рух точки M, вважаючи, що на неї діє тільки сила тяжіння $\vec{G}$. Опір повітря не враховуємо.

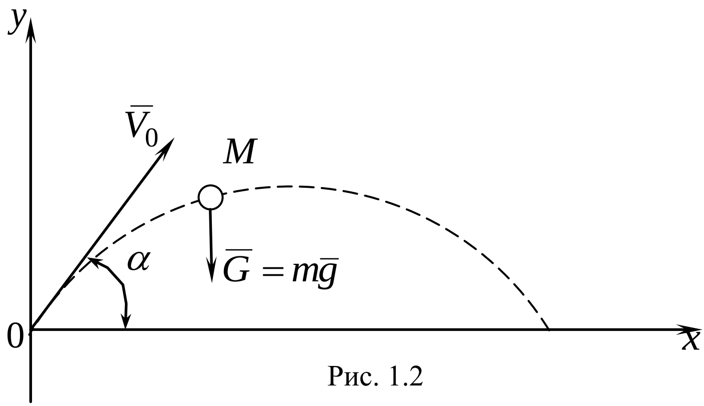


Рис. 1.2

Початок координат візьмемо в точці O, вісь x спрямуємо по горизонталі вправо, а вісь y - по вертикалі вгору. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки будуть мати вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -G. \qquad (1.6)$$

Скоротимо ці рівності на m, тоді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g. \qquad (1.7)$$

Після інтегрування рівнянь (1.7) знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = C_1, \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + C_2. \qquad (1.8)$$

За умовою, коли $t=0$, $V_x = V_0 \cdot \cos\alpha$ і $V_y = V_0 \cdot \sin\alpha$
Тоді

$$C_1 = V_0 \cdot \cos\alpha; \qquad C_2 = V_0 \cdot \sin\alpha$$

Рівняння (1.8) набувають вид

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cdot \cos\alpha, \; \frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \cdot \sin\alpha \tag{1.9}$$

Інтегруючи рівняння (1.9), дістанемо

$$\begin{cases} x = V_0 t \cdot \cos\alpha + C_3 \\ y = -\dfrac{gt^2}{2} + V_0 t + C_4 \end{cases} \tag{1.10}$$

За умовою, коли $t=0$, то $x=0$ й $y=0$. Тому довільні сталі $C_3 = C_4 = 0$.

Отже, матеріальна точка M, кинута із швидкістю V_0 під кутом α, до горизонту, буде рухатись відповідно до рівнянь

$$\begin{cases} x = V_0 t \cdot \cos\alpha \\ y = V_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \tag{1.11}$$

Для визначення траєкторії точки M треба виключити з рівнянь руху час. З першого рівняння отримаємо

$$t = \frac{x}{(V_0 \cdot \cos\alpha)} \tag{1.12}$$

Підставимо формулу (1.12) у друге рівняння системи (1.11). Тоді дістанемо рівняння траєкторії точки

$$M \quad y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{\left(2V_0{}^2 \cdot \cos^2\alpha\right)}. \tag{1.13}$$

Траєкторія точки M - це парабола з вертикальною віссю симетрії. Визначимо час польоту точки M. Для цього в друге рівняння руху підставимо значення $y = 0$

$$V_0 t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0 \tag{1.14}$$

З рівняння (1.14) знаходимо два значення часу

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} \tag{1.15}$$

Перше значення відповідає початку польоту, друге – кінцю польоту.

Для визначення дальності польоту підставимо в перше рівняння руху значення часу t_2

$$L = x_2 = V_0 t \cdot \cos\alpha = \left(V_0 \cdot \cos\alpha\right) \cdot \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{V_0{}^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} \tag{1.16}$$

З рівняння (1.16) видно, що максимальна дальність польоту буде тоді, коли $\sin 2\alpha = 1$, тобто коли $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Тобто $x_{\max} = \frac{V_0{}^2}{g}$.

Знайдемо найбільшу висоту піднімання точки M. В цей момент похідна за часом від координати y дорівнюватиме нулю:

$$\frac{dy}{dt} = V_y = V_0 \cdot \sin\alpha - gt_m = 0 \tag{1.17}$$

З рівності (1.17) знайдемо t_m:

$$t_m = \frac{V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{1}{2} \cdot t_2$$

Тоді знайдемо найвище положення точки M. Підставимо значення t_m у друге рівняння руху

$$y_m = V_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{V_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g V_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{V_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}.$$

Якщо $\alpha = \frac{\pi}{4}$, то $y_m = \frac{1}{4} \cdot \frac{V_0^2}{g}$.

Тобто максимальна висота дорівнює одній чверті максимальній дальності польоту.

Приклад. Під час аварії обід маховика парової машини розірвався на кілька частин, які відлетіли від місця аварії на різні відстані в площині обертання маховика. Найбільша відстань, на яку відлетіли знайдені шматки, 280 м. Діаметр маховика $D = 3{,}5$ м. Визначити кутову швидкість маховика в момент розриву.

Розв'язання. Для тіла, що кинуте під кутом до горизонту максимальна дальність польоту визначається за формулою:

$$x_{\max} = \frac{V_0^2}{g}.$$

Знайдемо з цієї формули кутову швидкість ободу маховика в момент розриву:

$$V_0 = \sqrt{g \cdot x_{\max}} = \sqrt{9{,}8 \cdot 280} \approx 52{,}4 \text{ м/с}.$$

Визначаємо кутову швидкість у момент розриву

$$\omega = \frac{V_0}{0{,}5D} = \frac{52{,}4}{1{,}75} \approx 30 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Слід зазначити, що кутова швидкість маховика в момент розриву була дещо більшою, оскільки не враховано аеродинамічний опір повітря.

Запитання до лекції.

1. На яких положеннях ґрунтується динаміка?
2. Що є основним рівнянням динаміки?
3. Як підраховується сила тяжіння?
4. Що є прямою задачею динаміки?
5. Що є зворотною задачею динаміки?
6. Що є сталі інтегрування?

ЛЕКЦІЯ 2

ВІЛЬНІ ТА ЗМУШЕНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1 Вільні коливання матеріальної точки без урахування сил опору

Дослідження механічних коливань є важливим вже з тієї причини, що такі коливання дуже часто мають місце у багатьох галузях техніки.

Розглянемо тачку M, яка рухається прямолінійно під дією тільки відновлюючої сили $\overline{F}$, що спрямована до нерухомого центра O і пропорційна відстані від цього центра.

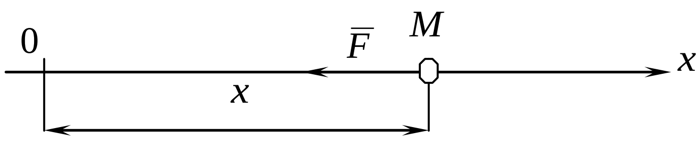


Рис. 2.1

Пропорція сили $\overline{F}$ на вісь Ox дорівнює

$$F_X = -cX$$

Знайдемо закон руху точки M. Складемо диференціальне рівняння руху.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cX$$

$$m\frac{d^2X}{dt^2}+cX=0 \qquad \frac{d^2X}{dt^2}+\frac{c}{m}X=0$$

Позначимо $\frac{c}{m}=k^2$, де m- маса точки; c - коефіцієнт жорсткості

Тоді отримаємо

$$\frac{d^2X}{dt^2}+k^2X=0 \tag{2.1}$$

Рівняння (2.1)уявляє собою диференціальне рівняння вільних коливань точки при відсутності опору.

Загальний розв'язок цього рівняння має вид

$$X=C_1\sin kt+C_2\cos kt, \tag{2.2}$$

де $C_{1,}$ C_2 - сталі інтегрування

Ведемо нові сталі:

$C_1 = a\cos\alpha$

$C_2 = a\sin\alpha$

Тоді $X=a\sin kt\cos\alpha+a\cos kt\sin\alpha$

або $X=a\sin(kt+\alpha)$ (2.3)

Швидкість точки буде дорівнювати

$$V_X=\dot{X}=ak\cos(kt+\alpha) \tag{2.4}$$

де *а*- амплітуда коливань; *к* - кругова частота коливань; $(kt+\alpha)$ - фаза коливань; α - початкова фаза коливань.

Проміжок часу T, протягом якого точка здійснює одне повне коливання, називається періодом коливань.

Протягом періода фаза змінюється на 2π . Тобто повинно бути $kT = 2\pi$, звідки період

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Величина ν, що є зворотною до періоду, і що визначає кількість коливань за одну секунду, називається циклічною частотою.

Співвідношення між круговою та циклічною частотою

$$\nu = 2\pi k .$$

Величина ***a***, дорівнює найбільшому відхиленню точки M від центру коливань називається амплітудою коливань.

Величина $\varphi = kt + \alpha$ називається фазою коливань. Фаза коливань визначає положення точки в даний момент часу, а також напрям її подальшого руху.

Значення a і α визначається за початковими умовами. Оскільки при $t = 0$ $x = x_0$ та $V_X = V_0$ отримаємо з (2.3) і (2.4)

$$x_0 = a\sin\alpha , \ \frac{V_0}{k} = a\cos\alpha$$

Звідки знаходимо:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}, \quad tg\alpha = \frac{kX_0}{V_0} \tag{2.5}$$

Треба зазначити, що вільні коливання при відсутності опору мають такі властивості:

1) амплітуда та початкова фаза коливань залежить від початкових умов;

2) частота k і період T від початкових умов не залежать, вони являють собою незмінні характеристики даної системи.

2. Вільні коливання при опорі, якій є пропорційні швидкості

Розглянемо коливання, коли на точку діють відновлюючи сила $\vec{F}$ та сила опору $\vec{R}$, яка пропорційна першій ступені швидкості (рис. 2)

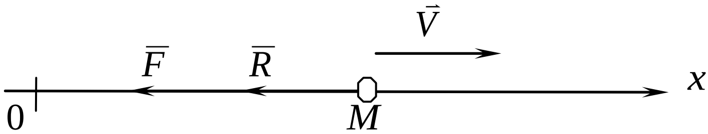


Рис. 2.2

Тоді можна записати

$$F_X = -cX\ ; \qquad R_X = -\mu V_X = -\mu \frac{dX}{dt}$$

Диференційне рівняння руху буде мати вигляд

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -cX - \mu\frac{dX}{dt} \tag{2.6}$$

Перетворимо рівняння (2.6)

$$\begin{gathered} m\frac{d^2X}{dt^2} + \mu\frac{dX}{dt} + cX = 0, \\ \frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{dX}{dt} + \frac{c}{m}X = 0 \end{gathered} \tag{2.7}$$

Вводимо позначення

$$\frac{c}{m} = k^2, \frac{M}{m} = 2b \tag{2.8}$$

З урахуванням формул (2.8) рівняння (2.7) набуває вигляду

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2b\frac{dX}{dt} + k^2X = 0 \tag{2.8}$$

Рівняння (2.8) являє собою диференціальне рівняння вільних коливань при наявності опору, що є пропорційним швидкості. Для розв'язання диференціального рівняння (2.8) треба скласти характеристичне рівняння:

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0 \tag{2.9}$$

Корні рівняння (2.9) будуть комплексними

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2} \tag{2.10}$$

Тоді загальний розв’язок рівняння (2.8) буде мати вид

$$x = e^{-bt}(c_1 + \sin k_1 t + c_2 \cos k_1 t), \tag{2.11}$$

де $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$

По аналогії с (2.3) формулу (2.11) можна перетворити

$$x = ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha) \tag{2.12}$$

Величини a і α також являються сталими інтегрування і визначаються за початковими умовами.

Коливання, що відбуваються за законом (2.11) називають затухаючими.

Графік цих коливань надано на (рис.2.3).

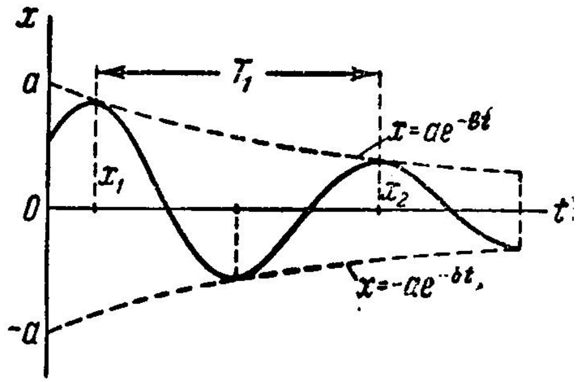


Рис. 2.3

Проміжок часу T_1, тобто величину $T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}$ прийнято називати періодом затухаючих коливань.

Амплітуда затухаючих коливань спадає по закону геометричної прогресії. Знаменник цієї прогресії називається декрементом затухаючих коливань, а величина bT_1 - логарифмічним декрементом. Треба зазначити, що малий опір практично не впливає на період коливань, але викликає поступове затухання коливань за законом геометричної прогресії.

Розглянемо випадок, коли опір великий у порівнянні з відновлюючою силою, тобто $b > k$. Введемо позначення, та знайдемо корні характеристичного рівняння. В даному випадку

$$n_{1,2} = -b \pm r\,.$$

Обидва корені дійсні та від'ємні.

Отже розв'язання рівняння (2.8) буде мати вигляд

$$x = C_1 \cdot e^{-(b+r)t} + C_2 \cdot e^{-(b-r)t}\,.$$

В даному випадку коливань не буде, а точка під дією відновлюючої сили поступово буде наближатися до положення рівноваги. Якщо при $t = 0$ $x = x_0$, $V_0 > 0$, то графік буде мати вигляд показаний на рис. 2.4

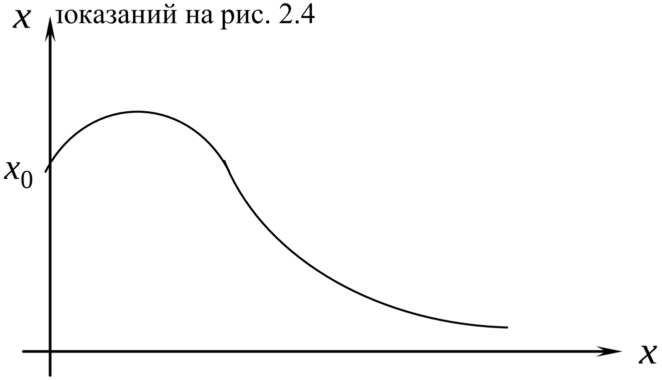


Рис. 2.4

3. Вимушені коливання

Розглянемо випадок коливань, що виникають, коли на точку, крім відновлюючої сили F, діє ще періодична сила Q, що змінюється за часом.

Проекція цієї сили на вісь Ox буде дорівнювати

$$Q_x = Q_0 \cdot \sin\, pt \qquad (2.13)$$

Ця сила називається збуджуючою силою, а коливання, що відбуваються під дією цієї сили, називаються вимушеними. Величина p у формулі (2.13) є частотою збуджуючої сили.

Збуджуюча сила може змінюватися за будь-яким законом. Але ми будемо розглядати тільки гармонійні закони (синус або косинус).

Розглянемо спочатку вимушені коливання при відсутності опору.

Диференціальне рівняння руху в цьому випадку має вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + Q_0 \sin\ pt \tag{2.14}$$

Введемо позначення $\frac{Q_0}{m} = P_0$ і перетворимо рівняння (2.14) до вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = P_0 \sin\ pt \tag{2.15}$$

Рівняння (2.15) є диференціальним рівнянням вимушених коливань точки при відсутності опору.

У теорії диференціальних рівнянь відомо, що розв'язком рівняння (2.15) буде $X = X_1 + X_2$, де X_1 – загальний розв'язок однорідного рівняння.; X_2 – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (з правою частиною).

Відомо, що $X_1 = a \cdot \sin(kt + \alpha)$.

Покажемо, що $p \neq k$, шукаємо розв'язок x_2 у виді

$$A = \frac{P_0}{k^2 - p^2}.$$

Тоді частковий розв'язок буде мати вигляд

$$X_2 = \frac{p_0}{K_2 - p^2}\sin\ pt. \tag{2.16}$$

Тоді остаточно маємо

$$X = a\sin(kt + \alpha) + \frac{p_0}{k^2 - p^2}\sin\ pt. \tag{2.17}$$

Розв'язок (2,17) показує, що коливання точки складеться з двох частин:

1) коливання з амплітудою a (вона залежить від початкових умов) і частотою k, які називаються власними коливаннями.

2) коливання з амплітудою A (вона не залежить від початкових умов) і частотою p, які називаються ви мушиними коливаннями. Як правило власні коливання швидко затухають. Тому основне значення мають змушені коливання, закон яких надається рівнянням (2.16).

Розглянемо тепер рух точки, на яку діють відновлювана сила $\overline{F}$, сила опору $\overline{R}$, що пропорційна швидкості, і збуджуюча сила $\overline{Q}$.

Рівняння усього руху має вигляд

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -cX - \mu\frac{dX}{dt} + Q\sin pt. \qquad (2.18)$$

Після перетворення рівняння (2.18) набуває виду.

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2X = P_0\sin pt$$

Рівняння (2.19)є рівнянням вимушених коливань точки з урахуванням опору.

Розв'язок цього рівняння як відомо має вигляд

$$X = X_1 + X_2,$$

де X_1 – загальний розв'язок рівняння без правою частини; X_2 – частинний розв'язок повного рівняння (2.19).

Розв'язок X_2 – шукаємо у вигляді

$$X_2 = A\sin(pt - \beta),$$

де A та β - сталі які треба визначити за допомогою математичних перетворень.

Знаходимо

$$tg\beta = \frac{2bp}{K^2 - P^2} \qquad (2.20)$$

Оскільки $X = X_1 + X_2$, то остаточно знаходимо розв'язання рівняння (2.19) у вигляді

$$X = ae^{-bt}\sin(K_1 t_{t2}) + A\sin(pt - \beta) \,, \qquad (2.21)$$

де a і $\alpha -$ сталі інтегрованих , які визначаються по початковим умовам A і β від початкових умов не залежить, вони визначаються за формулами (2.20).

Ці коливання є складними. Вони складаються із власних і вимушених. Власні коливання швидко затухають. Через деякий час, який називається часом встановлення t_b , власним коливанням можна нехтувати.

Практично приймається, що власними коливаннями можна нехтувати починаючи з моменту, коли їх амплітуда буде менше 0,01А. Тоді можна записати

$$a \cdot e^{-bt_b} = 0.01A$$

Звідки

$$t_b = \frac{1}{b}\ln\frac{1000}{A} \qquad (2.23)$$

Із формули (2.23) видно, як виливає опор на час встановлення. Покажемо картину встановлення коливань (рис. 2.5)

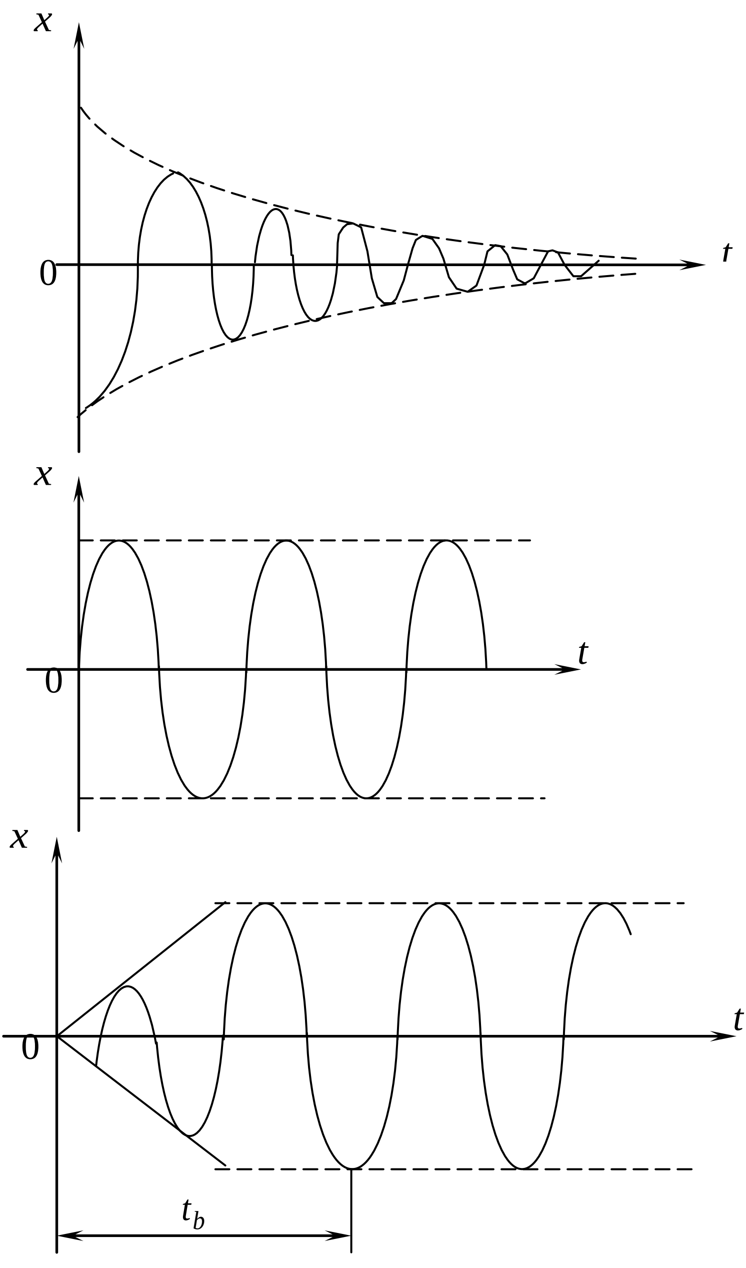


Рис. 2.5

У всіх випадках після t_b власні коливання практично затухають і точка буде здійснювати коливання по закону

$$X = A\sin(pt - \beta) \tag{2.23}$$

Це незатухаючи гармонійні коливання з амплітудою A і частотою p, яка дорівнює частоті збуджуючої сили.

Величина β характеризує зсув фазі вимушених коливань відносно фази збуджуючої сили.

4. Резонанс

У випадку, коли $p = k$, тобто частота збудженої сили дорівнює частоті власних коливань, має місце явище резонансу. Розмахи коливань, якщо опору не має при резонансі будуть необмежено зростати (рис. 2.4).

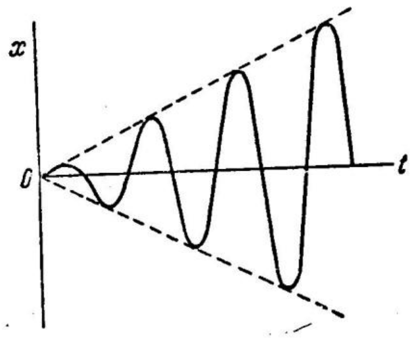


Рис. 2.4

При наявності опору амплітуда вимушених коливань та зсув фаз при резонансі може обчислюватися по формулам:

$$A_p = \frac{\delta_0}{2h}; \qquad B_p = \frac{\pi}{2}, \tag{2.24}$$

де $\delta_0 = \dfrac{P_0}{k^2} = \dfrac{Q_0}{c}$ - величина статичного відхилення точки під дією сили Q_0; $h = \dfrac{b}{k}$ - величина, що характеризує опір.

5. Загальні властивості вимушених коливань

Вимушені коливання мають такі важливі властивості, що суттєво відрізняють їх від власних коливань.

1) Амплітуда вимушених коливань від початкових умов не залежить.

2) Вимушені коливання при наявності опору не затухають.

3) Частота вимушених дорівнює частоті збудженої сили і від характеристик системи (маса, жорсткість) не залежить.

4) Навіть, якщо збуджуюча сила мала, можна отримати інтенсивні вимушені коливання, якщо опір малий, а частота збудженої сили р близька до частоти власних коливань k .

5) Навіть при великих значення збуджуючої сили вимушені коливання можна зробити дуже малими, якщо частота р буде набагато більше k .

Вимушені коливання і резонанс відіграють велику роль у багатьох галузях науки і техніки.

Наприклад робота машин і двигунів може викликати коливання фундаментів.

У багатьох інженерних спорудах явищ резонансу є край небажаним і його треба уникати.

Протилежний приклад маємо у радіотехніці, де резонанс є явищем корисним і застосовується для настройки радіоприладів.

Теорія вимушених коливань застосовується при конструюванні приладів (вібрографи, сейсмографи і т.д.)

Приклад. Балка, на якої встановлений електродвигун, прогинається від його ваги на $\delta_{ct} = 1cm$. При якій частоті обертання вала двигуна відбудеться резонанс?

Розв'язання. Період власних коливань балки обчислюється за формулою

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{ct}}{g}}$$

Якщо центр вала ваги вала двигуна зміщений від осі, то на вал буде діяти відцентрова сила $\overline{Q_0}$. Її проекція на вісь Ox буде дорівнювати

$$Q_x = Q_0 \cdot \sin \omega t ,$$

де ω - кутова швидкість вала Q_x буде збуджуючою силою, що діє на двигун. Частота цієї сили $p = \omega$.

Отже, період вимушених коливань $T_b = \dfrac{2\Pi}{\omega}$

Резонанс відбудеться коли $T_b = T$.

Тоді $\omega_p = \sqrt{\dfrac{g}{\delta_{ct}}} = 31{,}3c^{-1}$.

Звідки знаходимо $n_p = \dfrac{30 \cdot \omega_p}{\pi} = 300 {}^{об}\!/_{хв.}$.

Запитання до лекції

7. Як підрахувати відновлюючи силу?
8. Які коливання називаються вільними?
9. Як визначити амплітуду вільних коливань?
10. Як визначається фаза вільних коливань?
11. Які коливання називаються змушеними?
12. Які коливання називаються затухаючими?
13. Як визначити декремент затухаючих коливань?
14. У якому випадку має місце явище резонансу?

ЛЕКЦІЯ 3

ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1. Рівняння відносного руху точки

Закони динаміки діють тільки для так званого абсолютного руху відносно нерухомій системи відліку.

Розглянемо матеріальну точку M, яка рухається під дією прикладних до неї сил $F_1,\ F_2\ ...\ F_n$.

Будемо вивчати рух цієї точки відносно до осей $Oxyz$, які в свою чергу якимсь чином рухаються відносно нерухомих осей $Ox_1y_1z_1$ (рис. 3.1)

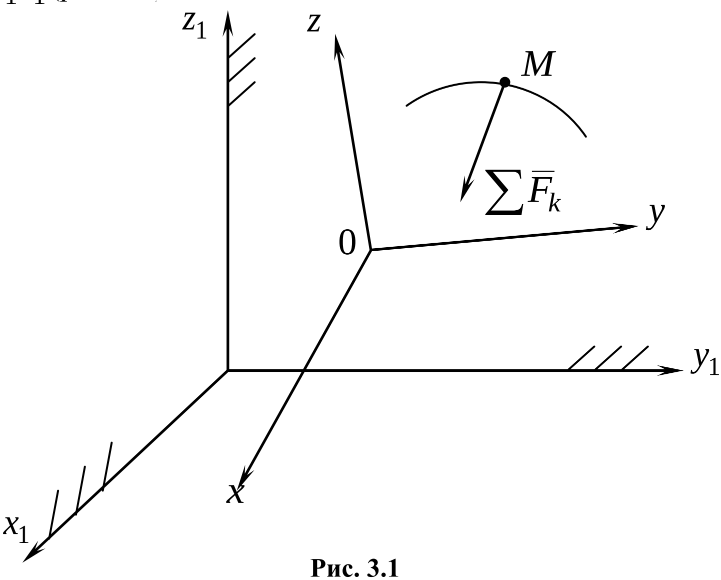


Рис. 3.1

Для абсолютного руху відомо, що основний закон динаміки має вид

$$\mathrm{m}\vec{a}_{\mathrm{A}} = \sum \vec{F}_k$$

Але із кінематики також відомо, що

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{відн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}$$

де $\vec{a}_{відн}$ - відносно прискорення

$\vec{a}_{пер}$ - перекосне прискорення

$\vec{a}_{кор}$ - коріолісово прискорення

Якщо приймемо, що $\vec{a}_A = \vec{a}_{відн}$, то отримаємо

$$ma = \sum \vec{F}_k + (-m\vec{a}_{пер}) + (-m\vec{a}_{кор}) \qquad (3.2)$$

Введемо позначення

$$\vec{F}_{пер} = -m\vec{a}_{пер};\ \ \vec{F}_{пер} = -m\vec{a}_{кор}$$

Величини $\vec{F}_{пер}$ та $\vec{F}_{пер}$ є відповідно переносною та коріолісовою силами інерції. Тоді формула (3.2) набуває вигляду

$$ma = \sum \vec{F}_{к} + \vec{F}_{пер} + \vec{F}_{кор} \tag{3.3}$$

<u>Рівняння (3.3) висловлює основний закон динаміки для відносного руху точки.</u>

Треба зазначити, що усі рівняння та теореми механіки для відносного руху точки складаються так, як і рівняння абсолютного руху, якщо при цьому к діючим на точку силам додати переносну та корілісову силу інерції.

Розглянемо окремі викладки.

1. Рухомі вісі здійснюють поступальний рух

В цьому випадку $\vec{F}_{кор} = 0$, оскільки в цьому випадку кутова швидкість рухомих вісей $\omega = 0$. Тоді закон відносного руху приймає вид

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{k} + \vec{F}_{пер}$$

В рухомому вісі здійснюють поступальний, рівномірний і прямолінійний рух

2. В цьому випадку $\vec{F}_{пер} = \vec{F}_{кор} = 0$

Закон відносного руху має такий же вигляд, як і закон руху відносно нерухомих вісей. Тобто

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{к}$$

3. Якщо точка відносно до рухомих вісей знаходиться у спокою, то для неї $\vec{a} = 0$ та $\vec{V}від = \vec{V} = 0$, а також $\vec{F}_{кор} = 0$, оскільки $V_{отн} = 0$. Тоді рівняння (3.3) приймає вид

$$\sum \vec{F}_{k} + \vec{F}_{пер} = 0 \tag{3.4}$$

Рівняння (3.4) є рівнянням відносної рівноваги точки.

4. При складанні рівнянь відносного руху у випадках, коли $\vec{F}_{кор} \neq 0$, треба мати на увазі, що

$$\vec{F}^{u}{}_{кор} = -m\vec{a}_{кор} = -m(\vec{\omega} * \vec{V}_{отн})$$

Отже сила $\vec{F}_{кор}$ перпендикулярна до $\vec{V}від н = \vec{V}$

Тоді проекція коріолісової сили інерції на дотичну до відносної траєкторії завжди дорівнює нулю. Тобто $F^{u}{}_{кор} = 0$

У всіх інших випадках рівняння відносного руху будуть включати як переносну так і коріолісову силу інерції.

Приклад. Розглядаємо відцентровий регулятор. Усі ланки механізму, крім куль V і D, є пере рухомі. Треба визначити кут α, що визначає положення відносної рівноваги стриженя AB, якщо регулятор обертається зі сталою кутовою швидкістю ω, а довжина $AB = l$.

Розв’язання

Для визначення положення відносної рівноваги додаємо до діючої на шар B сили ваги $\vec{P}$ і реакції $\vec{N}$ переносну силу інерції $\vec{F}_{пер}$. Оскільки

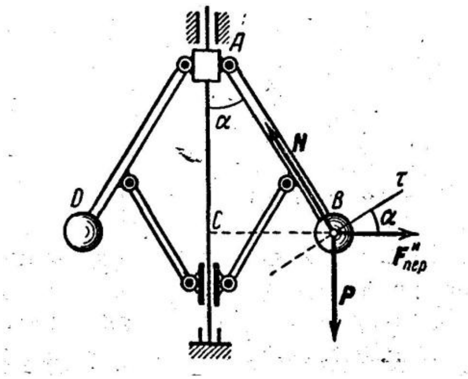


Рис. 3.2

$$\vec{a}_{пер} = a^{n}_{пер} = BC * \omega^2 = l * \omega^2 * \sin\alpha$$

Тоді $F^{i}_{пер} = ml * \omega^2 \sin\alpha$

Складаємо рівняння рівноваги в проекції на вісь BT, що є перпендикулярною до AB:

$$-P\sin\alpha + F_{пер} * \cos\alpha = 0$$

Звідки отримаємо

$$-mg * \sin\alpha + ml\omega^2 * \cos\alpha * \sin\alpha = 0 \text{ або}$$

$$g + l\omega^2 * \cos\alpha = 0$$

Тоді $\cos\alpha \le 1$, то рівновага при $\alpha \ne 0$ можлива тільки, коли $\omega^2 > \dfrac{g}{l}$.

Запитання до лекції.

1. Який рух називається абсолютним?
2. Який рух називається відносним?
3. Який рух називається переносним?
4. У якому випадку треба обчислювати коріолісову силу інерції?
5. У якому випадку не треба обчислювати коріолісову силу інерції?

ЛЕКЦІЯ 4

ДИНАМІКА СИСТЕМИ. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ ТА МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ

1. Вступ в динаміку системи.

Механічною системою матеріальних точок називають сукупність матеріальних точок, певним способом зв'язаних між собою.

Будь-яке тверде тіло можна вважати незмінною механічною системою матеріальних точок. Сили взаємодії точок даної системи називають внутрішніми, сили з якими діють на дану систему інші точки, що не належать до цієї системи, - зовнішніми.

Як зовнішні сили, так і внутрішні сили можуть бути в свою чергу або активними, або реакціями зв'язків.

Розподіл сил на зовнішні і внутрішні є умовним і залежить від того, рух якої системи сил ми розглядаємо.

Наприклад, якщо розглядати двигун внутрішнього згоряння в цілому, то тиск газів буде внутрішньою силою, а якщо розглядати рух поршня, то ця сила буде зовнішньою.

Внутрішні сили мають такі властивості:

1) Геометрична сума усіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю.

2) Сума моментів усіх внутрішніх сил системи відносно будь-якого центра або осі дорівнює нулю.

Рух системи залежить також від її сумарної маси і розподілу мас.

Маса системи дорівнює арифметичній сумі мас точок або тіл, що утворюють систему: $M = \sum m_k$.

Розподіл мас в будь-якої механічної системі можна охарактеризувати за допомогою центра мас.

Центр мас або центр інерції це геометрична точка, координати якої визначаються за формулами

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M},\ y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M},\ z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}, \quad (4.1)$$

де m_k - маси матеріальних точок,

x_k , y_k , z_k - координати точок.

Положення центра мас співпадає з положенням центра ваги, але ці поняття не є тотожними.

Треба зазначити, що положення центра мас характеризує розподіл мас системи не повністю. Тому в механіці існує ще одна характеристика розподілу мас – момент інерції.

ОЗНАЧЕННЯ. Моментом інерції тіла або системи відносно даної осі Oz називається скалярна величина, що дорівнює сумі добутків мас усіх точок тіла або системи квадрати їх відстаней від цієї осі (рис. 4.1)

$$I_z = \sum m_k h_k^{\,2} \quad (4.2)$$

Осьовий момент інерції відіграє при обертальному русі тіла таку ж саме роль, як маса при поступальному, тобто осьовий момент інерції є мірою інертності тіла при обертальному русі.

Для обчислення осьових моментів інерції можна відстані точок від осей визначити через координати x_k , y_k , z_k цих точок. Тоді моменти інерції будуть визначатися за формулами

$$I_x = \sum m_k\left(y_k{}^2 + z_k{}^2\right);\ I_y = \sum m_k\left(z_k{}^2 + x_k{}^2\right);\ I_z = \sum m_k\left(x_k{}^2 + y_k{}^2\right) \quad (4.3)$$

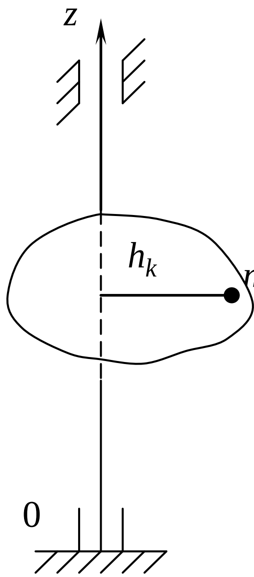


Рис. 4.1

Дуже часто доцільно використовувати поняття радіуса інерції.

ОЗНАЧЕННЯ. Радіусом інерції тіла відносно осі Oz називається лінійна величина ρ_i, що визначається за формулою

$$I_z = M\rho_i{}^2, \quad (4.4)$$

де M - маса тіла.

За формулами (4.2) та (4.3) можна знаходити моменти інерції як твердого тіла так і для будь-якої системи.

У випадку суцільного тіла моменти інерції обчислюються за допомогою інтеграла

$$I_z = \int_{(V)} h^2 dm \text{ або } I_z = \int_{(V)} \rho h^2 dV \quad (4.5)$$

Формулу (4.5) зручно використовувати при обчисленні моментів інерції однорідних тіл правильної форми.

Так, наприклад, для тонкого однорідного кільця радіуса R і маси M

$$I_c = MR^2$$

Для круглої однорідної пластини або циліндра радіуса R і маси M

$$I_c = \frac{1}{2}MR^2$$

Для тонкого однорідного стрижня

$$I_c = \frac{1}{12}Ml^2$$

2. Загальні закони динаміки

Повне розв'язання основної задачі динаміки складається в тому, що знаючи задані сили, треба про інтегрувати відповідні диференціальні рівняння і таким чином визначити закон руху кожної з точок системи окремо.

Однак треба зазначити, що такий метод дуже важкий і пов'язаний з математичними складнощами. Також при розв'язанні багатьох задач механіки достатньої знати деякі сумарні характеристики руху системи в цілому, а не рух кожної точки системи окремо.

Ці сумарні характеристики можна визначити за допомогою загальних теорем динаміки системи.

У ряді випадків для визначення характеру руху системи достатньо знати закон руху її центра мас.

ТЕОРЕМА. Добуток маси системи на прискорення її центра мас дорівнює геометричній сумі усіх діючих на систему зовнішніх сил. Тобто

$$M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^{\,e}, \tag{4.6}$$

де $\vec{a}_c$ - прискорення центра мас системи.

Інакше кажучи, центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі усієї системи і до якої прикладені усі зовнішні сили, що діють на систему.

В проекціях на координатні осі формула (4.6) приймає вид

$$M\frac{d^2x_c}{dt}=\sum F_{kx}{}^e;\; M\frac{d^2y_c}{dt}=\sum F_{ky}{}^e;\; M\frac{d^2z_c}{dt}=\sum F_{kz}{}^e \quad (4.7)$$

Рівняння (4.7) уявляють собою диференціальні рівняння руху центра мас в проекціях на декартові координатні осі.

Ця теорема дозволяє при визначенні закону руху центра мас будь-якої системи виключати з розглядання усі невідомі внутрішні сили.

Із теореми можна отримати також такі важливі слідства:

1) Якщо сума усіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас цієї системи рухається зі сталою по модулю і напрямку швидкістю, тобто рівномірно та прямолінійно.

Якщо центр мас знаходився у спокої, то він і залишиться у спокої.

2) Якщо сума проекції усіх діючих зовнішніх сил на будь-яку осі дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас системи на цю вісь є величиною сталою.

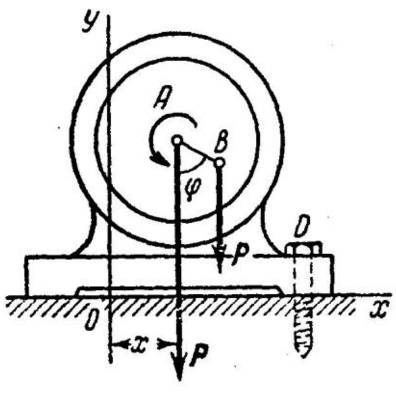


Рис. 4.1

Приклад. Центр мас вала зміщений від осі обертання на величину $AB=a$. Маса вала дорівнює m_1, а маса усіх інших частин мотора дорівнює m_2. Треба визначити, за яким законом буде рухатися мотор по гладкій, горизонтальній поверхні, якщо вал обертається зі сталою кутовою швидкістю ω.

Розв'язання. На мотор діють вертикальні сили $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$ і реакція площини. Має місце закон зберігання руху центра мас уздовж осі Ox. Зображено мотор в довільному стані (рис. 4.1). тоді в довільному стані $\xi_A = x$, $\xi_B = x + a\sin\varphi$.

Звідки, враховуючи, що $\varphi = \omega t$, знаходимо $m_2 x + m_1\left(x + a\sin\omega t\right) = 0$, звідки $x = -\dfrac{m_1 a}{m_1 + m_2}\sin\omega t$.

Тобто мотор буде здійснювати гармонічні коливання з круговою частотою ω.

3. Теорема про зміну кількості руху точки

Основними динамічними характеристиками руху точки є кількість руху і кінетична енергія.

ОЗНАЧЕННЯ. <u>Кількістю руху точки називається векторна величина $m\vec{v}$, що дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості</u>.

Спрямований цей вектор по дотичній до траєкторії точки, тобто так само як і швидкість.

ОЗНАЧЕННЯ. <u>Кінетичною енергією точки називається скалярна величина $\dfrac{mv^2}{2}$, що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості</u>.

Ці дві динамічні характеристики доповнюють друг друга і дозволяють охватити усі особливості руху точки.

Знаючи, наприклад, кількість руху автомобіля і діючу на нього тормозну силу, можна визначити час до зупинки, але при цьому не можливо знайти тормозний шлях. Навпаки, знаючи початкову кінетичну енергію автомобіля і тормозну силу, можна визначити тормозний шлях, але не можна знайти тормозний час.

Для характеристики дії сили на тіло за деякий час розглянемо поняття про імпульс сили.

ОЗНАЧЕННЯ. Векторна величина $d\vec{S}$, що дорівнює добутку вектора сили $\vec{F}$ на елементарний проміжок часу dt називається елементарним імпульсом сили:

$$dS' = Fdt \tag{4.8}$$

За кінцевий проміжок часу t_1 імпульс $\vec{S}$ будь-якої сили $\vec{F}$ обчислюється як інтегральна сума відповідних елементарних імпульсів:

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F}dt \tag{4.9}$$

Тобто, <u>імпульс сили за будь-який проміжок часу t_1 дорівнює визначеному інтегралу від елементарного імпульсу в границях від нуля до</u> t_1.

В проекціях на координатні осі формула (4.7) має вигляд:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt\,,\ S_y = \int_0^{t_1} F_y dt\,,\ S_z = \int_0^{t_1} F_z dt \tag{4.10}$$

Треба зазначити, що імпульси можливо обчислити тільки для, які залежать від часу або є сталими.

Кількість руху і імпульс сили мають однакові одиниці $\left(\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}\right)$. Зв’язок між ними встановлює <u>теорема про зміну кількості руху точки</u>.

ТЕОРЕМА. Зміна кількості руху матеріальної точки за якийсь проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної до неї сили за той самий проміжок часу.

Математичний вираз теореми про заміну кількості руху матиме вигляд:

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum \vec{S}_k \tag{4.11}$$

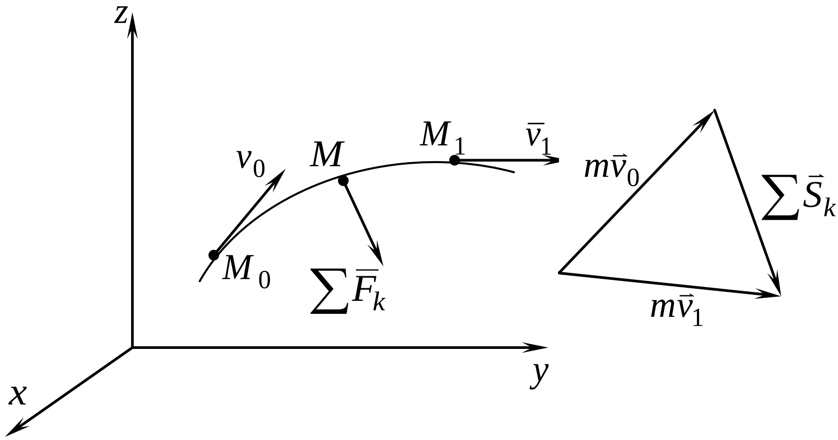


Рис. 4.2

Цю теорему можна сформулювати в диференціальній формі:

<u>Похідна за часом від кількості руху точки дорівнює геометричній сумі усіх діючих на точку сил</u>. Тобто

$$\frac{d(m\overline{v})}{dt} = \sum \overline{F}_k .$$

За допомогою теореми про зміну кількості руху точки можна розв'язувати задачі, які відповідають таким вимогам: а) діючи сили є сталими або залежать тільки від часу; б) до заданих або шуканих величин входять: діючи сили, час руху, початкова і кінцева швидкість точки.

Іноді при вивченні руху точки замість самого вектора $m\overline{v}$ необхідно розглядати зміну його моменту.

Момент вектора $m\overline{v}$ відносно даного центра O або відносно осі z позначається відповідно $\vec{m}_0(m\overline{v})$ або $\vec{m}_z(m\overline{v})$ і називається <u>моментом кількості руху або кінетичним моментом</u> точки відносно центра або осі.

Обчислюється момент вектора $m\overline{v}$ також само як і момент сили.

Для розв'язання багатьох задач динаміки точки зручно використовувати такі дві теореми.

1. ТЕОРЕМА МОМЕНТІВ ВІДНОСНО ОСІ. Похідна за часом від моменту кількості руху відносно будь-якої осі дорівнює моменту діючої сили відносно тієї осі.

2. ТЕОРЕМА МОМЕНТІВ ВІДНОСНО ЦЕНТРА. Похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно будь-якого нерухомого центра точки дорівнює моменту діючої на точку сили відносно того ж центра

4. Теорема про зміну кількості руху системи.

ОЗНАЧЕННЯ. Кількість руху системи називається векторна величина $\vec{Q}$, що дорівнює геометричній сумі кількостей руху усіх точок системи (рис. 4.3):

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{v}_k \tag{4.12}$$

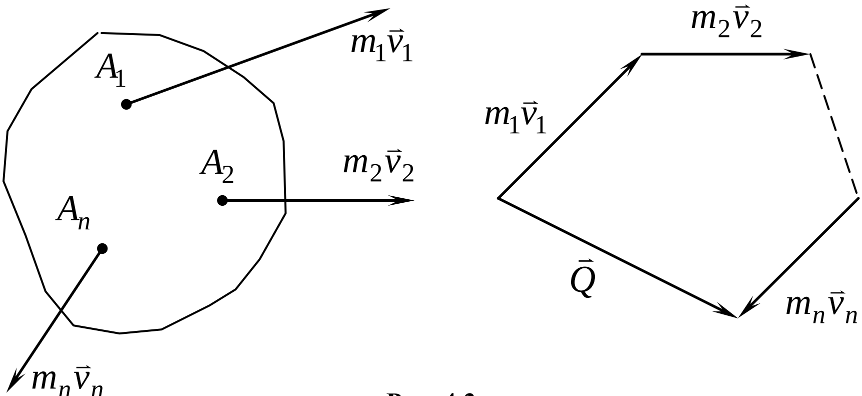


Рис. 4.3

Вектор $\vec{Q}$ може приймати будь-які значення і навіть дорівнювати нулю, якщо багатокутник, який побудований з векторів $m_k\vec{v}_k$ буде замкненим.

По величині $\vec{Q}$ неможливо повністю визначити характер руху системи.

Якщо відома маса системи M та швидкість її центра мас $\bar{v}_c$, то вектор $\vec{Q}$ можна обчислювати за формулою:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_c \tag{4.13}$$

Тобто, кількість руху системи дорівнює добутку маси усієї системи на швидкість її центра мас.

Формула (4.13) є дуже зручною при обчисленні кількостей руху твердих тіл.

Якщо тіло рухається таким чином, що її центр мас залишається нерухомим, то кількість руху тіла дорівнює нулю. Наприклад, кількість руху тіла, що обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через центр мас тіла, буде дорівнювати нулю.

Кількість руху характеризує тільки поступальний рух системи. Якщо рух тіла буде складним, то величина $\vec{Q}$ буде характеризувати тільки поступальну частину руху системи разом із центром мас.

ТЕОРЕМА. Зміна кількості руху системи за деякий проміжок часу дорівнює сумі імпульсів діючих на систему зовнішніх сил за той же проміжок часу. Тобто

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \vec{F}_k{}^e dt$$

або

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k{}^e \tag{4.14}$$

В проекціях на координатні осі формула (4.14) набуває вигляд:

$$\begin{cases} Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}{}^e \\ Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}{}^e \\ Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}{}^e \end{cases} \tag{4.15}$$

Треба зазначити, що теорема про заміну кількості руху системи і теорема про рух центра мас є по суті дві різні форми однієї теореми.

У випадку, коли вивчається рух твердого тіла але системи тіл можна використовувати обидві форми теореми. Але для неперервного середовища поняття про центр мас системи практично не має сенсу. У цьому випадку для розв'язання задач треба застосувати теорему про зміну кількості руху системи. Ця теорема дозволяє виключити із розглядання усі наперед невідомі внутрішні сили (наприклад, тиск друг на друга часток рідини). З теореми про зміну кількості руху системи можна отримати такі важливі слідства:

1) якщо сума усіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то вектор кількості руху системи буде сталим за модулем і напрямом.

2) якщо сума проекцій усіх діючих зовнішніх сил на будь-яку вісь дорівнює нулю, то проекція кількості руху на цю вісь є величина стала.

Запитання до лекції.

1. Яку систему можна вважати механічною системою матеріальних точок?
2. Які сили називається внутрішніми?
3. Які сили називаються зовнішніми?
4. Як визначити момент інерції твердого тіла відносно осі?
5. Як визначається радіус інерції твердого тіла?
6. Як визначається центр мас механічної системи?
7. Як визначається кількість руху точки і системи?
8. Як визначити імпульс сили?

ЛЕКЦІЯ 5

РОБОТА СИЛ ТА МОМЕНТІВ. ПОТУЖНІСТЬ ПОНЯТТЯ ПРО ПОТЕНЦІАЛЬНУ ЕНЕРГІЮ.

1. Робота сталої сили.

Розглянемо матеріальну точку M, до якої прикладена серед інших сила $\overline{P}$.

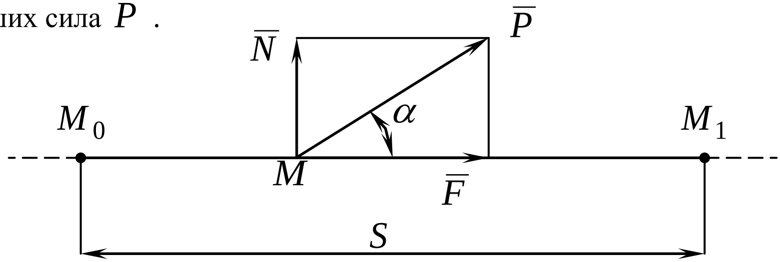


Рис. 5.1

Нехай точка перемістилася прямолінійно з положення M_0 у положення M_1 і пройшла при цьому шлях S.

Для визначення кількісної міри дії сили $\overline{P}$ на шляху S треба розкласти цю силу на складові $\overline{N}$ і $\overline{F}$, які спрямовані перпендикулярно до напряму переміщення і вздовж його. Оскільки складова N не може рухати точку або чинити опір її руху в напрямі S, то дію сили $\overline{P}$ на шліху S можна визначити добутком $F \cdot S$. Цю величину називають роботою і позначають літерою A.

Таким чином,

$$A = F \cdot S = P \cdot S \cdot \cos\alpha \tag{1}$$

ОЗНАЧЕННЯ. Робота сили дорівнює добутку її модуля на шлях і на косинус кута між напрямами сили і переміщення.

Робота – величина скалярна. Робота буде додатною, якщо $\alpha < 90^o$; вона буде від'ємною, якщо $\alpha > 90^o$; робота дорівнює нулю, коли $\alpha = 0^o$, тобто напрями сили і переміщення взаємно перпендикулярні. Так, наприклад, коли тіло піднімається вгору, то робота сили тяжіння буде від'ємною, коли тіло рухається вниз – додатною, а коли тіло рухається на горизонтальній поверхні, то робота сили тяжіння дорівнює нулю.

Сили, які виконують додатну роботу, називають рушійними силами, а ті, що виконують від'ємну роботу, - силами опору.

Коли напрями сили і переміщення збігаються $(\alpha = 0)$, то

$$A = P \cdot S .$$

Якщо напрями сили і переміщення спрямовані у протилежні боки $(\alpha = 180^o)$, то

$$A = -P \cdot S .$$

Одиниця роботи

$$[A] = [P] \cdot [S] = \text{ньютон} \times \text{метр} = \text{джоуль}\ (\text{Дж}).$$

Джоуль – це робота сили в один ньютон на шляху в один метр. Є ще одиниці кіло-та мегаджоуль

$$1\text{кДж} = 10^3\,\text{Дж}; \qquad 1\text{мДж} = 10^6\,\text{Дж}.$$

2. Робота змінної сили на криволінійній ділянці шляху.

Сили, що розглядаються в динаміці, не є в загальному випадку сталими.

На нескінченно малій ділянці dS криволінійний шлях можна вважати прямолінійним, а силу – сталою. Тоді можна підрахувати елементарну роботу dA на шляху dS. Вона дорівнюватиме

$$dA = P \cdot dS \cdot \cos\alpha , \tag{3}$$

де α - це кут між векторами сили і швидкості (рис. 5.2).

Робота в кінці переміщення буде дорівнюватиме сумі елементарних робіт, тобто інтегралу

$$A = \int_0^S (P \cdot \cos\alpha) \cdot dS \tag{4}$$

Введемо позначення $P \cdot \cos\alpha = P_\tau$.

Тоді формула (4) набуває вигляд

$$A = \int_0^S P_\tau \cdot dS \qquad (5)$$

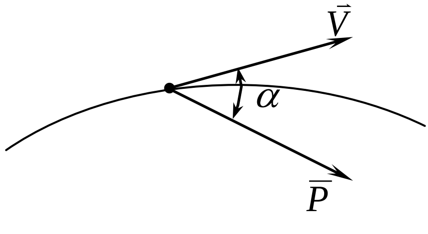


Рис. 5.2

Побудуємо графік залежності P_τ від переміщення S. Площа заштрихованої смуги, яку можна вважати прямокутником, дорівнює елементарній роботі на шляху dS:

$$dA = P \cdot \cos\alpha \cdot dS.$$

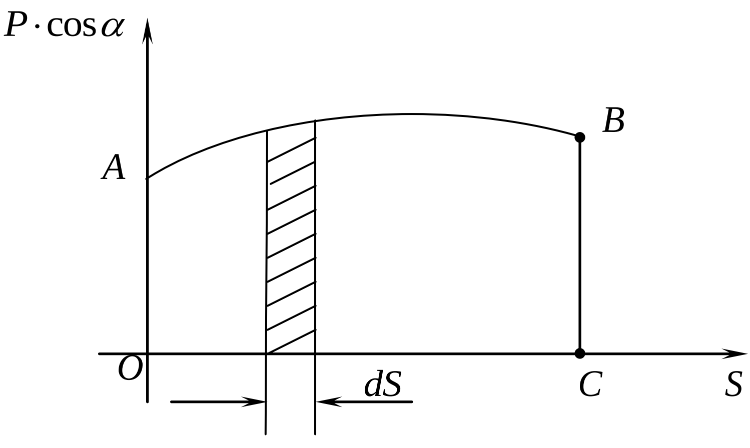


Рис. 5.3

Робота сили $\overline{P}$ в кінці шляху S графічно виражається площею фігури $OABC$, що обмежена віссю абсцис, двома ординатами і кривою AB.

3. Потужність.

Робота будь-якої сили може тривати різні проміжки часу. Щоб визначити швидкість виконання роботи, в механіці введено поняття потужність.

ОЗНАЧЕННЯ. *Потужністю сили називають роботу, яка буде виконана протягом одиниці часу*.

В загальному випадку потужність обчислюється як похідна від роботи сили за часом:

$$W = \frac{dA}{dt}.$$

Якщо робота відбувається рівномірно, то потужність визначається за формулою

$$W = \frac{A}{t}.$$

Коли напрями сили і переміщення збігаються, формулу потужності можна записати

$$W = P \cdot V.$$

Тобто, потужність сили дорівнює добутку сили на швидкість точки її прикладення.

Одиниця потужності:

$$[W] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{\text{робота}}{\text{час}} = \frac{\text{джоуль}}{\text{с}} = \text{Ват}\left(\text{Вт}\right).$$

Якщо роботу виконує сила, що прикладена до обертового тіла, то потужність обчислюють за формулою

$$W = \frac{dA}{dt} = M\frac{d\varphi}{dt} = M \cdot \omega.$$

Тобто, потужність сили, що прикладена до обертального тіла, дорівнює добутку обертального моменту на кутову швидкість тіла.

4. Поняття про потенційну енергію.

Енергію взаємодії тіл називають потенціальною. Потенціальну енергію мають, наприклад, стиснута пружина або натягнутий лук із стрілою. Будь-яка матеріальна точка, що піднята на якусь висоту h, також має певну енергію, яку називають енергією положення; це теж потенціальна енергія. В цьому випадку мірою потенціальної енергії є робота, яку виконує точка під час вільного падіння. Приймаючи висоту h малою порівняно з радіусом Землі, будемо вважати силу тяжіння G сталою.

Тоді потенціальну енергію Π можна записати:

$$\Pi = G \cdot h$$

Потенціальна енергія тіла піднятого на певну висоту, - величина відносна. Вона залежить від системи відліку, відносно якої обчислюють цю енергію. Нехай матеріальна точка масою m, що падає під дією лише однієї сили тяжіння G, в положенні M_1 була на висоті h_1, мала швидкість V_1 і потенціальну енергію Π_1 (рис. 5.4). У положенні M_2 точка була на висоті h_2, мала швидкість V_2 і потенціальну енергію Π_2. Під час падіння точки виконувалась робота

$$A = G(h_1 - h_2) = G \cdot h_1 - G \cdot h_2 = \Pi_1 - \Pi_2 .$$

Тобто, робота сили тяжіння дорівнює різності значень потенціальної енергії точки, що рухається, в початковому та кінцевому положеннях.

Запитання до лекції.

1. Як визначається робота сталої сили на прямолінійній ділянці шляху?
2. Як визначається робота змінної сили на криволінійній ділянці шляху?
3. Що називається потужністю?
4. Як називається одиниця роботи?
5. Як називається одиниця потужності?
6. Як визначається потужність в загальному випадку?
7. Як визначається потенційна енергія точки, що рухається?

ЛЕКЦІЯ 6

КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ ТОЧКИ ТА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ ТОЧКИ ТА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Вступ. Для розв'язання багатьох задач динаміки, особливо для динаміки системи, зручно використовувати так звані теореми динаміки. Ці теореми є слідствами основного закону динаміки. За допомогою цих теорем можна вивчати окремі, практично важливі сторони того чи іншого явища, не вивчая їх в цілому. Вони також дозволяють уникнути інтегрування диференціальних рівнянь і значно спрощують процес розв'язання задач. Зараз розглянемо поняття кінетичної енергії та теореми про зміну кінетичної енергії точки та системи.

1. Кінетична енергія точки та механічної системи

Кінетичною енергією, або енергію руху, називають енергію, яку має будь-яка матеріальна точка під час руху.

Кінетична енергія – це динамічна міра руху матеріальної точки.

Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості, тобто

$$T = \frac{1}{2} m V^2 \tag{6.1}$$

Кінетична енергія - величина скалярна і завжди додатна. Одиниця вимірювання кінетичної енергії є джоуль.

$$1 Дж = 1 н \cdot м = 1 \frac{кг \cdot м^2}{с^2}$$

Тобто кінетична енергія має розмірність роботи.

Кінетичною енергією системи називається скалярна величина, що дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій усіх точок системи

$$T = \sum \frac{m_k V_k{}^2}{2} \tag{6.2}$$

Кінетична енергія системи є характеристикою як поступального, так і обертального руху системи. Кінетична енергія системи є величиною скалярною і завжди додатна.

Кінетична енергія системи не залежить від напрямів рухів частин системи і не характеризує зміну цих напрямів.

На зміну кінетичної енергії системи впливає дія як зовнішніх, так і внутрішніх сил. Сили взаємодії точок даної системи називають *внутрішніми*, а сили з якою діють на дану систему інші точки, що не належать до цієї системи – *зовнішніми.* Якщо система складається з кількох тіл, то її кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що складають цю систему

$$T = \sum_{k=1}^{u} T_k \tag{6.3}$$

Будь – яке тверде тіло можна вважати незмінною механічною системою матеріальних точок. Формули для обчислення кінетичної енергії будь-якого тіла залежать від виду руху, що здійснює це тіло.

Розглянемо обчислення кінетичної енергії тіла для основних видів рухів:

А) Поступальний рух

В цьому випадку усі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями, що дорівнюють швидкості руху центра мас, тобто, для будь-якої точки

$$V_k = V_e$$

Тоді маємо

$$T_{пост} = \sum \frac{m_к V_e^2}{2} = \frac{1}{2} V_e^2 \cdot \sum m_к$$

або

$$T_{пост} = \frac{1}{2} M V_e^2 \tag{6.4}$$

Б) Обертальний рух

Якщо тіло обертається навколо будь-якої осі Oz, то швидкість будь-якої точки тіла

$$V_k = \omega h_k,$$

де: $h_к$ - відстань точки від осі обертання; ω- кутова швидкість тіла.

Тоді можна записати:

$$T_{об} = \sum \frac{m_k \omega^2 hk}{2} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_k h_k{}^2$$

Вираз $\sum m_k h_k^2$ називають <u>моментом інерції тіла відносно осі</u> і називають I :

$$I_z = \sum m_k h_k^2$$

Остаточно маємо:

$$T_{об} = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2 \tag{6.5}$$

Момент інерції для обертального руху має таке саме значення, як маса для поступального.

$$I = \frac{2}{3} mR^2$$

Іноді момент інерції визначають за формулою

$$I = m\rho_i^2 ,$$

де ρ_i - радіус інерції тіла:

$$\rho_i = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

В) <u>Тіло рухається плоско паралельно</u>

Кінетична енергія твердого тіла, яке рухається плоско паралельно, дорівнює сумі кінетичних енергій поступального і обертального рухів, тобто

$$T_{пл} = \frac{1}{2} m V_c{}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 , \tag{6.6}$$

де V_c- швидкість центра мас; I_c - момент інерції відносно центра мас.

Приклад. Обчислити кінетичну енергію колеса радіусом R, масою m, яке котиться без ковзання, коли швидкість центра мас C колеса дорівнює V_e. Колесо вважаємо суцільним однорідним циліндром (рис 6.1).

Розв'язання

У цьому випадку кінетична енергія колеса дорівнюватиме сумі кінетичних енергій поступального і обертального рухів

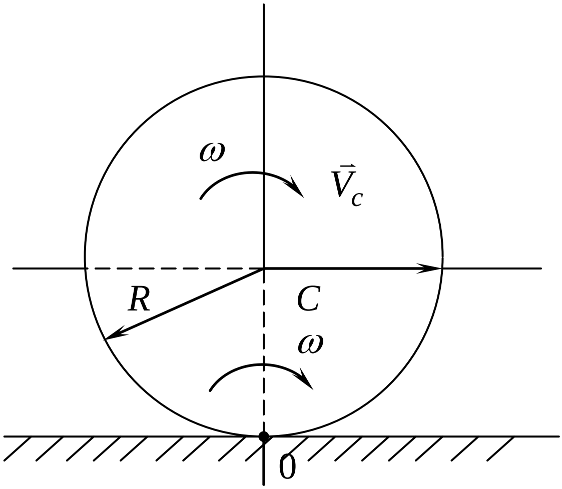


Рис. 6.1

$$T_{пл} = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \cdot \left(\frac{V_C}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{4} m V_C^2 = \frac{3}{4} m V_C^2$$

2. Теорема про зміну кінетичної енергії точки та механічної системи.

Розглянемо точку масою m, що рухається під дією прикладених до неї сил з положенням M_0, де вона має швидкість V_0 у положення M_1, де її швидкість дорівнює V_1. Застосовуємо основний закон динаміки

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$$

Якщо спроектувати це рівняння на дотичну до траєкторії точки (рис. 6.2)

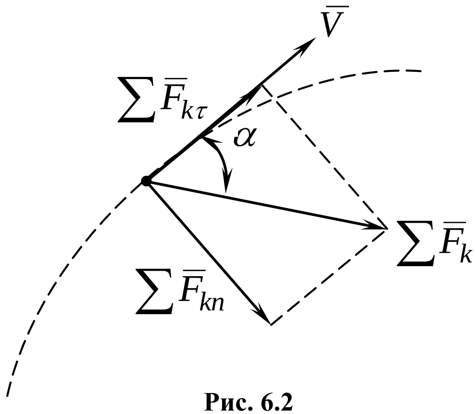


Рис. 6.2

Тоді отримаємо

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}$$

Дотичне прискорення можна надати у такому вигляді:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dS} \cdot \frac{dV}{dS} V.$$

Помноживши обидві частини рівності на нескінченно мале переміщення dS, дістанемо

$$mVdV = \sum F_{ki} dS$$

Враховуючи, що $F_{\kappa i} \cdot dS = dA_{\text{K}}$, де dA_{K} - елементарна робота сили $\vec{F}_k$, отримаємо вираз теореми про зміну кінетичної енергії точки в диференціальній формі:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \sum dA_k$$

Якщо про інтегрувати обидві частини цієї рівності в границях від точки M_0 до точки M_1, знаходимо остаточно

$$\frac{mV_1^{\ 2}}{2} - \frac{mV_0^{\ 2}}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)}$$

Це рівняння виражає теорему про зміну кінетичної енергії точки в інтегральному виді.

Теорема 1. Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на якомусь відрізку шляху дорівнює сумі робот усіх сил, що прикладені до точки на тому самому відрізку шляху.

За допомогою теореми про зміну кінетичної енергії точки доцільно розв'язувати задачі, які відповідають таким вимогам:

а) діючі сили сталі або залежать тільки від відстані

б) до вихідних даних або шуканих величин входять: діючи сили, переміщення точки, швидкості у початку і кінці переміщення.

Треба зазначити, якщо серед діючих сил є сила, що залежить від швидкості, то застосувати теорему про зміну кінетичної енергії точки неможливо, оскільки сформулюємо тепер теорему про зміну кінетичної енергії системи:

Теорема 2. Зміна кінетичної енергії системи при деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, які діяли на систему під час її переміщення.

$$T - T_0 = \sum A_k^{\ e} + \sum A_k^{\ i} \tag{6.7}$$

Кінетична енергія системи тіл дорівнює сумі кінетичних енергій кожного тіла. Якщо тіло тверде, то сума робіт його внутрішніх сил дорівнює нулю. Якщо відстані між тілами під час руху системи не змінюються, то сума робіт усіх внутрішніх сил також дорівнює нулю. Тобто для системи, що не змінюється, рівняння (6.7) набуває вид

$$T - T_0 = \sum A_k^{\ e} \tag{6.8}$$

Треба також зазначити, якщо зв'язки вважати ідеально гладкими, то сума робіт реакцій цих зв'язків також дорівнюватиме нулю.

Запитання до лекції.

1. Як визначається кінетична енергія точки?
2. Як визначається кінетична енергія системи?
3. В яких одиницях вимірюється кінетична енергія?

4. Як визначається кінетична енергія твердого тіла при поступальному русі?

5. Як визначається кінетична енергія твердого тіла при обертальному русі?

6. Як визначається кінетична енергія при площинно-паралельному русі?

7. Які задачі доцільно розв’язувати за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії?

ЛЕКЦІЯ 7

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ТОЧКИ ТА СИСТЕМ. МЕТОД КІНЕТОСТАТИКИ.

1. Методи кінетостатики

Нехай матеріальна точка, маса якої m, рухається з прискоренням $\vec{a}$ під дією системи сил, рівнодіюча яких є $\vec{P}$. Скористаємось основним рівнянням динаміки

$$\vec{P} = m\vec{a} \tag{7.1}$$

Перепишемо рівняння (1) у такому вигляді:

$$\vec{P} + \left(-m\vec{a}\right) = 0 \tag{7.2}$$

Вираз у дужках позначимо $\vec{F}^{ін}$ і назвемо <u>*силою інерції*</u>:

$$\vec{F}^{ін} = -m\vec{a} \tag{7.3}$$

ОЗНАЧЕННЯ. <u>*Сила інерції – це вектор, який дорівнює добутку маси точки на її прискорення і має протилежний до прискорення напрям.*</u>

Тоді

$$\vec{P} + \vec{F}^{ін} = 0 \tag{7.4}$$

Рівність (7.3) можна розглядати як рівняння рівноваги матеріальної точки. Треба зазначити, що добута рівність (7.3), хоч і називається рівнянням рівноваги, насправді є видозміненим рівнянням руху матеріальної точки.

Сила інерції, що прикладена до розглядуваної матеріальної точки, є умовною силою. Але для зв'язку, який спричиняє прискорення, вона реальна.

Рівність (7.4) є математичним виразом принципу, що носить ім'я французького математика і механіка Даламбера.

Принцип Даламбера формулюють так:

<u>Активні і реактивні сили, які діють на матеріальну точку, разом із силами інерції утворюють систему взаємнозрівноважених сил.</u>

Приклад. У кабіні ліфта, який піднімається, зважують на пружинних терезах тіло. Вага тіла G дорівнює 50 н; натяг T пружини терезів – 51 н. Знайти прискорення кабіни.

Розв'язання. Застосуємо до тіла принцип звільнюваності, відкинемо пружинні терези і замінимо їх реакцією $\overline{T}$, яка дорівнює натягу пружини. Щоб розв'язати задачу, застосуємо метод кінетостатики, тобто прикладемо до тіла силу інерції $\vec{F}^{ін}$. Складемо рівняння рівноваги зважуваного тіла і спроектуємо всі сили на вертикальну вісь y, припускаємо, що прискорення $\vec{a}$ кабіни вгору, і тому сила інерції спрямовано вниз (рис. 7.1)

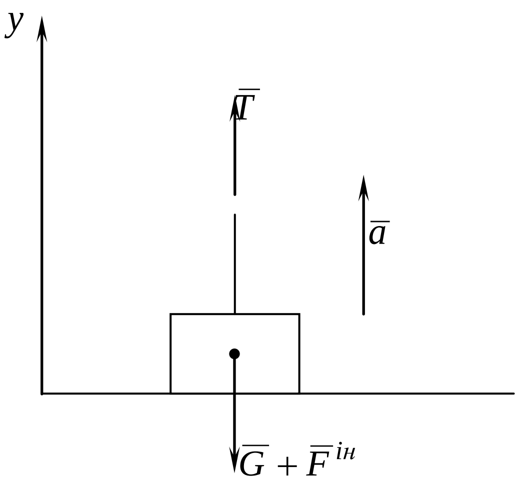


Рис. 7.1

$$\sum y = 0; \qquad T - G - F^{ін} = 0.$$

Модуль сили інерції визначається за формулою

$$F^{ін} = ma = \frac{G}{g} \cdot a.$$

Підставимо цей вираз у рівняння і знайдемо прискорення:

$$a = \frac{T - G}{G} \cdot g = \frac{51 - 50}{50} \cdot g = 0{,}196 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення додатне, це означає, що воно спрямоване вгору.

2. Сили інерції у криволінійному русі.

У криволінійному русі точки повне прискорення дорівнює векторній сумі дотичного і нормального прискорень (рис. 7.2).

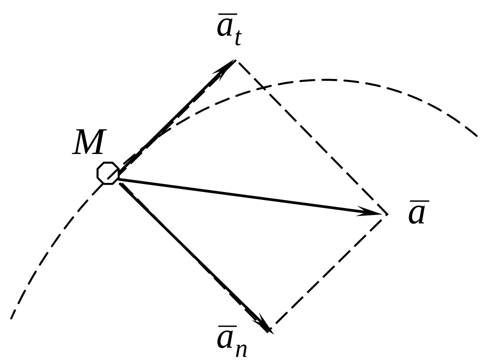


Рис. 7.2

Дотичне прискорення $a_t = \frac{dV}{dt}$, нормальне прискорення $a_n = \frac{V^2}{\rho}$, повне прискорення $a = \sqrt{a_t^{\ 2} + a_n^{\ 2}}$.

Кожному прискоренню відповідає своя сила інерції:

$$F_t^{ін} = m\frac{dV}{dt}$$ - дотична, або тангенціальна, сила інерції;

$$F_n^{ін} = m\frac{V^2}{\rho}$$ - нормальна, або відцентрована, сила інерції;

$$F^{ін} = ma$$ - повна сила інерції.

Як приклад розглянемо рівномірний рух каменя по колу, яке лежить у вертикальній площині (рис. 7.3). Швидкість каменя позначимо V. Щоб знайти натяг T нитки, застосуємо принцип Даламбера, тобто прикладемо до каменя нормальну силу інерції $\overline{F}_n^{ін}$ і дотичну силу інерції $\overline{F}_t^{ін}$.

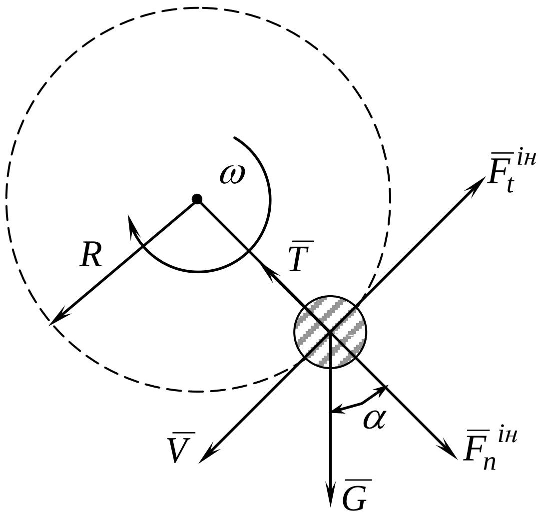


Рис. 7.3

Спроектуємо всі сили на напрям нитки, тоді

$$T - G \cdot \cos\alpha - F_n^{ін} = 0,$$

звідки

$$T = F_n^{ін} + G \cdot \cos\alpha = \frac{mv^2}{R} + G \cdot \cos\alpha .$$

Натяг нитки буде максимальним, коли $\alpha = 0$, тобто коли буде в нижньому положенні:

$$T_{\max} = \frac{mV^2}{R} + G .$$

Натяг нитки буде мінімальним, коли $\alpha = \pi$ рад, тобто коли камінь буде у верхньому положенні:

$$T_{\min} = \frac{mV^2}{R} - G .$$

Якщо лінійну швидкість каменя виразити через кутову швидкість нитки

$$V = \omega \cdot R ,$$

то формулу відцентрованої сили інерції можна записати

$$F_n^{ін} = m\omega^2 R .$$

3. Принцип Даламбера для системи.

Для системи матеріальних точок принцип Даламбера формулюють так:

Якщо в будь-який момент часу до кожної з точок системи, крім фактично діючих на неї зовнішніх і внутрішніх сил, додати відповідні сили інерції, то утворена система буде знаходитись у рівновазі і до неї можна буде застосувати усі рівняння статики.

З математичної точки зору принцип Даламбера можна виразити системою n-векторних рівнянь, що будуть еквівалентні диференціальним рівнянням руху системи вида (7.5):

$$\overline{F}_k^{\,e} + \overline{F}_k^{\,i} + \overline{F}_k^{\,ін} = 0 . \tag{7.5}$$

Введення сил це лише засіб, що дозволяє складати рівняння динаміки за допомогою більш простих методів статики.

Із статики відомо, що геометрична сума сил, яка знаходиться у рівновазі, і сума моментів цих сил відносно будь-якого центра O дорівнює нулю. Тоді на підставі принципу Даламбера можна записати:

$$\begin{cases} \sum\left(\overline{F}_k{}^e + \overline{F}_k{}^i + \overline{F}_k{}^u\right) = 0 \\ \sum\left[\overline{m}_0\left(\overline{F}_k{}^e\right) + \overline{m}_0\left(\overline{F}_k{}^i\right) + \overline{m}_0\left(\overline{F}_k{}^u\right)\right] = 0 \end{cases}. \qquad (7.6)$$

Застосуємо такі позначення

$$\overline{R}^u = \sum \overline{F}_k{}^u, \ \overline{M}_0{}^u = \sum \overline{m}_0\left(\overline{F}_k{}^u\right). \qquad (7.7)$$

Величини $\overline{R}^u$, $\overline{M}_0{}^u$ уявляють собою головний вектор і головний момент відносно центра O системи сил інерції. Тоді, враховуючи, що геометрична сума внутрішніх сил і сума їх моментів дорівнюють нулю, отримаємо

$$\sum \overline{F}_k{}^e + \overline{R}^u = 0, \qquad \sum \overline{m}_0\left(\overline{F}_k{}^e\right) + \overline{M}_0{}^u = 0. \qquad (7.8)$$

Рівняння (7.8) дуже зручно використовувати при дослідженні руху твердого тіла або системи твердих тіл. Для використання рівнянь (7.8) при розв'язанні задач, треба знати вирази головного вектора і головного моменту сил інерції.

Систему сил інерції заміни твердого тіла можна замінити однією силою, що дорівнює $\overline{R}^u$ і прикладеної в центрі O, і парою з моментом $\overline{M}_0{}^u$. Головний вектор системи сил, як відомо, не залежить від центру приведення і може бути обчислений заздалегідь. Оскільки $\overline{F}_k{}^u = -m_k \overline{a}_k$, то можна записати:

$$\overline{R}^u = -\sum m_k \overline{a}_k = -M\overline{a}_c, \qquad (7.9)$$

де M - маса твердого тіла (системи), $\overline{a}_c$ - прискорення центра мас.

Якщо прискорення $\overline{a}_c$ розкласти на нормальне і дотичне, то вектор $\overline{R}^u$ розкладається на складові

$$\overline{R}_\tau{}^u = -M \cdot \overline{a}_c{}^\tau, \qquad \overline{R}_n{}^u = -M \cdot \overline{a}_c{}^n. \qquad (7.10)$$

Розглянемо, який вигляд буде мати головний момент сил інерції для деяких часткових випадків.

1) Поступальний рух. В цьому випадку немає ніякого обертання навколо центра мас c. Тобто $\sum \overline{m}_c\left(\overline{F}_k{}^e\right)=0$ і згідно з формулою (7.8) $\overline{M}_c{}^u=0$.

Тобто при поступальному русі сили інерції твердого тіла приводять до однієї рівнодіючої $\overline{R}^u$, лінія дії якої проходе скрізь центр мас тіла.

2) Обертальний рух. Розглянемо випадок, коли тіло має площину симетрії, а вісь обертання Cz буде перпендикулярна до цієї площини і проходитиме скрізь центр мас тіла. Тоді маємо $\overline{a}_c=0$ і відповідно $\overline{R}^u=0$.

<u>Отже в даному випадку система сил інерції приводить до однієї пари, що розташована в площині, яка перпендикулярна до вісі обертання і має момент, що визначається за формулою</u>:

$$M_z{}^u=-I_z\cdot\varepsilon\,, \tag{7.11}$$

де I_z - момент інерції твердого тіла відносно вісі z,

ε - кутове прискорення.

3) Площина – паралельний рух. Розглянемо випадок, коли тіло має площину симетрії і рухається паралельно їй. Центр мас тіла, а також головний вектор і результуюча пара сил інерції розташовані в площині симетрії. Тоді, якщо розмістити центр приведення у точці C (рис. 7.1) отримаємо, що

$$M_c{}^u=-I_c\cdot\varepsilon\,. \tag{7.12}$$

Таким чином, у даному випадку руху <u>система сил інерції приводить до однієї сили, що дорівнює</u> $\overline{R}^u$ <u>і прикладена у центрі мас</u> C <u>тіла, і однієї пари, що розташована в площині симетрії</u>, момент пари визначається за формулою (7.12).

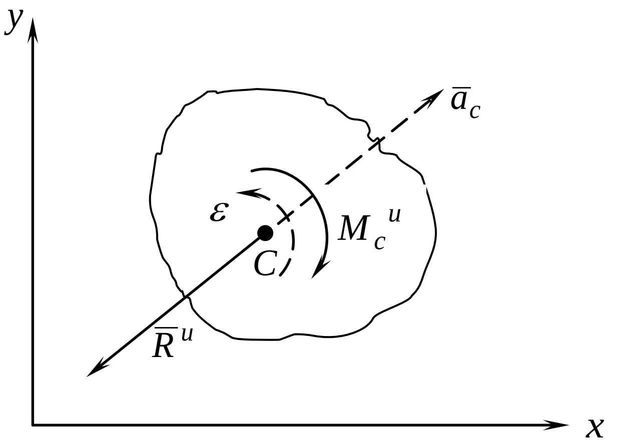


Рис. 7.1

Запитання до лекції.

1. Як визначається сила інерції матеріальної точки?
2. Як визначаються сили інерції у криволінійному русі?
3. Як визначається головний вектор сил інерції?
4. Як визначається головний момент сил інерції?
5. До чого приводить система сил інерції при обертальному русі?
6. До чого приводить система сил інерції при площинно-паралельному русі?

ЛЕКЦІЯ 8

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

1. Можливі переміщення системи.

Розглянемо ще дуже важливий принцип механіки – принцип можливих переміщень. За допомогою цього принципу можна встановити умови рівноваги будь-якої механічної системи в найбільш загальному вигляді.

При вивченні рівноваги будь-якої системи тіл треба розглядати рівновагу кожного із тіл окремо. Якщо кількість тіл велика, то потрібно розв’язувати систему багатьох рівнянь, а це не дуже зручно.

При застосуванні принципу можливих переміщень дрібнити систему не потрібно. Треба тільки розглянути переміщення, які треба надати точками системи, і таким чином вивести систему із даного положення.

Ці переміщення називаються в механіці можливими або віртуальними переміщеннями.

Можливі переміщення точок системи повинні задовольняти двом умовам:

1) вони повинні бути нескінченно малі;
2) вони повинні бути такими, щоб усі накладені на систему зв’язки зберігалися.

У якості прикладу розглянемо кривошипно-шатунний механізм (рис.8.1)

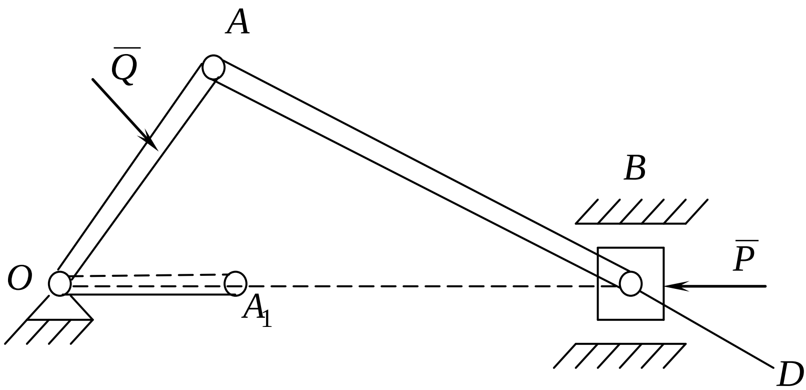


Рис. 8.1

Переміщення кривошипа OA в положення OA, не є можливим, оскільки рівновага механізму під дією сил $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ буде іншим. Також не є можливим нескінченно мале переміщення точки B шатуна уздовж лінії BD, оскільки в цьому випадку замість повзуна у точці B повинна бути муфта, тобто механізм повинен бути іншим.

ОЗНАЧЕННЯ. Можливим переміщенням системи називається будь-яка сукупність нескінченно малих переміщень точок системи, що є допустимих у даний момент часу всіма накладеними на систему зв'язками.

Можливе переміщення будь-якої точки системи будемо зображати елементарним вектором $\delta\vec{S}$, який спрямований у бік переміщення.

В загальному випадку для точок та тіл системи може існувати множина всіляких можливих переміщень.

Однак для кожної системи можна вказати певну кількість незалежних між собою переміщень.

ОЗНАЧЕННЯ. Кількість незалежних між собою можливих переміщень системи називається ступенем вільності цієї системи.

У вільній матеріальній точці, наприклад, три ступеня вільності. У кривошипно-шатунного механізму – одна. Вільне тверде тіло має шість ступенів вільності.

2. Принцип можливих переміщень

ОЗНАЧЕННЯ. Для рівноваги механічної системи з ідеальними зв'язками необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх діючих на систему активних сил при будь-якому можливому переміщенні системи дорівнювала нулю, тобто

$$\sum \delta A_a{}^k = 0 \tag{8.1}$$

або $$\sum \left(F_k{}^a \delta S_k' \cdot \cos\alpha_k \right) = 0 \tag{8.2}$$

Можна показати цю умову в аналітичній формі

$$\sum \left(F_{kx}{}^a \delta x_k + F_{ky}{}^a \delta y_k + F_{kz}{}^a \delta z_k \right) = 0, \tag{8.3}$$

де δx_k, δy_k, δz_k - проекції можливого переміщення δS_k на координатні вісі.

Принцип можливих переміщень надає в загальній формі умови рівноваги для будь-якої механічної системи. При цьому треба враховувати тільки активні сили і виключити із розглядання усі невідомі реакції зв'язків.

При розв’язанні задач необхідно виконати:

1) показати усі діючи на систему активні сили;

2) надати системі можливе переміщення і показати на малюнку вектори δS_k елементарних переміщень точок прикладення сил або кути $\delta\varphi_k$ елементарних поворотів тіл, на які діють сили;

3) підрахувати елементарні роботи усіх активних сил на даному переміщенні

$$\delta A_k{}^a = F_k{}^a \delta S_k' \text{ або } \delta A_k{}^a = m_0\left(\overline{F}_k{}^a\right)\delta\varphi_k \qquad (8.4)$$

4) встановити залежність між величинами δS_k і $\delta\varphi_k$ і виразити усі ці величини через одну.

Остаточно ми отримаємо рівняння, з якого можна знайти шукану величину або залежність.

Залежність між величинами δS_k і $\delta\varphi_k$ можна знайти двома способами:

а) із геометричних міркувань;

б) кінематичним методом.

Приклад. Знайти залежність між силами P і Q в підйомному механізмі, якщо відомо, що при кожному оберті рукоятки $AB(AB = l)$ гвинт D посувається на величину h.

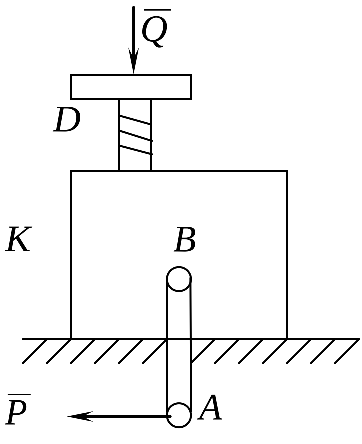


Рис. 8.2

Розв’язання. Складаємо умови рівноваги

$$Pl \cdot \delta\varphi_{AB} - Q\delta S_D = 0.$$

Знаходимо залежність між $\delta\varphi_{AB}$ і δS_D

$$\frac{\delta\varphi_{AB}}{2\pi} = \frac{\delta S_D}{h} \text{ звідки } \delta\varphi_{AB}\frac{2\pi}{h}\delta S_D.$$

Підставивши значення $\delta\varphi_{AB}$ у перше рівняння, знаходимо

$$Q = \frac{2\pi l}{h} \cdot h.$$

3. Загальне рівняння динаміки.

Якщо об’єднати принцип можливих і принцип Д’Аламбера можна отримати загальний метод розв’язання задач динаміки.

Загальне рівняння динаміки має вигляд

$$\sum \delta A_k{}^a + \sum \delta A_k{}^u = 0 \tag{8.5}$$

Це рівняння відповідає принципу Д’Аламбера-Лагранжа: *при русі системи з ідеальними зв’язками в кожний даний момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил і усіх сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи буде дорівнювати нулю*.

В аналітичній формі рівняння (8.5) буде мати вигляд:

$$\sum \left[\left(F_{kx}{}^a + F_{kx}{}^i\right)\delta x_k + \left(F_{ky}{}^a + F_{ky}{}^i\right)\delta y_k + \left(F_{kz}{}^a + F_{kz}{}^i\right)\delta z_k \right] = 0 \tag{8.6}$$

Рівняння (8.5) або (8.6) дозволяють скласти диференціальні рівняння руху будь-якої механічної системи.

Приклад. У підйомнику, що зображений на рис. 8.3, до шестерні 2 вагою $\overline{P}_3$, радіус інерції ρ_3 прикладений обертальний момент M. Визначити прискорення вантажу A вагою Q, нехтуючи при цьому вагою мотузки і тертям в підшипниках. Барабан, на який намотується мотузка, та жорстко поєднана з ним шестерня 1 мають загальну вагу P_1 і радіус інерції ρ_1. Радіуси шестерень дорівнюють r_1 і r_2, радіус барабана r.

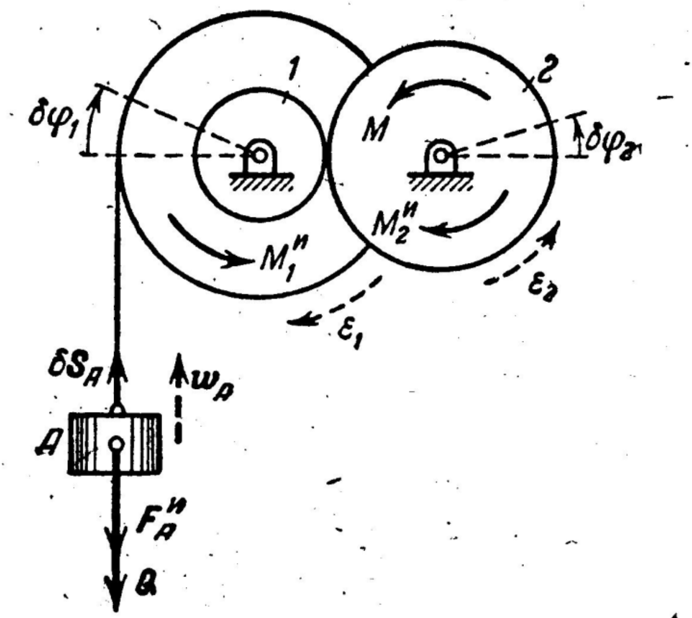


Рис. 8.3

Розв'язання. Показуємо діючу на систему активну силу $\overline{Q}$ і обертальний момент M. Далі приєднуємо к цим силам силу інерції вантажу $\overline{F}_A^{\,u}$ і пари з моментом $M_1^{\,u}$ і $M_2^{\,u}$, до яких приводяться сили інерції тіл, що обертаються.

Визначаємо ці величини за модулем:

$$F_A^{\,u} = \frac{Q}{g} \cdot a_A; \; \left| M_1^{\,u} \right| = \frac{P_1}{g} \rho_1^{\,2} \cdot \varepsilon_1; \; \left| M_2^{\,u} \right| = \frac{P_2}{g} \rho_2^{\,2} \cdot \varepsilon_2.$$

Напрями цих величин показуємо на кресленні. Надамо системі можливе переміщення і складаємо рівняння (8.5):

$$-\left(Q + F_A^{\,u}\right)\delta S'_A - M_1^{\,u}\delta\varphi_1 + \left(M - M_2^{\,u}\right)\delta\varphi_2 = 0.$$

Виражаємо всі переміщення через $\delta\varphi_1$ і отримаємо:

$$\delta S'_A = r \cdot \delta\varphi_1 \qquad \delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \delta\varphi_1 .$$

Остаточно рівняння руху набуває вигляд:

$$Q\left(1 + \frac{Q_A}{g}\right) r + \frac{P_1}{g} \rho_1{}^2 \cdot \varepsilon_1 + \frac{P_2}{g} \rho_2{}^2 \cdot \varepsilon_2 \frac{r_1}{r_2} - M\frac{r_1}{r_2} = 0 .$$

Кутові прискорення ε_1 і ε_2 виражаємо через шукане прискорення $\bar{a}_A$. Враховуючи, що ε_1 і ε_2 пов'язані між собою також, як і ω_1 та ω_2, отримаємо:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{r_1}{r_2} \varepsilon_1 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{a_A}{r} .$$

Остаточно знаходимо:

$$a_A = \frac{\frac{r_1}{r_2} \cdot M - r \cdot Q}{rQ + \frac{\rho_1{}^2}{r} P_1 + \frac{\rho_2{}^2}{r} \cdot \frac{r_1{}^2}{r_2{}^2} P_2} g .$$

Запитання до лекції

1. Яким умовам повинні задовольняти можливі переміщення?
2. Як визначається ступінь вільності системи?
3. Який вигляд має загальне рівняння динаміки?
4. Як формулюється принцип можливих переміщень?

ЛЕКЦІЯ 9

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА 2 РОДУ

Вступ. Один з найбільш загальних методів дослідження механічних систем є застосування так званих рівнянь Лагранжа 2-го роду.

Ці рівняння не потребують геометричних побудов і механічних міркувань, а потребують тільки виконання повних геометричних операцій. Для того, щоб отримати рівняння Лагранжа, необхідно вміти правильно підрахувати кінетичну енергію системи та роботу сил, що діють на систему.

1 Узагальнені координати механічної системи.

Для визначення руху вільної матеріальної точки необхідно скласти систему трьох диференційних рівнянь такого виду:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx} \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky} \\ m\ddot{z} = \sum F_{ky} \end{cases}, \qquad (9.1)$$

де m - маса точки; x, y, z - декартові координати точки; F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} - проекції сили на координатні вісі.

Якщо про інтегрувати рівняння (1) з урахуванням початкових умов, то отримаємо

$$x = t_1(t),\ y = t_2(t),\ z = t_3(t) \qquad (9.2)$$

Декартові координати (x, y, z) – це не єдині можливі параметри, за допомогою яких можна визначити положення точки. Наприклад, при русі точки у площині, її положення може бути задано полярними координатами r і φ ($0 \le r \le \infty$; $0 \le \varphi \le 2\pi$) (рис. 9.1)

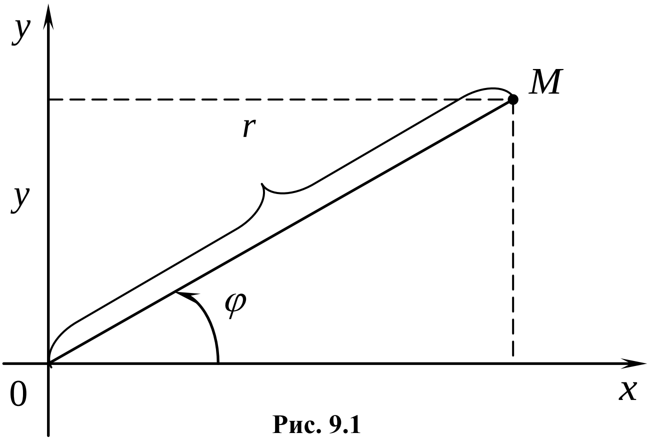


Рис. 9.1

У цьому випадку диференціальні рівняння руху будуть мати вигляд

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}) = F_r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi \end{cases} \tag{9.3}$$

де F_r - проекція сили на напрям радіуса-вектора; F_φ - проекція сили на напрям, що є перпендикулярним до радіуса-вектора.

Механічна система уявляє собою сукупність матеріальних точок або тіл, рух яких є взаємозалежним, тобто рух кожної точки залежить від кінематичних характеристик руху інших точок.

Задача полягає в тому, щоб по заданим силам і початковим умовам визначити рух кожної точки системи. Написати рівняння руху кожної точки системи практично неможливо. Але в цьому немає необхідності.

Для будь-якої механічної системи можна вказати декілька параметрів, які будуть однозначно визначати положення усіх точок системи. Такі параметри називаються **узагальненими координатами.** Наприклад, положення усіх точок кривошипно-шатунного механізму можна визначити одним кутом оберту кривошипу φ_1 (рис. 9.2).

Положення п'ятиланкового важільного механізму повністю визначається завданням двох кутів φ_1 і φ_2 (рис.9.2)

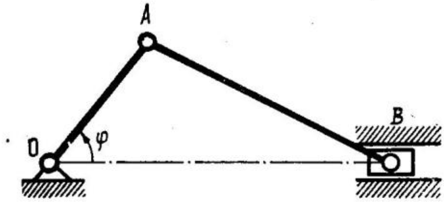


Рис. 9.2

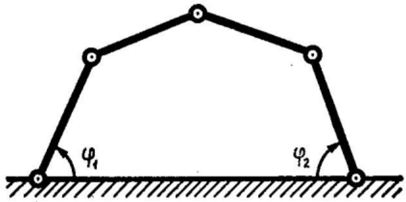


Рис. 9.3

ОЗНАЧЕННЯ. Узагальненими координатами механічної системи називаються незалежні параметри $q_1,\ q_2 \dots q_n$, які одночасно **<u>визначають положення усіх точок системи.</u>**

Кількість незалежних координат, які визначають положення системи з геометричними зв'язками дорівнює кількості степенем вільності цієї системи.

В якості узагальненої координати можна обирати параметри , які мають будь-який вимір й будь-який геометричний або фізичний сенс. Це можуть бути відрізки прямих або дуг, кути, площі і т. п.

Приклад. Маятник має одну ступінь вільності $S = 1$, тобто положення маятника визначається однією узагальненою координатою q (рис. 9.4).

У якості цієї координати може бути або кут φ, або довжина дуги AM, або площа сектора G. Оскільки узагальнені координати між собою є незалежними, то елементарні прирости цих координат $\delta q_1,\ \delta q_2 \dots \delta q_n$ будуть також між собою незалежними.

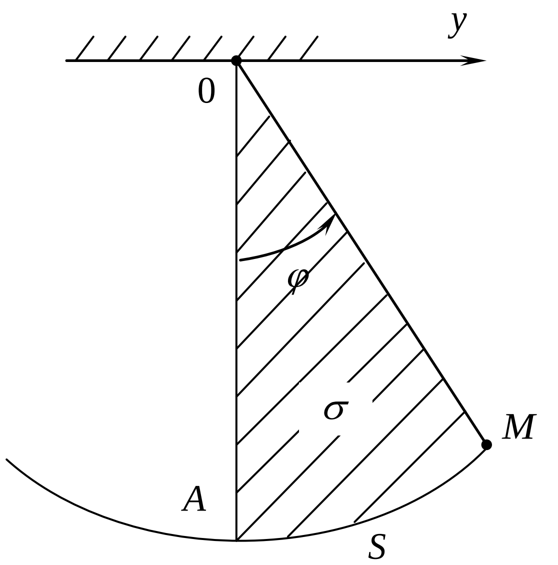


Рис. 9.4

Протягом руху системи узагальнені координати змінюються за часом неперервно, тобто

$$q_1 = t_1(t),\ q_2 = t_2(t),\ \ldots.\ q_n = t_n(t) \qquad (9.4)$$

Рівняння (9.4) уявляють собою **кінетичні рівняння руху системи в узагальнених координатах.**

Похідні від узагальнених координат за часом називаються **узагальненими швидкостями** системи. Їх позначають

$$\dot{q}_1,\ \dot{q}_2\ \ldots\ \dot{q}_n$$

Розмірність узагальненій швидкості залежить від розмірності відповідній узагальненій координати.

Якщо: q_1 - лінійна величина, то $\dot{q}$ - лінійна швидкість;

Якщо: q - кут, то $\dot{q}$ - кутова швидкість;

Якщо: q - площа, то $\dot{q}$ - секторна швидкість і т. д.

2. Узагальнені сили

Розглянемо вільну матеріальну точку, на яку діє сила $\overline{F}$. Надамо цієї точці можливе переміщення

$$\delta\vec{r} = \vec{i}\,\delta x + \vec{j}\,\delta y + \vec{k}\,\delta z$$

Обчислюємо елементарну роботу сили $\overline{F}$ на цьому переміщенні, як скалярний добуток вектора сили та вектора можливого переміщення

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

Коефіцієнти при варіаціях є складові сили по координатним вісям. Нехай дана тепер механічна система з n узагальненими координатами. Надамо цим координатам нескінченно малі прирісти

$$\delta\dot{q}_1,\ \delta\dot{q}_2\ ...\ \delta\dot{q}_n$$

Положення кожної точки системи визначається функцією узагальнених координат

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1,\ q_2\ ...\ q_n\right)$$

Тоді можна записати

$$\delta\vec{r}_i = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\cdot\delta q_1 + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\cdot\delta q_2 + ... + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_n}\cdot\delta q_n \qquad (9.5)$$

Якщо зв'язки ідеальні, то елементарна робота діючих на систему сил на елементарному переміщенні $\delta\vec{r}_i$ обчислюється по формулі

$$\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \qquad (9.6)$$

Підставив формулу (9.5) у рівняння (9.6), отримаємо:

$$\delta A = \sum \vec{F}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\cdot\delta q_1 + \sum \vec{F}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\cdot\delta q_2 + ... + \sum \vec{F}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_n}\cdot\delta q_n$$

або

$$\delta A = \sum \delta A_k = Q_1\cdot\delta q_1 + Q_2\cdot\delta q_2 + ... + Q_n\cdot\delta q_n \qquad (9.7)$$

де

$$Q_k = \sum \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \qquad (9.8)$$

$$\left(k = 1,\ 2,\ ...\ n\right)$$

Коефіцієнти $Q_1, Q_2 ... Q_n$ і називаються **<u>узагальненими силами.</u>** Розмірність узагальненої сили залежить в розмірності відповідної узагальненої координати. Тобто

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}.$$

ОЗНАЧЕННЯ: <u>Узагальненими силами механічної системи з ідеальними зв'язками називаються коефіцієнти при варіаціях узагальнених координат у виразі для елементарної роботи активних сил на переміщення системи, яке відповідає цим варіаціям.</u>

Примітка: Якщо силами тертя неможливо нехтувати, їх слід розглядати як активні сили.

Приклад 1. Груз вагою P піднімається по гладкій похилій площині, що утворює с обрієм кут α, за допомогою мотузки, що перекинута через блок радіуса R і вагою P_1, до якого прикладений обертальний момент M (рис. 9.5). Треба обчислити узагальнену силу системи

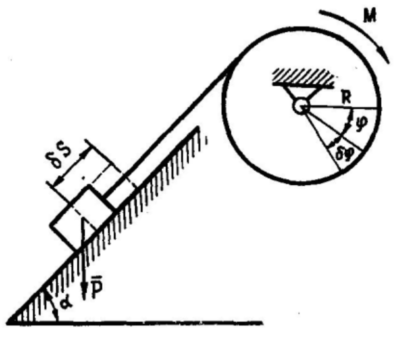


Рис. 9.5

Приймаємо за узагальнену координату кут φ. Надамо куту нескінченно малий приріст $\delta\varphi$. Цьому приросту кута відповідає переміщення грузу на відстань $\delta S = R \cdot \delta\varphi_1$. Активні сили тут - сила тяжіння груза P, сила тяжіння блока P_1 та обертальний момент M. Підрахуємо елементарну роботу цих сил:

$$\delta A = M\delta\varphi - P \cdot \delta S \cdot \cos\left(90^0 - \alpha\right) = M\delta\varphi - PR\delta\varphi \cdot \sin\alpha = \left(M - PR \cdot \sin\alpha\right) \cdot \delta\varphi$$

Тоді узагальнена сила буде мати вигляд

$$Q_\varphi = M - PR \cdot \sin\alpha$$

Якщо урахувати сили тертя, то

$$Q_\varphi = M - \left(P\sin\alpha + fP\cos\alpha\right)R,$$

де f – коефіцієнт тертя

<u>3. Рівняння Лагранжа 2 роду</u>

Рівняння Лагранжа 2 роду це рівняння руху системи в узагальнених координатах.

Рівняння Лагранжа мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad \left(k = 1,\ 2 \ldots n\right)$$

<u>Похідна за часом частинної похідної від кінетичної енергії по узагальненій швидкості мінус частинна похідна від кінетичної енергії по узагальненій координаті дорівнює узагальненій силі.</u>

Приклад 2

Скласти рівняння Лагранжа для системи (приклад 1) та знайти закон руху блока.

Розв'язання

Кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії блока T_1 і кінетичної енергії груза T_2.

$$T_1 = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{P_1}{g} R^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4}\frac{P_1 R^2}{g} \cdot \dot{\varphi}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot V^2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g} R^2 \dot{\varphi}^2; \omega = \dot{\varphi}; V = R \cdot \dot{\varphi}$$

Знаходимо кінетичну енергію системи

$$T = T_1 + T_2 = \frac{(P_1 + 2P)}{4g} R^2 \cdot \dot{\varphi}^2$$

Узагальнена сила вже знайдена (приклад 1)

$$Q_\varphi = M - PR \cdot \sin\alpha$$

Тоді маємо

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{(P_1 + 2P) \cdot R^2 \cdot \dot{\varphi}}{2g}; \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

В цьому випадку рівняння Лагранжа набуває вид:

$$\frac{\left(P_1 + 2P\right) \cdot R^2 \ddot{\varphi}}{2g} M - P \cdot R \sin\alpha$$

Блок буде обертатися рівноприскорено

$$\ddot{\varphi} = E = \frac{2g\left(M - PR \cdot \sin\alpha\right)}{R^2\left(P_1 + 2P\right)}.$$

Інтегруючи $\ddot{\varphi}$ за часом, отримаємо

$$\varphi = \frac{Et^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

де C_1 і C_2 визначаються з початкових умов.

Запитання до лекції.

1. Що називається узагальненими координатами?
2. Що називається узагальненою швидкістю?
3. Що називається узагальненими силами?
4. Що уявляють собою рівняння Лагранжа другого роду?
5. Від чого залежить розмірність узагальненої сили?

ЛЕКЦІЯ 10

ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ УДАРУ

1. Основне рівняння теорії удару

Якщо тіло рухається під дією звичайних сил, то швидкість точок змінюється неперервно. Кожному нескінченно малому проміжку часу відповідає нескінченно малий приріст швидкості. Дійсно, якщо імпульс будь-якої сили F_k за проміжок часу τ_1 надати у вигляді $\overline{F}_k{}^{cp} \cdot \tau$ де $\overline{F}_k{}^{cp}$ - середнє значення цієї сили за час τ, то теорема про зміну кількості руху має вид:

$$m\left(\overline{V}_1 - \overline{V}_0\right) = \sum \overline{F}_k{}^{cp} \cdot \tau .$$

Якщо серед діючих сил є дуже великі сили, то приріст швидкості за час τ буде кінцевим.

ОЗНАЧЕННЯ. Явище, при якому швидкості точок тіла за дуже малий проміжок часу τ змінюється на кінцеву величину називається ударом.

Проміжок часу τ, протягом якого змінюється удар, *називається часом удару*. Діючи при цьому сили називаються ударними силами $F_{уд}$.

Оскільки ударні сили дуже великі, то в теорії удару у якості міри взаємодії тіл розглядають не самі ударні сили, а їх імпульси.

Ударний імпульс:

$$\overline{S}_{уд} = \int \overline{F}_{уд} dt = \overline{F}_{уд}{}^{cp} \cdot \tau$$

є величиною кінцевою.

Позначимо швидкість у початку удару $\overline{V}$,а швидкість в кінці удару $\overline{U}$, тоді теорема про зміну кількості руху точки при ударі приймає вид:

$$m\left(\overline{U} - \overline{V}\right) = \sum \overline{S}_k \tag{10.1}$$

Тобто зміна кількості руху матеріальної точки за час удару дорівнює сумі

діючих на точку ударних імпульсів.

Рівняння (10.1) є основним рівнянням теорії удару.

Треба зазначити:

1) дією не ударних сил можна нехтувати;

2) тіло протягом удару залишається нерухомим;

3) зміна швидкостей точок тіла протягом удару визначається основним рівнянням теорії удару.

2. Загальні теореми теорії удару.

Зазначимо, який вид приймають загальні теореми динаміки для системи:

1) Теорема про зміну кількості руху системи при ударі має вигляд

$$\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_k{}^e \tag{10.2}$$

Тобто, <u>зміна кількості руху системи протягом удару дорівнює сумі усіх зовнішніх ударних імпульсів, що діють на систему</u>.

В проекціях на будь-яку координатну вісь це рівняння набуває вигляд:

$$Q_{1x} - Q_{2x} = \sum S_{kx}^e .$$

2) Теорема про зміну головного моменту кількості руху має вигляд:

$$\overline{K}_1 - K_0 = \sum \overline{m}_0\left(\overline{S}_k{}^e\right) \tag{10.3}$$

<u>Тобто зміна протягом удару головного моменту кількості руху системи відносно будь-якого центра дорівнює сумі моментів відносно того ж центра усіх діючих на систему зовнішніх ударних імпульсів</u>.

В проекціях на будь-яку вісь рівняння (10.3) набуває вигляд:

$$K_{1x} - K_{0x} = \sum m_x\left(\overline{S}_k{}^e\right)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії в теорії удару не застосовується, оскільки усі точки тіла протягом удару враховуються нерухомими. Тому немає можливості підрахувати роботу ударних сил.

3. Коефіцієнт відновлення при ударі.

Величина ударного імпульсу, що з'являється при співударі двох тіл, залежить не тільки від їх мас і швидкостей до удару, а і від других якостей цих тіл.

Величина яка характеризує ці властивості називається <u>коефіцієнтом відновлення.</u>

Розглянемо кулю, яка падає вертикально на нерухому горизонтальну жорстку плиту. Для прямого удару можна розрізняти дві стадії (рис. 10.1).

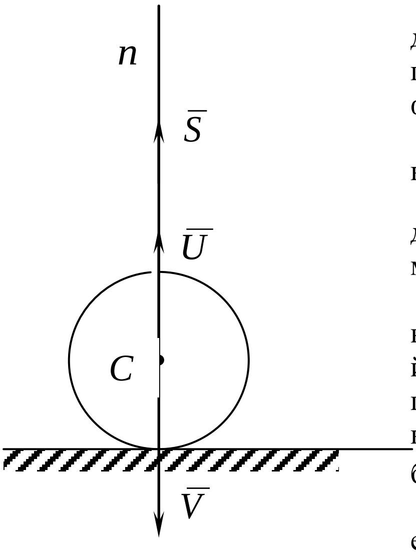


Рис. 10.1

Протягом першої стадії швидкості кулі в момент початку удару падає до нуля. Куля при цьому деформується і уся його початкова кінетична енергія $\frac{1}{2}MV^2$ переходить у потенційну енергію деформації тіла.

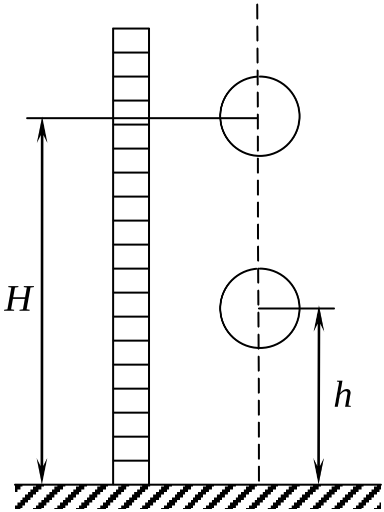
У другій стадії удару куля відновлює свою форму, при цьому його потенційна енергія деформації переходе у кінетичну енергію руху кулі. У кінці удару швидкість кулі буде дорівнювати U, а кінетична енергія кулі $\frac{1}{2}MU^2$.

Але повністю кінетична енергія не відновлюється. Частина її іде на остаточну деформацію та нагрівання. Тому швидкість U буде менше ніж швидкість V .

ОЗНАЧЕННЯ. <u>Величина K , що дорівнює при прямому ударі о нерухому перепону відносно модуля швидкості тіла у кінці удару до модуля швидкості у початку удару, називається коефіцієнтом відновлення при ударі</u>.

$$K = \frac{U}{V} \tag{10.4}$$

Цей коефіцієнт для різних тіл визначається шляхом випробування. В основному величина К залежить від матеріалу тіл, що ударяється. Якщо $K = 1$ - має місце абсолютно пружній удар, при якому механічна енергія повністю відновлюється.



$K = 0$ - це абсолютно не упругий удар, який закінчується на першій стадії і уся механічна енергія іде на деформацію та нагрів. Величину коефіцієнта K можна знайти за допомогою вертикальної рейки (рис. 10.2). Треба знайти висоту, з якої падає куля H, і висоти підйому кулі після удару. Тоді визначаємо по формулі Галілея.

Рис. 10.2

$$V = \sqrt{2gH}\text{, а } U = \sqrt{2gh} \qquad (10.5)$$

4. Удар тіла о нерухому перепону.

Розглянемо тіло маси M, що вдаряється о нерухому плиту. Ударна сила, що діє на тіло буде при цьому реакція плити. Імпульс цієї сили позначимо $\vec{S}$. Якщо нормаль у точці дотику з плитою проходе через центр мас тіла (для кулі це буде завжди), то такий удар тіла називають *центральним*. Якщо швидкість $\vec{V}$ центра мас тіла у початку удару спрямована на нормалі $\vec{U}$ до плити, то удар буде прямим, інакше *косим*.

Випадок прямого удару.

Складаємо рівняння: $\begin{array}{c} \vec{Q}_0 = M\vec{V} \\ \vec{Q} = M\vec{U} \end{array}$ - коефіцієнт руху до і після удару.

Тоді в проекції на нормаль її отримаємо

$$M\left(U_n - V_n\right) = S_n.$$

$$U_n = U,$$

Треба зазначити, що при прямому ударі $V_n = V,$.

$$S_n = S$$

Тоді отримаємо $M(U+V) = S$.

З формули (10.3) отримаємо $U = K \cdot V$.

Тоді, якщо відомі M , V , і K знайдемо невідомі U і S

$$S = M(K+1) \cdot V .$$

Як бачимо, ударний імпульс залежить від коефіцієнта відновлення K .

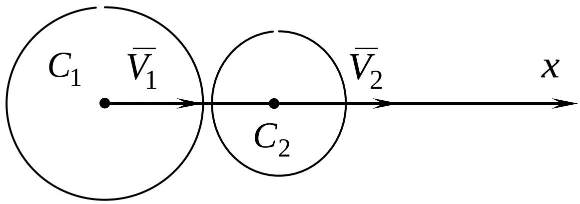
5.Прямий центральний удар двох тіл.

Удар двох тіл називається прямим і центральним, якщо загальна нормаль до поверхонь тіл у точці дотику проходе через їх центри мас і якщо швидкості центрів мас в початку удару спрямовані по цій загальній нормалі.

Нехай маси тіл, що рухаються, дорівнюють M_1 і M_2, швидкості їх центрових мас V_1 і V_2 в початку удару (рис. 10.3-а), а в кінці удару відповідно U_1 і U_2 (рис. 10.3-б).

Проведемо вісь X .

а)



б)

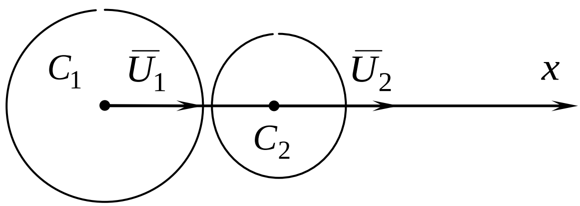


Рис. 10.3

Розглянемо два граничних випадки.

а) Абсолютно непружний удар ($K=0$). В цьому випадку після удару обидва тіла рухаються з однією швидкістю

$$U_{1x}=U_{2x}=U_x=\frac{M_1V_1+M_1V_{2x}}{M_1+M_2}.$$

Ударний імпульс при цьому дорівнює:

$$S_{2x}=S_{1x}=\frac{M_1M_2}{M_{1x}M_2}\left(V_{1x}-V_{2x}\right).$$

б) Абсолютно пружний удар ($K=1$). В цьому випадку швидкості тіл після удару будуть визначатися за формулами

$$\begin{cases} U_{1x}=V_{1x}-\dfrac{2M_2}{M_1+M_2}\left(V_{1x}-V_{2x}\right) \\ U_{2x}=V_{2x}+\dfrac{2M_1}{M_1+M_2}\left(V_{1x}-V_{2x}\right) \end{cases}.$$

Ударний імпульс, що діє на тіло, буде дорівнювати:

$$S_{2x}=-S_{1x}=\frac{2M_1M_2}{M_1+M_2}\left(V_{1x}-V_{2x}\right).$$

Треба зазначити, що при абсолютно пружньому ударі ударний імпульс двічі більше, ніж при абсолютно непружним.

5.Теорема Карно.

При непружньому ударі трапляється зазублення кінетичної енергії ударяємих тіл, ця величина має найбільше значення при абсолютно непружньому ударі. Приймаємо, що тіла рухаються поступально. Підрахуємо величину кінетичної енергії, яка загубилася при абсолютно не пружному ударі двох тіл. Позначимо загальну швидкість після не пружного удару через $\overline{U}$, тоді маємо:

$$T_0 = \frac{1}{2}\left(M_1 V_{1x}^2 + \frac{1}{2} + M_2 V_{2x}^2 \right)$$
$$T_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)U_x^2 \qquad (10.6)$$

Кінетична енергія, що буде загублена при ударі дорівнюватиме $T_0 - T_1$. Цю рівність можна надати у вигляді:

$$T_0 - T_1 = T_0 - 2T_1 + T_2 \qquad (10.7)$$

З формули (10.6) витікає, що

$$\left(M_1 + M_2\right) \cdot U_x = M_1 V_1 + M_2 V_2 .$$

Звідки

$$2T = \left(M_1 + M_2\right) \cdot {U_x}^2 = \left(M_1 V_{1x} + M_2 V_{2x}\right) U_x \qquad (10.8)$$

Підставивши в праву частину рівності (10.5) значення T_0, T_1, $2T$, отримаємо:

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}\left(M_1 {V_{1x}}^2 + M_2 {V_{2x}}^2 - 2M_1 V_{1x} U_x - 2M_2 V_{2x} U_x + M_1 {U_x}^2 + M_2 {U_x}^2 \right)$$

Або

$$T_0 = T_1 = \frac{1}{2} M_1 \left(V_{1x} - U_x\right)^2 + \frac{1}{2} M_2 \left(V_{2x} - U_x\right)^2 \qquad (10.9)$$

Різності $\left(V_{1x} - U_x\right)$ та $\left(V_{2x} - U_x\right)$ показують, на скільки зменшились при ударі швидкість кожного з тіл. їх показують загубленими при ударі швидкостями.

ТЕОРЕМА КАРНО. Кінетична енергія, що загублена системою тіл при абсолютно непружньому ударі, дорівнює той кінетичній енергії, яку мала би система, якщо б її тіла рухались із-за загубленими швидкостями.

Якщо удар не є абсолютно не пружним $\left(K \neq 0\right)$, то кінетична енергія, що загублюється при ударі двох тіл, буде визначатися формулою:

$$T_0 - T_1 = \frac{1-K}{1+K}\left[\frac{1}{2} M_1 \left(V_{1x} - U_{1x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(V_{2x} - U_{2x}\right)^2 \right] \qquad (10.10)$$

Розглянемо частий випадок абсолютно непружнього удару по нерухомому току. В цьому випадку $V_2 = 0$ і маємо відповідно:

$$T_0 = \frac{1}{2} M_1 V_1,\; U = \frac{M_1 V_1}{M_1 + M_2}.$$

Тоді

$$T_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_1^2 V_1^2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M + M_2} \cdot \frac{M_1 V_1^2}{2}$$

$$\text{або } T_1 = \frac{M_1}{M + M_2} \cdot T_0 \tag{10.11}$$

Формула (10.11) показує, яка енергія залишається у системі після удару.

Відмітимо два випадки.

а) Маса тіла M_1, що ударяє, набагато більше маси тіла M_2, тобто $M_1 >> M_2$. В цьому випадку можна прийняти, що $M_1 + M_2 \approx M_1$ і згідно з формулою (10.11) маємо $T_1 \approx T_0$.

б) Маса тіла M_2, яке вдаряють, набагато більше маси тіла M_1, тобто $M_2 >> M_1$. В цьому випадку можна прийняти, що

$$\frac{M_2}{M_1 + M_2} \approx 0.$$

Формула (10.11) дає $T_1 \approx 0$. Таким чином вся енергія витрачається на деформацію тіл, і по закінченні удару тіла залишаються нерухомими.

Запитання до лекції.

9. Що називається ударом?
10. Які теореми застосовують в теорії удару?
11. Як визначається пружний удар?
12. Який удар називається прямим і центральним?
13. Чому дорівнює коефіцієнт відновлення K при абсолютно пружньому ударі?

ЗМІСТ

Підписано до друку 10.10.08. Формат 60х84/16.
Папір 80 г/м^2. Друк ризограф. Ум.друк. арк. 5,1
Тираж прим. Вид. № 54/08. Зам.№

Відділення редакційно-видавничої діяльності
Університету цивільного захисту України
61023, м. Харків, вул. Чернишевська, 94