Кафедра прикладної механіки
факультету техногенно-екологічної безпеки
Національного університету цивільного захисту України

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

РОЗДІЛ
«ДИНАМІКА»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ
КОНТРОЛЬНОЇ (МОДУЛЬНОЇ) РОБОТИ № 4

Харків 2015

Друкується за рішенням кафедри
прикладної механіки НУЦЗУ
Протокол від 16.03.2015 р. № 28

Укладачі: С.О.Вамболь, І.В. Міщенко, Н.В. Хохлова

Рецензенти: В.Л.Хавін – завідувач кафедри опору матеріалів Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», кандидат технічних наук, професор;

В.К. Мунтян - завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін Національного університету цивільного захисту України, кандидат технічних наук, доцент.

Теоретична механіка. Розділ «Динаміка». Методичні вказівки до виконання контрольної (модульної) роботи №4 / Уклад. С.О.Вамболь, І.В. Міщенко, Н.В. Хохлова.- Х.: НУЦЗУ, 2015.- 44 с.

Відповідальний за випуск Н.В. Хохлова

ВСТУП

Основною метою модульної роботи є досягнення слухачами вміння самостійної роботи, практичного використання теоретичних знань з дисципліни технічна механіка.

Методичні вказівки до виконання модульної роботи підготовлений згідно з навчальною програмою розділів курсу технічної механіки, модуль «Динаміка системи».

Методичний посібник має структуру, котра дозволяє слухачам самостійно, без зайвих пояснень викладача виконувати модульну роботу.

Опис кожної задачі містить в собі теоретичну та практичну частини, а також порядок проведення розрахунків.

1. ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ МОДУЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання №1. Пропонується визначення діючих сил за заданим законом руху матеріальної точки.

Завдання №2. Пропонується визначення закону руху матеріальної точки з урахуванням діючих сил.

Завдання № 3-5. Завдання полягає у визначенні закону руху тіла 1 заданої схеми. Розрахунки необхідно виконати трьома засобами використовуючи:

- закон зміни кінетичної енергії матеріальної системи (завдання №3);
- рівняння Лагранжу 2-го роду (завдання №4);
- загальне рівняння динаміки (завдання №5).

Основні поняття та визначення, загальні формули та основи теорії динаміки системи наведені у Розділі 2. Варіанти завдань, а саме схеми та данні для розрахунку, наведені у Розділі 3.

Для одного з варіантів модульної роботи розглянуто приклад розв'язання задач за всіма розділами.

2. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ЗАКОНИ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

2.1 Основні поняття та визначення динаміки системи

2.1.1 Основні закони динаміки

Динаміка - це розділ технічної механіки, який вивчає залежність між механічним рухом тіл і діючими на них силами.

Будь який механічний рух тіла розглядається в динаміці у зв’язку з фізичними факторами, що визначають характер цього руху. В цьому і полягає суттєва різниця від кінематики, в якій рух розглядається з геометричної точки зору.

Перший закон (закон інерції). *Будь яке тіло знаходиться в стані спокою або рівномірному прямолінійному русі поки дія з боку інших тіл не змінить цього стану.*

Система відліку в якої виконується цей закон є основною або інерційною, а рух є абсолютним.

Другий закон (Основний закон динаміки). *Прискорення матеріальної точки, що виникає від дії прикладеної до неї сили пропорційне модулю цієї сили та співпадає з нею за напрямом.*

Модуль прискорення залежить від характеристики самого твердого тіла – маси. За визначенням Ньютона, **маса тіла** – кількість речовини в певному об’ємі тіла.

Позначивши масу тіла m, його силу тяжіння G та прискорення свободного падіння g, маємо:

$$m = G / g$$

Якщо на матеріальну точку силою тяжіння G діє сила F, що викликала прискорення a, то у відповідності до попередніх міркувань маємо:

$$\frac{F}{G} = \frac{a}{g}$$

Виходячи з цього маємо математичну формуліровку

$$F = \frac{G}{g} a, \text{ або } F = ma.$$

Модуль сили, що прикладена до матеріальної точки, дорівнює добутку маси на прискорення цієї точки.

Третій закон (Закон однакової дії та проти дії). *Сили, з якими діють одна на одну дві матеріальні точки, завжди рівні за модулем та направлені по одній лінії (що з'єднує ці точки) в протилежні сторони.*

Четвертий закон (закон незалежності дії сил). *Прискорення, що отримує матеріальна точка при одночасній дії декількох сил, дорівнює прискоренню що від дії сили, яка є рівнодіючою системи декількох сил.*

2.1.2 Дві основні задачі динаміки

Велика кількість завдань динаміки можна звести до двох основних з задач динаміки

Перша задача динаміки. **Пряма задача**. Відомо рух матеріальної точки або системи. Необхідно визначати сили, діючі на матеріальну точку або систему.

Друга задача динаміки. Зворотна задача. Відомі сили, діючі на матеріальну точку або систему. Необхідно визначити закон руху і кінематичні параметри точки або системи.

Для розв'язку цих задач в динаміці використовують засоби складання сил і приведення системи сил до простішого вигляду. Використовують методи і характеристики різних видів руху. Але при встановлені зв'язку між рухом матеріальних тіл і факторами, що впливають на цей рух, необхідно використовувати фізичні поняття (маса, кількість руху, робота, енергія та ін.)

Система матеріальних точок (у подальшому просто система) є вільною, якщо її руху ніщо не перешкоджає, а рух здійснюється за допомогою діючих сил (сонячна система).

Система рух точок якої обмежений геометричними зв'язками є невільною системою.

Сили, що діють на систему, можна розподілити на активні та реакції зв'язків (розглядались в розділі статика). Але можна розподілити систему сил за іншою ознакою *внутрішні* та *зовнішні* сили.

Внутрішні сили – сили, з якими матеріальні точки системи діють одна на одну.

Зовнішні сили – сили, з якими діють одна на одну матеріальні точки, що не входять до складу системи.

Найважливішими властивостями внутрішніх сил вважають:

Головний вектор всіх внутрішніх сил системи та алгебраїчна сума проекцій на будь які вісі дорівнюють нулю.

Це стосується і головного моменту всіх внутрішніх сил.

Поняття маса тіла та центру мас розглядались в розділі статика. Але для тіл що здійснюють обертальний рух мірою інертності вважають момент інерції.

Момент інерції твердого тіла відносно осі є скалярна величина, що дорівнює сумі добутку маси всіх точок твердого тіла на квадрат відстані до цієї осі.

$$J = \lim_{n\to\infty}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_n r_n^2) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to 0}} \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 ,$$

або $J = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$.

Момент інерції тіла відносно паралельної осі визначається за формулою

$$J_Z = J_O + m \cdot a^2$$

де J_Z - момент інерції відносно осі z; J_O - момент інерції відносно центральної осі; m - маса тіла; a - відстань від центральної осі до паралельної осі z.

2.2 Робота та потужність сили

2.2.1 Робота сили

Однією з найважливіших характеристик в механіці є скалярна величина, яка носить назву робота сили. Вона характеризує дію сили на переміщення точки прикладення цієї сили.

Елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор елементарного переміщення точки.

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos(F, ds)$$

Якщо розглянути роботу сили на будь якому кінцевому переміщенню, то вона дорівнює інтегралу від елементарної роботи:

$$A = \int \delta A = \int_{S_1}^{S_2} F \cdot ds \cdot \cos(F, ds)$$

Якщо модуль діючій сили має постійне значення, то

$$A = F \cdot s \cdot \cos(F, ds)$$

Вимірюється робота в СИ: 1[Н·м] = 1 Дж або 1 кгм = 9.81 Дж

Теорема про роботу рівнодіючої

Робота рівнодіючій кількох сил дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил.

$$A(\vec{R}) = A(\sum \vec{F}); \qquad \vec{R} \cdot \vec{s} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{s}$$

Геометричне робота сили визначається, як площа фігури, яка знаходиться під кривою закону зміни сили.

2.2.2 Окремі випадки визначення роботи сили

Робота сили тяжіння. Робота сили тяжіння дорівнює добутку ваги тіла на вертикальне переміщення центру ваги і не залежить від виду траєкторії, по якій рухається центр тяжіння.

Висновок: Робота сили тяжіння на замкнутому переміщенні центра тяжіння дорівнює нулю.

Робота сил пружності. Згідно з законом Гука сила пружності $F_{\text{ПР}}$ пружини прямо пропорційна її здовженню. Якщо позначити здовження пружини через **x** то маємо:

$$F_{\text{ПР}} = c \cdot x$$

c - постійний коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт жорсткості пружини).

Приклад. Пружина яка розтягнута на відстань h Визначимо елементарну роботу від дії сили пружності:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_{\text{ПР}} \cdot dx = -c \cdot x \cdot dx$$

Повна робота на кінцевому переміщенні дорівнює інтегралу:

$$A = \int \delta A = \int_0^h -c \cdot x \cdot dx = \frac{-c \cdot h^2}{2}$$

Робота внутрішніх сил. Ми розглядаємо тверді тіла, що не деформуються. Тому роботу внутрішніх сил розглянемо на прикладі внутрішніх сил абсолютно твердого тіла. Якщо розглянути абсолютно тверде тіло, то відстань між будь якими матеріальними точками залишається незмінною.

Тобто, переміщення від дії будь яких сил дорівнює нулю, а крім того, головний вектор та головний момент всіх внутрішніх сил дорівнює нулю.

Таким чином, можна сказати, що робота внутрішніх сил при будь-якому переміщенні незмінної системи дорівнює нулю.

Робота сили прикладеної до тіла, що обертається. Якщо розглянути роботу сили прикладеної до точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, необхідно визначити елементарне переміщення цієї точки. Траєкторії руху точок при обертальному русі є коло, тому елементарне переміщення визначається як:

$$ds = r \cdot d\varphi$$

де r - відстань до осі обертання, $d\varphi$ - елементарний кут оберту твердого тіла.

Виходячи з визначення роботи сили, записуємо:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos(F,V) = F \cdot r \cdot \cos(F,V) \cdot d\varphi .$$

Добуток $F \cdot r \cdot \cos(F,V)$ є обертальним моментом сили відносно осі обертання $M_{\text{ВР}}$. Таким чином маємо:

$$\delta A = M_{\text{ВР}} \cdot d\varphi .$$

Елементарна робота сили дорівнює добутку моменту цієї сили відносно осі обертання на елементарний кут оберту тіла.

Повна робота сили при обертанні визначається за допомогою інтегрування:

$$A = \int \delta A = \int_0^{\varphi} M_{\text{ВР}} \cdot d\varphi$$

Якщо $M_{\text{ВР}}$ є постійною величиною, тоді:

$$\delta A = M_{\text{ВР}} \cdot \varphi .$$

2.2.3 Потужність сили

Потужністю сили називається зміна її роботи за одиницю часу

$$N = \frac{\delta A}{dt} .$$

Виходячи з цього визначення, можемо записати:

$$N = \frac{F \cdot ds \cdot \cos(F, ds)}{dt} = F \cdot \cos(F, ds)\frac{ds}{dt} = F \cdot V \cdot \cos(F, ds) .$$

Таким чином, потужність сили дорівнює добутку сили на швидкість точки її прикладання. Розмірність в одиницях СИ: Вт = 1 [Дж/с], 1 к.с. = 75 кгм/с = 0,736 кВт

При обертальному русі твердого тіла потужність визначають за допомогою формули:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{M_{\text{ВР}} \cdot d\varphi}{dt} = M_{\text{ВР}} \cdot \omega.$$

Тобто потужність при обертанні визначається, як добуток обертального моменту на кутову швидкість обертання тіла.

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30},$$

n - оберти за хвилину (об/хв).

2.3 Кінетична енергія. Теорема про зміну кінетичної енергії

2.3.1 Кінетична енергія твердого тіла

Кінетична енергія - енергія руху матеріальної точки або твердого тіла. Для матеріальної точки кінетична енергія визначається за формулою:

$$T = \frac{mV^2}{2},$$

де V - абсолютна швидкість матеріальної точки, m - маса точки.

Кінетична енергія матеріальної точки - скалярна величина, що дорівнює половині добутку маси на квадрат швидкості

Розглянемо деякі випадки визначення кінетичної енергії твердого тіла

Тіло рухається поступально. У цьому випадку швидкості всіх точок тіла рівні між собою. Виходячи з цього, кінетична енергія визначається як:

$$T = \sum \frac{m_к V_к^2}{2} = \frac{V^2}{2} \sum m_к = \frac{MV^2}{2}.$$

Кінетична енергія тіла, що рухається поступально, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості.

Тіло обертається навколо нерухомої осі. У цьому випадку швидкість будь-якої точки дорівнює добутку кутової швидкості на відстань до осі обертання. Виходячи з цього, кінетична енергія визначається як:

$$T=\sum\frac{m_\kappa V_\kappa^2}{2}=\sum\frac{m_\kappa\omega^2 r_\kappa^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum m_\kappa r_\kappa^2=\frac{J\omega^2}{2},$$

де $J=\sum m_\kappa r_\kappa^2$ - момент інерції твердого тіла

Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі на квадрат його кутової швидкості.

Тіло здійснює площинно-паралельний рух. Кінетична енергія визначається як:

$$T=\frac{mV_C^2}{2}+\frac{J_C\omega^2}{2},$$

де J_C - момент інерції твердого тіла відносно центра мас, V_C - швидкість центра мас твердого тіла.

2.3.2 Теорема про зміну кінетичної енергії

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Розглянемо рух матеріальної точки маси m, що знаходиться під дією сили F. Використовуємо основне рівняння динаміки:

$$m\vec{a}=\vec{F}.$$

Проектуємо це рівняння на напрямок дії вектора швидкості V цієї точки, а також праву та ліву частини цього рівняння скалярно помножимо на елементарне переміщення точки dS.

$$m\cdot a\cdot\cos(a,V)\cdot ds=F\cdot ds\cdot\cos(F,V),$$

права частина цього рівняння є елементарною роботою сили:

$$\delta A=F\cdot ds\cdot\cos(F,V),$$

ліва частина з урахуванням $a\cdot\cos(a,V)=a_t=\dfrac{dV}{dt}$ має вигляд:

$$m\cdot\frac{dV}{dt}\cdot ds=m\cdot\frac{ds}{dt}\cdot dV=m\cdot V\cdot dV.$$

Таким чином, рівняння остаточно записується

$$m\cdot V\cdot dV=\delta A$$

Розглядаючи рух матеріальної точки з положення 1 до положення 2, а також позначаючи початкову та кінцеву швидкості через V_1 та V_2, можемо проінтегрувати попереднє рівняння, тоді

$$\int_{V_1}^{V_2} m \cdot V \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \delta A, \quad \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A.$$

Виходячи з результату, можемо сформулювати закон зміни кінетичної енергії для матеріальної точки.

Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому переміщенні дорівнює роботі сили, що діє на цю точку на цьому переміщенні.

<u>Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи</u>

Для механічної системи використовуємо попередній результат для окремої точки.

$$\frac{mV_{2k}^2}{2} - \frac{mV_{1k}^2}{2} = A_k.$$

Запишемо ці рівняння для всіх точок системи й складаємо їх з відповідними складовими:

$$\sum \frac{mV_{2k}^2}{2} - \sum \frac{mV_{1k}^2}{2} = \sum A_k.$$

Сума кінетичних енергій всіх матеріальних точок системи і є кінетичною енергією системи

$$T = \sum \frac{mV_k^2}{2}.$$

Вводячи відповідні позначення, маємо закон зміни кінетичної енергії матеріальної системи:

$$T_2 - T_1 = \sum A_k.$$

Зміна кінетичної енергії системи при її переміщенні з одного положення в інше дорівнює сумі робіт всіх сил що діють на системи при її переміщенні.

2.4 Основні поняття аналітичної механіки.

Нескінченно малі переміщення точок системи, які сумісні зі зв’язками розподіляють на два види: дійсні і можливі.

<u>Дійсними</u> називають такі, що не суперечать в’язям і відбуваються під дією заданих сил.

Можливими називають такі елементарні уявні переміщення, що не суперечать в’язям і відбуваються у фіксований момент часу.

Число ступенів вільності матеріальної системи називають кількість незалежних можливих переміщень, які можна надати її точкам у фіксований момент часу. Наприклад, число степенів вільності матеріальної точки, що вільно рухається у просторі дорівнює 3, по поверхні 2, по кривій 1.

Ідеальними називаються зв’язки, алгебраїчна сума елементарних робіт реакції яких на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює 0 (для утримувальних в’язей)

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta \cdot \vec{r}_i = 0.$$

2.5 Принцип можливих переміщень.

Для рівноваги системи матеріальних точок, що підпорядковуються утримувальним, ідеальним, стаціонарним зв’язкам необхідно і достатньо, щоб дорівнювала 0 сума елементарних робіт активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи з розгляду вального положення рівноваги за умови, що в початковий момент система нерухома.

Застосування принципу можливих переміщень до виведення умов рівноваги твердого тіла.

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \cdot \vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot \delta \cdot \vec{r}_{\mathrm{O}} + \vec{M}_{\mathrm{O}} \cdot \delta\theta = 0$$

$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ - головний вектор системи, $\delta\theta$ - вектор малого можливого повороту тіла, $\vec{M}_{\mathrm{O}}$ - головний момент системи, $\delta \cdot \vec{r}_{\mathrm{O}}$ - можливе переміщення полюсу,

Тоді $\vec{F}$ =0; $\vec{M}_{\mathrm{O}}$ =0

$$\sum F_{\mathrm{IX}} = 0; \quad \sum M_{\mathrm{X}}(F_{\mathrm{I}}) = 0.$$
$$\sum F_{\mathrm{IY}} = 0; \quad \sum M_{\mathrm{Y}}(F_{\mathrm{I}}) = 0.$$
$$\sum F_{\mathrm{IZ}} = 0; \quad \sum M_{\mathrm{Z}}(F_{\mathrm{I}}) = 0.$$

Загальне рівняння статики:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0.$$

2.6 Загальне рівняння динаміки

Згідно з принципом Даламбера маємо:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0$$

$\vec{F}_i$ - рівнодіюча активних сил, яка прикладена до i-ої точки, $\vec{R}_i$ - рівнодіюча реакції в'язей, $\vec{\Phi}_i = -m_i a_i$ - сила інерції i-ої точки.

Визначимо скалярний добуток рівняння на $\delta \cdot \vec{r}_i$ і, підсумовуючи, маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i)\delta \cdot \vec{r}_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \,\delta \cdot \vec{r}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i)\delta \cdot \vec{r}_i = 0 \quad => \quad \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i a_i)\delta \cdot \vec{r}_i = 0$$

Цьому векторному рівнянню відповідає таке рівняння в скалярній формі.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F_{\mathrm{IX}} - m_i a_{ix}\right)\delta x_i + \left(F_{\mathrm{IY}} - m_i a_{iy}\right)\delta y_i + \left(F_{\mathrm{IZ}} - m_i a_{iz}\right)\delta z_i = 0.$$

2.7 Узагальнені координати, швидкості та прискорення

Узагальненими координатами називають сукупність незалежних між собою предметів, що однозначно визначають положення матеріальної системи у просторі.

Узагальнені координати можуть мати різні геометричний і механічний змісти. Наприклад, якщо матеріальна точка вільна, то за узагальнені координати можна вибрати три Декартові координати

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z,$$

або 3 сферичні

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

тощо.

За аналогію зі звичайними поняттями швидкості та прискорення введемо поняття узагальненої швидкості

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}, \; j = 1,2,\ldots,k$$

і узагальненого прискорення

$$\ddot{q}_j = \frac{d^2 q_j}{dt^2} = \frac{d\dot{q}_j}{dt}.$$

2.8 Узагальнені сили і їхнє обчислення

Розглянемо механічну систему, яка складається із n матеріальних точок, на яку діють активні сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n$, що прикладені в точках M_1, M_2, ..., M_n, можливі переміщення яких $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, ..., \delta\vec{r}_n$.

Положення точок можна одночасно задати їхніми радіусами-векторами $\vec{r}_i (i = \overline{1,n})$, при цьому $\vec{r}_i = \vec{r}_i (t, q_1, q_2, ..., q_k)$.

Тоді величину

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \; j = 1, 2, ..., k,$$

називають узагальненою силою Q_j, що відповідає узагальненій координаті q_j.

Якщо узагальнена координата має лінійну розмірність, то узагальнена сила є силою у звичайному розумінні.

Якщо узагальнена координата є кутом повороту $q = \varphi$, то узагальнена сила буде моментом сили відносно осі обертання.

2.9 Рівняння Лагранжа II-го роду

Це система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно k невідомих функцій $q_j(t)$, що являють собою закон руху системи.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1, 2, ..., k).$$

Застосовуючи рівняння Лагранжа II-го роду до розв’язання задачі динаміки, треба дотримуватись такої послідовності дій:

1. Визначити число степенів вільності системи, яка рухається.
2. Вибрати узагальнені координати.
3. Визначити узагальнені сили.
4. Обчислити кінетичну енергію системи (T).
5. Обчислити похідні $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_j}$ і $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_j}$
6. Скласти рівняння руху системи і з інтегрувати їх, враховуючи початкові умови руху
7. Відповідно до конкретних умов задачі проаналізувати знайдений розв’язок.

3. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ МОДУЛЬНОЇ РОБОТИ

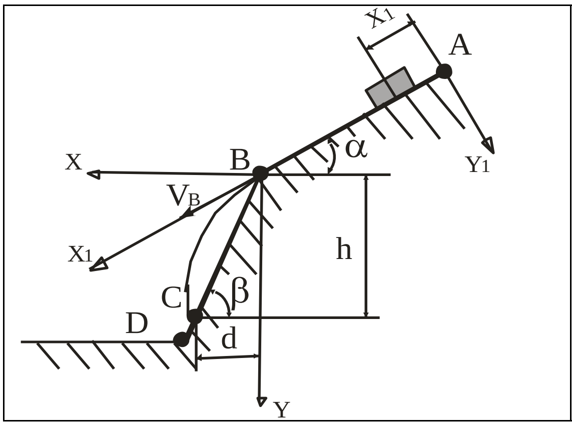
3.1 ЗАВДАННЯ №1 ДИНАМІКА ТОЧКИ. ПРЯМА ЗАДАЧА

Закон руху матеріальної точки масою 1 кг гідравлічного пожежного струменю заданий у векторному вигляді $\vec{r} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$. Визначити рівнодіючу сил.

Номер	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_3(t)$
1	$4t^2+5t+1$	t^2+9t+1	$t+9$
2	$3t^2+5t+4$	$2t^2+8t+3$	$3t+8$
3	$2t^2+6t+2$	$3t^2+7t+5$	$5t+7$
4	$-2t^2+7t$	$4t^2+6t+7$	$7t+6$
5	$-3t^2-6t+1$	$5t^2+5t+9$	$9t+5$
6	$2t^2-3t+5$	$6t^2+4t+2$	$2t+4$
7	$4t^2+t-2$	$7t^2+3t+4$	$4t+3$
8	$5t^2+t+6$	$8t^2+2t+6$	$6t+2$
9	$-7t^2+t$	$9t^2+t+8$	$8t-1$
10	$-5t^2+3t+3$	$8t^2-t-1$	$-t-2$
11	$6t^2-4t+3$	$7t^2-2t-3$	$-3t-3$
12	$2t^2+t+4$	$6t^2-3t-5$	$-5t-4$
13	$-t^2-t-2$	$5t^2-4t-7$	$-7t-5$
14	$5t^2-3t-4$	$4t^2-5t-9$	$-9t-6$
15	$7t^2+6t+3$	$3t^2-6t-2$	$-2t-7$
16	$4t^2-3t+1$	$2t^2-7t-4$	$-4t-8$
17	$-t^2+4t+1$	t^2-8t-6	$-6t-9$
18	$-2t^2+3t+1$	$-t^2-9t-8$	$-8t+1$
19	$-7t^2-6t$	$-2t^2+8t+1$	$t+2$
20	$-4t^2+4t+5$	$-3t^2+7t+3$	$3t+3$
21	$-2t^2+5t+3$	$-4t^2+6t+5$	$5t+4$
22	$-t^2+8t+2$	$-5t^2+5t+7$	$7t+5$
23	$-5t^2+2t+1$	$-6t^2+4t+9$	$9t+6$
24	$4t^2-8t+1$	$-7t^2+3t+2$	$2t+7$
25	$2t^2+3t+4$	$-8t^2+2t+4$	$4t+8$
26	t^2+6t+2	$-9t^2+t+6$	$6t+9$
27	$3t^2+t+1$	$-8t^2-t+8$	$8t-1$
28	$-7t^2+4t+5$	$-7t^2-2t+1$	$-t+1$
29	$5t^2+t+6$	$-6t^2-3t+3$	$-3t+2$
30	$4t^2-6t+3$	$-5t^2-4t+5$	$-5t+3$

3.2 ЗАВДАННЯ №2 ДИНАМІКА ТОЧКИ. ЗВОРОТНА ЗАДАЧА

Варіант №1



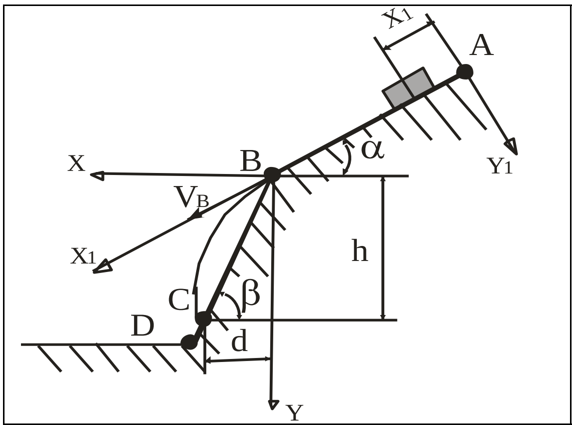
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с. Початкова швидкість V_A, коефіцієнт тертя по площині дорівнює f.

f =0,2; L =10 м;

V_A =0 м/с; α = 30°; β = 60°.

Визначити невідомі: h, м, та τ, с

Варіант №2



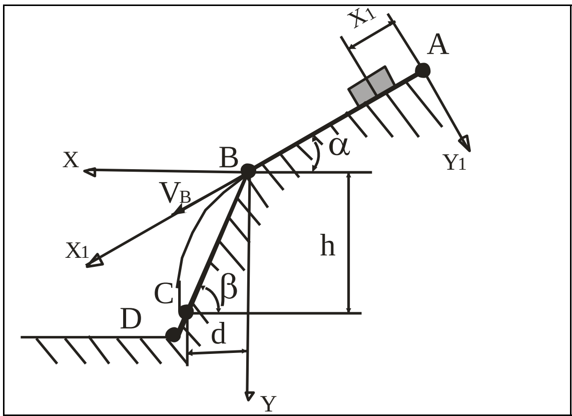
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с. Початкова швидкість V_A, коефіцієнт тертя по площині дорівнює f.

f =0,2; h =4 м; V_A =2 м/с;

α = 15°; β = 45°.

Визначити невідомі: L, м

Варіант №3



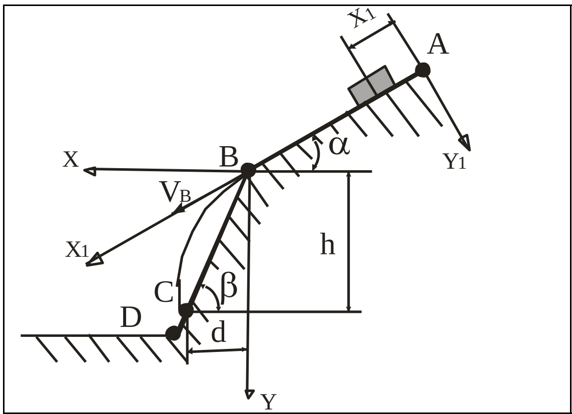
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с. Початкова швидкість V_A, коефіцієнт тертя по площині дорівнює f.

$f \neq 0$ V_A =2,5 м/с; α = 30°;

β = 60°; L = 8 м; d = 10 м.

Визначити невідомі: V_B, м/с і τ, с

Варіант №4



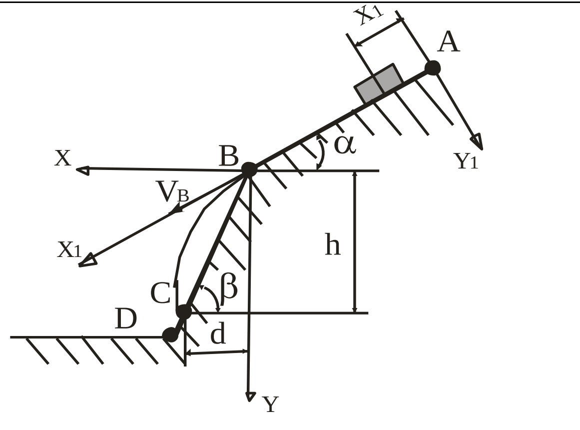
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с. Початкова швидкість V_A, коефіцієнт тертя по площині дорівнює f.

f = 0; V_A = 0, м/с; τ = 2, с

β = 60°; L = 9.8, м;

Визначити невідомі: α і T, с

Варіант №5



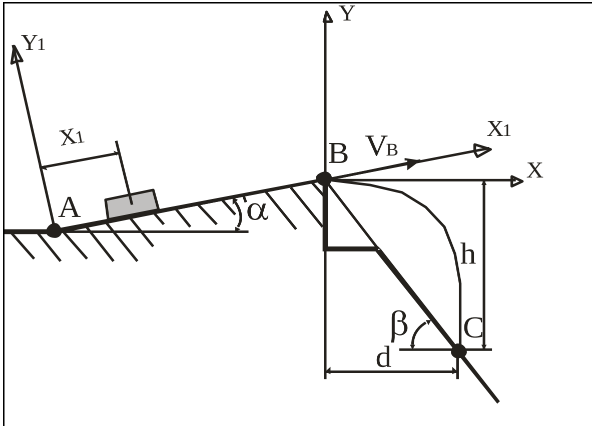
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с. Початкова швидкість V_A, коефіцієнт тертя по площині дорівнює f.

τ = 3 с; V_A = 0 м/с; α = 30°;

β = 45°; L = 9,8 м.

Визначити невідомі: f і V_C, м/с

Варіант №6

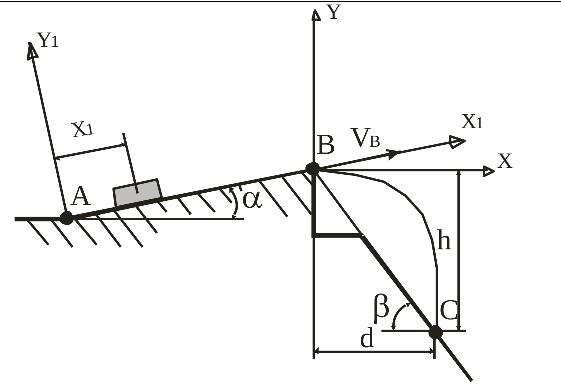


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с. Початкова швидкість V_A, коефіцієнт тертя по площині дорівнює f.

τ = 0,2 с; h = 40 м; α = 20°; β = 30°; f = 0,1.

Визначити невідомі: L,м, V_C,м/с

Варіант №7



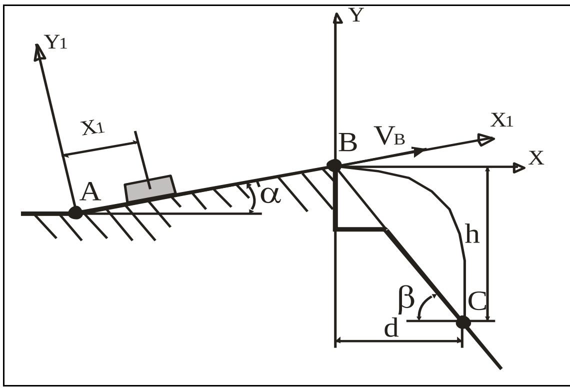
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с. Початкова швидкість V_A, коефіцієнт тертя по площині дорівнює f.

V_A = 16 м/с; L = 5 м;

α = 15°; β = 45°; f = 0,1.

Визначити невідомі: T, с, V_B,м/с

Варіант №8



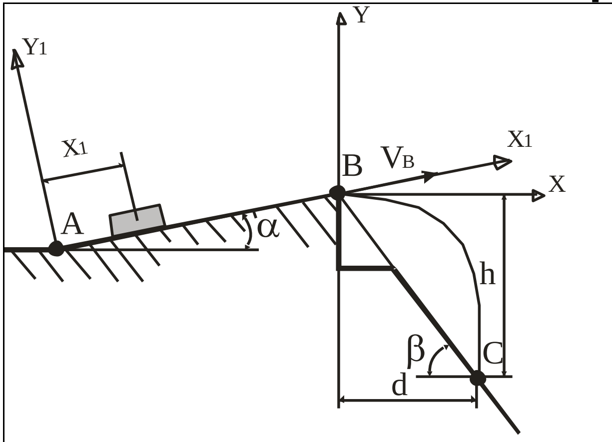
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с. Початкова швидкість V_A, коефіцієнт тертя по площині дорівнює f.

V_A = 21 м/с; V_B = 20 м/с;

τ = 0.3 с; β = 60°; f = 0.

Визначити невідомі: α, d, м

Варіант №9



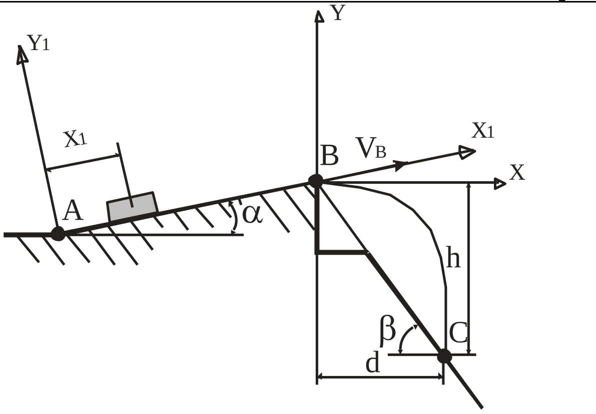
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с. Початкова швидкість V_A, коефіцієнт тертя по площині дорівнює f.

$\alpha = 15°$; $\beta = 45°$; $h = 30\sqrt{2}$ м;

$\tau = 0.3$, с; $f = 0,1$;

Визначити невідомі: V_A,м/с, V_B,м/с

Варіант № 10



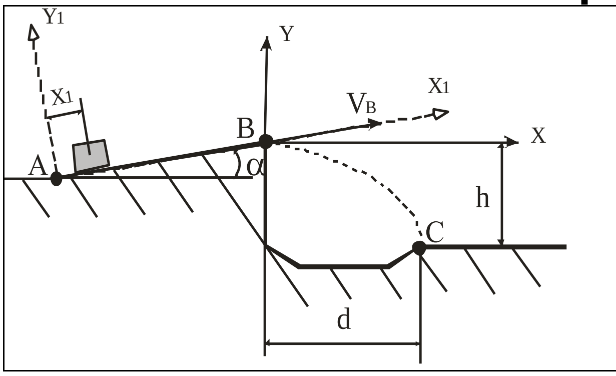
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с. Початкова швидкість V_A, коефіцієнт тертя по площині дорівнює f.

$\alpha = 15°$; $\beta = 60°$; $V_A = 12$ м/с;

$d = 50$ м; $f = 0$.

Визначити невідомі: τ, с

Варіант №11



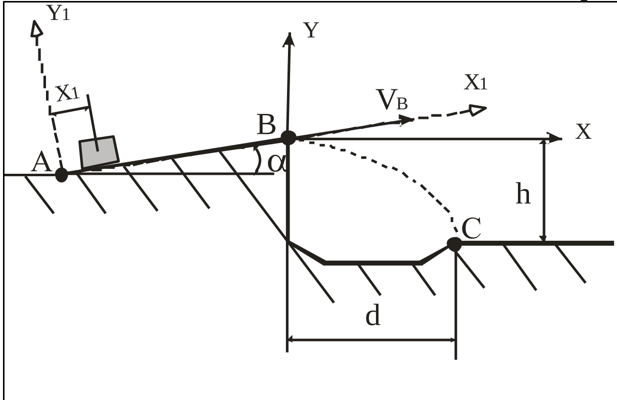
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Початкова швидкість V_A.

$\alpha = 30°$; $V_A = 0$ м/с; $V_B = 4,5$ м/с;

$d = 3$ м; $L = 40$ м; $P \neq 0$.

Визначити невідомі: τ, с, h,м

Варіант №12



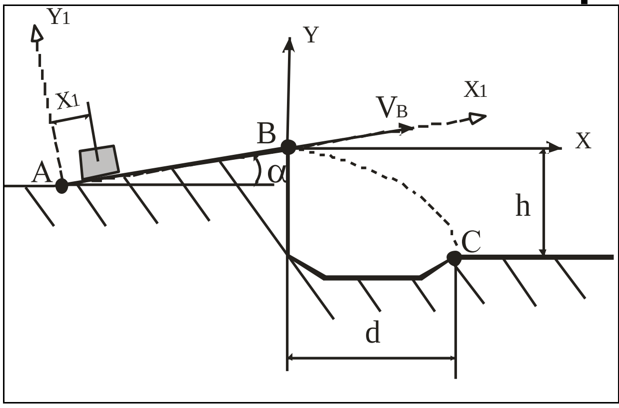
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Початкова швидкість V_A.

$\alpha = 30°$; $h = 1,5$ м; $V_B = 4,5$ м/с;

$P = 0$; $L = 40$ м.

Визначити невідомі: d,м, V_A,м/с

Варіант №13

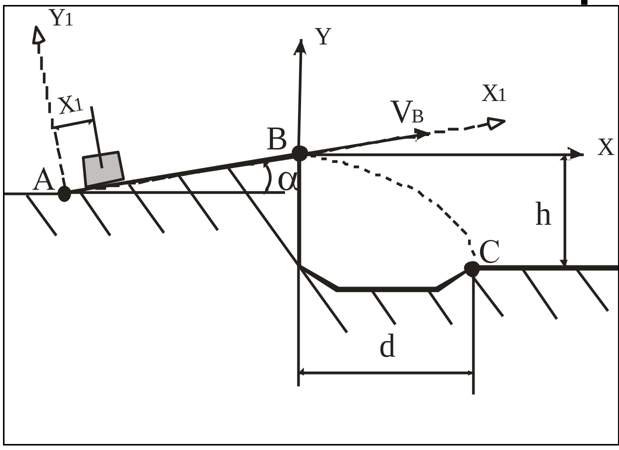


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Початкова швидкість V_A.

α = 30°; m = 400 кг; V_A = 0 м/с; τ = 20 с; h = 1,5 м; d = 3 м.

Визначити невідомі: P, кн., L, м

Варіант №14

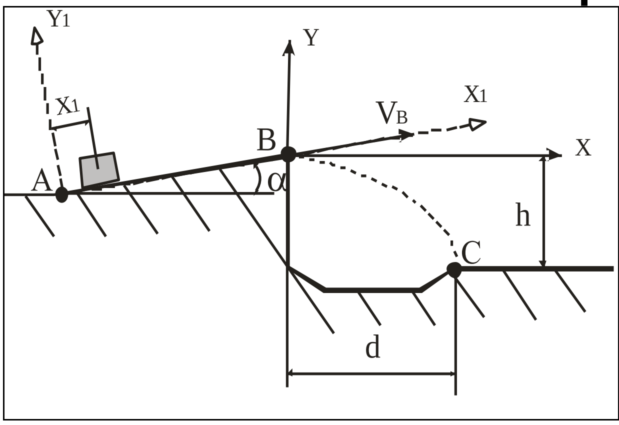


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Початкова швидкість V_A.

α = 30°; m = 400 кг; V_A = 0 м/с; L = 40, м; d = 5 м; P = 2,2 kH;

Визначити невідомі: V_B, м/с, V_C, м/с

Варіант №15



Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Початкова швидкість V_A.

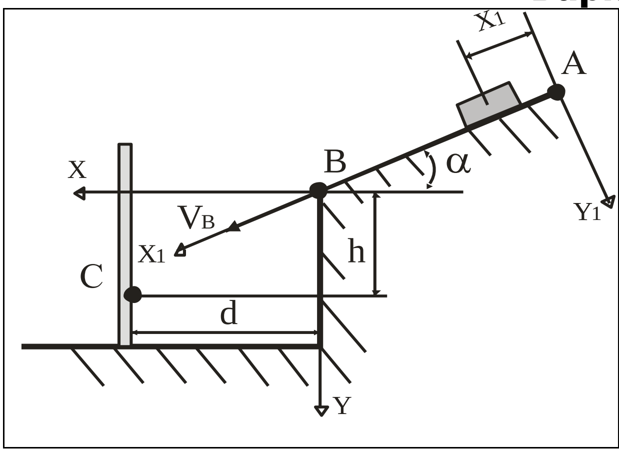
α = 30°; V_A = 0 м/с;

L = 50, м; h = 2 м; d = 4 м;

P = 2 kH.

Визначити невідомі: m, кг, T, с

Варіант №16



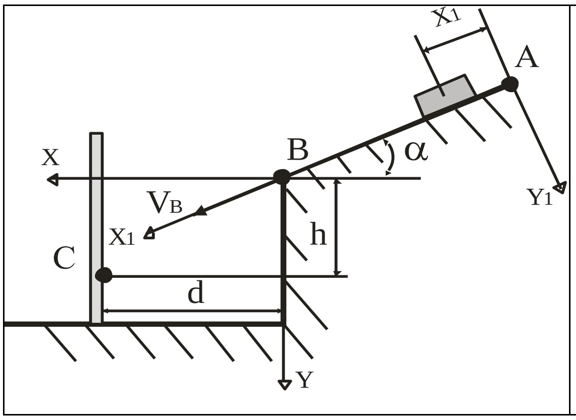
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

α = 30°; V_A = 1 м/с; L = 3, м;

f = 0,2; d = 2,5 м.

Визначити невідомі: h, м, T, с

Варіант №17

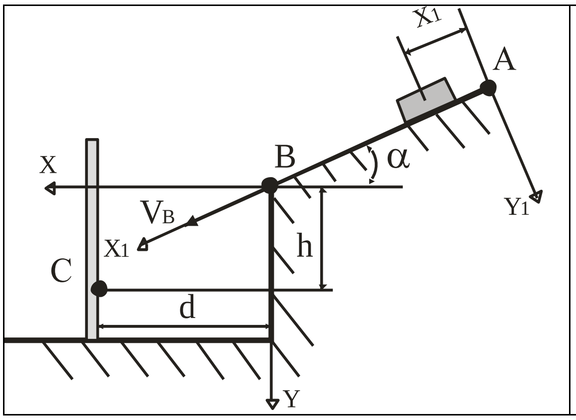


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

α = 45°; $V_B = 2V_A$ м/с; L = 6 м; h = 6 м; τ = 1 с.

Визначити невідомі: f, d, м

Варіант №18

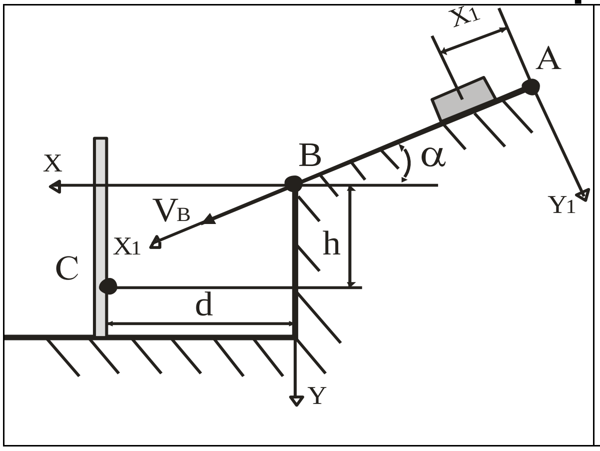


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

α = 30°; V_A = 0 м/с; L = 2, м; d = 3 м; f = 0,1.

Визначити невідомі: τ, с, h, м

Варіант № 19

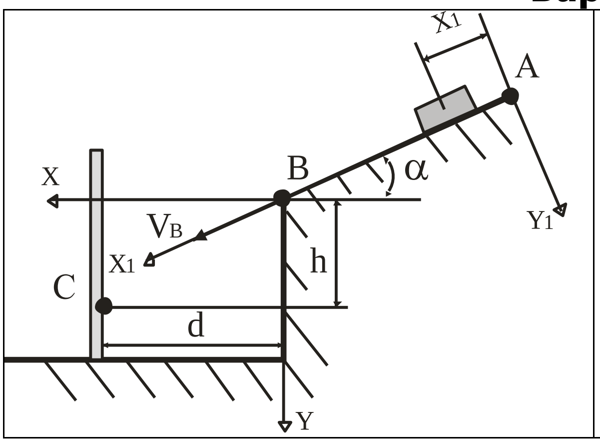


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

α = 15°; V_B = 3 м/с; τ = 1,5 с L = 3 м; d = 2 м; f = 0,1.

Визначити невідомі: V_A,м/с, h,м

Варіант №20

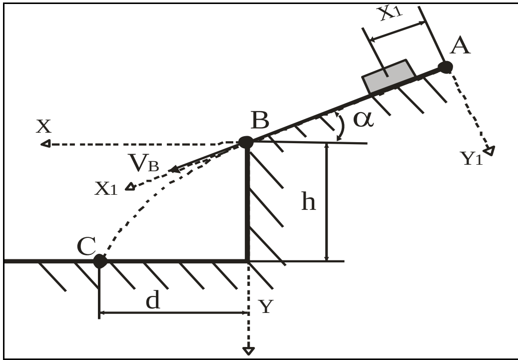


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

α = 45°; V_A = 0 м/с; h = 4 м; d = 2 м; f = 0,3.

Визначити невідомі: L, м,τ, с

Варіант №21

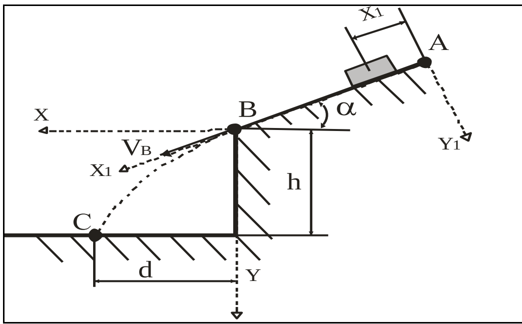


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

α = 30°; V_A = 1м/с; τ = 1,5 с; h = 10м; f = 0,1.

Визначити невідомі: V_B, м/с, d, м

Варіант №22

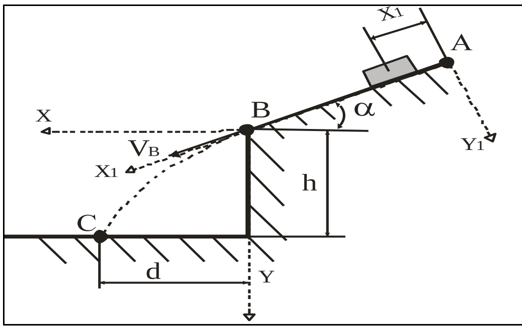


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

α = 45°; V_A = 0 м/с; τ = 2 с; L = 10 м.

Визначити невідомі: f

Варіант №23



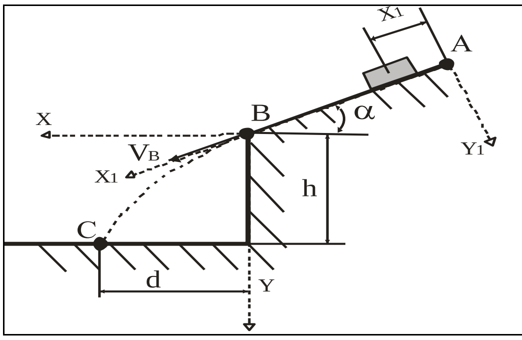
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

V_A = 0 м/с; τ = 2 с; L = 9,81 м;

h = 20 м; f = 0.

Визначити невідомі: α T, с

Варіант №24



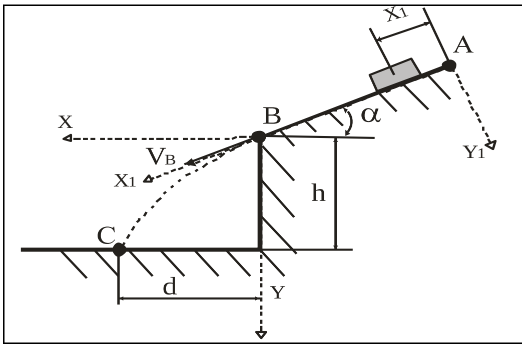
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

α = 30°; V_A = 0 м/с; τ= 2 с; L = 10 м;

d = 12 м; f = 0,2.

Визначити невідомі: h,м, τ,с

Варіант №25



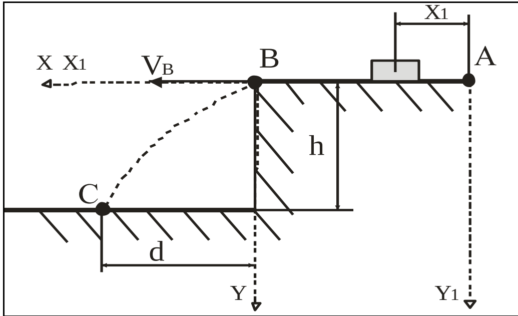
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

α = 30°; V_A = 0 м/с; τ= 2 с;

L = 6, м; h = 4,5 м; f = 0,2.

Визначити невідомі: V_C, м/с, T, с

Варіант №26

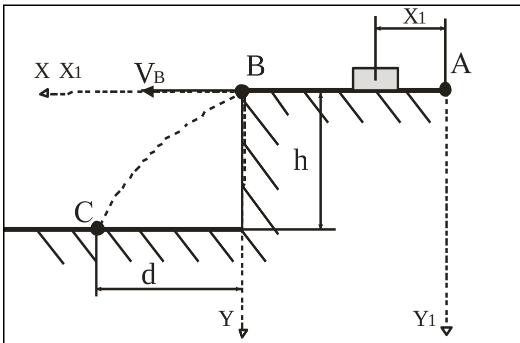


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

V_A = 7 м/с; L = 8,м; f = 0,2; h = 20м.

Визначити невідомі: V_C, м/с, d, м

Варіант №27

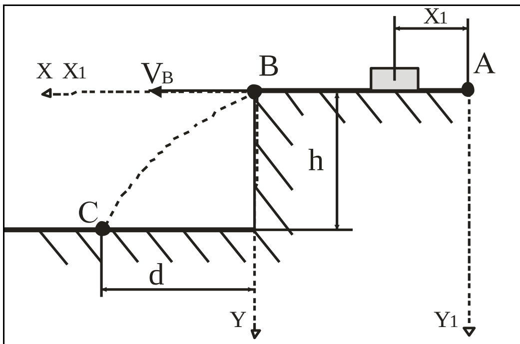


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

V_A = 4 м/с; f = 0,1; d = 2 м;τ = 2 с.

Визначити невідомі: V_B, м/с, h, м

Варіант №28

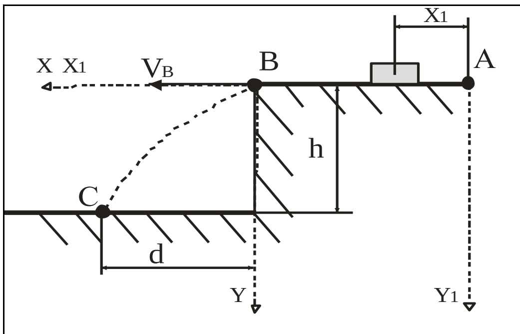


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

V_B = 3, м/с; f = 0,3 L = 3 м; h =5 м.

Визначити невідомі: V_A, м/с, T, с

Варіант №29

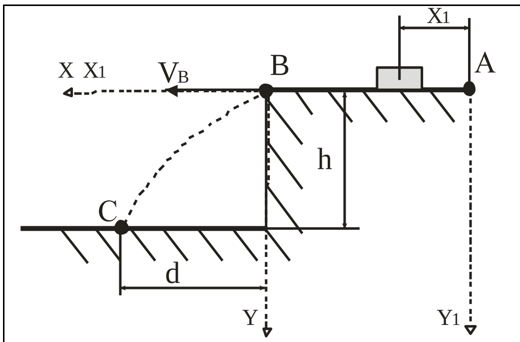


Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

V_A = 3м/с; V_B = 1м/с; L = 2.5 м; h = 20 м.

Визначити невідомі: f, d, м

Варіант №30



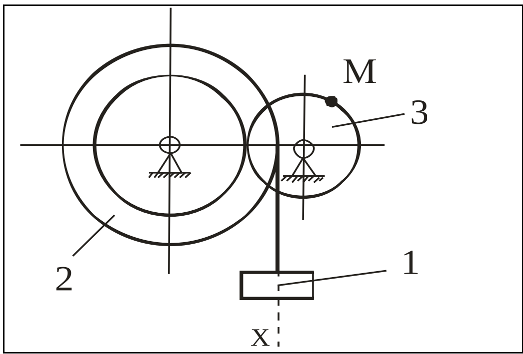
Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) впродовж часу τ, с з силою P. Коефіцієнт тертя f. Початкова швидкість V_A.

d = 3 м; L = 4 м; h = 5 м; f = 0,25.

Визначити невідомі: V_A, м/с, і τ, с

3.3 ВАРІАНТИ ДЛЯ ЗАВДАНЬ №3 – 5

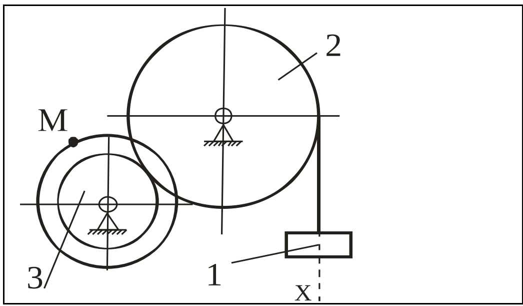
№1



Визначити закон руху тіла 1.

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг; m_3 =4, кг;
R_2 =12, см; r_2 = 8, см; R_3 =4, см;
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

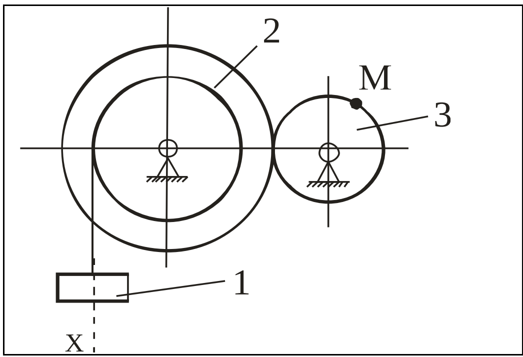
№2.



Визначити закон руху тіла 1.

ρ_3 = 10 см; M = 80 Н·см; m_1 =12, кг;
m_2 = 8, кг; m_3 =4, кг; R_2 = 80, см;
r_2 = 0, см; R_3 = 60, см; r_3 = 45, см

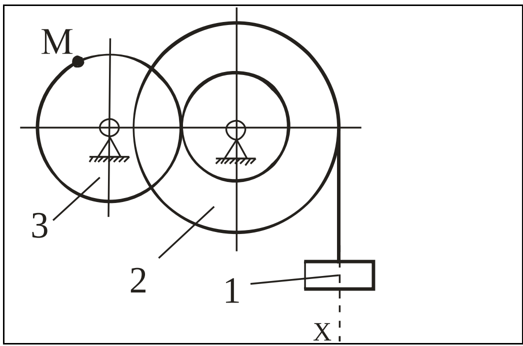
№3.



Визначити закон руху тіла 1.

ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;
m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг; m_3 =4, кг;
R_2 = 100, см; r_2 = 60, см;
R_3 = 75, см; r_3 = 0, см

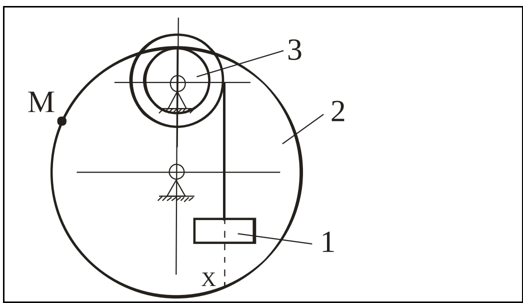
№4.



Визначити закон руху тіла 1.

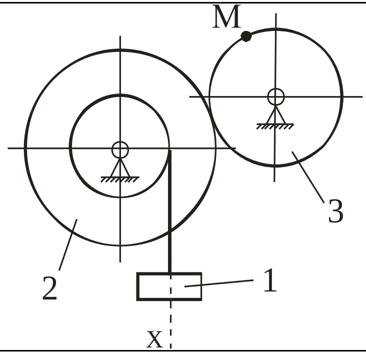
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см; m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг; m_3 =4, кг; R_2 = 58, см; r_2 = 45, см; R_3 = 60, см; r_3 = 0, см

№5



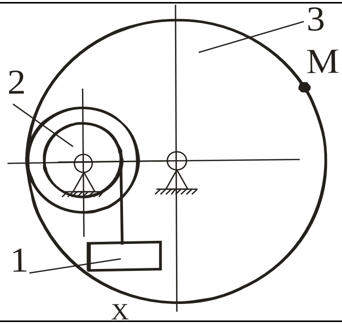
Визначити закон руху тіла 1.
ρ_3 = 10 см; M = 80 Н·см; m_1 =12, кг;
m_2 = 8, кг; m_3 =4, кг; R_2 = 80, см;
r_2 = 0, см; R_3 = 45, см; r_3 = 30, см

№6.



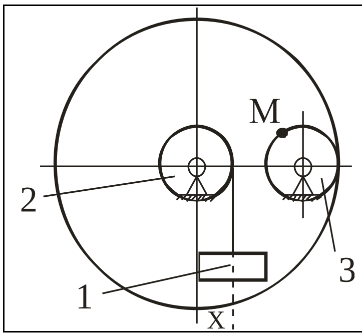
Визначити закон руху тіла 1.
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;
m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;
m_3 =4, кг; R_2 = 100, см;
r_2 = 60, см; R_3 = 30, см; r_3 = 0, см

№7



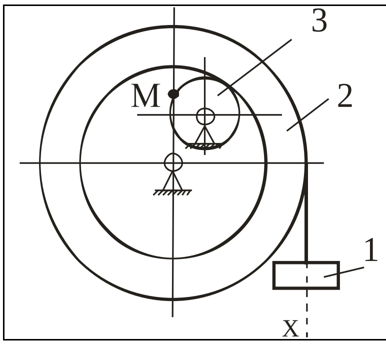
Визначити закон руху тіла 1.
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;
m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;
m_3 =4, кг; R_2 = 45, см; r_2 = 35, см;
R_3 = 105, см; r_3 = 0, см

№8



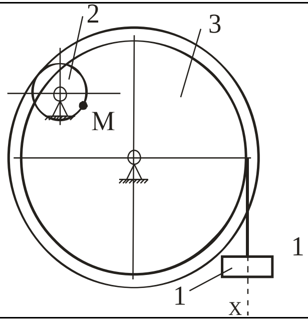
Визначити закон руху тіла 1.
M = 80 Н·см; m_1 =12, кг;
m_2 = 8, кг; m_3 =4, кг; R_2 = 35, см; r_2 = 10, см; R_3 = 10, см; r_3 = 0, см

№9



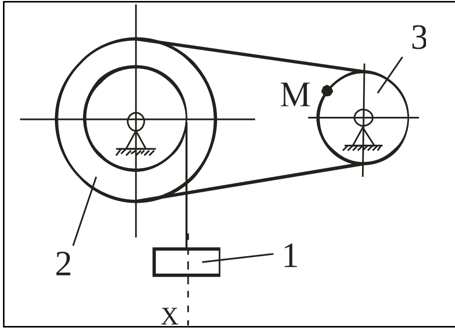
Визначити закон руху тіла 1.
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;
m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;
m_3 =4, кг; R_2 = 40, см; r_2 = 30, см;
R_3 = 15, см; r_3 = 0, см

№10.



Визначити закон руху тіла 1.
ρ_3 = 10 см; M = 80 Н·см;
m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;
m_3 =4, кг; R_2 = 15, см; r_2 = 0, см;
R_3 = 40, см; r_3 = 35, см

№11.



Визначити закон руху тіла 1.

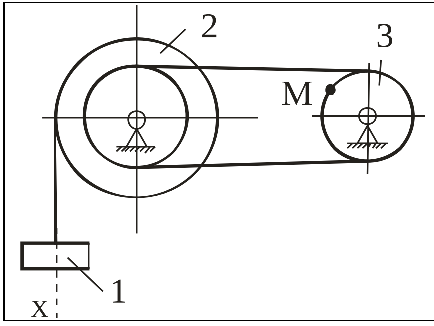
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 40, см; r_2 = 25, см;

R_3 = 20, см; r_3 = 0, см

№12.



Визначити закон руху тіла 1.

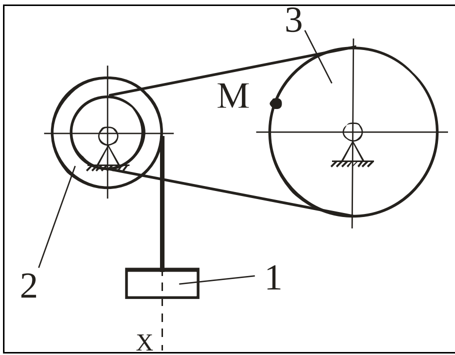
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 20, см; r_2 = 15, см;

R_3 = 10, см; r_3 = 0, см

№13.



Визначити закон руху тіла 1.

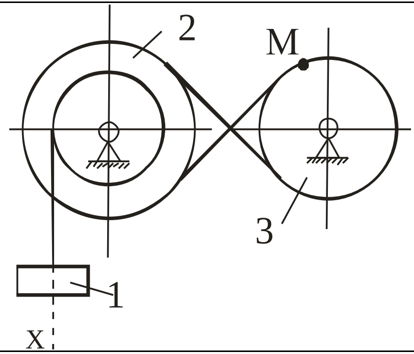
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 30, см; r_2 = 20, см;

R_3 = 40, см; r_3 = 0, см

№14.



Визначити закон руху тіла 1.

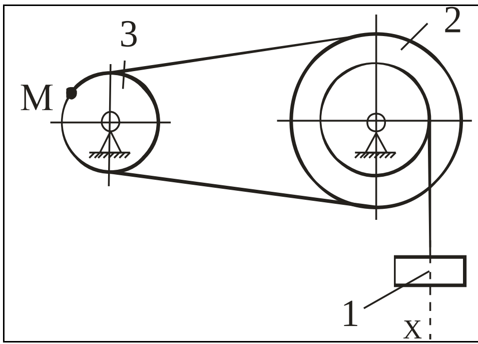
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 15, см; r_2 = 10, см;

R_3 = 15, см; r_3 = 0, см

№15.



Визначити закон руху тіла 1.

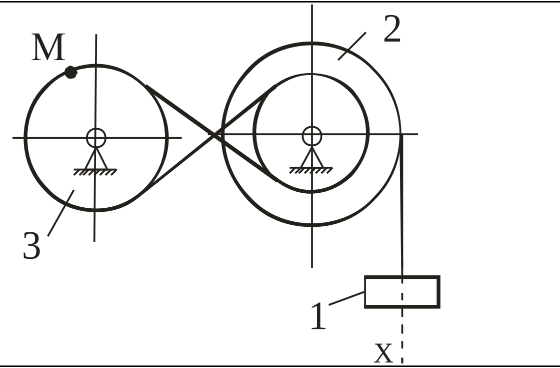
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 15, см; r_2 = 10, см;

R_3 = 15, см; r_3 = 0, см

№16.



Визначити закон руху тіла 1.

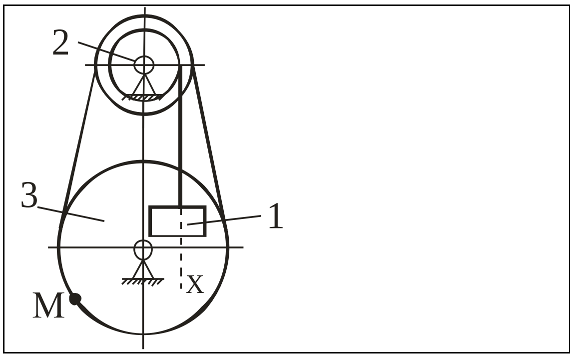
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 20, см; r_2 = 15, см;

R_3 = 15, см; r_3 = 0, см

№17.



Визначити закон руху тіла 1.

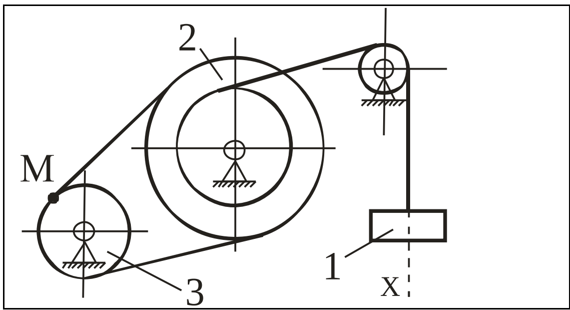
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 15, см; r_2 = 10, см;

R_3 = 20, см; r_3 = 0, см

№18.



Визначити закон руху тіла 1.

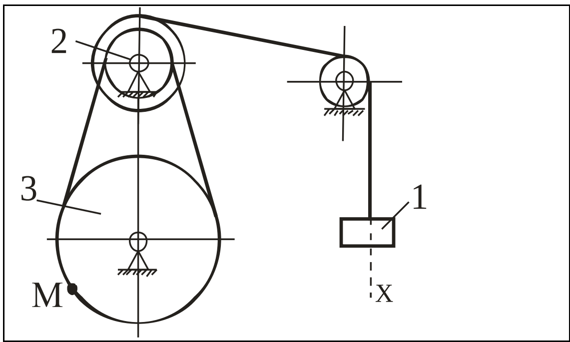
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 20, см; r_2 = 15, см;

R_3 = 10, см; r_3 = 0, см

№19.



Визначити закон руху тіла 1.

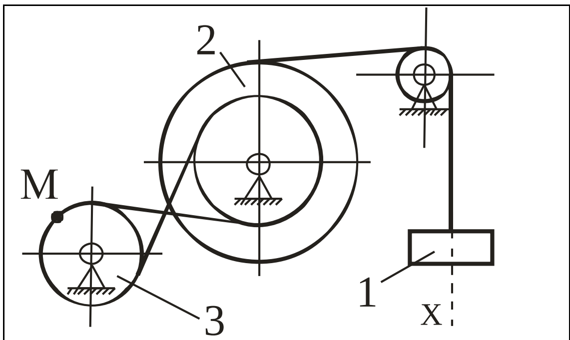
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 15, см; r_2 = 10, см;

R_3 = 20, см; r_3 = 0, см

№20.



Визначити закон руху тіла 1.

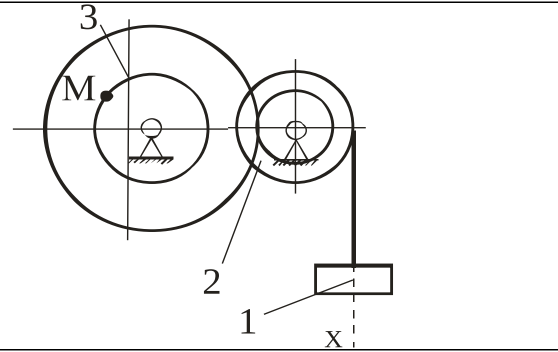
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 25, см; r_2 = 15, см;

R_3 = 10, см; r_3 = 0, см

№21.



Визначити закон руху тіла 1.

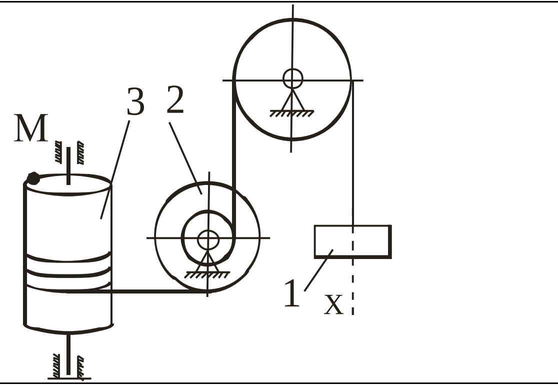
ρ_{23} = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 20, см; r_2 = 10, см;

R_3 = 30, см; r_3 = 10, см

№22.



Визначити закон руху тіла 1.

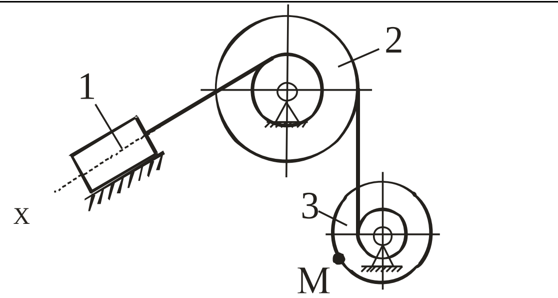
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 40, см; r_2 = 20, см;

R_3 = 35, см; r_3 = 0, см

№23.



Визначити закон руху тіла 1.

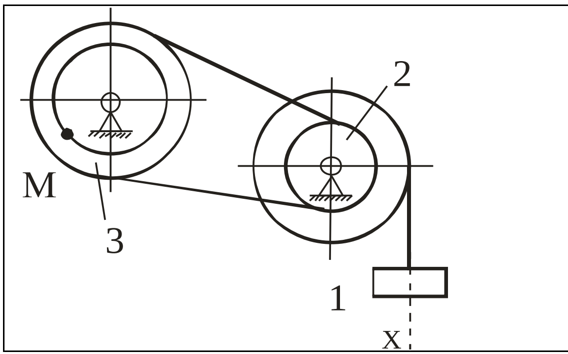
ρ_{23} = 10 см; M = 80 Н·см; f=0,1

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 40, см; r_2 = 30, см;

R_3 = 30, см; r_3 = 15, см, $\alpha = 60^\circ$

№24.



Визначити закон руху тіла 1.

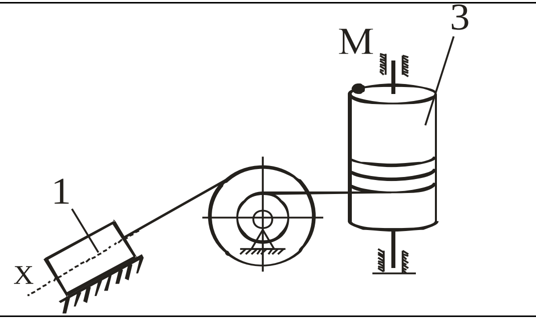
ρ_{23} = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 30, см; r_2 = 15, см;

R_3 = 40, см; r_3 = 20, см

№25.



Визначити закон руху тіла 1.

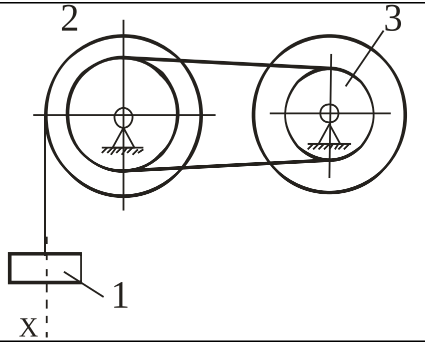
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см; f=0,1

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 50, см; r_2 = 20, см;

R_3 = 60, см; r_3 = 0, см, $\alpha = 30^\circ$

№26.



Визначити закон руху тіла 1.

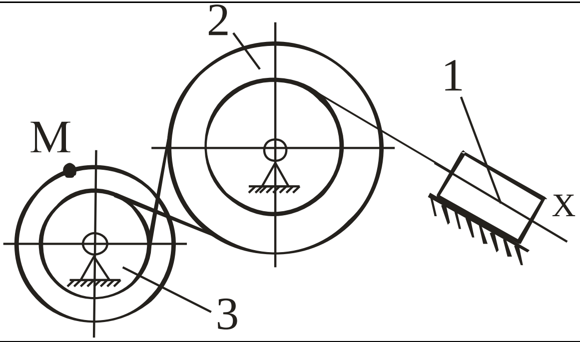
ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см;

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 32, см; r_2 = 16, см;

R_3 = 32, см; r_3 = 16, см

№27.



Визначити закон руху тіла 1.

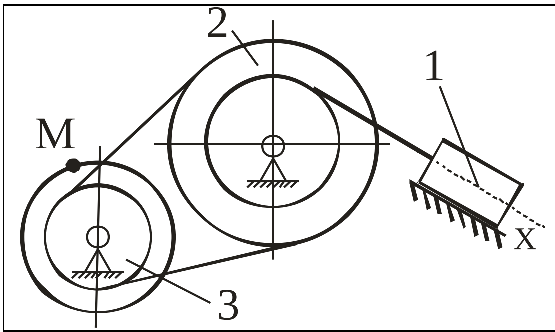
ρ_{23} =10 см; M = 80 Н·см; f=0,1

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 40, см; r_2 = 18, см;

R_3 = 40, см; r_3 = 18, см, $\alpha = 45^\circ$

№28.



Визначити закон руху тіла 1.

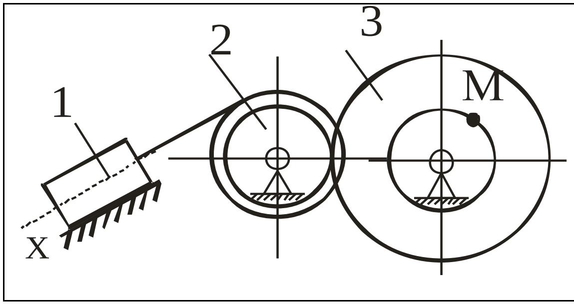
ρ_{23} =10 см; M = 80 Н·см; f=0,1

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 40, см; r_2 = 20, см;

R_3 = 40, см; r_3 = 15, см, $\alpha = 60^\circ$

№29.



Визначити закон руху тіла 1.

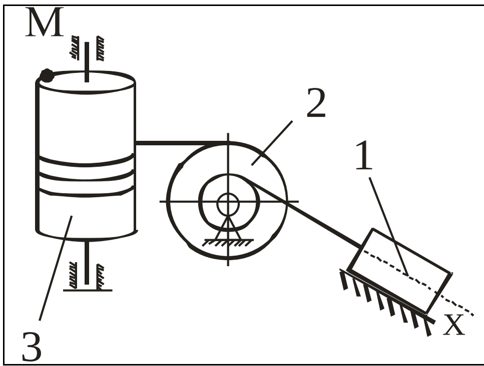
ρ_{23} =10 см; M =80 Н·см; f=0,1

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 25, см; r_2 = 20, см;

R_3 = 50, см; r_3 = 25, см, $\alpha = 30^\circ$

№30.



Визначити закон руху тіла 1.

ρ_2 = 10 см; M = 80 Н·см; f=0,1

m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг;

m_3 =4, кг; R_2 = 30, см; r_2 = 15, см;

R_3 = 20, см; r_3 = 0, см, $\alpha = 45^\circ$

4. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ МОДУЛЬНОНОЇ РОБОТИ

4.1 ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ №1. ПРЯМА ЗАДАЧА

Закон руху матеріальної точки масою 1 кг гідравлічного пожежного струменю заданий у векторному вигляді $\vec{r} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$. Визначити рівнодіючу сил.

Номер	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_3(t)$
41	$3t^2 + 2t + 1$	$2t^2 - 9t + 3$	$3t + 3$

Розв'язок

Для визначення рівнодіючій сили що є причиною руху матеріальної точки гідравлічного пожежного струменю використовуємо основне рівняння динаміки і вирішуємо пряму задачу.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

В скалярному вигляді основне рівняння динаміки в відповідних проекціях Декартової системи координат має вигляд:

$$\begin{cases} R_x = \sum F_x = m\ddot{x} \\ R_y = \sum F_y = m\ddot{y} \\ R_z = \sum F_z = m\ddot{z} \end{cases}$$

Закон зміни відповідних координат за часом заданий:

$$x = f_1(t) = 3t^2 + 2t + 1$$

$$y = f_2(t) = 2t^2 - 9t + 3$$

$$z = f_3(t) = 3t + 3$$

Визначимо другу похідну від цих координат за часом:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(6t+2)}{dt} = 6$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(4t-9)}{dt} = 4$$

$$\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d(3)}{dt} = 0$$

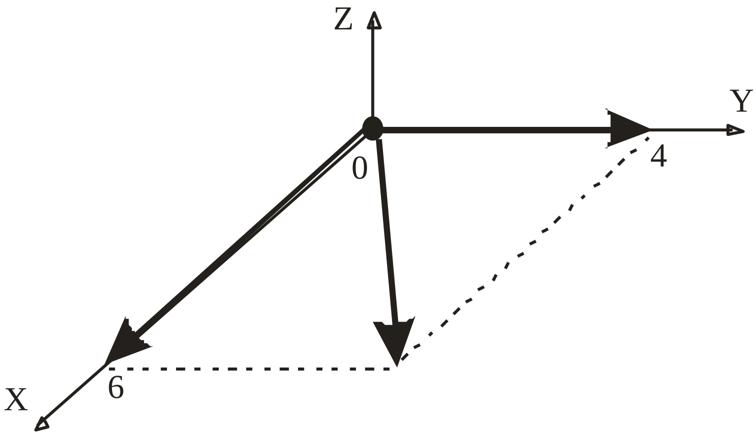
Підставляючи отримані результати в систему рівнянь, отримуємо значення проекцій рівнодіючій на вісі Декартової системи координат.

$$\begin{cases} R_x = \sum F_x = m\ddot{x} = 1кг \cdot 6м/с^2 = 6H \\ R_y = \sum F_y = m\ddot{y} = 1кг \cdot 4м/с^2 = 4H \\ R_z = \sum F_z = m\ddot{z} = 1кг \cdot 0м/с^2 = 0H \end{cases};$$

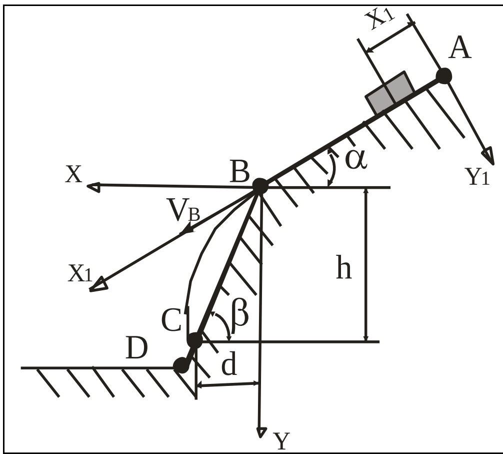
За модулем рівнодіюча дорівнює:

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k};$$

$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{52} \approx 7.21H$$

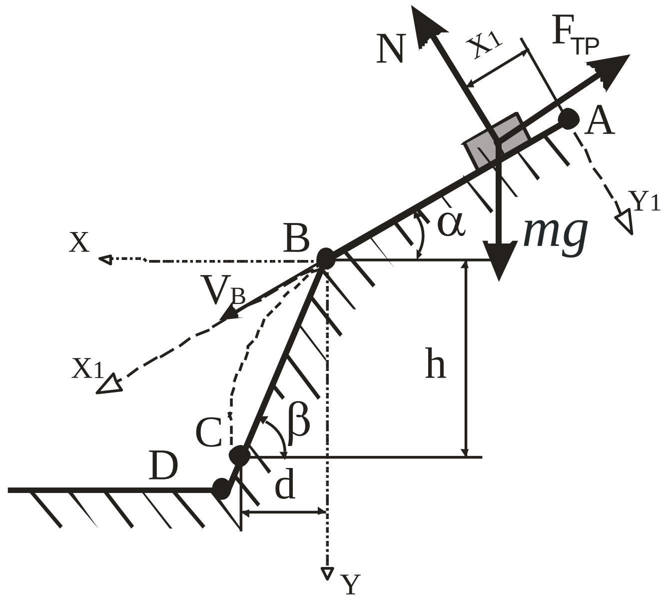


4.2 ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ №2. ЗВОРОТНЯ ЗАДАЧА

	Тіло рухається з точки A вздовж лінії AB ($AB = L$) в продовж часу τ, с. Початкова швидкість V_A, коефіцієнт тертя по площині дорівнює f. f =0,2; L=10 м; V_A =0 м/с; α = 30°; β = 45°; **Визначити невідомі**: h, м, та τ, с

Розв'язок

1. Зробимо аналіз руху твердого тіла. На дільниці AB на тверде тіло діють три сили:



mg - сила тяжіння;

N – сила реакції поверхні;

$F_{ТР}$ – сила тертя, що дорівнює $F_{ТР} = f \cdot N$.

На дільниці BC на тверде тіло діє тільки сила mg - сила тяжіння.

Таким чином, досліджуємо рух твердого тіла на двох дільницях.

2. Розглянемо рух на дільниці AB. Використовуємо основне рівняння динаміки в проекціях на координатні осі.

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \qquad m\ddot{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} F_{ix_1}, \qquad m\ddot{y}_1 = \sum_{i=1}^{n} F_{iy_1}.$$

У напрямку осі Y_1 тверде тіло не змінює свого положення, тому $\ddot{y}_1 = 0$. Використавши цю властивість, маємо:

$$0 = N - mg \cdot \cos\alpha, \quad \rightarrow \quad N = mg \cdot \cos\alpha$$

У напрямку осі X_1: $m\ddot{x}_1 = mg \cdot \sin\alpha - F_{ТР}$, або $m\ddot{x}_1 = mg \cdot \sin\alpha - f \cdot mg \cdot \cos\alpha$.

Таким чином, маємо рівняння руху:

$$\ddot{x}_1 = g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) \approx 3{,}2$$

$$\dot{x}_1 = 3{,}2 \cdot t + C_О,$$

$$x_1 = 1{,}6 \cdot t^2 + C_О \cdot t + C_1.$$

Невідомі коефіцієнти C_1, $C_О$ визначаються з початкових умов:

при $t_О$ = 0 с, $x_{О1}$ = 0 м; $\dot{x}_{О1} = V_А$ =0 м/с;

Маємо: $$0 = 1{,}6 \cdot 0^2 + C_О \cdot 0 + C_1, \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$0 = 3{,}2 \cdot 0 + C_О, \quad \rightarrow \quad C_О = 0$$

Рівняння руху твердого тіла на ділянці AB в остаточному вигляді:

$$x_1 = 1{,}6 \cdot t^2; \qquad \dot{x}_1 = 3{,}2 \cdot t$$

Для визначення часу руху на ділянці AB та швидкості в точці B використовуємо граничні умови:

при $t = \tau$ с, $x_1 = L$ =10, м;; $\dot{x}_1 = V_{\text{B}}$.

Маємо: $10 = 1{,}6 \cdot \tau^2$, $\rightarrow$ $\tau = \sqrt{\dfrac{10}{1{,}6}} = 2{,}5$ с,

тоді $V_{\text{B}} = 3{,}2 \cdot \tau = 3{,}2 \cdot 2{,}5 = 8$ м/с.

3. Розглянемо рух на дільниці BC. Використовуємо основне рівняння динаміки в проекціях на координатні осі.

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \ \rightarrow \ m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \qquad m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$$

У напрямку осі Y: $m\ddot{y} = mg$, $\rightarrow$ $\ddot{y} = g$

У напрямку осі X : $m\ddot{x} = 0$.

Таким чином маємо рівняння руху:

$\ddot{x} = 0$; $\dot{x} = C_2$; $x = C_2 \cdot t + C_3$;

$\ddot{y} = g$; $\dot{y} = g \cdot t + C_4$; $y = 0{,}5 \cdot g \cdot t^2 + C_4 \cdot t + C_5$;

Невідомі коефіцієнти C_2, C_3, C_4, C_5 визначаються з початкових умов:

при t_{O}= 0 с, x_{O}= 0 м; $\dot{x}_{\text{O}} = V_{\text{B}} \cdot \cos\alpha = 4\sqrt{3}$ м/с;

y_{O}= 0 м; $\dot{y}_{\text{O}} = V_{\text{B}} \cdot \sin\alpha = 4$ м/с;

$C_2 = 4\sqrt{3}$;

$0 = C_2 \cdot 0 + C_3$; $\rightarrow$ $C_3 = 0$

$4 = g \cdot 0 + C_4$; $\rightarrow$ $C_4 = 4$

$0 = 0{,}5 \cdot g \cdot 0^2 + C_4 \cdot 0 + C_5$; $\rightarrow$ $C_5 = 0$

Виходячи з цього, маємо рівняння руху на ділянці BC :

$$\dot{x} = 4\sqrt{3}; \qquad x = 4\sqrt{3} \cdot t;$$

$$\dot{y} = g \cdot t + 4; \quad y = 0{,}5 \cdot g \cdot t^2 + 4 \cdot t.$$

4. Визначимо висоту h виходячи з граничних умов:

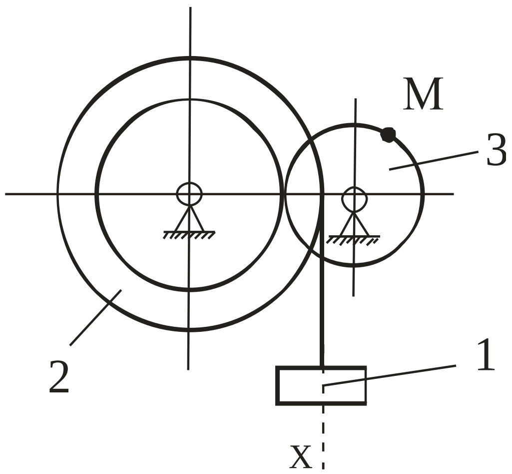
при $t = T$ с, $x = d$, $y = h$, з урахуванням $d = h / tg\beta$, при $\beta = 45^\circ$, $d = h$. $h = 4\sqrt{3} \cdot T$, $\rightarrow$ $h = 4 \cdot T$

$$4\sqrt{3} \cdot T = 0{,}5 \cdot g \cdot T^2 + 4 \cdot T; \rightarrow 4\sqrt{3} - 4 = 0{,}5 \cdot g \cdot T; \rightarrow T = 0{,}6$$

Таким чином, маємо: $h = 4 \cdot T = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$ м.

4.3 ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ № 3

Застосування теореми про зміну кінетичної енергії



m_1=12, кг; m_2= 8, кг; m_3= 4, кг;
R_2=12, см;
r_2= 8, см;
R_3=4, см;
ρ_2= 10 см;
M = 80 Н·см;

Визначити закон руху тіла 1, використовуючи **теорему про зміну кінетичної енергії**

Розв'язання

Використовуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної системи:

$$T - T_O = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

T, T_O - кінетична енергія в кінцевий та початковий момент руху;

$\sum_{i=1}^{n} A_i$ - сума робіт всіх зовнішніх сил та моментів

У початковий момент часу система тіл була нерухома, тому швидкості всіх точок та тіл дорівнювали нулю. Таким чином, кінетична енергія в початковий момент руху T_O = 0.

Припускаємо, що тіло 1 рухається вниз і має переміщення S_1 та швидкість V_1.

Визначимо кінетичну енергію матеріальної системи.

Матеріальна система складається з трьох тіл певної маси, тому кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі кінетичних енергій трьох тіл:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

де

$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}$ - кінетична енергія 1-го тіла, яке рухається поступально;

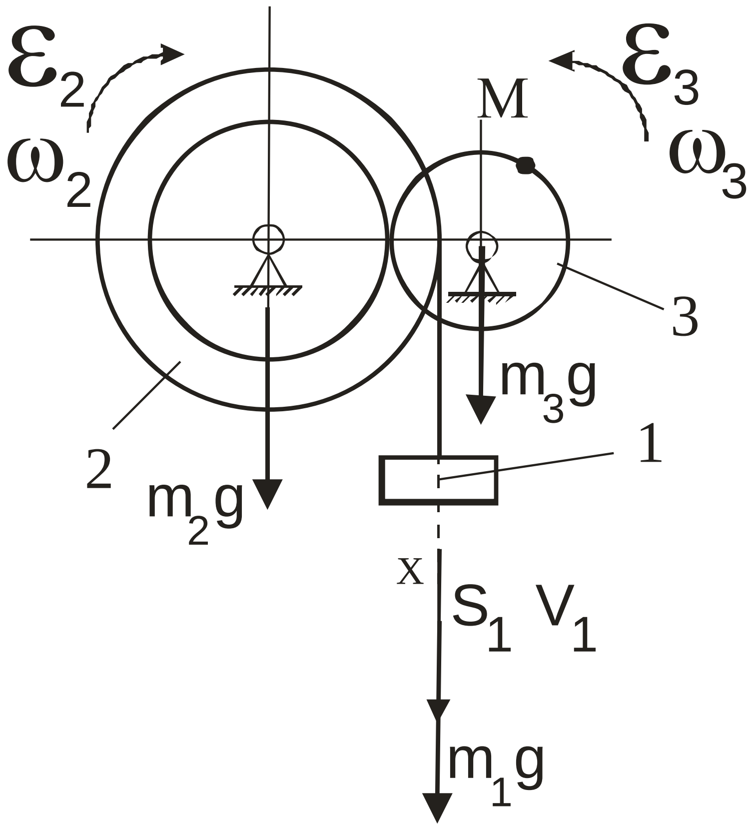
$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2}$ - кінетична енергія 2-го тіла, яке обертається;

$T_3 = \frac{J_3 \omega_3^2}{2}$ - кінетична енергія 3-го тіла, яке обертається;

V_1 – швидкість 1-го тіла;

$J_2, \quad J_3$ – моменти інерції 2-го та 3-го тіла;

$\omega_2, \quad \omega_3$ – кутові швидкості 2-го та 3-го тіла.



Швидкість точки A дорівнює швидкості тіла 1, тобто $V_1 = V_A$. Крім того, точка A належить тілу 2, що здійснює обертальний рух, тому швидкість цієї точки визначаємо за формулою:

$$V_A = \omega_2 \cdot R_2 .$$

Виходячи з цього, маємо залежність між кутовою швидкістю ω_2 та швидкістю V_1

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2}$$

Визначимо залежність між кутовою швидкістю ω_3 та швидкістю V_1. Для цього скористаємось тим, що точка B належить тілу 2 та тілу 3, тобто маємо з одного боку:

$$V_{\text{B}} = \omega_3 \cdot R_3,$$

а з іншого:

$$V_{\text{B}} = \omega_2 \cdot r_2.$$

Таким чином:

$$\omega_3 \cdot R_3 = \omega_2 \cdot r_2.$$

Виходячи з цього маємо:

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{r_2}{R_3} = V_1 \frac{1}{R_2} \frac{r_2}{R_3}.$$

Моменти інерції 2-го та 3-го тіла визначаємо за формулами:

$$J_2 = m_2 \cdot \rho_2^2; \quad J_3 = m_3 \cdot \frac{R_3^2}{2}$$

Запишемо кінетичні енергії тіл матеріальної системи через швидкість 1-го тіла:

$T_1 = \dfrac{m_1 V_1^2}{2} = \dfrac{12 \cdot V_1^2}{2} = 6 \cdot V_1^2$ – кінетична енергія 1-го тіла

$T_2 = \dfrac{J_2 \omega_2^2}{2} = \dfrac{m_2 \cdot \rho_2^2}{2} \cdot \left(\dfrac{V_1}{R_2}\right)^2 = \dfrac{8 \cdot 10^2}{2} \cdot \left(\dfrac{V_1}{12}\right)^2 = 2{,}78 \cdot V_1^2$ – кінетична енергія 2-го тіла

$T_3 = \dfrac{J_3 \omega_3^2}{2} = m_3 \cdot \dfrac{R_3^2}{2 \cdot 2} \cdot \left(\dfrac{V_1}{R_2} \dfrac{r_2}{R_3}\right)^2 = 4 \cdot \dfrac{R_3^2}{2 \cdot 2} \cdot \left(\dfrac{V_1}{12} \dfrac{8}{R_3}\right)^2 = 0{,}44 \cdot V_1^2$ – кінетична енергія 3-го тіла

Кінетична енергія матеріальної системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 6 \cdot V_1^2 + 2{,}78 \cdot V_1^2 + 0{,}44 \cdot V_1^2 = 9{,}22 \cdot V_1^2$$

Визначимо роботу сил та моментів, що діють на матеріальну систему:

На матеріальну систему діють:

- сили тяжіння ($m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$), які прикладені до центру ваги тіл 1 -3;
- обертальний момент M, прикладений до 3-го тіла.

За визначенням робота сили є скалярний добуток вектора сили на вектор переміщення точки прикладення сили. Робота моменту є добуток моменту на кут обертання тіла до якого прикладений момент.

Таким чином, маємо:

$$A(m_1 g) = m_1 \vec{g} \cdot \vec{S}_1 = m_1 g \cdot S_1 = 120 \cdot S_1;$$

$$A(m_2 g) = m_2 \vec{g} \cdot \vec{S}_{O2} = m_2 g \cdot 0 = 0;$$

$$A(m_3 g) = m_3 \vec{g} \cdot \vec{S}_{03} = m_3 g \cdot 0 = 0;$$

$$A(M) = M \cdot \varphi_3.$$

Визначимо роботу моменту через переміщення S_1. Для цього скористаємось співвідношенням:

$$\omega_3 = \frac{V_1}{R_2}\frac{r_2}{R_3}, \text{ тоді } \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{dS_1}{dt}\frac{1}{R_2}\frac{r_2}{R_3};$$

$$d\varphi_3 = dS_1 \frac{1}{R_2}\frac{r_2}{R_3}; \text{ і далі } \varphi_3 = S_1 \frac{1}{R_2}\frac{r_2}{R_3}$$

$$A(M) = M \cdot \varphi_3 = M \cdot S_1 \frac{1}{R_2}\frac{r_2}{R_3} = 80 \cdot S_1 \frac{1}{12}\frac{8}{4} = 13{,}33 \cdot S_1,$$

повна робота дорівнює алгебраїчній сумі всіх робіт:

$$A = \sum_{i=1}^{4} A_4 = A(m_1 g) + A(m_2 g) + A(m_3 g) + A(M) =$$

$$120 \cdot S_1 + 13{,}33 \cdot S_1 = 133{,}33 \cdot S_1$$

Використовуємо закон зміни кінетичної енергії матеріальної системи:

$$T - T_{\text{O}} = \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

звідки

$$9{,}22 \cdot V_1^2 = 133{,}33 \cdot S_1$$

$$V_1^2 = 14{,}44 \cdot S_1$$

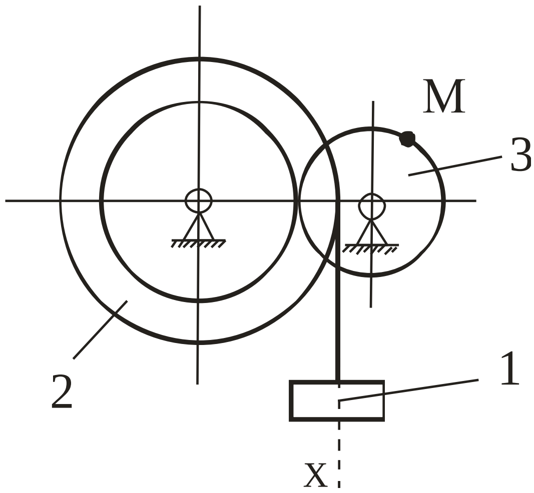
$$V_1 = \sqrt{14{,}44 \cdot S_1}, \text{ або } \frac{dS_1}{dt} = \sqrt{14{,}44} \cdot S_1^{0,5}$$

$$S_1^{-0,5} dS_1 = \sqrt{14{,}44} \cdot dt, \quad \int S_1^{-0,5} dS_1 = \int \sqrt{14{,}44} \cdot dt, \quad S_1 = 3{,}61 \cdot t^2.$$

Остаточно маємо

$$S_1 = 3{,}61 \cdot t^2; \quad V_1 = 7{,}22 \cdot t$$

4.4 ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ №4
Застосування рівняння Лагранжа 2-го роду



m_1 =12, кг; m_2 = 8, кг; m_3 = 4, кг;
R_2 =12, см; r_2 = 8, см;
R_3 =4, см; ρ_2 = 10 см;
M = 80 Н·см;

Визначити закон руху тіла 1 використовуючи **рівняння Лагранжа 2-го роду**

Розв'язання

Рівняння Лагранжа 2-го роду має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_X$$

T - кінетична енергія матеріальної системи;
Π – потенціальна енергія матеріальної системи;
Q_X - узагальнені неконсервативні сили;
x - узагальнена координата;
$\dot{x}$ - узагальнена швидкість;

Матеріальна система має одну ступінь вільності, тому всі переміщення матеріальних точок системи можна визначити через переміщення однієї узагальненої координати. За узагальнену координату вибираємо переміщення 1-го тіла.

Визначимо кінетичну енергію матеріальної системи використовуючи узагальнену швидкість $\dot{x}$.

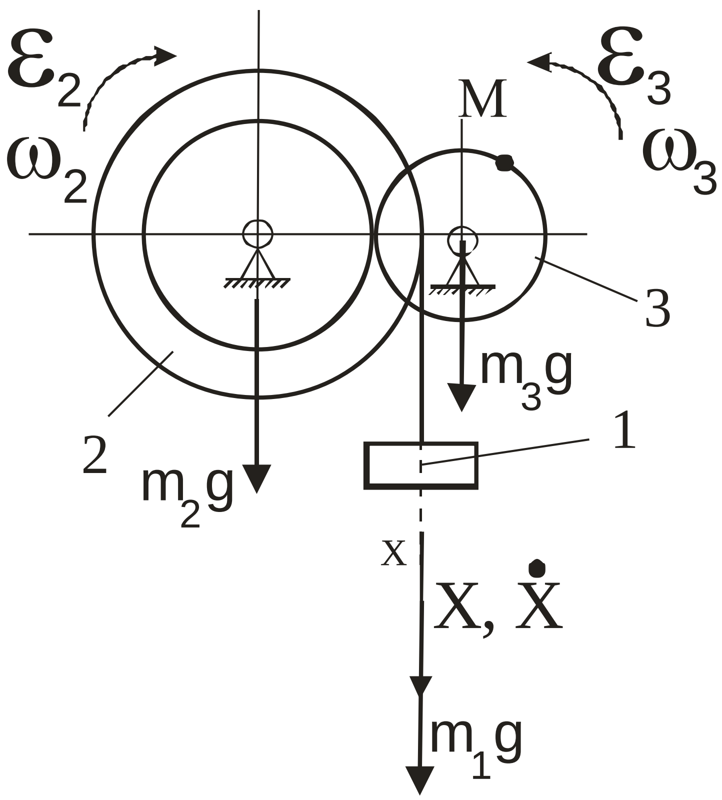
$T_1 = \dfrac{m_1 \cdot \dot{x}^2}{2}$ - кінетична енергія 1-го тіла, яке рухається поступально;

$T_2 = \dfrac{J_2 \omega_2^2}{2}$ - кінетична енергія 2-го тіла, яке обертається;

$T_3 = \dfrac{J_3 \omega_3^2}{2}$ - кінетична енергія 3-го тіла, яке обертається.

Враховуючи результати попередньої задачі, запишемо значення кутових швидкостей через узагальнену швидкість:

$$\omega_2 = \frac{\dot{x}}{R_2}; \quad \omega_3 = \frac{\dot{x}}{R_2}\frac{r_2}{R_3}$$



Моменти інерції 2-го та 3-го тіла визначаємо за формулами:

$$J_2 = m_2 \cdot \rho_2^2; \quad J_3 = m_3 \cdot \frac{R_3^2}{2}$$

Таким чином, маємо:

$T_1 = \dfrac{m_1\dot{x}^2}{2} = \dfrac{12 \cdot \dot{x}^2}{2} = 6 \cdot \dot{x}^2$ кінетична енергія 1-го тіла;

$T_2 = \dfrac{J_2\omega_2^2}{2} = \dfrac{m_2 \cdot \rho_2^2}{2} \cdot \left(\dfrac{\dot{x}}{R_2}\right)^2 = \dfrac{8 \cdot 10^2}{2} \cdot \left(\dfrac{\dot{x}}{12}\right)^2 = 2{,}78 \cdot \dot{x}^2$ - кінетична енергія 2-го тіла;

$T_3 = \dfrac{J_3\omega_3^2}{2} = m_3 \cdot \dfrac{R_3^2}{2 \cdot 2} \cdot \left(\dfrac{V_1}{R_2}\dfrac{r_2}{R_3}\right)^2 = 4 \cdot \dfrac{R_3^2}{2 \cdot 2} \cdot \left(\dfrac{\dot{x}}{12}\dfrac{8}{R_3}\right)^2 = 0{,}44 \cdot \dot{x}^2$ - кінетична енергія 3-го тіла.

Кінетична енергія матеріальної системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 6 \cdot \dot{x}^2 + 2{,}78 \cdot \dot{x}^2 + 0{,}44 \cdot \dot{x}^2 = 9{,}22 \cdot \dot{x}^2$$

Визначимо потенційну енергію Π матеріальної системи, яка складається з потенційних енергій сил тяжіння:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 .$$

Потенційна енергія сили за визначенням – це робота цієї сили з протилежним знаком:

$$\Pi_1 = -m_1 g \cdot x = -120 \cdot x;$$
$$\Pi_2 = -m_2 g \cdot 0 = 0;$$
$$\Pi_3 = -m_3 g \cdot 0 = 0.$$

Таким чином потенційна енергія системи:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = -120x .$$

Узагальнені неконсервативні сили Q_X – це коефіцієнт у формулі для визначення роботи сил при відповідній узагальненій координаті x.

Тобто, визначимо роботу неконсервативних сил на узагальненому переміщенні x. Визначимо роботу моменту M, для чого скористаємось співвідношенням:

$$A(M) = M \cdot \varphi_3; \text{ де } \varphi_3 = x \cdot \frac{1}{R_2} \frac{r_2}{R_3},$$

тоді $A(M) = M \cdot \dfrac{1}{R_2} \dfrac{r_2}{R_3} \cdot x;$

таким чином маємо $Q_x = M \cdot \dfrac{1}{R_2} \dfrac{r_2}{R_3} = 80 \cdot \dfrac{1}{12} \dfrac{8}{4} = 13{,}33.$

Результати для кінетичної, потенціальної енергії та узагальнених сил підставимо в рівняння Лагранжа 2-го роду.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{x}} + Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(9{,}22 \cdot \dot{x}^2)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial(9{,}22 \cdot \dot{x}^2)}{\partial x} = -\frac{\partial(-120 \cdot x)}{\partial x} + 13{,}33$$

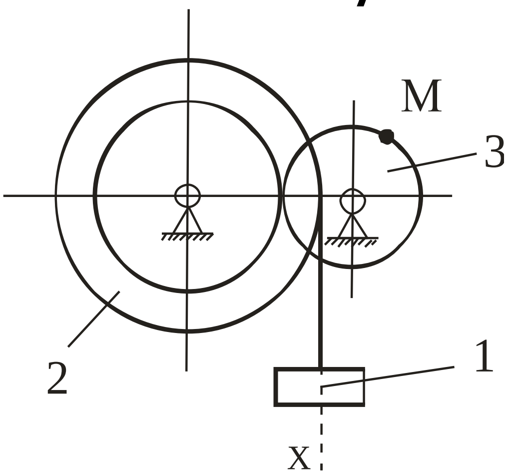
$$18{,}44 \cdot \ddot{x} - 0 = 120 + 13{,}33,$$

звідки отримаємо $\ddot{x} = 7{,}22$ - диференційне рівняння руху.

У початковий момент часу система була нерухомою, $\dot{x} = 0$ і $x = 0$, тоді

$$\dot{x} = 7{,}22 \cdot t; \; x = 3{,}61 \cdot t^2 .$$

4.5 ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ №5. Застосування загального закону динаміки



m_1=12, кг; m_2= 8, кг; m_3= 4, кг;
R_2=12, см; r_2= 8, см;
R_3=4, см; ρ_2= 10 см;
M = 80 Н·см;

Визначити закон руху тіла 1, використовуючи **загальний закон динаміки**

Розв’язання.

Розглянемо як рухаються тіла матеріальної системи. Тіло 1 рухається поступально, тіло 2 та 3 здійснюють обертальний рух.

Для визначення закону руху тіла 1 використовуємо загальний закон динаміки – сума робіт зовнішніх сил та сил інерції на будь якому елементарному переміщенні дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{S}+\sum_{i=1}^{k}\vec{F}_i^{\,И}\cdot\delta\vec{S}=0.$$

За визначенням сила інерції - $\vec{F}^{\,И}=-m\cdot\vec{a}$, момент сили інерції $M(\vec{F}^{\,И})=-J\cdot\varepsilon$.

Розглянемо, які зовнішні сили та сили інерції діють на нашу механічну систему:

Зовнішні сили:

- сили тяжіння $-m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$;
- зовнішній момент - M .

Сили та моменти сил інерції:

- сили інерції – $\vec{F}_1^{\,И}=-m\cdot\vec{a}_1$;
- моменти сил інерції - $M_2^{И}=-J_2\cdot\varepsilon_2$, $M_3^{И}=-J_3\cdot\varepsilon_3$.

Розглянемо роботу всіх силових факторів на елементарному переміщенні першого тіла δS_1. Використовуємо співвідношення, що отримані під час вирішення попередніх задач:

Моменти інерції 2-го та 3-го тіла визначаємо за формулами:

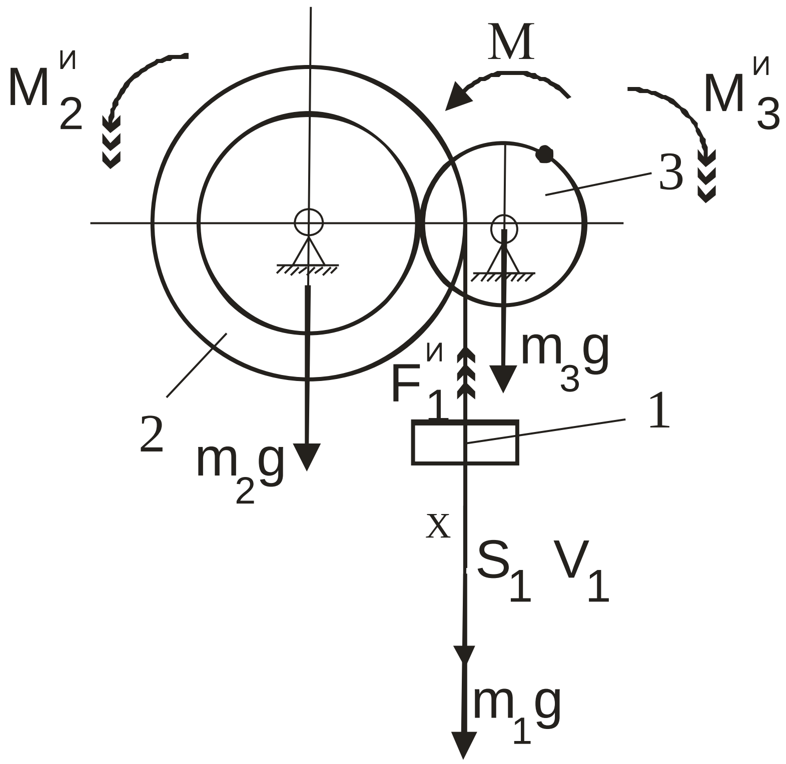
$$J_2 = m_2 \cdot \rho_2^2; \quad J_3 = m_3 \cdot \frac{R_3^2}{2}$$

Співвідношення між кутами обертання тіл та переміщенням 1-го тіла:

$$\varphi_2 = S_1 \frac{1}{R_2}, \quad \varphi_3 = S_1 \frac{1}{R_2} \frac{r_2}{R_3},$$

За визначенням:

$$\varepsilon_2 = \ddot{\varphi}_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2},\ \varepsilon_3 = \ddot{\varphi}_3 = \frac{d^2\varphi_3}{dt^2},\ a_1 = \ddot{S}_1 = \frac{d^2 S_1}{dt^2}.$$



Робота зовнішніх сил:

$$A(m_1 g) = m_1 \vec{g} \cdot \vec{S}_1 = m_1 g \cdot \delta S_1 = 120 \cdot \delta S_1;$$
$$A(m_2 g) = m_2 \vec{g} \cdot \vec{S}_{O2} = m_2 g \cdot 0 = 0;$$
$$A(m_3 g) = m_3 \vec{g} \cdot \vec{S}_{O3} = m_3 g \cdot 0 = 0;$$
$$A(M) = M \cdot \delta\varphi_3 = M \cdot \delta S_1 \frac{1}{R_2} \frac{r_2}{R_3} = 80 \cdot \delta S_1 \frac{1}{12} \frac{8}{4} = 13{,}33 \cdot \delta S_1.$$

Робота сил та моментів сил інерції:

$$A(\vec{F}_1^И) = m \cdot \vec{a}_1 \cdot \delta\vec{S}_1 = -m_1 a_1 \cdot \delta S_1 = -12 \cdot \ddot{S}_1 \cdot \delta S_1;$$

$$A(M_2^И) = -J_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \delta\varphi_2 = -m_2 \cdot \rho_2^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 \cdot \delta\varphi_2 =$$

$$= -8 \cdot 10^2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \ddot{S}_1 \cdot \frac{1}{12} \cdot \delta S_1 = -5{,}55 \cdot \ddot{S}_1 \cdot \delta S_1 \quad ;$$

$$A(M_3^И) = -J_3 \cdot \varepsilon_3 \cdot \delta\varphi_3 = -m_3 \cdot \frac{R_3^2}{2} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot \delta\varphi_3 =$$

$$= -m_3 \cdot \frac{R_3^2}{2} \cdot \frac{1}{R_2}\frac{r_2}{R_3} \cdot \ddot{S}_1 \cdot \frac{1}{R_2}\frac{r_2}{R_3} \cdot \delta S_1 = \quad .$$

$$= -4 \cdot \frac{R_3^2}{2} \cdot \frac{1}{12}\frac{8}{R_3} \cdot \ddot{S}_1 \cdot \frac{1}{12}\frac{8}{R_3} \cdot \delta S_1 = -0{,}89 \cdot \ddot{S}_1 \cdot \delta S_1$$

Запишемо загальний закон динаміки:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{S} + \sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i^{И} \cdot \delta\vec{S} = 0$$

$$A(m_1 g) + A(m_2 g) + A(m_3 g) + A(M) + A(\vec{F}_1^{И}) + A(M_2^{И}) + A(M_3^{И}) = 0$$

$$120 \cdot \delta S_1 + 0 + 0 + 13{,}33 \cdot \delta S_1 - 12 \cdot \ddot{S}_1 \cdot \delta S_1 - 5{,}55 \cdot \ddot{S}_1 \cdot \delta S_1 - 0{,}89 \cdot \ddot{S}_1 \cdot \delta S_1 = 0$$

$$133{,}33 \cdot \delta S_1 = 18{,}44 \cdot \ddot{S}_1 \cdot \delta S_1, \qquad 18{,}44 \cdot \ddot{S}_1 = 133{,}33$$

$$\ddot{S}_1 = 7{,}22.$$

У початковий момент часу система була нерухомою, тобто $\dot{S}_1 = 0$, $S_1 = 0$. Виходячи з цього, знаходимо закон руху:

$$\dot{S}_1 = 7{,}22t \quad \text{та} \quad S_1 = 3{,}61t^2$$

Отримані закони руху тіла 1 при розв’язанні задач № 3 -5 співпадають з точністю до позначень, що свідчить про правильність використання основних законів динаміки системи.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Укладачі: **Вамболь** Сергій Олександрович
Міщенко Ігор Вікторович
Хохлова Наталія Володимирівна

Технічна механіка
Розділ «Динаміка»
Методичні вказівки до виконання контрольної (модульної) роботи №4

Відповідальний за випуск Н.В. Хохлова

Підп. до друку 20.03.2015 р. Формат 60x84 1/16
Папір 80 г/см^2. Друк ризограф. Умовн.-друк. арк. 2,8
Тираж 50 прим. Вид № /15 Зам № /15

Сектор редакційно-видавничої діяльності
Національного університету цивільного захисту України
61023, Харків, вул. Чернишевська, 94