

**АКАДЕМІЯ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ**  
**КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ**

**В.І. Лавінський, С.О. Вамболь, В.М. Халипа, І.В. Міщенко**

**“ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА”**  
**Розділ “ОПР МАТЕРІАЛІВ”**  
**Конспект лекцій**

Харків 2006

Схвалено для використання у  
навчально-виховному процесі  
протокол від 25.01.2006 р., № 5  
засідання методичної ради АЦЗУ

Рецензенти: - професор кафедри прикладної механіки АЦЗУ,  
доктор техн. наук, професор М.І. Іванов,  
- доцент кафедри теоретичної механіки та машинознавства,  
Національного аерокосмічного університету “ХАІ”,  
канд. техн. наук. В.М. Павленко

“Прикладна механіка”. Розділ “Опір матеріалів”. Конспект лекцій / В.І. Лавінський, С.О. Вамболь, В.М. Халипа, І.В. Міщенко. – Харків: АЦЗУ, 2006 – 112 с.

Викладено питання опіру матеріалів. Наведений теоретичний матеріал і приклади, які мають практичне значення. Посібник містить традиційний матеріал курсу опір матеріалів.

Для курсантів, студентів та слухачів вищих навчальних закладів всіх форм навчання. Може бути корисним для самостійного вивчення курсу прикладної механіки, розділ “Опір матеріалів”, для вирішування задач розрахунків напруженого та деформованого стану елементів інженерних конструкцій, які знаходяться під дією зовнішніх силових факторів.

Відповідальний за випуск І.В. Міщенко

## **ВСТУП.**

Конспект лекцій, призначений для курсантів, студентів і слухачів відповідно до програми вищої освіти у напрямі „Пожежна безпека”, повністю обіймає усі розділи навчальної програми курсу опору матеріалів, надаючи можливість ознайомитися й опрацювати теми, що винесені на аудиторні заняття та для самостійної роботи. У ньому безпосередньо відбитий досвід роботи кафедр прикладної механіки Академії цивільного захисту України та опору матеріалів Національного технічного університету „ХП”.

В конспекті лекцій розглянуто такі розділи курсу: розтягання-стискання, кручення стрижнів, геометричні характеристики плоских перетинів, статично невизначені системи, пружно-деформований стан балок при поперечному вигині, зсув (зріз), стійкість конструкцій.

Викладання лекційного курсу доповнюється багатьма ілюстраціями та рішенням практичних задач і прикладів, що дозволяє більш поглиблено засвоїти теоретичні положення та поняття опору матеріалів.

Конспект лекцій підготували викладачі кафедри прикладної механіки АЦЗУ при безпосередній участі та загальному редагуванні завідуючим кафедрою опору матеріалів НТУ „ХП” д.т.н., професором В.І.Лавінським.

Автори сподіваються, що конспект лекцій виявиться корисним і допоможе курсантам, студентам і слухачам оволодіти сучасними методами розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість, які застосовуються в опорі матеріалів – однієї з основних технічних дисциплін, що формують мислення майбутніх фахівців, і розвитку якої сприяли посібники видатних вчених – В.Л.Кирпичова, С.П.Тимошенка, М.М.Беляєва, В.І.Феодосьєва, Г.П.Писаренка та ін.

Автори висловлюють подяку доцентам кафедри опору матеріалів НТУ „ХП” Б.Н.Киркачу і В.Л.Хавіну за допомогу при підготовці рукопису до видання.

## **Лекція № 1. ВСТУП. ЗАДАЧІ І МЕТОДИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ.**

Опір матеріалів – це інженерна дисципліна, що дає основи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів інженерних конструкцій (споруджень, машин, агрегатів, металоконструкцій і т.п.).

**Міцність** – здатність твердого тіла сприймати зовнішні навантаження і впливи без руйнування.

**Жорсткість** – здатність твердого тіла незначно змінювати розміри та форму під дією зовнішніх навантажень і впливів.

**Стійкість** – здатність твердого тіла сприймати зовнішні навантаження і впливи без порушення початкової форми рівноваги.

Опір матеріалів, будучи азбукою розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість, базується і спирається на основні закони і теореми теоретичної механіки та має мету створити практичні прийоми розрахунків найбільш типових елементів конструкцій. При цьому широко використовуються наближені методи. Вимога довести рішення кожної практичної задачі до конкретного результату змушує в опорі матеріалів використовувати гіпотези-припущення, що виправдуються надалі зіставленням розрахункових даних з експериментом. Методами опору матеріалів ведуться практичні розрахунки та визначаються необхідні (міцні чи надійні) розміри деталей, машин і споруджень.

Задача опору матеріалів полягає не тільки в тому, щоб виявити внутрішні особливості об'єктів під дією прикладених навантажень, але й у тому, щоб можна було дати висновок при оцінці працездатності та практичної придатності розглянутої конструкції з позицій міцності, жорсткості і стійкості.

### **РОЗРАХУНКОВА СХЕМА ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ.**

В опорі матеріалів дослідження питання про міцність реального об'єкта починається з вибору розрахункової схеми, у якій схематизуються властивості матеріалу, вводяться спрощення в геометрію реального об'єкта, у системи зовнішніх сил. Іншими словами, об'єкт звільняється від несуттєвих особливостей у розрахунках на міцність і жорсткість.

**СХЕМАТИЗАЦІЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ.** В опорі матеріалів вводиться і вивчається модель ідеально пружного твердого тіла, матеріал якого є однорідним, суцільним, пружним та ізотропним.

**Однорідність матеріалу** – це незалежність його властивостей від величини виділеного об'єму (у всіх точках виділеного об'єму тіла властивості матеріалу однакові).

**Суцільність матеріалу** – це властивість цілком і безупинно заповнювати займаний тілом об'єм (атомістична теорія дискретного стану речовини в увагу не приймається).

**Пружність** – це здатність твердого тіла цілком відновлювати свої початкові розміри та форму після зняття зовнішніх навантажень.

**Ізотропність** – це незалежність властивостей тіла від орієнтації у виділеному об'єму (властивості матеріалу у всіх напрямках однакові).

**СХЕМАТИЗАЦІЯ ГЕОМЕТРІЇ РЕАЛЬНОГО ОБ'ЄКТА.** В опорі матеріалів геометрична форма реального об'єкта приводиться, в основному, до типових схем стержня, оболонки (пластини) і масиву (тривимірного тіла).



Рис. 1.1

**Стержень** (брус, балка, вал) – тіло, у якого один розмір (довжина) значно більше двох інших. Стержень може бути утворений шляхом переміщення плоскої фігури уздовж лінії, що називається віссю стержня, а плоска фігура з центром ваги на осі і перпендикулярна їй – поперечним перерізом (рис.1.1). У центрі ваги поперечного перерізу вводиться локальна декартова система координат  $OXY$ . За формою осі стержні можуть бути прямолінійними та криволінійними. Стержень може мати постійний і перемінний уздовж осі поперечний переріз, форма якого може бути довільною (прямокутною, круглою, кільцевою і т.п.) та профільною стандартною (двотавровою, швелерною, кутниковою).

**Оболонка** (пластина) – тіло, у якого один з розмірів (товщина) значно менше двох інших. Оболонка обмежена криволінійними поверхнями, пластина – тіло, обмежене двома площинами.

**Масив** (об'ємне тіло) – тіло, розміри якого мають один порядок.

### **КЛАСИФІКАЦІЯ СИЛ. СИЛИ ЗОВНІШНІ ТА ВНУТРІШНІ.**

Сила – це механічна міра взаємодії тіл чи фізичних полів. Сили підрозділяються на зовнішні та внутрішні.

**Зовнішні сили.** Зовнішні сили підрозділяються на **активні** і **реактивні** (реакції зв'язків). **Активні** навантаження, у свою чергу, підрозділяються на **поверхневі** - це результат взаємодії двох тіл за допомогою контакту, та **об'ємні** - результат дії на тіло полів різної природи (сили ваги, інерції, електромагнітні).

За характером навантаження стержнів поверхневі сили розділяються на **зосереджені** (зосереджена сила  $F$ , [Н]; зосереджений момент  $M$ , [Н·м]) і **розподілені** (рівномірно чи нерівномірно розподілене навантаження  $q$ , [Н/м] та розподілений момент  $m$ , [ $\frac{Н \cdot м}{м}$ ]).

За характером дії зовнішні сили розділяються на **статичні** та **динамічні**. При статичному навантаженні прискореннями часток деформованого тіла можна зневажити, при динамічному навантаженні виникають значні прискорення часток деформованого тіла і, як наслідок, з'являються значні сили інерції, якими зневажити не можна.

**Внутрішні сили (зусилля)** виникають між суміжними частинами тіла в результаті їхньої взаємодії при його навантаженні. Для визначення внутрішніх зусиль в опорі матеріалів використовується **метод перерізів**, що складається в послідовному виконанні наступних операцій (див. рис.1.2).

Будемо вважати, що стержень навантажений статично урівноваженою системою зовнішніх сил, яка включає активні та реактивні.

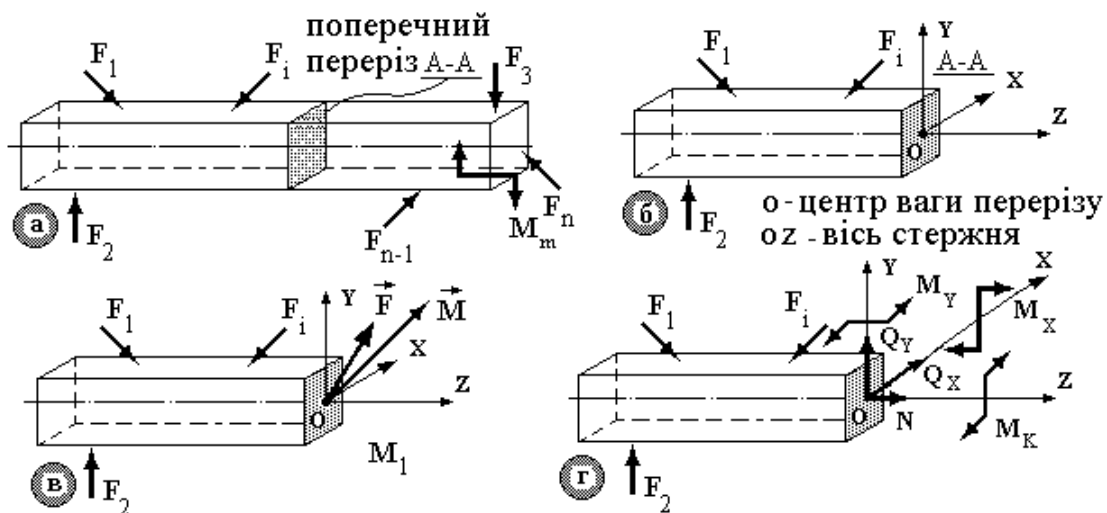


Рис.1.2.

1. Внутрішні зусилля виявляються, якщо у деякому поперечному перерізі А-А уявно розділимо стержень площиною, що збігається з перерізом А-А (рис. 1.2а). Внутрішні зусилля визначають взаємодії між частками стержня, розташованого з обох сторін уявного перерізу А-А, причому за принципом дії

та протидії ліворуч і праворуч від перерізу А-А є взаємними: рівними по величині та протилежними по напрямку, і кожна з частин знаходиться в рівновазі.

2. Далі відкидаємо одну з частин (рис. 1.2б).

3. Дію відкинутої частини, що залишилася, заміняємо внутрішніми зусиллями, які визначаються за принципом дії та протидії. Вони взаємні за принципом дії та протидії. Закон неперервного розподілу внутрішніх зусиль у перерізі А-А невідомий. Внутрішні зусилля у перерізі розподіляються складним образом і довільно орієнтованими в декартовій системі координатних осей X, Y, Z, початок якої міститься в центрі ваги перерізу А-А.

4. Відповідно до теореми про приведення сил до довільної точки простору в загальному випадку внутрішні зусилля приводяться в центр ваги перерізу до головного вектора  $\vec{F}$  і головного моменту  $\vec{M}$  (рис. 1.2в), приведеного до центру ваги перерізу. Розкладаючи головні вектори  $\vec{F}$  і  $\vec{M}$  по трьом напрямкам X, Y, Z, одержуємо, що результат дії внутрішніх зусиль приводиться до поперечних сил  $Q_x$  і  $Q_y$ , поздовжньої сили N, згинальним моментам  $M_x$  і  $M_y$  і крутильному моменту  $M_k$  (рис. 1.2г). Складові  $\vec{F}$  і  $\vec{M}$  мають загальну назву **внутрішніх силових факторів**.

Для частини, що залишилась і знаходиться під дією зовнішніх і внутрішніх сил, складаємо **рівняння рівноваги**, з яких відповідно знаходимо внутрішні силові фактори  $Q_x, Q_y, N, M_x, M_y, M_k$  в поперечному перерізі:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} + Q_x &= 0 \quad (1); & \sum F_{iy} + Q_y &= 0 \quad (2); & \sum F_{iz} + N &= 0 \quad (3); \\ \sum M_{ix} + M_x &= 0 \quad (4); & \sum M_{iy} + M_y &= 0 \quad (5); & \sum M_{iz} + M_k &= 0 \quad (6), \end{aligned}$$

де  $\sum F_{ix,y,z}$  і  $\sum M_{ix,y,z}$  відповідно суми проекцій усіх зовнішніх сил на осі X, Y, Z та суми моментів усіх зовнішніх сил щодо осей X, Y, Z. Внутрішні силові фактори  $Q_x, Q_y, N, M_x, M_y, M_k$  є інтегральними рівнодіючими силами і моментами внутрішніх зусиль, що насправді складним образом розподіляються по поперечному перерізу.

По виникаючим у перерізі внутрішнім силовим факторам проводиться класифікація типів навантаження стержня (видів деформування). Так, якщо із шести внутрішніх силових факторів у перерізі відмінною від нуля є тільки поздовжня сила  $N \neq 0$ , то в стержні реалізується розтягання-стискання; при  $M_k \neq 0$  - кручення і т.д.

**ПОНЯТТЯ ПРО НАПРУЖЕННЯ.** Мірою міцності прийнято вважати *напруження*, тобто *інтенсивність внутрішніх зусиль на одиницю площі*.

У перерізі А-А в околиці точки К виділимо нескінченно малу площу (елементарну площадку)  $\Delta A$ , на яку діє елементарна сила  $\Delta \vec{R}$  - рівнодіюча внутрішніх зусиль на цій частині перерізу (рис.1.3).

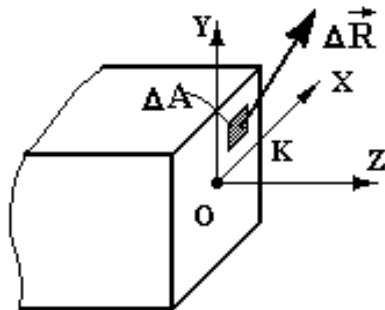


Рис. 1.3.

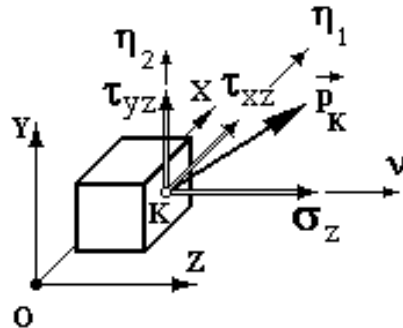


Рис. 1.4.

Середнє напруження в точці К вводиться як відношення елементарної сили  $\Delta \vec{R}$  до величини нескінченно малої площадки  $\Delta A$  в околиці точки К:

$$\Delta \vec{p} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A} \left[ \frac{H}{m^2} = Pa \right].$$

Механічні напруження, як правило, є великими величинами та розраховуються в МПа (1МПа =  $10^6$ Па).

Повне напруження в точці К одержуємо граничним переходом при стягуванні площадки  $\Delta A$  до нуля:  $\vec{p}_K = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A}$ . Розкладемо повне

напруження в точці К на складові: по нормалі  $\mathbf{v}$  і по дотичним  $\eta_1, \eta_2$  до площадки (рис.1.4). Нормальна складова  $\sigma_z$  (чи просто  $\sigma$ ) називається **нормальним напруженням**, дотичні складові  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  - **дотичними напруженнями**.

Нормальне напруження  $\sigma$  викликає деформацію **розтягання** чи **стискання**. Напруження вважається **позитивним (додатним)**, якщо викликає деформацію розтягання і **негативним (від'ємним)**, якщо - **стискання**. Надалі індекс «z» часто буде опускатися, що зв'язано з традиційним розглядом схеми стержня в опорі матеріалів.

**Дотичне напруження** викликає деформацію **зсуву (зрізу)** і вважається **позитивним**, якщо обертає розглянуту область щодо точки усередині цієї області за годинниковою стрілкою, та навпаки.

Якщо через точку тіла провести іншу площину перетину, то нормальне і дотичне напруження змінюються. **Сукупність нормальних і дотичних**



напружень на безлічі площин, що проходять через дану точку тіла, утворюють напружений стан у цій точці тіла.

**ПОНЯТТЯ ПРО ПЕРЕМІЩЕННЯ ТА ДЕФОРМАЦІЇ.** Під дією зовнішніх сил тверде тіло змінює свої розміри та форму (**деформується**). Вектор, що має початок у точці недеформованого тіла, а кінець у тій же точці деформованого тіла, називається **повним лінійним переміщенням точки**. Проекції повного переміщення на осі  $X, Y, Z$  позначаються  $u, v, w$  відповідно. Крім лінійного переміщення, можна ввести поняття **кутового переміщення**, як кута повороту між положеннями фіксованого елемента тіла в недеформованому і деформованому станах.

Для характеристики інтенсивності зміни форми та розмірів вводиться її міра – **лінійна та кутова деформації**. До навантаження тіла зафіксуємо на поверхні тіла прямий кут  $\angle BAC$  зі сторонами рівними  $s$  (рис.1.5).

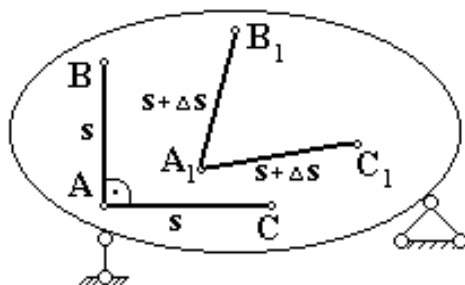


Рис. 1.5.

В результаті деформування тіла ці відстані змінилися на малі величини  $\Delta s$ . Відношення збільшення довжини відрізка  $AB$  до його початкової довжини називається **середньою деформацією** на відрізок  $s$ :  $\epsilon_{AB} = \frac{\Delta s}{s}$ . Зменшуючи

відрізок  $AB$  (наближаючи точку  $A$  до точки  $B$ ) внаслідок одержимо величину **лінійної деформації** (іноді просто **деформації**) у точці  $A$  по напрямку  $AB$ :

$$\epsilon_{AB} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s}.$$

**Кутова деформація** (**деформація зсуву, кут зсуву**) вводиться як ступінь зміни початкового прямого кута при деформуванні тіла. Кутова деформація в точці  $A$  в площині  $BAC$ :  $\gamma_{BAC} = \lim_{s \rightarrow 0} (\angle BAC - \angle B_1A_1C_1)$ .

**Сукупність лінійних та кутових деформацій по різних напрямкам і площинам для однієї точки утворює деформований стан у точці.**

В опорі матеріалів вивчаються наступні типи деформацій: **розтягання, стискання, зсув (зріз), кручення, згинання**. Тверде тіло залежно від засобу

навантаження може зазнавати як один вид деформації, так і декілька (згинання та кручення; розтягання, згинання та кручення і ін.).

Після зняття зовнішніх навантажень тверде тіло може цілком відновлювати свої початкові розміри та форму (при цьому деформації зникають) повністю або частково.

*Властивість твердого тіла цілком відновлювати свої початкові розміри та форму називається пружністю, а виникаючі при цьому деформації називаються пружними.*

*Властивість твердого тіла не цілком відновлювати свої початкові розміри та форму називається пластичністю, а виникаючі при цьому деформації називаються пластичними чи залишковими.*

**ПРИНЦИПИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ.** При розгляді багатьох питань в опорі матеріалів використовуються спрощуючі гіпотези, що носять принциповий характер.

В опорі матеріалів розглядаються кінематично незмінні системи, на які накладені достатні зовнішні зв'язки, що виключають переміщення системи в просторі як твердого цілого. При цьому переміщення будь-якої точки системи вважаються малими у порівнянні з загальними геометричними розмірами деформованого тіла. На цій підставі вводиться **принцип початкових розмірів** чи **принцип відносної жорсткості**, відповідно до якого при складанні рівнянь статичної рівноваги тіло розглядають як недеформоване, що має ті ж геометричні розміри, які воно мало до навантаження.

В опорі матеріалів розглядаються системи, для яких виконується **пропорційна залежність між переміщеннями та силами**, що викликають ці переміщення. Саме в такому вигляді Р. Гук у 1676 р. сформулював закон: « **яка деформація така і сила**», що зараз зветься **законом Гука**. Для таких систем вводиться **принцип суперпозиції** або **принцип незалежності дії сил**.

Відповідно до цього принципу, *переміщення та внутрішні сили, що виникають у пружному тілі, не залежать від порядку прикладення зовнішніх сил*. Якщо до системи прикладена група зовнішніх сил, то можна визначити напруження, переміщення і деформації від кожної сили окремо, а результат дії групи сил одержати як суму дій від кожної сили.

**Принцип незалежності дії сил є основним принципом при вирішенні більшості задач опору матеріалів.**

Наступне принципове спрощення зв'язане з впливом конкретного способу навантаження зовнішніми силами. В опорі матеріалів діє **принцип Сен-Венана: особливості навантаження стержня зовнішніми силами**

впливають на розподіл напружень та деформацій у ньому на відстанях, які не перевищують характерних розмірів перерізу стержня. На рис 1.6 показані випадки розтягання стержня різними системами зовнішніх осьових сил, що мають однакову рівнодіючу осьову силу.

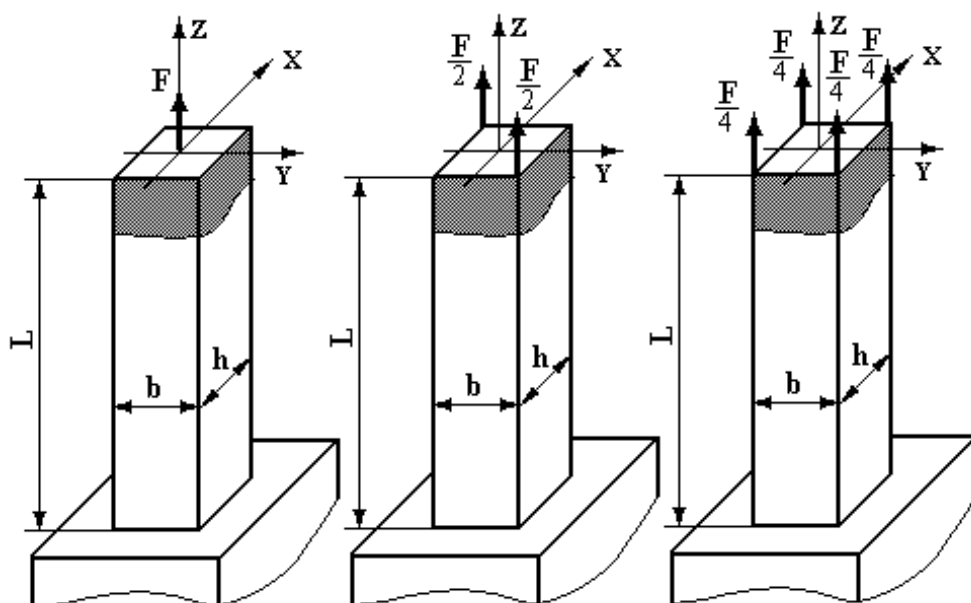


Рис.1.6.

Досить узяти до уваги тільки рівнодіючу зовнішніх сил, не цікавлячись конкретним способом навантаження. Для цього треба виключити з розгляду частину стержня, розташовану в зоні прикладання зовнішніх сил (заштрихована область на рис.1.6).

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називається деформацією твердого тіла?
2. Яка деформація називається пружною і яка пластичної?
3. Які типи деформацій вивчає опір матеріалів?
4. Класифікація сил, діючих на частини машин і споруд.
5. Класифікація сил за характером прикладання.
6. Класифікація сил за характером дії.
7. Які елементи називаються брусом (стрижнем), пластинкою, оболонкою?
8. Які основні види деформацій викликаються зовнішніми силами?
9. У чому полягає метод перетинів?
10. Що називається напруженням?
11. Яка розмірність напружень в технічній системі і системі СІ?
12. Яке напруження називається нормальним а яке дотичним?
13. Співвідношення одиниць технічної системи і системи СІ: 1кг, 1т і 1Н, 1 кН; 1кг/ см<sup>2</sup> і 1 н/м<sup>2</sup>.
14. Основні гіпотези, що використовуються в опорі матеріалів.

**Лекція №2. ЦЕНТРАЛЬНЕ РОЗТЯГАННЯ ТА СТИСКАННЯ  
ПРЯМОЛІНІЙНОГО СТЕРЖНЯ.**

Центральне розтягання – стискання у стержні виникає в тому випадку, коли зовнішні навантаження діють по його осі (осьові зовнішні сили), чи приводяться до осьових сил. У цьому випадку, у перерізі виникає єдиний внутрішній силовий фактор – **поздовжня сила N**, а поперечні сили  $Q_x$ ,  $Q_y$ , згинаючі  $M_x$ ,  $M_y$  і крутильний  $M_k$  моменти дорівнюють нулю.

Проаналізуємо розподіл внутрішньої поздовжньої сили. Графічне представлення розподілу **поздовжньої сили N** по довжині стержня називається **епюрою** поздовжньої сили N. Розглянемо стержень, навантажений двома осьовими силами  $F_1$  і  $F_2$  (рис.2.1).

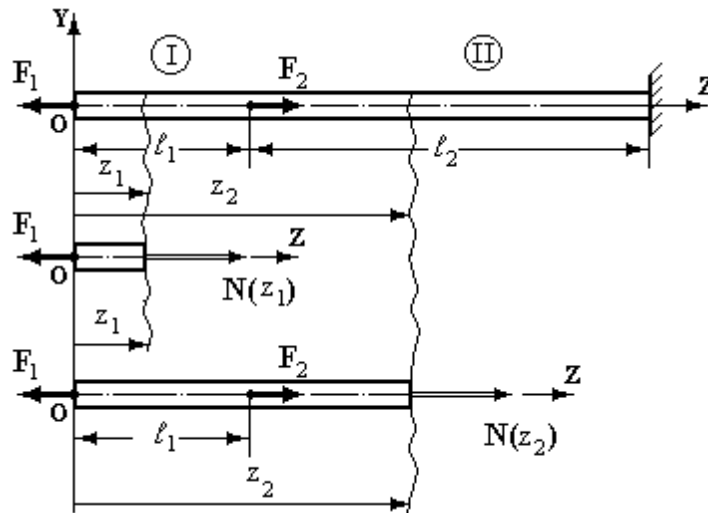


Рис.2.1.

Використовуючи метод перерізів, визначимо значення поздовжньої сили на першій та другій ділянках стержня відповідно у перерізах  $z_1$  і  $z_2$  –  $N(z_1)$ ,  $N(z_2)$ . Відкидаючи праві частини стержня для кожного випадку та замінивши дію відкинutoї частини на залишену поздовжніми силами  $N(z_1)$  і  $N(z_2)$ , записуємо рівняння рівноваги для кожної ділянки у вигляді  $\Sigma F_{iz} = 0$ . Одержуємо наступні рівняння для визначення поздовжньої сили на кожній ділянці стержня:

для **першої** ділянки (перерізи його попадають у діапазон  $0 \leq z_1 \leq l_1$ )

$$-F_1 + N(z_1) = 0,$$

для **другої** ділянки ( $l_1 \leq z_2 \leq (l_1 + l_2)$ )

$$-F_1 + F_2 + N(z_2) = 0.$$

Відкіля чисельні значення поздовжніх сил на кожній ділянці:

$$\text{I: } N(z_1) = F_1, \qquad \text{II: } N(z_2) = F_1 - F_2.$$

Сила  $F_1$  викликає розтягання всього стержня, а  $F_2$  – стискання другої ділянки.

На підставі цього можна сформулювати правило для визначення поздовжньої сили у перерізі з координатою  $z$ . **Поздовжня сила  $N(z)$  у даному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вісь стержня (вісь  $Z$ ) усіх зовнішніх сил, розташованих по одну сторону від перерізу (всіх одnobічних сил, і заміняє дію відкинутої частини на залишену.** Поздовжня сила приймається **позитивною (додатною)**, якщо викликає деформацію розтягання, і **негативною (від'ємною)**, якщо викликає деформацію стискання .

Порядок побудови епюри поздовжньої сили покажемо на прикладі стержня, приведеного на рис.2.2.

1. Визначаємо значення опорної реакції  $H$  з умови статичної рівноваги  $\Sigma F_{iz} = 0$ :

$$\Sigma F_{iz} = -H + q \cdot (b+c) + F_2 - F_1 = 0, \text{ відкіля } H = 30 \cdot 1,1 + 20 - 10 = 43 \text{ кН.}$$

При від'ємному значенні реакції варто змінити її напрямок на протилежний та далі вважати додатним.

2. Розбиваємо стержень на ділянки, границі яких збігаються з перерізами, де прикладені зосереджені сили (у даному випадку сили  $F_1$  і  $F_2$ ), а також з перерізами, де починаються і закінчуються розподілені навантаження.

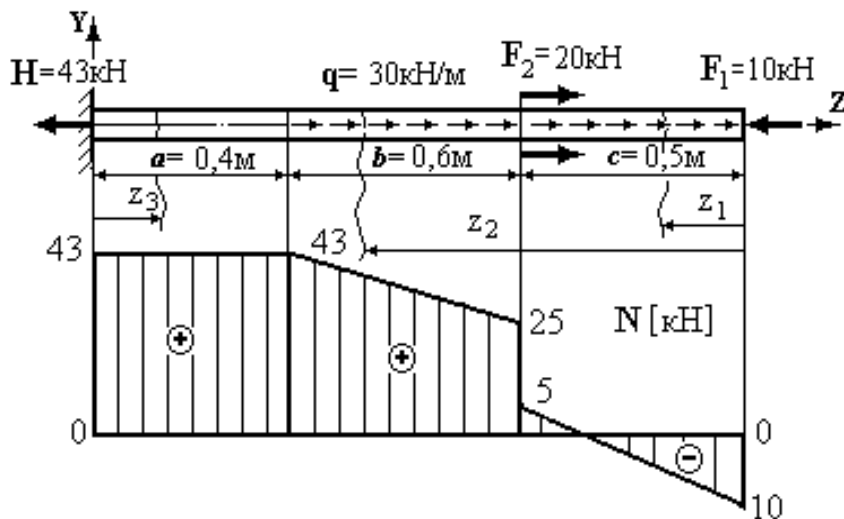


Рис.2.2.

3. Записуємо вирази для поздовжньої сили у перерізі  $z_i$  на кожній ділянці з урахуванням прийнятого правила знаків та визначаємо її значення:

$$0 \leq z_1 \leq 0,5; \quad N(z_1) = -F_1 + q \cdot z_1; \quad N(0) = -10 \text{ кН}; \quad N(0,5) = 5 \text{ кН.}$$

$$0,5 \leq z_2 \leq 1,1; \quad N(z_2) = -F_1 + F_2 + q \cdot z_2; \quad N(0,5) = 25 \text{ кН}; \quad N(1,1) = 43 \text{ кН.}$$

$$0 \leq z_3 \leq 0,4; \quad N(z_3) = H = \text{const} = 43 \text{ кН.}$$

По отриманим даним в обраному масштабі будуюмо епюру поздовжніх сил  $N(z)$ .

### Перевірка правильності побудови епюр.

1. На ділянці з рівномірно розподіленим навантаженням  $q$  епюра  $N(z)$  лінійна (описується рівнянням прямої лінії, нахиленої до нульової), якщо  $q \neq 0$ , то  $N(z) = \text{const}$ . У нашому випадку на першій і другій ділянках  $N(z)$  є лінійною, на третьому - постійна.

2. У перерізах прикладення зосереджених сил на епюрі  $N(z)$  спостерігаються стрибки на величини цих сил. У перерізах прикладення сил  $F_1, F_2$  та реакції  $H$  на епюрі мають стрибки на їхні величини відповідно.

### НОРМАЛЬНЕ НАПРУЖЕННЯ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМУ РОЗТЯГАННІ-СТИСКАННІ.

Розглянемо розтягання прямолінійного стержня довільного поперечного перерізу під дією двох рівних по величині та протилежно спрямованих сил (рис.2.3а). У деякому місці стержня уявно проведемо поперечний переріз, відкинемо одну з частин, дію відкинutoї частини замінимо внутрішнім зусиллям  $N$ , що з рівняння статичної рівноваги  $\sum F_{iz} = 0$  визначиться як  $N = F$  (рис.2.3б). Поздовжня сила  $N$  є рівнодіючою (результуючою) внутрішніх зусиль довільним образом розподілених по перерізу  $A$ , перпендикулярному осі стержня. Отже, поздовжня сила  $N$ , спрямована по осі стержня, є нормальною (перпендикулярною) до перерізу. Так як поздовжня сила є результуючою розподілених внутрішніх зусиль (а це нормальне напруження), то і розподілені внутрішні зусилля повинні бути перпендикулярні перерізу. Тобто, при центральному розтяганні (також і при центральному стисканні) у поперечному перерізі виникає тільки **нормальне напруження  $\sigma$**  (рис.2.3.в).

Очевидно, що на елементарну площадку  $dA$  діє елементарна поздовжня сила  $dN = \sigma dA$ . Відкіля одержуємо рівняння в інтегральному вигляді:

$$N = \int_A \sigma dA. \quad (2.1)$$

Вирішити це рівняння неможливо, тому що невідома величина та закон розподілу по перерізу напруження  $\sigma$ .

Щоб описати закон розподілу напружень  $\sigma$  за поперечним перерізом, звернемося до фізичного експерименту. Як показують експерименти, при центральному розтяганні-стисканні однакові подовжні відрізки  $ac$  і  $bd$  стержня одержують однакові подовження (рис.2.3г):  $(a_1c_1 - ac) = (b_1d_1 - bd)$ . Лінії на

бічній поверхні стержня, що представляють сліди поперечних перерізів, рівнобіжні до деформування, залишаються рівнобіжними й у процесі деформування:  $ab \parallel a_1b_1$  і  $cd \parallel c_1d_1$ .

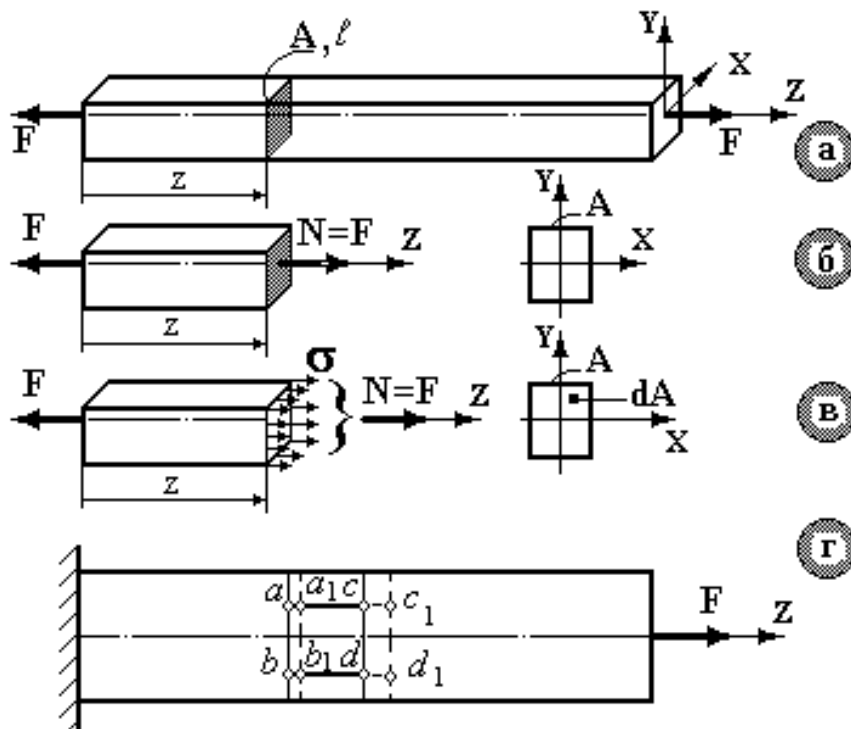


Рис.2.3.

Це дозволяє вважати, що при центральному розтяганні-стисканні виконується **гіпотеза плоских перерізів** (гіпотеза Бернуллі): **переріз плоский та нормальний до осі до деформації залишається плоским та нормальним до осі в процесі деформації**, тобто переміщуючись, переріз залишається паралельним (рівнобіжним) самому собі. Якщо представити модель стержня, що складається з окремих подовжніх волокон, то при розтяганні кожне волокно подовжується на одну і ту ж величину. Отже, у кожному подовжньому волокні діє однакове зусилля. Цей висновок дозволяє вважати, що при центральному розтяганні-стисканні нормальне напруження  $\sigma$  по поперечному перерізу розподіляється рівномірно, тобто  $\sigma = \text{const}$ .

Тоді з рівняння (2.1) маємо:  $N = \sigma \int_A dA = \sigma \cdot A$ , відкіля нормальне напруження для всіх точок перерізу при центральному розтяганні-стисканні буде однаковим, і визначиться як:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.2)$$

У цьому випадку напруження  $\sigma$  залишаються **постійними як по перерізу, так і по довжині** (якщо поздовжня сила постійна), тобто по всьому об'єму стержня. Такий напружений стан називається **однорідним**.

Переріз стержня, у якому виникає найбільше нормальне напруження, є **небезпечним**. У цьому перерізу, як правило, діє і найбільша за абсолютним значенням поздовжня сила  $N_{\max}$ .

Максимальні розрахункові нормальні напруження, обчислені за формулою (2.2), повинні зіставлятися з деякими гранично допустимими напруженнями для матеріалу стержня, що забезпечують його безпечно навантаження. Ці напруження називаються **допустимими напруженнями  $[\sigma]$** . Сформулюємо умову міцності при центральному розтяганні-стисканні:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]. \quad (2.3)$$

Напруження, що допускається (допустиме напруження), визначається як небезпечне напруження для даного матеріалу  $\sigma_{\text{нб}}$ , поділене на коефіцієнт запасу міцності  $n$ , тобто  $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{нб}}}{n}$ : (про небезпечні напруження для матеріалу див. лекцію №4 «Механічні характеристики матеріалів»).

Покажемо основні види розрахунків в опорі матеріалів, які виконуються з використанням умови міцності (2.3) (розрахунки по допустимому напруженню).

**1.Перевірочний розрахунок.** Основна мета перевірконого розрахунку полягає в порівнянні максимальних розрахункового та допустимого напруження. У цьому розрахунку відомою вважається вся інформація про стержень, що включає три групи даних:

- про зовнішні сили: значення навантажень та координати їхнього прикладення –  $N_{\max}$ ,
- про геометричні розміри стержня: площа поперечного перерізу –  $A$ ,
- про механічні властивості матеріалу стержня: допустиме напруження –  $[\sigma]$ .

За формулою (2.2) обчислюємо  $\sigma_{\max}$  і порівнюємо з допустимим  $[\sigma]$ . Якщо  $\sigma_{\max} \approx [\sigma]$  – міцність стержня забезпечена (допускається відхилення до 5% у значеннях  $\sigma_{\max}$  і  $[\sigma]$ ). При  $\sigma_{\max} < [\sigma]$  стержень є недовантаженим, що приводить до перевитрати матеріалу. У випадку,  $\sigma_{\max} > [\sigma]$  – стержень перевантажений, що приводить до необхідності переглянути вихідну розрахункову схему чи вибрати інший матеріал.



**2.Проектувальний розрахунок.** Основна мета цього розрахунку полягає у визначенні безпечних з погляду на міцність розмірів перерізу стержня чи сил, що допускаються. Проектувальний розрахунок проводиться за допомогою умови міцності (2.3).

**Підбір площі поперечного перерізу.** Відомими вважаються:

- зовнішні сили: значення навантажень і координати точок, де прикладені сили –  $N_{\max}$ ,
- механічні властивості матеріалу стержня: допустиме напруження -  $[\sigma]$ .

З умови міцності (2.3) розміри поперечного перерізу обчислюємо за формулою

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}. \text{ Це значення площі поперечного перерізу стержня } A \text{ є}$$

мінімальною оцінкою для вибору необхідної площі  $A$ .

**Визначення максимального навантаження .** Відомими вважаються:

- геометричні розміри стержня: площа поперечного перерізу –  $A$ ,
- механічні властивості матеріалу стержня: допустиме напруження -  $[\sigma]$ .

З умови міцності (2.3) маємо  $N_{\max} \leq [\sigma] \cdot A$ , відкля далі визначається навантаження, що допускається.

### ПЕРЕМІЩЕННЯ ТА ДЕФОРМАЦІЇ. ЗАКОН ГУКА. МОДУЛЬ ПРУЖНОСТІ. КОЕФІЦІЄНТ ПУАССОНА.

Розглянемо розтягнутий силою  $F$  стержень довжиною  $l_0$  та площею поперечного перерізу  $A$ .

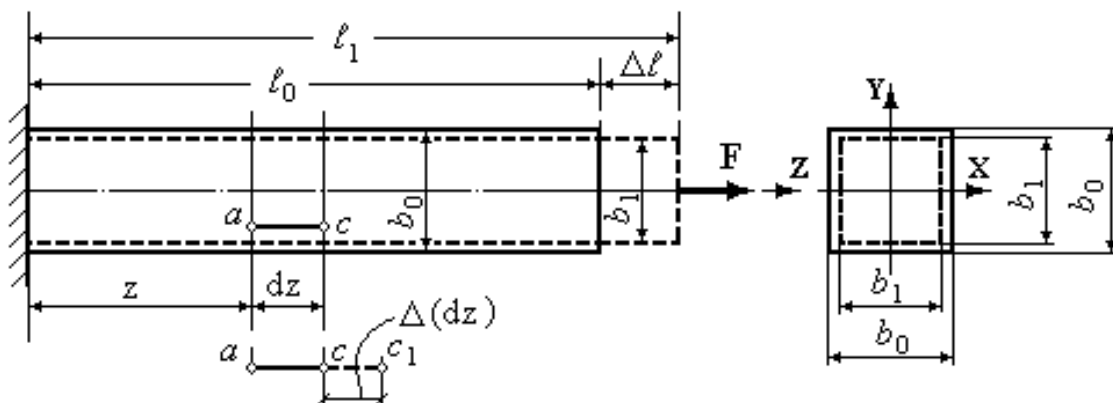


Рис.2.4.

Під дією зовнішнього навантаження, що розтягує, подовжній розмір стержня збільшується до  $l_1$ . Зміна довжини  $\Delta l = l_1 - l_0$  називається **абсолютним подовженням** стержня. Відношення

$$\frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \varepsilon \quad (2.4)$$

називається **відносною подовжньою деформацією** (або просто **подовжньою деформацією**). Якщо в стержні виникає неоднорідний напружений стан, деформація в точці  $a$  визначається шляхом граничного переходу до нескінченно малого елемента довжиною  $dz$ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (2.5)$$

При центральному розтяганні-стисканні залежність між навантаженням та подовженням у межах пружних деформацій визначається співвідношенням  $\Delta \ell = \frac{N\ell}{EA}$ , тут  $E$  – **модуль пружності (подовжньої пружності)** – фізична постійна матеріалу;  $EA$  – називається **жорсткістю** стержня при розтяганні.

Розділимо обидві частини цього рівняння на  $\ell$  і з обліком  $\frac{\Delta \ell}{\ell} = \varepsilon$ ,  $\frac{N}{F} = \sigma$ ,

отримаємо  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$  або

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.6)$$

Це співвідношення називається **законом Гука при центральному розтяганні-стисканні (одновісному напруженому стані)**. Таким чином, напруження при центральному розтяганні-стисканні обчислюються за формулою  $\sigma = \frac{N}{A}$ . При експериментальному визначенні відносної подовжньої деформації та відомому модулі пружності для матеріалу деталі напруження знаходиться за формулою  $\sigma = E\varepsilon$ .

Для ділянки стержня нескінченно малої довжини  $\Delta dz = \frac{Ndz}{EA}$ . Абсолютне подовження стержня на довжині  $\ell$  визначається за формулою:

$$\Delta \ell = \int_0^{\ell} \frac{N(z)dz}{EA}. \quad (2.7)$$

Приведемо орієнтовані величини модуля пружності для деяких матеріалів:

- сталь –  $E = (2...2,1) \cdot 10^5$  МПа;
- мідь і сплави міді –  $E = (1...1,2) \cdot 10^5$  МПа;
- алюміній і сплави алюмінію –  $E = (0,7...0,72) \cdot 10^5$  МПа.

Крім подовжніх деформацій у стержні виникають і поперечні деформації. Різниця  $\Delta b = b_1 - b_0$  (рис. 2.4) називається **абсолютною поперечною деформацією**. Відношення  $\frac{\Delta b}{b} = \varepsilon'$  називається **відносною поперечною деформацією**.

*Абсолютна величина, що дорівнює відноській поперечній деформації, поділеній на відносну подовжню, називається коефіцієнтом Пуассона*

$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$ . Значення коефіцієнта Пуассона для реальних матеріалів, застосовуваних у машинобудуванні, розташовуються в діапазоні  $0 \leq \mu \leq 0,5$  (для пробки близько до нуля, для каучуку близько до 0,5); сталь –  $\mu = 0,25 \dots 0,3$ ; мідь –  $\mu = 0,31 \dots 0,35$ ; алюміній –  $\mu = 0,32 \dots 0,36$

Коефіцієнт Пуассона  $\mu$  також як і модуль подовжньої пружності  $E$  є фізичною константою матеріалу та характеризує його пружні властивості.

Для **ізотропних** матеріалів  $E$  і  $\mu$  в усіх напрямках **однакові** (сталь, мідь, бетон, каучук, нешаруваті пластмаси), для **анізотропних** матеріалів  $E$  і  $\mu$  у різних напрямках **різні** (дерево здовж та поперек волокон, шаруваті пластмаси й ін.).

Якщо навантаження, що діє на стержень, є термосиловим, то варто застосувати принцип суперпозиції деформацій, тобто:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^t, \quad (2.8)$$

де  $\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}$  – пружна частина, а  $\varepsilon^t = \alpha \Delta t$  – температурна складова деформації, у якій  $\alpha$  – температурний коефіцієнт лінійного розширення, тоді

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta t \quad \text{або} \quad \Delta \ell = \frac{N \ell}{EA} + \alpha \ell \Delta t. \quad (2.9)$$

**ПОТЕНЦІЙНА ЕНЕРГІЯ ПРУЖНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ.** *Потенційна енергія деформації, накопичена у пружному тілі, чисельно дорівнює роботі зовнішніх сил, виконаної в процесі деформування пружного тіла*, тобто  $U = W$ . Розглянемо елемент довжиною  $dz$ , навантажений статично (рис.2.5а). У межах нескінченно малого елемента значення поздовжньої сили  $N(z)$  у крайніх перерізах елемента  $dz$  однакові (рис.2.5.б). Елементарна робота зовнішніх сил чисельно дорівнює площі заштрихованого трикутника, тобто

$$dW = \frac{1}{2} N(z) \cdot \Delta dz.$$

Але  $\Delta dz = \frac{N(z)dz}{EA}$ , тоді  $dW = \frac{N^2(z)dz}{2EA}$ . Повна робота є інтеграл по

довжині стержня, тобто  $W = \int_{\ell} \frac{N^2(z)}{2EA} dz$ . Але  $U = W$ , отже:

$$U = \int_{\ell} \frac{N^2(z)}{2EA} dz. \quad (2.10)$$

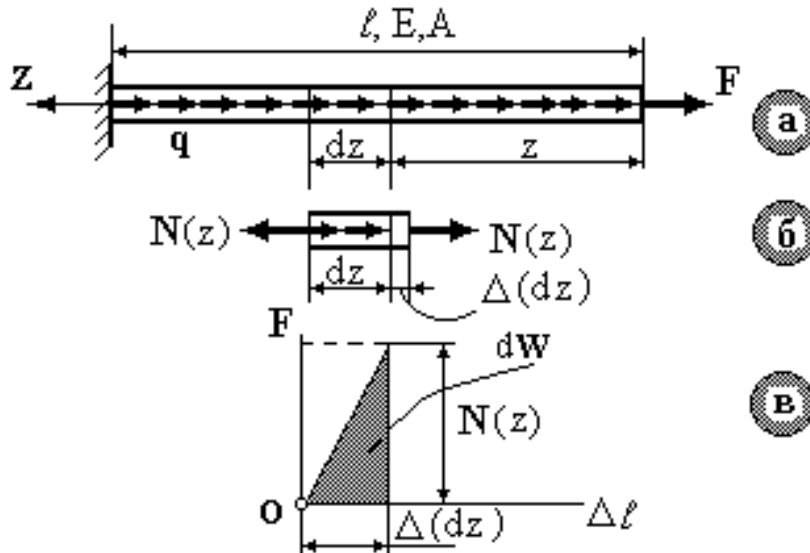


Рис.2.5.

### НОРМАЛЬНІ ТА ДОТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ НА ПОХИЛИХ ПЛОЩАДКАХ.

Розглянемо стержень з поперечним перерізом  $A_0$ , навантажений силою  $F$ . У нормальному (перпендикулярному осі  $Z$ ) перерізі виникають нормальні напруження  $\sigma_0$ , що визначаються як  $\sigma_0 = \frac{F}{A_0}$ . А які напруження виникають на

площині  $A_\alpha$ , нахиленої до осі стержня під кутом  $\alpha$ ? Положення площини  $A_\alpha$  визначається положенням її нормалі  $n_\alpha$  (рис.2.6а). Так як зовнішнє навантаження збігається з віссю стержня, то і на будь-якій похилій площині внутрішні зусилля (напруження) збігаються з віссю стержня, у даному випадку це буде повне напруження  $p_\alpha$ , яке визначається за формулою  $p_\alpha = \frac{F}{A_\alpha}$

(рис.2.6б). Площа похилого перерізу  $A_\alpha = \frac{A_0}{\cos \alpha} \rightarrow p_\alpha = \frac{F}{A_0} \cos \alpha$ . Але

$\frac{F}{A_0} = \sigma_0$ , тоді повне напруження  $p_\alpha = \sigma_0 \cos \alpha$ . Так як  $\cos \alpha < 1$ , то завжди  $p_\alpha < \sigma_0$ . Розкладемо повне напруження  $p_\alpha$  на дві складові: нормальну та дотичну до площадки  $A_\alpha$  (рис.2.6в). Одержимо нормальне  $\sigma_\alpha$  і дотичне  $\tau_\alpha$  напруження на похилій площадці. Нормальне напруження на похилій площадці з нормаллю  $n_\alpha$ :

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha. \quad (2.11)$$

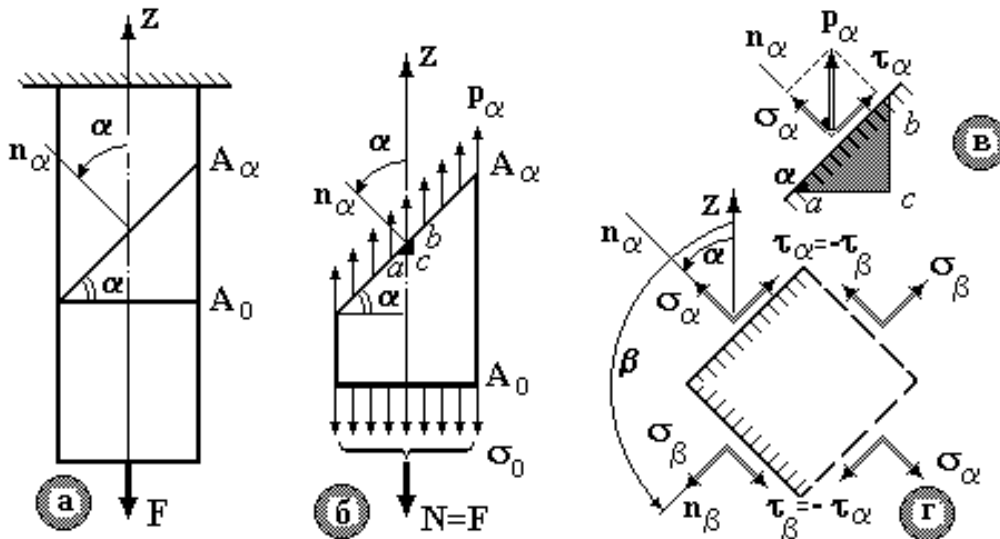


Рис.2.6.

Дотичне напруження на похилій площадці з нормаллю  $n_\alpha$ :

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \sigma_0 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.12)$$

Нормальне напруження  $\sigma_\alpha$  позитивне (викликає деформацію розтягання), дотичне  $\tau_\alpha$  теж позитивне, тому що обертає розглянуту область щодо точки у середині цієї області за годинниковою стрілкою. Визначимо напруження на взаємно перпендикулярній площадці  $A_\beta$ , нахиленої до осі стержня під кутом  $\beta$ , що дорівнює  $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$  (рис.2.6г). Якщо  $\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha$ , то, мабуть, і

$\sigma_\beta = \sigma_0 \cos^2 \beta$ . Підставивши  $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ,  $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$ , одержимо:

$$\sigma_\beta = \sigma_0 \sin^2 \alpha \quad (2.13)$$

Аналогічно  $\tau_\beta = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\beta$ . Підставивши  $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ,

$\sin(\pi + 2\alpha) = -\sin 2\alpha$ , одержимо:

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.14)$$

Нормальне напруження  $\sigma_{\beta}$  також позитивне, а дотичне  $\tau_{\beta}$  - негативне (обертає розглянуту область щодо точки у середині цієї області проти годинникової стрілки). Склавши вирази (2.11) і (2.13), одержимо  $\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_0$ , **сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках постійна**. Порівнюючи (2.10) і (2.14), маємо  $\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$ . Ця рівність відбиває **закон парності дотичних напружень: дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках рівні по величині та протилежні по напрямку**. Якщо відоме дотичне напруження на одній площадці, то на інших перпендикулярних площадках дотичні напруження визначаються за вищевказаним законом парності (рис.2.6г).

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В чому полягає суть гіпотези плоских перетинів?
2. Що називається повним або абсолютним подовженням?
3. Що називається відносним подовженням (відносною деформацією). Яка його розмірність?
4. Сформулюйте закон Гука; як він виражається математично?
5. Що характеризує модуль подовжньої пружності?
6. Чи всі матеріали підкоряються закону Гука?
7. Що називається жорсткістю стрижня при розтяганні-стисканні?
8. Що таке коефіцієнт Пуассона?
9. Які характерні крапки має діаграма розтягання-стискання для маловуглецевої сталі?
10. Що називається межею пропорційності, межею пружності, межею текучості, тимчасовим опором (межею міцності)?
11. Як може бути визначена величина модуля подовжньої пружності  $E$  з діаграмою розтягання для матеріалу?

### Лекція №3. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ СИСТЕМИ (СНС) ПРИ РОЗТЯГАННІ-СТИСКАННІ.

*Статично невизначеною називається кінематично незмінна система, у якій число невідомих зусиль, включаючи реакції опор та внутрішні сили, більше числа рівнянь статичної рівноваги, які можна скласти для даної задачі. Різниця між кількістю невідомих зусиль та кількістю незалежних рівнянь статичної рівноваги називається ступенем статичної невизначеності системи. Це число показує, скільки додаткових рівнянь у геометричному аналізі процесу деформування необхідно скласти, щоб можна було вирішити задачу. При рішенні таких систем розглядаємо три сторони задачі. План рішення полягає в наступному.*

**1. Статична сторона задачі (ССЗ).** Визначаємо напрямки реакцій зв'язків, зусиль у стержнях, складаємо рівняння рівноваги, визначаємо ступінь статичної невизначеності задачі.

**2. Геометрична сторона задачі (ГСЗ).** Установлюємо зв'язок між деформаціями окремих елементів конструкції, виходячи з умови спільності переміщень. Отримані рівняння називаються **рівняннями спільності переміщень.**

**3. Фізична сторона задачі (ФСЗ).** У рівняннях спільності переміщень для окремих елементів їхні переміщення виражаємо на підставі закону Гука через діючі в них невідомі зусилля.

**4. Аналіз (синтез).** Вирішуємо отриману систему рівнянь щодо невідомих зусиль.

Розглянемо рішення СНС на прикладах.

**ПРИКЛАД 1.** Стержень довжиною  $(a+b)$  і площею поперечного перерізу  $A$  навантажений силою  $F$ . Модуль пружності матеріалу  $E$ . Визначити опорні реакції та побудувати епюру поздовжніх сил.

**1. ССЗ.** Показуємо опорні реакції  $R_A$  і  $R_B$ . Записуємо єдину умову рівноваги, яку можна скласти для даної задачі:

$$\sum F_{zi} = R_A + R_B - F = 0. \quad (3.1)$$

**2. ГСЗ.** Так як опори жорсткі, то повне подовження стержня дорівнює нулю, тобто  $\Delta \ell = 0$ . Один з підходів реалізації цієї умови такий. Відкидаємо одну з опор (допустимо нижню) та послідовно прикладаємо зовнішні сили і невідому реакцію у відкинутій опорі. Повне подовження стержня визначаємо як

суму подовжень від зовнішнього навантаження (у даному випадку  $\Delta l_F$ ) від реакції  $R_A - \Delta l_{R_A}$ :

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_{R_A} = 0. \quad (3.2)$$

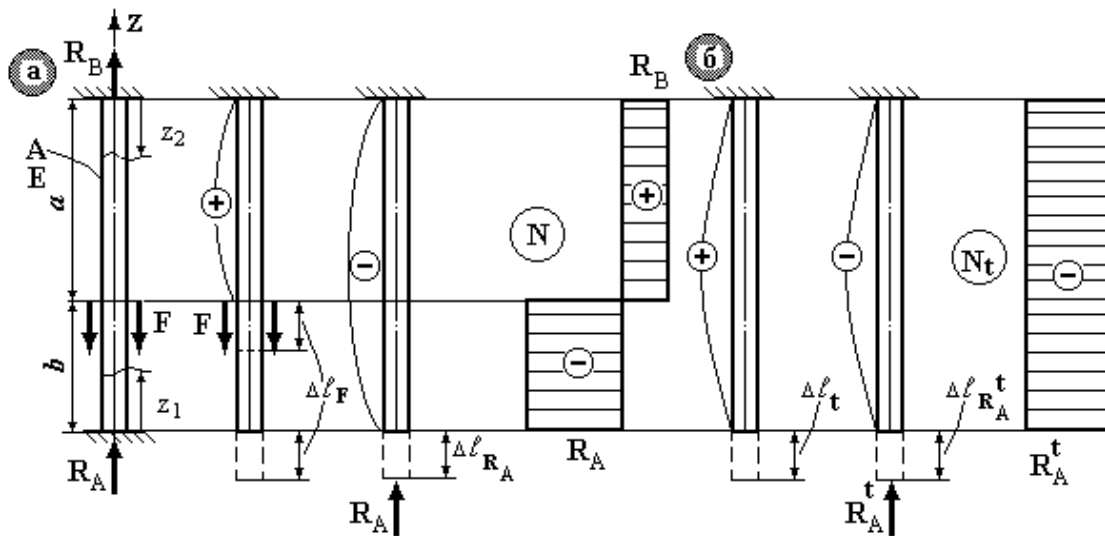


Рис.3.1.

**3.ФСЗ.** Подовження від зовнішнього зусилля у розглянутому випадку

складає:  $\Delta l_F = \frac{F a}{EA}$ , укорочення від реакції:  $\Delta l_{R_A} = -\frac{R_A(a+b)}{EA}$ , тому повна деформація стержня виявляється рівною:

$$\Delta l = \frac{F a}{EA} - \frac{R_A(a+b)}{EA} = 0. \quad (3.3)$$

**4.Аналіз.** З рівняння (3.3) одержуємо  $R_A = F \frac{a}{a+b}$ , а з рівняння (3.1)

маємо:  $R_B = F - R_A$ . Розбиваємо стержень на дві ділянки та записуємо значення поздовжньої сили на кожній ділянці:

1<sup>а</sup> ділянка:  $0 \leq z_1 \leq b$ :  $N(z_1) = -R_A$ ; 2<sup>а</sup> ділянка:  $0 \leq z_2 \leq a$ :  $N(z_2) = R_B$ .

Далі будемо епюру поздовжніх сил.

Особливий інтерес викликають задачі розрахунків СНС при термосиловому навантаженні. Відзначимо, що в статично визначних стержневих конструкціях при нагріванні-охолодженні напруження не виникають, якщо матеріал однорідний.

У статично невизначених стержнях і стержневих системах навіть невеликі перепади температур приводять до появи значних величин напружень.



Доповнимо вище розглянутий приклад розрахунком температурних напружень. Будемо вважати, що стержень нагрітий на  $\Delta t$  °С. Реакції  $R_A^t$  і  $R_B^t$ , що виникають у защемленнях, рівні між собою та спрямовані в протилежні сторони. Повне подовження стержня складеться з суми подовжень: вільного температурного розширення стержня  $\Delta \ell_t = \alpha_m(\mathbf{a} + \mathbf{b})\Delta t$  ( $\alpha_T$  - коефіцієнт лінійного температурного розширення) та подовження від реакції  $R_A^t$  (див. рис.3.1), тобто

$$\Delta \ell_t + \Delta \ell_{R_A^t} = 0, \text{ або } \alpha_T(\mathbf{a} + \mathbf{b})\Delta t - \frac{R_A^t(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{EA} = 0.$$

Тоді одержуємо  $R_A^t = R_B^t = \alpha_T EA \Delta t$  - і значення поздовжньої сили на всіх ділянках стержня постійно:

$$N^t(z_1) = N^t(z_2) = -R_A^t = -\alpha_T EA \Delta t,$$

що говорить про викликане нагріванням ( $\Delta t > 0$ ) стискання стержня.

У цьому випадку температурні напруження у перерізі стержня  $\sigma^t = \frac{N^t}{A} = -\alpha_T E \Delta t$ , і, як видно, **не залежать від площі поперечного перерізу**.

Аналогічно розглядається задача визначення і монтажних напружень, викликаних наявністю монтажного зазору  $\delta$  (перевищення на величину  $\delta$  довжини стержня в порівнянні з відстанню між опорами).

Замінивши температурне  $\Delta t$  подовження на величину зазору  $\delta$  та виконавши аналогічні перетворення, маємо:  $R_A^M = R_B^M = EA \delta / \ell$ , значення поздовжньої сили  $N^M(z) = -R_A^M = -EA \delta / \ell$ , монтажних напружень

$$\sigma^M = \frac{N^M}{A} = -E \delta / \ell.$$

**ПРИКЛАД 2.** Стержнева система (рис.3.2) складається з абсолютно твердого стержня AD, що шарнірно закріплений у точці A та підтримується стержнями 1 і 2 (довжини  $\ell_1 = \ell$  та  $\ell_2 = \frac{\ell}{\sin \beta}$ , площі поперечних перерізів  $A_1$ ,  $A_2$ , модулі пружності матеріалу стержнів  $E_1, E_2$ ), навантажена зовнішньою зосередженою силою F. Виразити поздовжні сили в стержнях  $N_1$  і  $N_2$ , через зовнішнє навантаження F.

**1.ССЗ.** Застосовуємо метод перерізів до стержнів, у яких виникають поздовжні сили  $N_1$  і  $N_2$ , прикладаємо реакції опори  $R_A$  і  $H_A$ . Відсічена схема показана на рис.3.3а. Складаємо рівняння статичної рівноваги ( для плоскої системи сил):

$$\sum F_{xi} = 0; \quad H_A - N_2 \cos \beta = 0; \quad (3.4)$$

$$\sum F_{yi} = 0; \quad R_A + N_1 + N_2 \sin \beta - F = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad N_1 2a + N_2 5a \sin \beta - F 6a = 0 \quad \text{или} \quad 2N_1 + 5N_2 \sin \beta - 6F = 0. \quad (3.6)$$

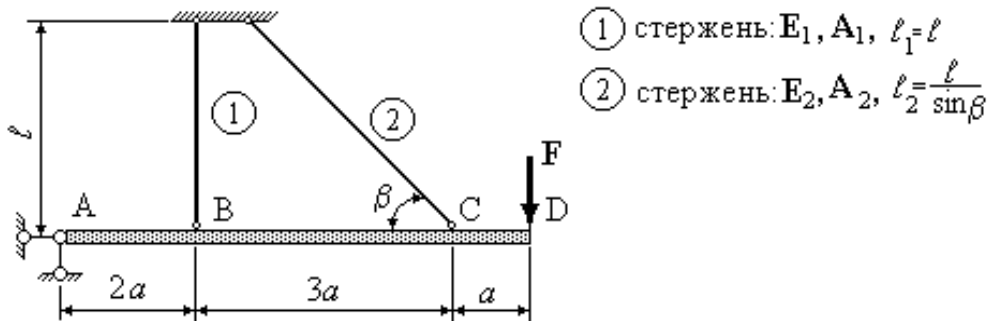


Рис.3.2.

**2.ГСЗ.** Під дією зовнішнього навантаження стержні 1 і 2 деформуються, а брус AD займе нове положення AD' (рис.3.3б). Відповідно точки B і C займуть положення B' і C'. Покажемо деформації стержнів. Подовження стержня 1 -  $\Delta l_1 = BB'$ . **Щоб знайти деформацію похилого стержня 2, потрібно з нового положення точки C' опустити перпендикуляр на початкове положення стержня 2. Різниця кінцевої та початкової довжини складе подовження стержня, тобто  $\Delta l_2 = CC''$ .**

**Через малість деформацій стержнів у порівнянні з розмірами стержневої системи переміщення точок B,C,D при повороті абсолютно твердого бруса вважаємо таким, що відбуваються не по дузі, а у перпендикулярному напрямку (по нормалі) до початкового положення бруса.**

З подоби трикутників  $ABB'$  і  $ACC''$  маємо:

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC''}{AC}. \quad \text{З огляду на те, що } AB=2a, AC=5a, BB'=\Delta l_1, CC'' = \frac{CC''}{\sin \beta} = \frac{\Delta l_2}{\sin \beta},$$

одержуємо:

$$\frac{\Delta l_1}{2a} = \frac{\Delta l_2}{5a \sin \beta}.$$

Рівняння спільності переміщень одержуємо у вигляді:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \frac{2}{5 \sin \beta}. \quad (3.7)$$

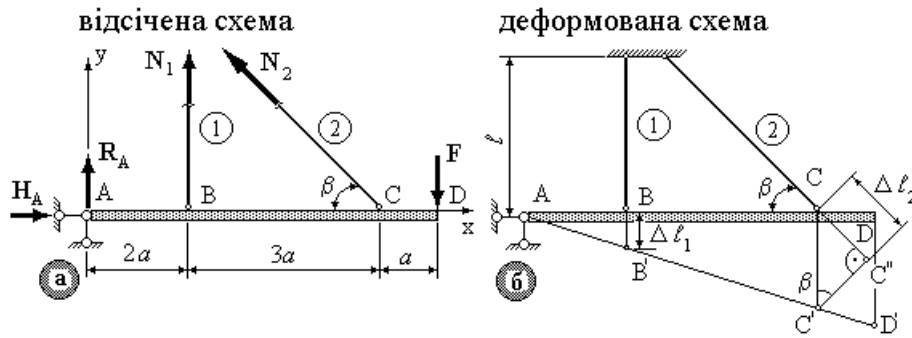


Рис.3.3.

**3.ФСЗ.** З огляду на те, що подовження стержня визначається рівнянням

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}, \quad \text{умова (3.7) прийме вигляд:}$$

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \cdot \frac{2}{5 \sin \beta}. \quad \text{Після перетворень одержимо:}$$

$$N_1 = N_2 \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \cdot \frac{2 l_2}{5 l_1 \sin \beta}. \quad (3.8)$$

**4.Аналіз.** Вирішуючи спільно рівняння (3.8) і (3.6), одержимо:

$$N_2 = \frac{6F}{5 \sin \beta + \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} \cdot \frac{2 l_2}{5 l_1 \sin \beta}}. \quad (3.9)$$

Подовжня сила  $N_1$  визначається рівнянням (3.8).

Відзначимо **особливості** стержневих статично невизначених систем. **Переваги** цих систем полягають у **автоматичному перерозподілі** зусиль між стержнями. До **недоліків** відноситься їх **висока чутливість до неточності виготовлення та зміни температури**.

**ПРИКЛАД 3. Монтажні напруження.** Розглянемо визначення монтажних напружень на прикладі вище проаналізованої стержневої системи. Допустимо, другий стержень виготовлений довшим на величину  $\delta_2 > 0$ . Після зборки системи брус займе проміжне положення  $AD'$ . З аналізу деформованої схеми (рис.3.4б) випливає, що перший стержень подовжується, у ньому виникає розтягуюче зусилля  $N_{1M}$ , другий коротшає - стискаюче зусилля  $N_{2M}$ , у шарнірно нерухомій опорі виникають реакції  $R_{AM}$  і  $H_{AM}$ .

**1.ССЗ.**

$$\sum F_{xi} = 0, \quad H_{AM} + N_{2M} \cos \beta = 0; \quad (3.9)$$

$$\Sigma F_{yi} = 0, \quad R_{AM} + N_{1M} + N_{2M} \sin \beta = 0; \quad (3.10)$$

$$\Sigma M_{Ai} = 0, \quad N_{1M} 2a - N_{2M} 5a \sin \beta = 0; \quad \text{или} \quad N_{1M} = N_{2M} \frac{5 \sin \beta}{2}. \quad (3.11)$$

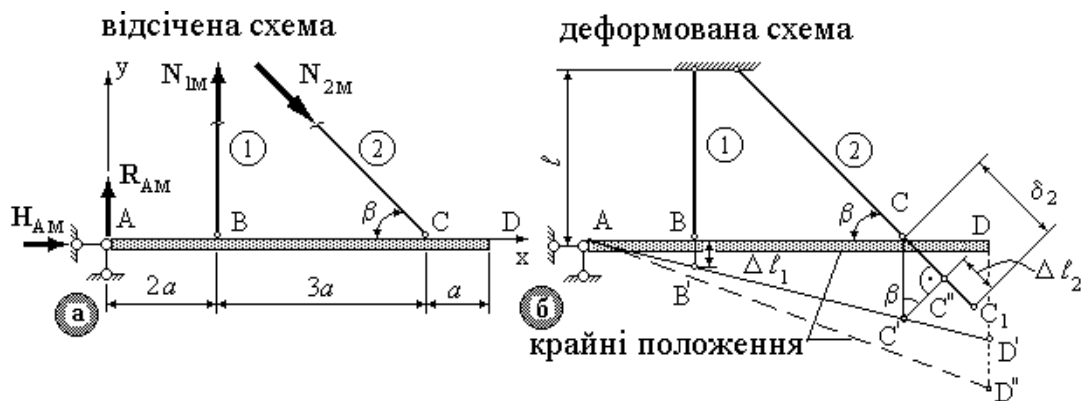


Рис.3.4.

**2.ГСЗ.** З подоби трикутників  $ABB'$  і  $ACC'$  маємо:  $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$ . З огляду на

те, що  $BB' = \Delta \ell_1$ ,  $CC' = \frac{\delta_2 - \Delta \ell_2}{\sin \beta}$ ,  $AB = 2a$ ,  $AC = 5a$ , одержуємо:  $\frac{\Delta \ell_1}{2a} = \frac{\delta_2 - \Delta \ell_2}{5a \sin \beta}$ .

Тоді рівняння спільності переміщень прийме вигляд:

$$\Delta \ell_1 \frac{5 \sin \beta}{2} + \Delta \ell_2 = \delta_2. \quad (3.12)$$

**3.ФСЗ.** З огляду на закон Гука у формі:  $\Delta \ell_1 = \frac{N_{1M} \ell_1}{E_1 A_1}$ ,  $\Delta \ell_2 = \frac{N_{2M} \ell_2}{E_2 A_2}$  та,

підставляючи ці рівняння в умову (3.12), одержуємо:

$$\frac{N_{1M} \ell_1}{E_1 A_1} \cdot \frac{5 \sin \beta}{2} + \frac{N_{2M} \ell_2}{E_2 A_2} = \delta_2, \quad \text{чи:}$$

$$N_{1M} \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} \cdot \frac{\ell_1 5 \sin \beta}{2 \ell_2} + N_{2M} = \frac{\delta_2 E_2 A_2}{\ell_2}. \quad (3.13)$$

**4.Аналіз.** Вирішуючи спільно рівняння (3.13) і (3.11), маємо:

$$N_{2M} = \frac{\frac{\delta_2 E_2 A_2}{\ell_2}}{1 + \frac{E_2 A_2 \ell_1}{E_1 A_1 \ell_2} \cdot \left( \frac{5 \sin \beta}{2} \right)^2}. \quad (3.14)$$

Поздовжня сила  $N_{1M}$  визначається рівнянням (3.11). Монтажні напруження

обчислюємо за формулами  $\sigma_{1M} = \frac{N_{1M}}{A_1}$ ,  $\sigma_{2M} = -\frac{N_{2M}}{A_2}$ .

#### ПРИКЛАД 4. Визначення температурних напружень.

Допустимо другий стержень нагрівається на  $\Delta t_2$  ( $\Delta t_2 > 0$ ). Використаємо такий спосіб. Від'єднуємо другий стержень, нагріємо його до заданої температури на  $\Delta t_2$  та у нагрітому стані зберемо систему (рис.3.5б).

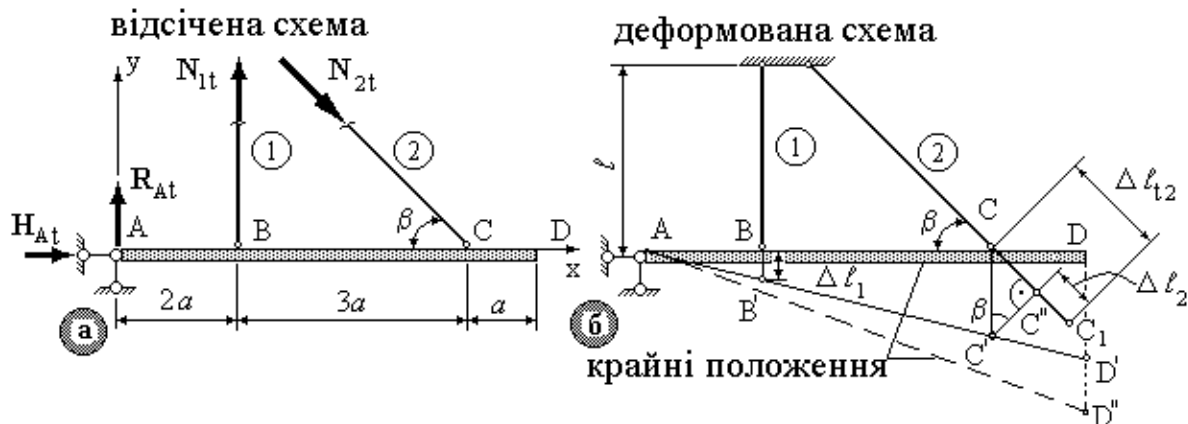


Рис.3.5.

Порівнюючи деформовані схеми рис.3.4б та 3.5б можна зробити висновок, що вони однакові. Отже, методика визначення монтажних напружень при монтажних зазорах та температурних перепадах однакова.

Зробивши аналогічні перетворення, одержуємо:

$$N_{1t} = N_{2t} \frac{5 \sin \beta}{2}; \quad N_{2t} = \frac{\frac{\Delta l_{t2} E_2 A_2}{l_2}}{1 + \frac{E_2 A_2 l_1}{E_1 A_1 l_2} \cdot \left(\frac{5 \sin \beta}{2}\right)^2},$$

де  $\Delta l_{t2} = \alpha_t l_2 \Delta t_2$ .

Температурні напруження визначають за формулами:

$$\sigma_{1t} = \frac{N_{1t}}{A_1}, \quad \sigma_{2t} = -\frac{N_{2t}}{A_2}.$$

#### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які задачі називаються статично невизначними?
2. Які переваги і недоліки статично невизначних систем в порівнянні із статично визначними?
3. Які додаткові рівняння необхідно скласти для вирішення статично невизначних завдань?
4. Приведіть приклади виникнення монтажних напружень.
5. Приведіть приклади виникнення температурних напружень.

## Лекція №4. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИВЧЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ.

Необхідність знання якісних та кількісних характеристик механічних властивостей матеріалів припускається наступним.

1. Для побудови розрахункової теорії необхідно мати вихідні експериментальні дані, на основі яких можна побудувати теорію – це закон Гука. **Основними характеристиками матеріалу при цьому є модуль пружності  $E$  та коефіцієнт Пуассона  $\mu$ .**

2. Для рішення практичних задач і виконання інженерних розрахунків вимагаються числові **характеристики міцності та пластичності матеріалів.**

Для цього проводять випробування **стандартних зразків** з матеріалів на розтягання, стискання, руйнування, кручення, згинання, загин, визначення ударної в'язкості, визначення твердості, на витривалість та ін.

**ВИПРОБУВАННЯ НА РОЗТЯГАННЯ.** Основним видом механічних випробувань є випробування на розтягання, тому що при цьому найбільш яскраво виявляються механічні властивості матеріалу. Саме при цьому випробуванні вдається одержати найбільш важливі характеристики матеріалів для розрахункової практики.

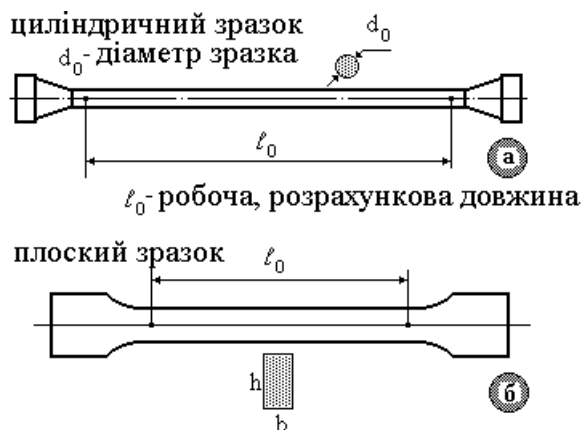


Рис.4.1.

Для випробування на розтягання використовують стандартні циліндричні зразки (рис.4.1а), що мають задане співвідношення розмірів (діаметра  $d_0$  та робочої довжини  $l_0 = 10d_0$  для нормального зразка;  $l_0 = 5d_0$  для короткого зразка). Можуть також використовуватися плоскі стандартні зразки (рис.4.1б). Щоб дотриматися геометричної подоби для циліндричного та плоского зразків, робоча довжина плоского зразка повинна відповідати

співвідношенню  $l_0 = 11,3\sqrt{A_0}$  для нормального зразка і  $l_0 = 5,65\sqrt{A_0}$  для короткого зразка, де площа круглого зразка  $A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$ .

Для проведення тих чи інших випробувань існують випробувальні машини (установки), що називаються пресами: механічні, гідравлічні, електромеханічні. Вони підрозділяються по потужності, тобто по максимальній силі, створюваній пресом (наприклад, Р-50 – розривна машина, максимальна сила 500кН). При виконанні випробувань на розтягання на установці автоматично фіксується навантаження  $F$  та подовження  $\Delta l$  зразка спеціальним діаграмним апаратом, що автоматично будує графік залежності подовження  $\Delta l$  від навантаження  $F$ , тобто  $\Delta l = f(F)$ . Таким чином, одержують так названу **первинну діаграму для зразка в координатах  $F$ - $\Delta l$** .

Розглянемо **первинну діаграму для зразка з маловуглецевої сталі** – діаграму в абсолютних координатах  **$F$ - $\Delta l$**  (рис.4.2).

У початковий момент навантаження залежність між навантаженням  $F$  та деформацією  $\Delta l$  зразка до точки А лінійна. При цьому виникають пружні деформації, що після зняття навантаження зникають. Точка А характеризує найбільше навантаження  $F_{пц}$  (навантаження, що відповідає межі або границі пропорційності), до якого **дотримується лінійна залежність між силою та подовженням. ОА – зона лінійної пружності**, де виконується закон Гука.

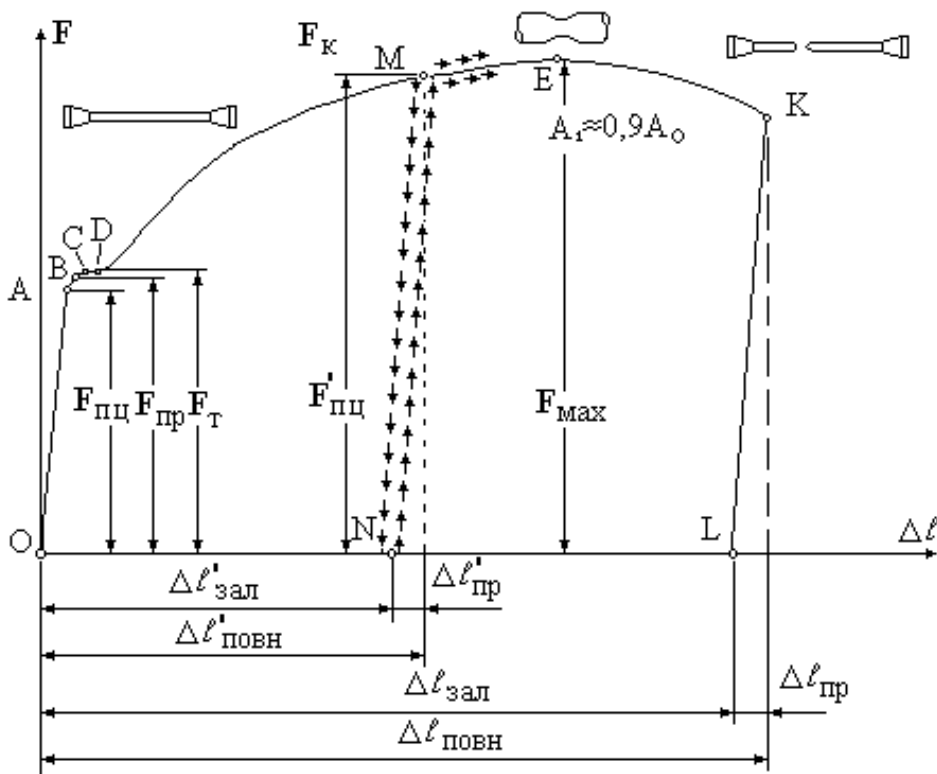


Рис.4.2.

Точка В відповідає найбільшому навантаженню  $F_{пр}$  (навантаженню, що відповідає **межі або границі пружності**), при якій **матеріал зберігає пружні властивості**, тобто при розвантаженні ще практично не виникає залишкової деформації в зразку.

Точка С відповідає навантаженню  $F_T$  (навантаженню, що відповідає **границі або межі текучості**), при якій зразок деформується без зростання навантаження. **Явище текучості полягає в тому, що матеріал «тече», утворивши так названу площадку текучості CD – зону загальної текучості.**

Після стадії текучості матеріал знову здобуває здатність збільшувати опір подальшому навантаженню. **Зона DE називається зоною зміцнення.** Точка Е відповідає **максимальному навантаженню  $F_{max}$** , після якого починається **місцеве звуження зразка у вигляді шийки**. Надалі вся деформація зразка зосереджується в районі шийки, поперечний переріз істотно зменшується. **Зона ЕК – зона локальної (місцевої) текучості.**

Навантаження, необхідне для руйнування, зменшується. Точка К відповідає навантаженню  $F_K$ , при якому зразок руйнується. Таким чином, при випробуванні зразка до руйнування ми одержуємо діаграму OABCDEK.

При цьому повна деформація  $\Delta l_{повн}$ , отримана зразком, складається з двох частин: **пружної**  $\Delta l_{пр}$ , що зникає після руйнування зразка, та **залишкової**  $\Delta l_{зал}$ .

Якщо зняти навантаження у точці М, то розвантаження відбудеться по прямої MN, рівнобіжної лінії лінійної пружності. При цьому пружна деформація  $\Delta l'_{пр}$  зникне, а в зразку є залишкова деформація  $\Delta l'_{зал}$ . Якщо відновити навантаження, то воно пройде по діаграмі NMEK. Якщо зразок витримати якийсь час, то навантаження піде ледве вище кривої MEK, тому що за час так названого **відпочинку матеріалу** частина зв'язків між кристалами відновиться.

Порівнюючи діаграми OABCDMEK та NMEK можна сказати, що в результаті попереднього пластичного деформування пружні властивості матеріалу як би змінюються, тобто навантаження, що відповідає новій границі пропорційності  $F'_{пц}$ , зростає ( $F'_{пц} > F_{пц}$  - матеріал зміцнюється). **Явище підвищення пружних властивостей матеріалу внаслідок попереднього пластичного деформування називається наклепом.** На практиці це явище широко використовується, тому що збільшення міцності матеріалу збільшує його стійкість до дії зовнішніх навантажень (прокатка роликком шийок валів, застосування дрібострумінного наклепу та ін.). Якщо явище наклепу небажане,



то застосовуються відповідні термічні операції (нагрів матеріалу до температури 800-900°С). При цьому матеріал здобуває свої початкові властивості.

Первинну діаграму при розтяганні зразка обробляють таким способом: усі ординати поділяють на початкову площу  $A_0$ , а всі абсциси на початкову довжину  $l_0$  і одержують діаграму в умовних напруженнях для матеріалу в координатах  $\sigma-\varepsilon$  (рис.4.3). Ця діаграма за формою повторює первинну діаграму.

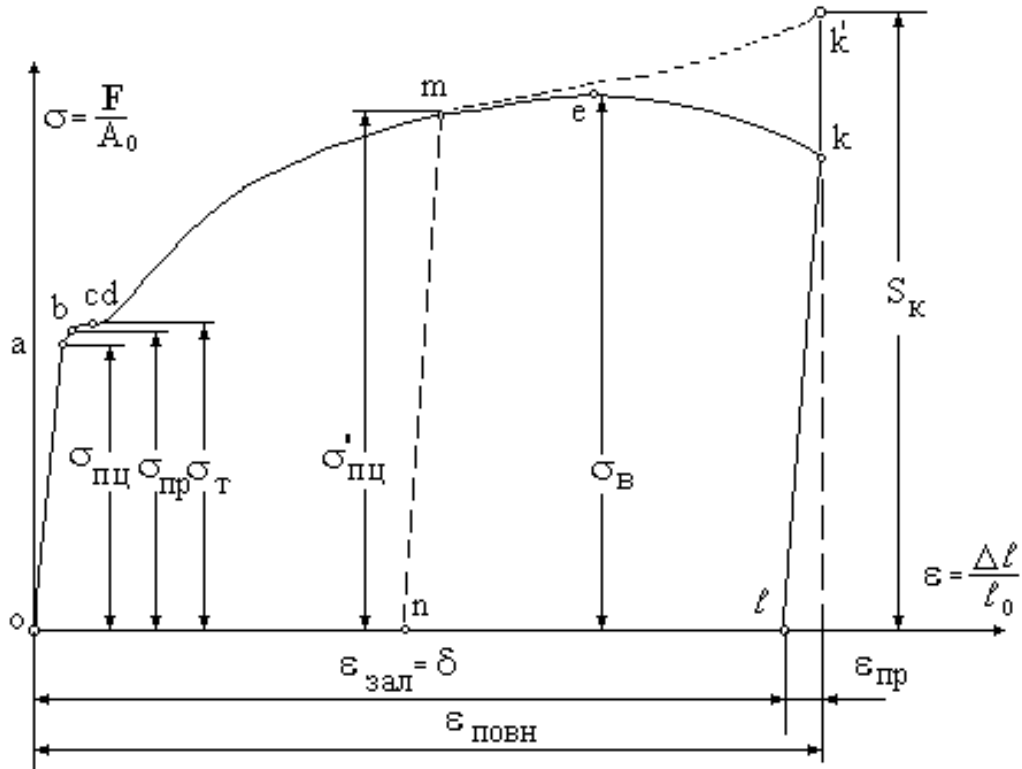


Рис.4.3.

По цій діаграмі знаходять основні характеристики міцності матеріалу:

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0} - \text{границя (межа) пропорційності} - \text{це найбільше напруження в}$$

*матеріалі, при якому ще виконується закон Гука (не спостерігаються відхилення від закону пропорційності між подовженням та навантаженням):  $\sigma = E\varepsilon$ ;*

$$\sigma_{пр} = \frac{F_{пр}}{A_0} - \text{границя (межа) пружності} - \text{це напруження в матеріалі, при}$$

*якому залишкова деформація зразка є малою величиною (для конструкційних сталей  $\varepsilon_{зал} = 0,005\%$ );*

$\sigma_m = \frac{F_m}{A_0}$  – границя (межа) текучості (фізична) – це *найменше напруження в матеріалі, при якому деформації зразка ростуть без помітного збільшення навантаження* (напруження, що відповідає явищу текучості в матеріалі);

$\sigma_e = \frac{F_{\max}}{A_0}$  – тимчасовий опір (границя чи межа міцності) – *умовне напруження в матеріалі, що відповідає максимальній силі, яка передуює руйнуванню зразка;*

$S_k = \frac{F_k}{A_1}$  – дійсний опір (дійсне напруження) розриву ( $A_1$  - площа поперечного перерізу шийки розірваного зразка).

Іноді вводиться додаткова характеристика міцності:  $\sigma'_{\text{пц}}$  – **межа пропорційності матеріалу, отримана в результаті попередньої пластичної деформації (наклепу).**

Як показує практика, межі пропорційності  $\sigma_{\text{пц}}$  та пружності  $\sigma_{\text{пр}}$  відрізняються **незначно**, тому як розрахункову характеристику для матеріалу використовують **межу пропорційності.**

Отримана діаграма для матеріалу називається **умовною**, тому що при її побудові ми всі ординати поділили на початкову площу  $A_0$ , не з огляду на зміни площі поперечного перерізу, починаючи з зони загальної текучості, тобто точки “d”. Якщо розділити усі ординати на дійсну площу  $A_i$ , то одержимо **дійсну** діаграму, що зображена пунктиром на рис.4.3.

Складності побудови дійсної діаграми та незначні відхилення її від умовної на ділянці bcde не дають можливість використовувати її для практичних розрахунків в опорі матеріалів.

Основними характеристиками міцності матеріалу, які використовуються в розрахунках, є: **межа (границя) пропорційності  $\sigma_{\text{пц}}$ , межа (границя) текучості  $\sigma_T$  та тимчасовий опір  $\sigma_B$ .**

До характеристик пластичності матеріалу, використовуваних, як правило, при оцінюванні технологічних можливостей матеріалу, відносяться наступні:

**відносне залишкове подовження при розриві:**  $\delta = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} 100\%$ ;

**відносне залишкове звуження при розриві:**  $\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} 100\%$ .

Крім зазначених механічних характеристик у ході випробувань на розтягання визначаються енергетичні характеристики матеріалу.

**Повна робота**-це робота, необхідна для руйнування зразка, визначається як частина площі первинної діаграми  $W = \eta F_{\max} \Delta \ell$ , де  $\eta$  - коефіцієнт повноти діаграми. **Повна питома робота** - це робота, необхідна для руйнування одиниці об'єму матеріалу  $u = \frac{W}{A_0 \ell_0}$ .

**Пружна робота** – це робота, необхідна для доведення зразка до межі пружності  $W_{np} = \frac{1}{2} F_{np} \Delta \ell_{np}$ . **Питома пружна робота**  $u_{np} = \frac{W_{np}}{A_0 \ell_0} = \frac{\frac{1}{2} F_{np} \Delta \ell_{np}}{A_0 \ell_0}$  - це робота, необхідна для доведення одиниці об'єму матеріалу до границі пружності.

З огляду на те, що  $\frac{F_{np}}{A_0} = \sigma_{np}$ ,  $\frac{\Delta \ell_{np}}{\ell_0} = \varepsilon_{np}$ , вираз пружної питомої роботи прийме вигляд:  $u_{np} = \frac{\sigma_{np} \varepsilon_{np}}{2}$ .

Якщо з закону Гука  $\sigma = E \varepsilon$  виразити  $\varepsilon$  і підставити у вираз для питомої пружної роботи, то одержимо, що  $u_{np} = \frac{\sigma_{np}^2}{2E}$ . З діаграми напружень (рис.4.3)

випливає, що  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ , тобто модуль подовжньої пружності при розтяганні чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу лінійної ділянки діаграми напружень до осі абсцис.

Результати випробувань на розтягання крихкого матеріалу приведені на рис.4.4. При цьому не спостерігається площадки текучості, зразок руйнується без утворення шийки (крихке руйнування). Для матеріалів, діаграма розтягання яких не має яскраво вираженої площадки текучості, границю текучості визначають умовно, як напруження, при якому залишкова деформація складає величину, установлену стандартом чи технічними умовами, наприклад, для конструкційних сталей  $\varepsilon_{\text{зал}} = 0,2\%$  розрахункової довжини зразка ( $\varepsilon_{\text{зал}}=0,002$ ), а умовна границя текучості  $\sigma_T$  позначається –  $\sigma_{0,2}$ .

У процесі випробувань різні матеріали виявляють свої властивості неоднаково – одні більш пластичні, інші менш.

**Пластичність** – це властивість матеріалу одержувати великі пластичні (залишкові) деформації без руйнування.

**Крихкість** - це *властивість матеріалу руйнуватися без утворення помітних залишкових деформацій*

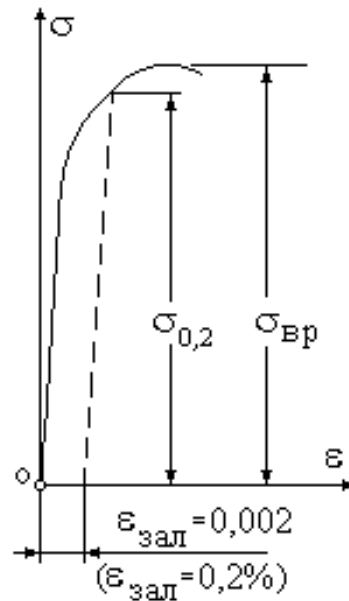


Рис.4.4.

Прийнято вважати пластичними матеріалами такі, для яких відносне подовження  $\delta$  більше 5%, для крихких матеріалів  $\delta < 5\%$ .

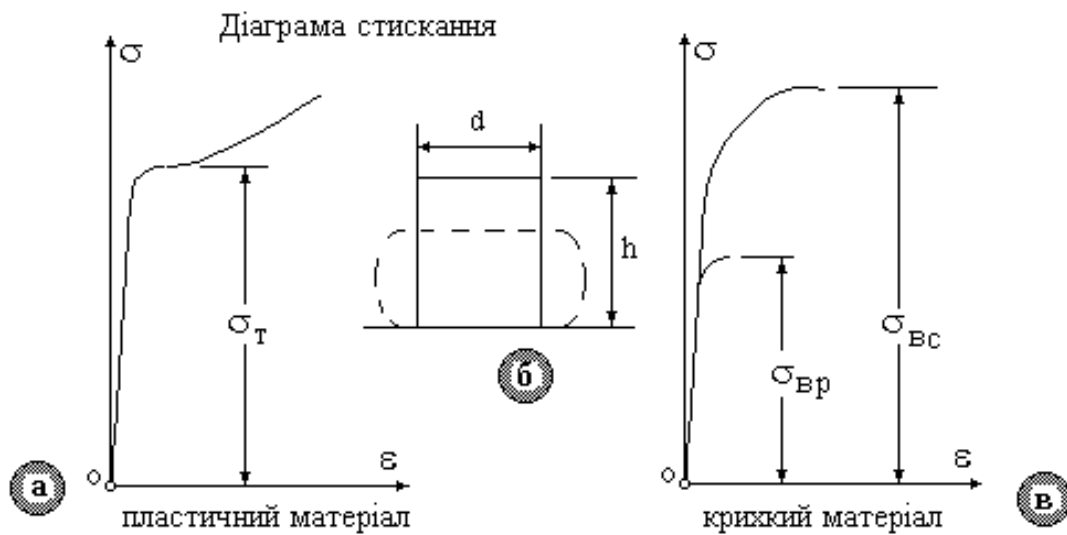


Рис.4.5.

**ВИПРОБУВАННЯ НА СТИСКАННЯ** (рис.4.5).. На стискання випробуються зразки у вигляді циліндрів висотою  $h=(1.5\div 3)d_0$  чи кубиків (для будівельних матеріалів). При випробуванні на стискання сили тертя, що виникають між стискаючими плитами випробувальної машини та торцями

зразка, впливають на результати стискання та характер руйнування випробовуваного зразка. При стисканні циліндричного зразка з маловуглецевої сталі останній приймає бочкоподібну форму (рис.4.5б).

При випробуванні на стискання крихких матеріалів (рис.4.5в) **діаграма також не має площадки текучості, однак при стисканні крихкі матеріали сприймають значно більші навантаження, чим при розтяганні.**

### **ПОРІВНЯННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПЛАСТИЧНИХ ТА КРИХКИХ МАТЕРІАЛІВ.**

1. Пластичні матеріали при розтяганні-стисканні до границі текучості якісно поводяться практично однаково. При розтяганні пластичні матеріали руйнуються при значних ( $\delta = 10...40\%$ ) залишкових деформаціях.

2. Крихкі матеріали руйнуються при малих ( $\delta = 2...7\%$ ) залишкових деформаціях. При стисканні крихкі матеріали витримують значно більші навантаження, чим при розтяганні.

3. Пластичні матеріали добре чинять опір ударним навантаженням (при однакових зразках площа діаграми більше, отже питома робота на руйнування зразка більше).

4. Крихкі матеріали мають незначний діапазон технологічних можливостей при механічній обробці (не переносять виправлення форми деталі).

5. Пластичні матеріали менш чуттєві до **концентрації напружень**. Під **концентрацією напружень розуміють різке збільшення напруженого стану в обмеженому об'єму пружного тіла, що носить локальний (місцевий) характер**. Концентрація напружень виникає, як правило, у місцях зміни форми деталі.

У випадку пластичного матеріалу, що має площадку текучості, унаслідок збільшення напружень до границі текучості  $\sigma_T$ , у зоні концентрації спостерігається пластична деформація, що захоплює сусідні обсяги матеріалу і напруження вирівнюються.

Крихкі матеріали площадки текучості не мають і напруження можуть зростати до тимчасового опору (межі міцності)  $\sigma_B$ , у результаті чого в зоні концентратора може з'явитися місцеве руйнування (тріщина).

**НАПРУЖЕННЯ, ЩО ДОПУСКАЄТЬСЯ (ДОПУСТИМЕ НАПРУЖЕННЯ).** При виконанні розрахунків за умовою міцності передбачається використання напруження, що допускається  $[\sigma]$ , яке визначається відношенням небезпечного напруження  $\sigma_{нб}$  для даного матеріалу

до коефіцієнту запасу міцності  $n$ :  $[\sigma] = \frac{\sigma_{нб}}{n}$ . Аналізуючи діаграми випробувань різних матеріалів, можна зробити висновок, що для **пластичних матеріалів небезпечним напруженням є границя текучості  $\sigma_T$**  і приймається відповідно **запас міцності по текучості  $n_T$** , а величина напруження, що допускається:

$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n_m}$ . Для **крихких матеріалів небезпечним напруженням приймається**

**тимчасовий опір (межа міцності)  $\sigma_B$**  і відповідно **запас міцності по тимчасовому опору  $n_B$** . Для крихких матеріалів **тимчасовий опір при розтяганні та стисканні виявляється різним**. Тому допустимі напруження

при розтяганні  $[\sigma]_p = \frac{\sigma_{вp}}{n_{вp}}$  та при стисканні різні.

**Коефіцієнт запасу міцності залежить від наступних факторів:**

- **загальних** – неоднорідності матеріалу; неточності розрахунку; неточності визначення зовнішніх навантажень;
- **спеціальних** – динамічності навантаження; концентрації напружень; зміни температури; стану середовища.

Частковий коефіцієнт запасу міцності  $n_i \geq 1$ . Загальний коефіцієнт запасу міцності  $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_n$ .

Вибір величини коефіцієнту запасу міцності відбувається з урахуванням конкретних умов роботи конструкції, яка розраховується, і визначається практичним досвідом створення аналогів за минулі часи та рівнем техніки в даний період.

У кожній області техніки склалися свої традиції, вимоги та методи, відповідно до яких і призначається коефіцієнт запасу міцності. **При проектуванні будівельних споруджень із тривалим терміном експлуатації  $n = 2...5$ . У машинобудуванні коефіцієнт запасу міцності  $n = 1,5...2,5$ ; в авіаційній промисловості -  $n = 1,2...1,5$ , а в зв'язку з відповідальністю конструкцій передбачено проведення обов'язкових натурних випробувань.**

Правильність вибору коефіцієнта запасу міцності визначається досвідом та кваліфікацією виконавця і конструктора.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Коли на досліджуваному зразку з'являються лінії Людерса-Чернова?
2. Чому на умовній діаграмі розтягання для зразка напруження, при якому відбувається руйнування зразка, лежить нижче за межі міцності (тимчасового опору)?
3. Що називається пружністю матеріалу? Чим вона характеризується?
4. Що називається пластичністю матеріалу? Чим вона характеризується?
5. В чому суть закону розвантаження зразка?
6. Що називається наклепом матеріалу?
7. Що виражає площина діаграми розтягання для зразка, для матеріалу?
8. Що називається питомою роботою, яка її розмірність?
9. Як змінюються механічні властивості сталі з підвищенням і пониженням температури?
10. Як впливає швидкість навантаження зразка на механічні характеристики?
11. Що називається твердістю матеріалу і як її визначають?
12. Що називається числом твердості?
13. Коли з'являється шийка в зразку?
14. Назвіть умови поділення матеріалів на крихкі і пластичні.
15. Які напруженні є небезпечними для пластичних і крихких матеріалів?
16. Які основні порівняльні характеристики пластичних і крихких матеріалів?
17. Дайте визначення напрузі, що допускається.
18. Від яких чинників залежить коефіцієнт запасу міцності?
19. Що називається концентрацією напружень?
20. Чому пластичні матеріали менш чутливі до концентрації напружень в порівнянні з крихкими?

## Лекція №5. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ.

Опір стержня різним видам деформацій залежить не тільки від його матеріалу і розмірів, але й від обрисів осі, форми поперечних перерізів та їхнього розташування щодо діючих навантажень. Розглянемо основні геометричні характеристики поперечних перерізів стержня, відвертаючись від фізичних властивостей досліджуваного об'єкта. Зобразимо довільну фігуру (поперечний переріз стержня), зв'язану із системою координат ХОУ і полярною координатою  $\rho$  (рис.5.1).

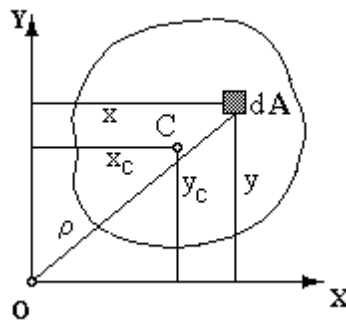


Рис.5.1.

Усі геометричні характеристики описуються інтегралом виду  $\int_A x^m y^n dA$ .

Окремі випадки.

1.  $m = 0, n = 0 \rightarrow \int_A dA = A$  [м<sup>2</sup>] – площа поперечного перерізу.

2.  $m = 1, n = 0 \rightarrow \int_A x dA = S_y$  [м<sup>3</sup>] – статичний момент площі щодо осі Y.

3.  $m = 0, n = 1 \rightarrow \int_A y dA = S_x$  [м<sup>3</sup>] – статичний момент площі щодо осі X.

*Статичний момент площі щодо осі дорівнює добутку площі на координату центра ваги перерізу щодо цієї осі, тобто  $S_x = A \cdot y_c$ ,  $S_y = A \cdot x_c$ .*

Вісь, щодо якої статичний момент дорівнює нулю, називається **центральною віссю** перерізу. Точка перетинання центральних осей називається **центром ваги** перерізу.

*Статичний момент складеної площі щодо осі дорівнює сумі статичних моментів окремих площ  $A_i$  ( $A_{скл} = \sum_{i=1}^n A_i$ ;  $x_i, y_i$  – координати центра ваги площі  $A_i$  в цій системі координат) щодо відповідної осі:*



$$S_{скл x} = \sum_{i=1}^n S_{ix} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i = A_{скл} \cdot y_C; S_{скл y} = \sum_{i=1}^n S_{iy} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i = A_{скл} \cdot x_C.$$

Звідси координати центра ваги складеного перерізу визначаються за формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} [\text{м}], \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} [\text{м}]. \quad (5.1)$$

**4.  $m = 1, n = 1 \rightarrow \int_A xy dA = I_{xy} [\text{м}^4]$  – відцентровий момент інерції щодо**

**координатних осей.** Так як координати  $x, y$  можуть бути різні по величині та знаку, то і  $I_{xy}$  також може приймати значення різних знаків. **Відцентровий момент інерції складеної площі щодо осей, дорівнює сумі відцентрових**

**моментів окремих площ щодо цих осей,** тобто:  $I_{скл xy} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i \cdot y_i$ .

**5.  $m = 2, n = 0 \rightarrow \int_A x^2 dA = I_y [\text{м}^4]$  – осьовий момент інерції щодо осі  $Y$ .**

**6.  $m = 0, n = 2 \rightarrow \int_A y^2 dA = I_x [\text{м}^4]$  – осьовий момент інерції щодо осі  $X$ .** Осьові

моменти інерції є строго позитивними величинами:  $I_y > 0, I_x > 0$ .

**7.  $\int_A \rho^2 dA = I_p [\text{м}^4]$  – полярний момент інерції**,  $I_p > 0$ . З огляду на те, що

$\rho^2 = x^2 + y^2$ , одержимо:  $\int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x$ , тобто

**полярний момент інерції дорівнює сумі осьових моментів інерції.**

### **ПРИКЛАД 1. Визначення положення центра ваги перерізу.**

#### **Порядок визначення центра ваги:**

1. Розбиваємо переріз на прості площі, координати центрів ваги яких відомі (прямокутник, коло, трикутник і т.д.)
2. Проводимо центральні осі простих складових площ.
3. Вибираємо осі відліку  $X', Y'$  (будь-які).
4. Визначаємо координати (зі знаками) центрів ваги  $x_i, y_i$  простих площ.
5. Обчислюємо координати центра ваги перерізу. У даному випадку:

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A_1 - A_2}, \quad y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2}.$$

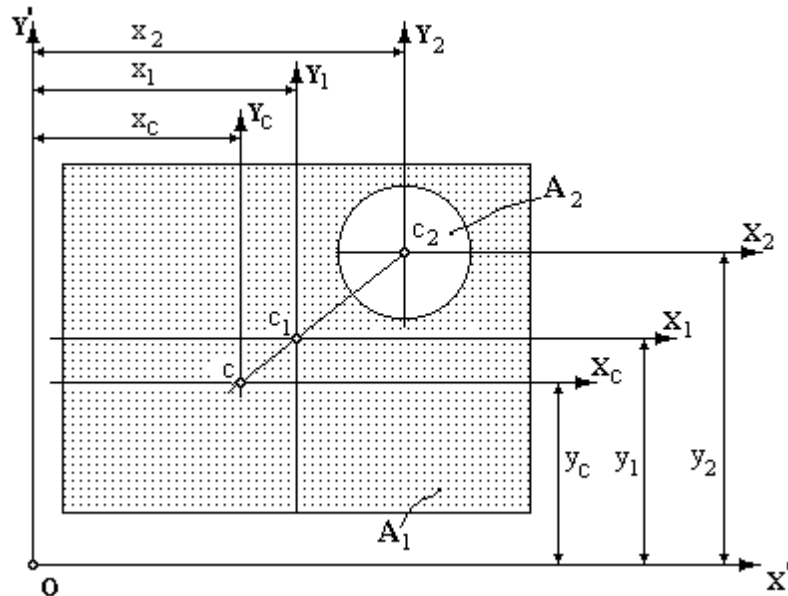


Рис.5.2.

**Статичний момент площі береться зі знаком плюс, статичний момент отвору – зі знаком мінус.** Якщо узяти осі відліку, що збігаються з центральними осями окремих площ, то задача трохи спрощується. Надалі індекс «с» при центральних осях опускаємо і вважаємо центральні осі як X, Y.

### **ПРИКЛАД 2. Обчислення відцентрового моменту інерції.**

Визначимо відцентровий момент прямокутника (рис.5.3а). Розіб'ємо на чотири площі, візьмемо елементарні площадки  $dA$  у кожному квадранті, та визначимо елементарний відцентровий момент всього перерізу як суму елементарних відцентрових моментів окремих площ у кожному координатному квадранті:

$$dI_{xy} = dI_{xy}^I + dI_{xy}^{II} + dI_{xy}^{III} + dI_{xy}^{IV} = x y dA + (-x) y dA + (-x)(-y) dA + x(-y) dA = 0.$$

Відцентровий момент прямокутника щодо обраних центральних осей дорівнює нулю. Центральні осі X, Y у даному випадку є **осями симетрії**.

Розглянемо переріз з однією віссю симетрії (рис.5.3б). Поводячись аналогічним образом, маємо:  $dI_{xy} = dI_{xy}^I + dI_{xy}^{II} = x y dA + (-x) y dA = 0$ . Таким чином, **якщо переріз має хоча б одну вісь симетрії, то відцентровий момент інерції щодо центральних осей дорівнює нулю.**

**Центральні осі X, Y, щодо яких відцентровий момент інерції  $I_{xy}$  дорівнює нулю, називаються головними осями інерції, а осеві моменти інерції  $I_x$  і  $I_y$  щодо цих осей називаються головними моментами інерції.**

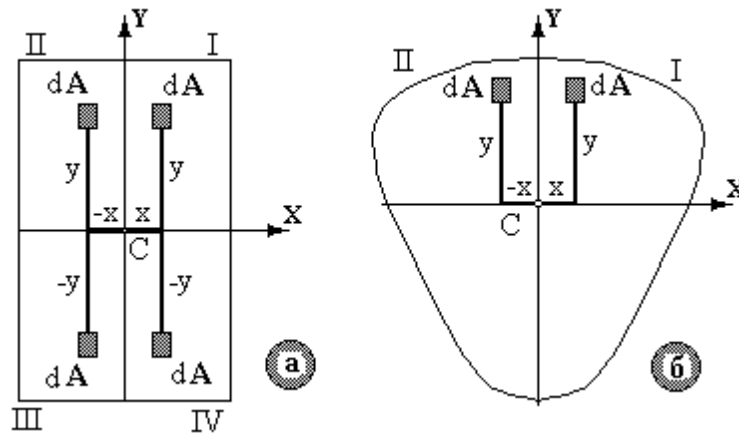


Рис.5.3.

**ПРИКЛАД 3. Визначення осьових моментів інерції для прямокутника.**

Осьовий момент інерції щодо центральної осі X дорівнює  $I_x = \int_A y^2 dA$ .

Візьмемо на відстані  $y$  елементарну площадку  $dA$  – смужку шириною  $dy$ .

Площа  $dA = b \cdot dy$ , підставимо під інтеграл та проінтегруємо від  $-\frac{h}{2}$  до  $+\frac{h}{2}$ .

$$\text{Одержимо: } I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}.$$

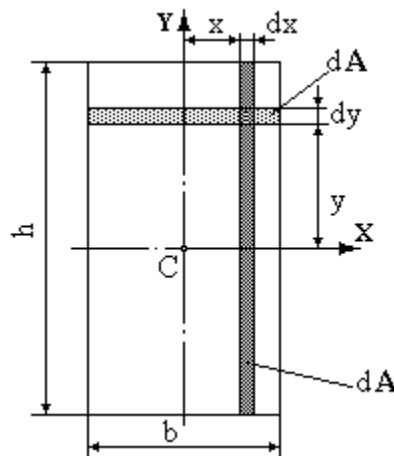


Рис.5.4.

Міркуючи аналогічно, визначимо осьовий момент інерції щодо осі Y, тобто:

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2 h dx = h \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \frac{hb^3}{12}.$$

**ПРИКЛАД 4. Визначення моментів інерції для круглого перерізу** (рис.5.5а).

Визначимо полярний момент інерції  $I_p = \int_A \rho^2 dA$ . На відстані  $\rho$  виділимо

елементарну площадку  $dA$  – кільце шириною  $d\rho$ . Очевидно, що  $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$ .

Підставимо значення  $dA$  в інтеграл та інтегруємо від 0 до  $\frac{d}{2}$ . Одержимо:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32}. \text{ Але полярний момент інерції}$$

дорівнює сумі осьових моментів інерції, тобто  $I_p = I_x + I_y$ . Очевидно, що для

круглого перерізу  $I_x = I_y$ . Тоді  $I_p = 2I_x$  і  $I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$ . На підставі

отриманих формул легко одержати значення моментів інерції для кільцевого

перерізу (рис.5.5б). **Осьовий момент інерції щодо центральних осей складеного перерізу дорівнює сумі осьових моментів інерції щодо цих осей складених площ**, тобто осьовий момент інерції кільцевого перерізу:

$$I_x = I_x^I - I_x^{II} = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4),$$

тут  $\alpha = \frac{d}{D}$ . Очевидно і для кільцевого перерізу  $I_x = I_y$ . Аналогічно визначимо

полярний момент інерції:  $I_p = I_p^I - I_p^{II} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$ .

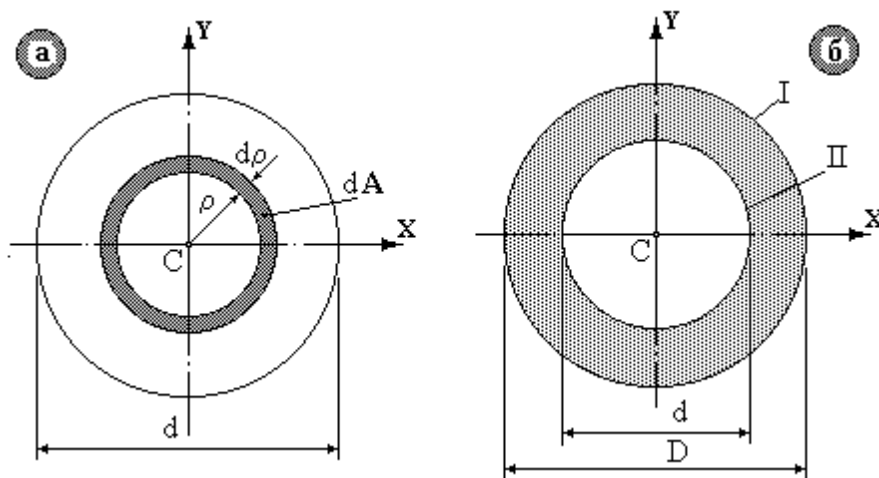


Рис.5.5.

## ЗАЛЕЖНІСТЬ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ЩОДО ДВОХ РІВНОБІЖНИХ ОСЕЙ, ОДНА З ЯКИХ ЦЕНТРАЛЬНА.

Дано: переріз площею  $A$ ; відоме положення центральних осей  $X, Y$ ; відомі осьові  $I_x$  і  $I_y$  та відцентровий моменти інерції  $I_{xy}$ . Визначити моменти інерції  $I_{x_1}$ ,  $I_{y_1}$ ,  $I_{x_1y_1}$  щодо осей  $X_1$  і  $Y_1$ , рівнобіжних центральним осям, якщо відомі відстані  $a$  і  $b$  між осями.

Виділимо елементарну площадку  $dA$  та визначимо її координати в системі координат  $X_1Y_1$ :  $x_1 = x + b$ ;  $y_1 = y + a$ . Осьовий момент інерції щодо осі  $X_1$

запишеться як:  $I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA$ . Підставимо значення  $x_1$  і  $y_1$  та інтегруємо,

одержимо:  $I_{x_1} = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA$ . Перший інтеграл являє

собой осьовий момент інерції щодо центральної осі  $X$ :  $\int_A y^2 dA = I_x$ ; другий –

статичний момент площі щодо центральної осі тотожно дорівнює нулю:  $\int_A y dA = S_x \equiv 0$ ; третій  $\int_A dA = A$  – площа перерізу. Таким чином:

$I_{x_1} = I_x + a^2 A$ . Аналогічно визначимо осьовий момент інерції щодо осі  $Y_1$ :

$I_{y_1} = \int_A x_1^2 dA = \int_A (x + b)^2 dA = \int_A x^2 dA + 2b \int_A x dA + b^2 \int_A dA = I_y + 2bS_x + b^2 A = I_y + b^2 A$

, ( $S_x \equiv 0$ , тому що вісь  $Y$  – центральна). Таким чином, **осьовий момент інерції щодо осі, рівнобіжної центральній осі, дорівнює осьовому моменту інерції щодо центральної осі плюс добуток площі на квадрат відстані між осями.**

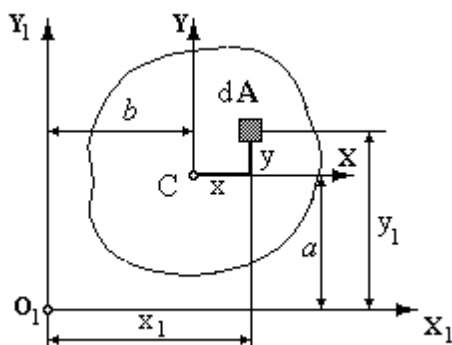


Рис.5.6.

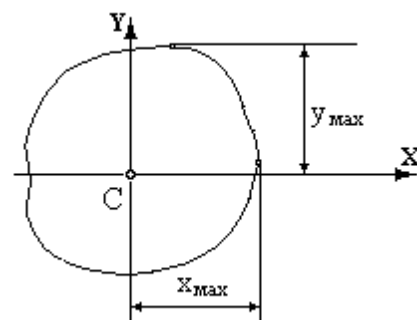


Рис.5.7.

Аналогічно визначимо відцентровий момент інерції:

$$I_{x_1y_1} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x + b)(y + a) dA = \int_A xy dA + ab \int_A dA + b \int_A y dA + a \int_A x dA = I_{xy} + abA + bS_x + aS_y$$

З обліком того, що  $S_x$  і  $S_y \equiv 0$ , маємо  $I_{x_1y_1} = I_{xy} + \mathbf{ab}A$ . **Відцентровий момент інерції щодо осей, рівнобіжних центральним осям, дорівнює відцентровому моменту інерції щодо центральних осей плюс добуток площі на відстані між осями, які потрібно брати з відповідними знаками.**

**МОМЕНТИ ОПОРУ.** Розглянемо переріз площею  $A$ .  $X, Y$  – головні осі перерізу,  $I_x, I_y$  – головні осьові моменти інерції. **Відношення осьового моменту інерції щодо осі до відстані до найбільш віддаленої точки перерізу від цієї осі називається осьовим моментом опору, тобто  $\frac{I_x}{y_{\max}} = W_x, \frac{I_y}{x_{\max}} = W_y$  [м<sup>3</sup>].**

Практичне значення мають моменти опору щодо головних центральних осей для симетричних фігур, що звичайно називають просто моментами опору.

1. Для **прямокутника** (рис.5.4):  $y_{\max} = \frac{h}{2}, x_{\max} = \frac{b}{2}, I_x = \frac{bh^3}{12}, I_y = \frac{hb^3}{12}$ , тоді  $W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}, W_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{hb^2}{6}$ .

2. Для **круглого перерізу** (рис.5.5а):  $x_{\max} = y_{\max} = \frac{d}{2}, I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$ , тоді  $W_x = W_y = \frac{I_x}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$ .

3. Для **кільцевого перерізу** (рис.5.5б):  $x_{\max} = y_{\max} = \frac{D}{2}, I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4)$ , тоді  $W_x = W_y = \frac{I_x}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4)$ .

**Полярним моментом опору називається відношення полярного моменту інерції до відстані від полюса до найбільш віддаленої точки:**

$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$ , [см<sup>3</sup>, м<sup>3</sup>]. Для **круглого перерізу**:  $\rho_{\max} = \frac{d}{2}, I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ , тоді

$W_p = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$ . Для **кільцевого перерізу**:  $\rho_{\max} = \frac{D}{2}, I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4)$ , тоді

$W_p = \frac{I_p}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4)$ .

## РАДІУСИ ІНЕРЦІЇ

Момент інерції перерізу щодо якої-небудь осі можна уявити у вигляді добутку площі фігури на квадрат деякої величини, названої **радіусом інерції**:

$$I_x = \int_A y^2 dA = A \cdot i_x^2, I_y = \int_A x^2 dA = A \cdot i_y^2, \text{ відкіля радіуси інерції відповідно щодо}$$

$$\text{осей X і Y: } i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

Розглянемо приклади обчислення осевих моментів інерції для складених перерізів.

**ПРИКЛАД 5.** Обчислимо головні центральні моменти інерції T-образного перерізу.

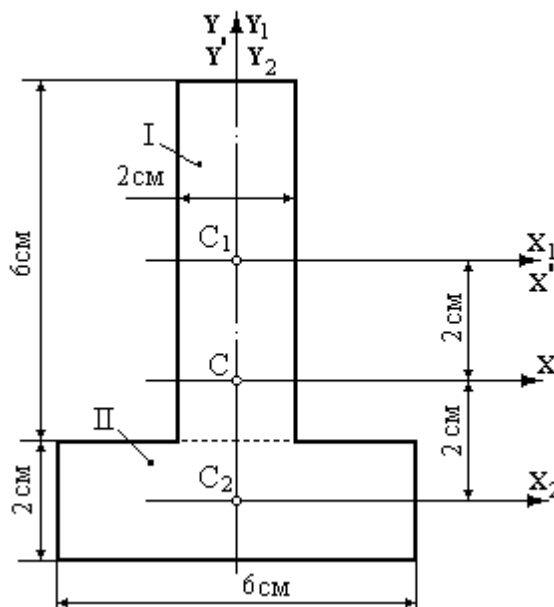


Рис.5.8.

1. Розбиваємо переріз на прості площі, проводимо їхні центральні осі.
2. Вибираємо осі відліку  $X'Y'$ , у даному випадку співпадаючими з осями  $X_1Y_1$ .
3. Визначаємо координати центрів ваги складових площ:  $x'_1 = 0, y'_1 = 0$  ;  $x'_2 = 0, y'_2 = -4 \text{ см}$ . Так як переріз має одну вісь симетрії  $Y$ , то центр ваги перерізу лежить на цій осі. Тому потрібно визначити тільки координату:

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i y_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 0 + 6 \cdot 2 \cdot (-4)}{6 \cdot 2 + 6 \cdot 2} = -2 \text{ см.}$$

Переріз складається з двох рівновеликих площ, тому його центр ваги знаходиться у середині між центрами  $C_1$  і  $C_2$ .

4. Визначаємо осьові моменти інерції  $I_{x_1}^I, I_{y_1}^I, I_{x_2}^{II}, I_{y_2}^{II}$  щодо власних центральних осей кожної площі, відстані  $a_1, b_1$  і  $a_2, b_2$  між центральними осями перерізу і центральними осями складених площ, та з урахуванням залежності між моментами інерції щодо рівнобіжних осей визначаємо моменти інерції перерізу:

$$I_x = I_{x_1}^I + a_1^2 A_1 + I_{x_2}^{II} + a_2^2 A_2 = \frac{2 \cdot 6^3}{12} + 2^2 \cdot 2 \cdot 6 + \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 2^2 \cdot 2 \cdot 6 = 136 \text{ см}^4,$$

$$I_y = I_{y_1}^I + A_1 b_1^2 + I_{y_2}^{II} + A_2 b_2^2 = \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 6 \cdot 0 + \frac{2 \cdot 6^3}{12} + 2 \cdot 6 \cdot 0 = 40 \text{ см}^4.$$

**ПРИКЛАД 6.** Вирахуємо головні центральні моменти інерції перерізу, показано на рис. 5.9.

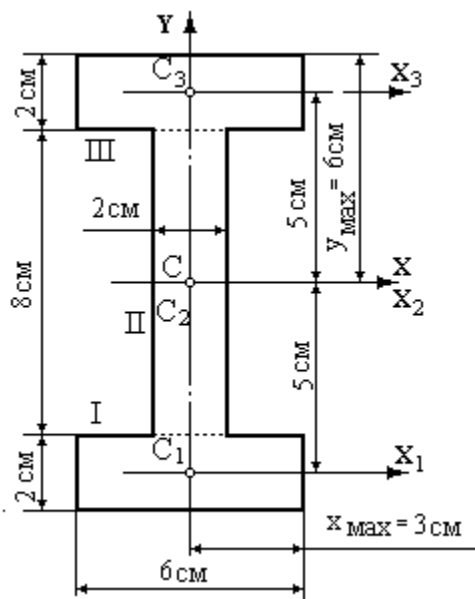


Рис.5.9.

1. Переріз складається з трьох частин, має дві осі симетрії, тому осі симетрії є центральними осями та головними осями інерції.

2. Осьові моменти інерції перерізу визначаються аналогічно попередньому прикладу:  $I_x = I_{x_1}^I + a_1^2 A_1 + I_{x_2}^{II} + a_2^2 A_2 + I_{x_3}^{III} + a_3^2 A_3$ ;  $I_{x_1}^I = I_{x_3}^{III}$ ,  $A_1 = A_3$ ,  $|a_1| = a_3$ ,



тоді 
$$I_x = 2(I_{x_1}^I + a_1^2 A_1) + I_{x_2}^{II} + a_2^2 A_2 = 2\left(\frac{6 \cdot 2^3}{12} + 5^2 \cdot 6 \cdot 2\right) + \frac{2 \cdot 8^3}{12} \approx 693 \text{ см}^4.$$

$$I_y = I_{y_1}^I + I_{y_2}^{II} + I_{y_3}^{III} = 2I_{y_1}^I + I_{y_2}^{II} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 6^3}{12} + \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 72 + 5,3 \approx 77,3 \text{ см}^4.$$

3. Осьові моменти опору:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{693}{6} = 115,5 \text{ см}^3, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{77,3}{3} = 25,8 \text{ см}^3.$$

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як визначається статичний момент фігури через її площу і координати центру тяжіння перетину?
2. Яка розмірність статичного моменту площі?
3. Чому рівний статичний момент площі фігури щодо осі, що проходить через центр тяжіння фігури?
4. По яких формулах визначається центр тяжіння фігури?
5. Що називається осьовим, полярним і відцентровим моментами інерції? Яка їх розмірність?
6. Як зв'язані між собою суми осьових моментів інерції щодо перпендикулярних осей і полярний момент інерції щодо точки перетину цих осей?
7. Які по знаку осьовий, полярний і відцентровий моменти інерції?
8. Напишіть формули, що виражають залежність осьових і відцентрового моментів інерції щодо осей паралельних центральним осям.
9. Чому дорівнюють осьові моменти інерції прямокутного перетину щодо центральних осей, осей паралельних підставі і бічній стороні?
10. Чому дорівнюють центральні осьові моменти інерції круглого і кільцевого перетинів?
11. Як змінюється відцентровий момент інерції при повороті координатних осей на 90 градусів?
12. Які осі називаються головними центральними осями інерції?
13. Чому вісь симетрії перетину завжди є однією з головних осей інерції?
14. Як визначається момент інерції щодо центральної осі складної фігури, якщо її можна розбити на прості фігури, моменти інерції яких легко визначаються по формулах або таблицях?
15. Що називається осьовим моментом опору? Яка його розмірність?
16. Напишіть формули для визначення осьових моментів опору прямокутного, круглого і кільцевого перетинів.

## Лекція 6. ЗГИНАННЯ ПРЯМОЛІНІЙНИХ СТЕРЖНІВ.

Згинанням називається тип деформування стержня, при якому в його поперечних перерізах виникають згинальні моменти.

**Класифікація згинання.** Згинання підрозділяється на **поперечне** – зовнішнє навантаження діє в напрямку, перпендикулярному осі стержня, **подовжнє** – зовнішні сили діють уздовж осі стержня та **подовжньо -поперечне**.

Поперечне згинання підрозділяється на **плоске**, при якому згинальні сили лежать в одній площині, та **просторове**, при якому зовнішні згинальні сили довільно орієнтовані у просторі.

Плоске згинання підрозділяється на **пряме** та **косе**. У випадку **прямого згинання** площина дії згинальних навантажень збігається з однією з **головних осей інерції перерізу**. На рис 6.1 показаний випадок навантаження стержня при прямому поперечному згинанні. Зовнішні сили розташовані у площині  $YOZ$ , що збігається з головною віссю перерізу  $Y$ . При косому згинанні площина дії згинальних навантажень не збігається з жодною з головних осей інерції.

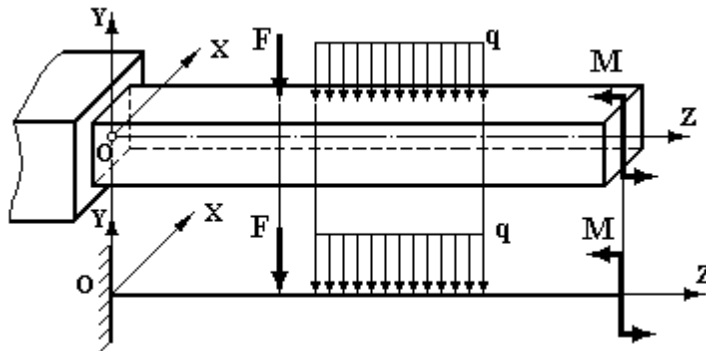


Рис.6.1.

З прямого поперечного згинання ( $Q_y \neq 0$  і  $M_x \neq 0$ ) виділяється **чисте згинання**, при якому поперечна сила  $Q_y$  дорівнює нулю, а згинальний момент  $M_x$  є єдиним внутрішнім силовим фактором у перерізу стержня і виявляється постійним на ділянці стержня.

**Розглянемо згинання балок.** *Балкою називається стержень, закріплений на опорах та працюючий на згинання.* Кількість зовнішніх зв'язків в опорах забороняє переміщення балки як твердого цілого. Плоскі опори балок та реактивні зусилля в них показані на рис.6.2.

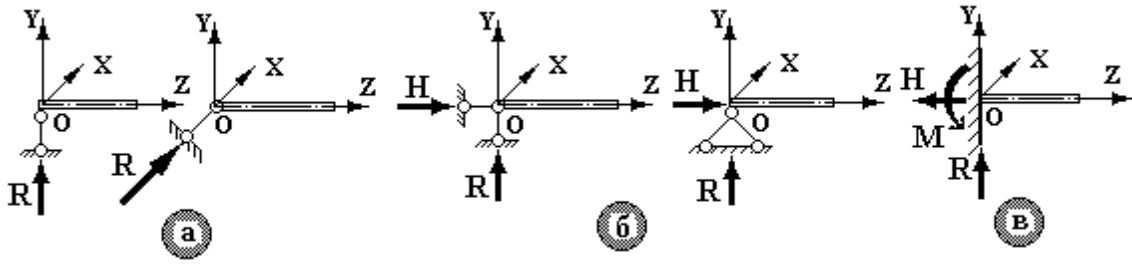


Рис.6.2.

У **шарнірно-рухомій опорі** (рис.6.2а) виникає одна реактивна сила  $R$ , що діє перпендикулярно поверхні опори (у напрямку показаного зв'язку). У **шарнірно-нерухомій опорі** (рис.6.2б) виникають дві складових реакції: вертикальна  $R$  і горизонтальна  $H$ . У **затисненні (жорсткому затисненні)** (рис.6.2в), виникають три складових: вертикальна  $R$ , горизонтальна  $H$  і момент  $M$ .

Для кінематичної незмінюваності плоских балок необхідна кількість зовнішніх зв'язків три, причому при плоскому згинанні горизонтальна складова  **$H$**  реакції в шарнірно-нерухомій опорі **тотожно дорівнює нулю**. Тому надалі використовуємо два рівняння рівноваги. Якщо кількість зовнішніх поперечних зв'язків більше двох, то така балка називається **статично невизначеною (багатоопорною)**. Типи і найменування балок, що зустрічаються, показані на рис.6.3.

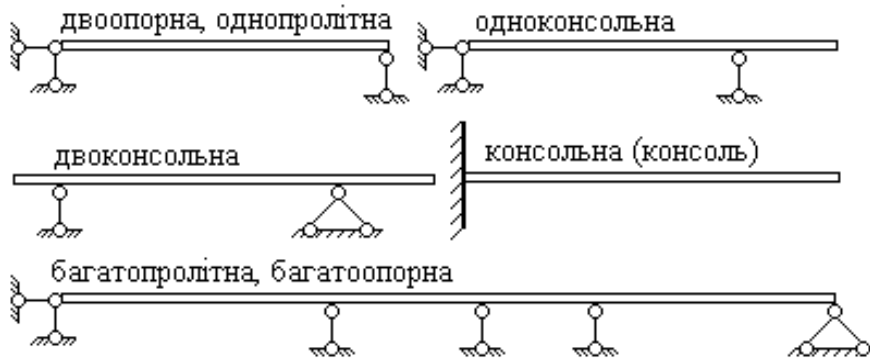


Рис. 6.3.

### ПОПЕРЕЧНА СИЛА $Q_y$ ТА ЗГИНАЛЬНИЙ МОМЕНТ $M_x$ .

Проаналізуємо внутрішні силові фактори у поперечному перерізі балки при прямому поперечному згинанні, а потім сформулюємо основні **правила побудови епюр  $Q_y$  і  $M_x$** .

Розглянемо консольний стержень з затисненим правим торцем та навантажений силами  $F_1$  і  $F_2$  (рис 6.4). Нехай  $F_1 > F_2$ .

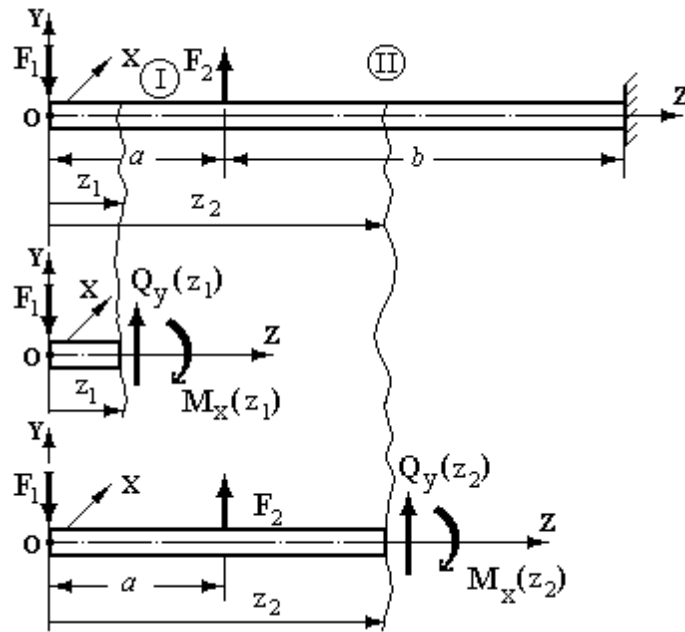


Рис.6.4.

Скористаємося методом перерізів. Виберемо переріз на першій і другій ділянках, покажемо відсічені частини, замінимо дію відкинутих частин на залишену внутрішніми силовими факторами  $Q_y$  і  $M_x$ . З умов статички (суми проєкцій сил на вісь  $Y$  та суми моментів щодо осі  $X$ , що проходить через центр ваги розглянутого перерізу) визначимо їхні значення.

1 ділянка:  $\Sigma F_i = -F_1 + Q_y(z_1) = 0$ , відкіля  $Q_y(z_1) = F_1$ ;

$\Sigma M_i = F_1 \cdot z_1 - M_x(z_1) = 0$ , відкіля  $M_x(z_1) = F_1 \cdot z_1$ .

2 ділянка,  $\Sigma F_i = -F_1 + F_2 + Q_y(z_2) = 0$ , відкіля  $Q_y(z_2) = F_1 - F_2$ ;

$\Sigma M_i = F_1 \cdot z_2 - F_2 \cdot (z_2 - a) - M_x(z_2) = 0$ , відкіля  $M_x(z_2) = F_1 \cdot z_2 - F_2 \cdot (z_2 - a)$ .

Використовуючи такі уявлення, сформулюємо наступні правила для визначення поперечної сили та згинального моменту при згинанні.

*Поперечна сила в даному перерізі –  $Q_y(z)$  чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на нормаль (вісь  $Y$ ) до осі стержня всіх сил, розташованих по одну сторону від перерізу (всіх однобічних сил), та утворює заміну дії відкинутої частини на залишену. Правило знаків. Поперечна сила вважається позитивною (додатною), якщо обертає розглянуту відсічену частину балки щодо центра ваги перерізу за годинниковою стрілкою, та негативною (від'ємною) - якщо проти годинникової стрілки.*

Згинальний момент в даному перерізі –  $M_x(z)$  чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів щодо центра ваги перерізу всіх сил, розташованих по одну сторону від перерізу (всіх одnobічних сил), та утворює заміну дії відкинутої частини на залишену. Правило знаків. Згинальний момент вважається позитивним (додатним), якщо відсічена частина згинається опуклістю вниз (стиснуте волокно вгорі, розтягнуте внизу), та негативним (від'ємним)- якщо навпаки. Таким чином, епюра згинальних моментів будується з боку стиснутого волокна.

Схематично прийняті правила знаків виглядають так:

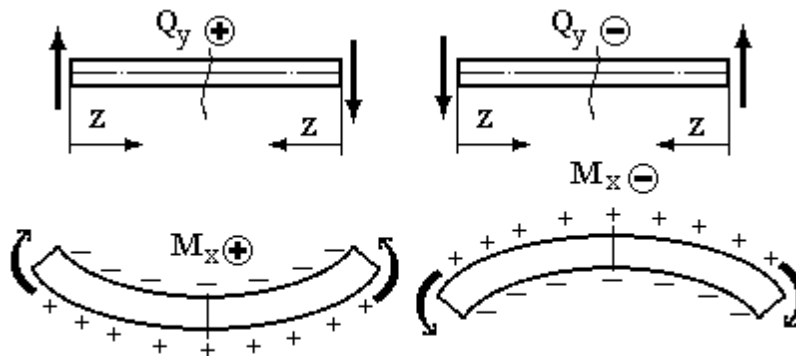


Рис. 6.5.

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ ІНТЕНСИВНІСТЮ ЗОВНІШНЬОГО РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ  $q$  ПОПЕРЕЧНОЮ СИЛОЮ  $Q_y$  ТА ЗГИНАЛЬНИМ МОМЕНТОМ  $M_x$ .**

Розглянемо балку, навантажену довільним розподіленим навантаженням  $q(z)$  (рис.6.6а). В перерізі на відстані  $z$  виділимо елемент довжиною  $dz$  (рис. 6.6а). В перерізі I діють внутрішні силові фактори  $Q_y$  і  $M_x$ , в перерізі II на відстані  $dz$  від першого діють внутрішні зусилля  $Q_y+dQ_y$  і  $M_x+dM_x$ . У межах нескінченно малого  $dz$  навантаження  $q(z)$  можна вважати рівномірним та рівним  $q$ .

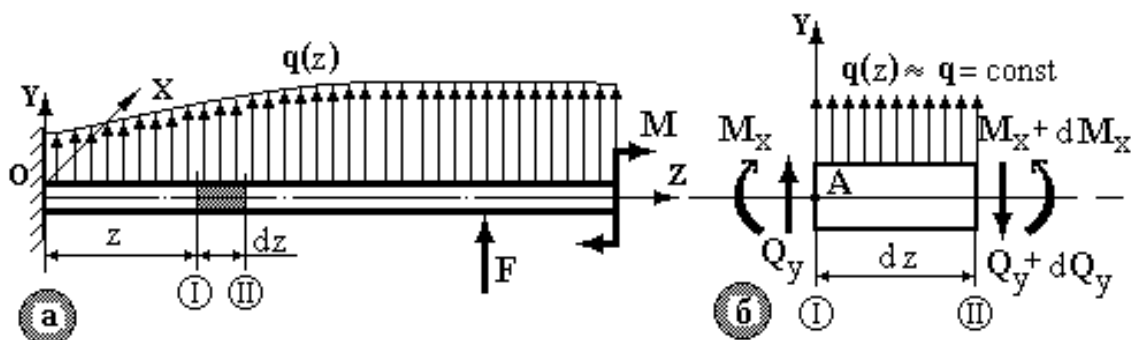


Рис. 6.6.

Так як балка під дією зовнішнього навантаження знаходиться в рівновазі, то і кожен її елемент під дією зовнішніх та внутрішніх зусиль також знаходиться в рівновазі (рис. 6.6б).

Запишемо умови статичної рівноваги:

$$1. \sum F_y = 0; Q_y - Q_y - dQ_y + qdz = 0, \text{ відкіля } qdz - dQ_y = 0, \text{ отже}$$

$$q = \frac{dQ_y}{dz} \quad (6.1)$$

$$2. \sum M_A = 0 \quad ; \quad -M_x + q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} - (Q_y + dQ_y) \cdot dz + M_x + dM_x = 0, \quad \text{приводячи}$$

подібні члени та зневажаючи нескінченно малими другого порядку в порівнянні з нескінченно малими першого порядку, одержимо:  $-Q_y dz + dM_x = 0$ , відкіля:

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}. \quad (6.2)$$

3. Підставляючи вираз (6.2) у залежність (6.1), одержимо :

$$q = \frac{dQ_y}{dz} = \frac{d^2 M_x}{dz^2}. \quad (6.3)$$

Диференціальні залежності (6.2) і (6.3) дозволяють установити деякі особливості розподілів поперечних сил та згинальних моментів. **Приведені нижче правила можуть використовуватися для побудови та перевірки еюр  $M_x$  і  $Q_y$ .**

1. На ділянках, де розподілене навантаження відсутнє ( $q=0$ ), еюра  $Q_y$  постійна, а еюра  $M_x$  представляє лінійну функцію.
2. На ділянках з рівномірно розподіленим навантаженням  $q$  еюра  $Q_y$  лінійна, а еюра  $M_x$  - квадратна парабола, причому опуклість параболи спрямована в протилежну сторону дії розподіленого навантаження. У точці  $z = z^*$ , де поперечна сила  $Q_y(z^*) = 0$  (змінює знак), момент  $M_x$  досягає екстремального значення ( $M_{x\max}, M_{x\min}$ ).
3. На ділянках, де  $Q_y = 0$ , еюра  $M_x$  постійна.
4. Наступні пункти сформульовані для правої осі  $z$  (для правої системи координат). На ділянці, де поперечна сила  $Q_y$  позитивна, еюра моменту  $M_x$  зростає, і убуває - якщо  $Q_y$  негативна.
5. У перерізах, де до балки прикладені зовнішні зосереджені сили:

- а) на епюрі  $Q_y$  спостерігаються стрибки на їхню величину й у напрямку прикладених зосереджених сил ;
- б) на епюрі  $M_x$  з'являються злами, причому вістря зламів спрямовані проти дії зосереджених сил.
6. У перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі  $M_x$  спостерігаються стрибки на величини цих моментів.
7. Епюра  $Q_y$  являє собою діаграму першої похідної від функції моменту  $M_x$ , тобто ординати  $Q_y$  пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної до епюрі  $M_x$ .

Далі розглянемо приклади побудови епюр поперечних сил  $Q_y$  та згинальних моментів  $M_x$ .

### ПРИКЛАД 1.

Показуємо поточний переріз з координатою  $z$ , межі її зміни, записуємо функції  $Q_y$  і  $M_x$ . При обліку рівномірно розподіленого навантаження  $q$  використовуємо такий спосіб: заміняємо його зосередженою  $q \cdot z$  силою, прикладеною у середині ділянки (плече зосередженої сили  $0,5z$ ).

$0 \leq z \leq \ell \Rightarrow Q_y(z) = q \cdot z; M_x(z) = -q \cdot \frac{z^2}{2}$ . Далі обчислюємо значення  $Q_y$  і

$M_x$ :  $z = 0 \Rightarrow Q_y = 0$  ;  $M_x = 0$ ;  $z = \ell \Rightarrow Q_y = q \cdot \ell$ ;  $M_x = -\frac{q \cdot \ell^2}{2}$ . По епюрі, використовуючи правила перевірки, визначаємо опорні реакції  $R_A$  і  $M_A$ . Реакція  $R_A = q \cdot \ell$  дорівнює величині стрибка на епюрі  $Q_y$  в цьому перерізі та спрямована нагору, тому що  $Q_y$  позитивна. Якщо будувати епюру  $Q_y$ , йдучи ліворуч, реакція  $R_A$  повинна давати позитивне значення  $Q_y$ , тобто повинна бути спрямована нагору. З умов статички  $\sum F_{yi} = R_A - q \cdot \ell = 0$  одержуємо те ж саме значення  $R_A = q \cdot \ell$ .

На епюрі  $M_x$  в затисненні скачок моменту на величину  $\frac{q \cdot \ell^2}{2}$ , отже

$M_A = \frac{q \cdot \ell^2}{2}$ . Так як  $M_x$  в затисненні негативний, то  $M_A$  повинний бути

спрямований проти годинникової стрілки. З умови статички

$$\Sigma M_{Ai} = -q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} + M_A = 0 \text{ одержуємо: } M_A = \frac{q \cdot \ell^2}{2}.$$

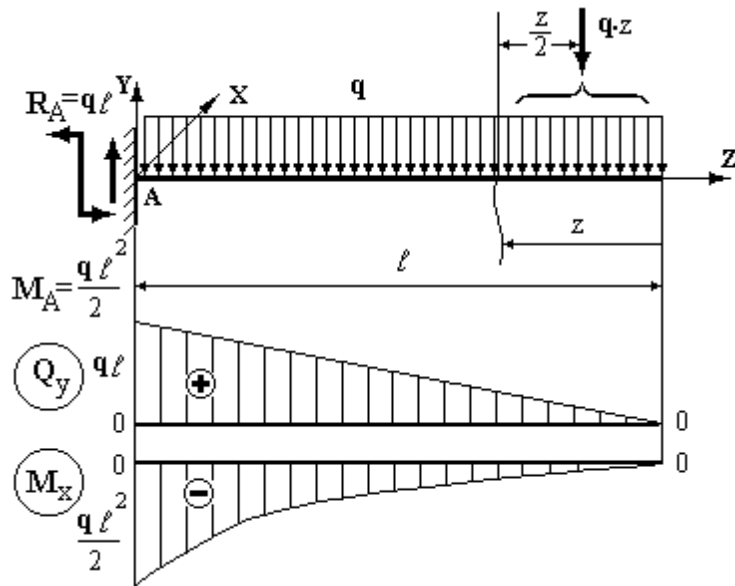


Рис. 6.7.

### ПРИКЛАД 2.

1. Визначаємо опорні реакції.

$$\Sigma M_A = 0, R_B \cdot \ell - q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} = 0, \text{ відкіля: } R_B = \frac{q \cdot \ell}{2}.$$

$$\Sigma M_B = 0, -R_A \cdot \ell + q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} = 0, \text{ відкіля: } R_A = \frac{q \cdot \ell}{2}.$$

**Перевірка:**  $\Sigma F_{yi} = 0, R_A + R_B - q \cdot \ell \equiv \frac{q \cdot \ell}{2} + \frac{q \cdot \ell}{2} - q \cdot \ell \equiv 0.$

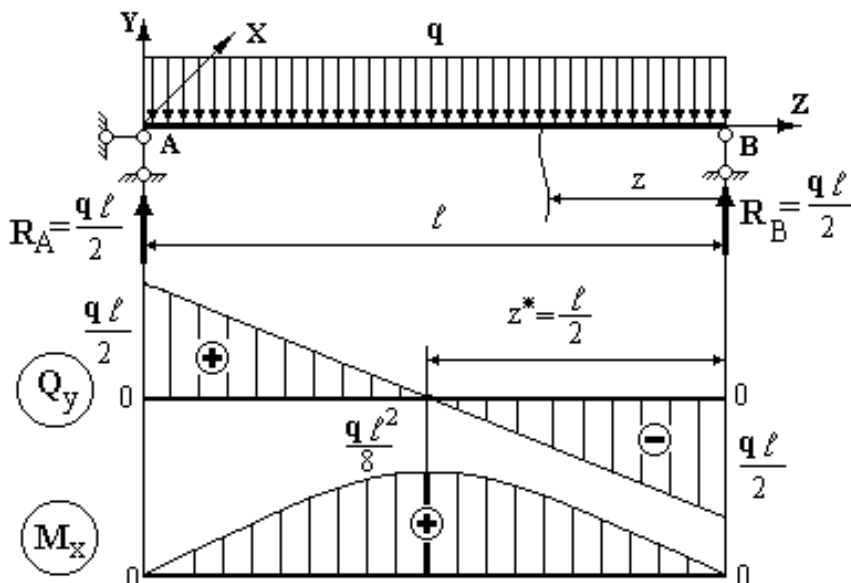


Рис. 6.8.



З огляду на симетрію задачі реакції однакові та рівні половині зовнішнього навантаження.

2. Показуємо поточний переріз з координатою  $z$ , межі її зміни та записуємо функції  $Q_y$  і  $M_x$ :

$$0 \leq z \leq \ell \Rightarrow Q_y(z) = q \cdot z - R_B = q \cdot z - \frac{q \cdot \ell}{2}; \quad M_x(z) = -q \cdot \frac{z^2}{2} + R_B \cdot z = -q \cdot \frac{z^2}{2} + q \cdot \frac{\ell}{2} \cdot z.$$

Далі обчислюємо значення  $Q_y$  і  $M_x$ :

$$z = 0 \Rightarrow Q_y = -\frac{q\ell}{2}, M_x = 0, \quad z = \ell \Rightarrow Q_y = +\frac{q\ell}{2}, M_x = 0.$$

Звертаємо увагу, що в точці, де  $Q_y = qz^* - \frac{q\ell}{2} = 0$ , згинальний момент  $M_x$

повинний мати екстремальне значення. Таким чином,  $z^* = \frac{\ell}{2}$  і

$$M_{x\max} = -\frac{qz^{*2}}{2} + \frac{q\ell}{2}z^* = -\frac{q\ell^2}{8} + \frac{q\ell^2}{4} = \frac{q\ell^2}{8}.$$

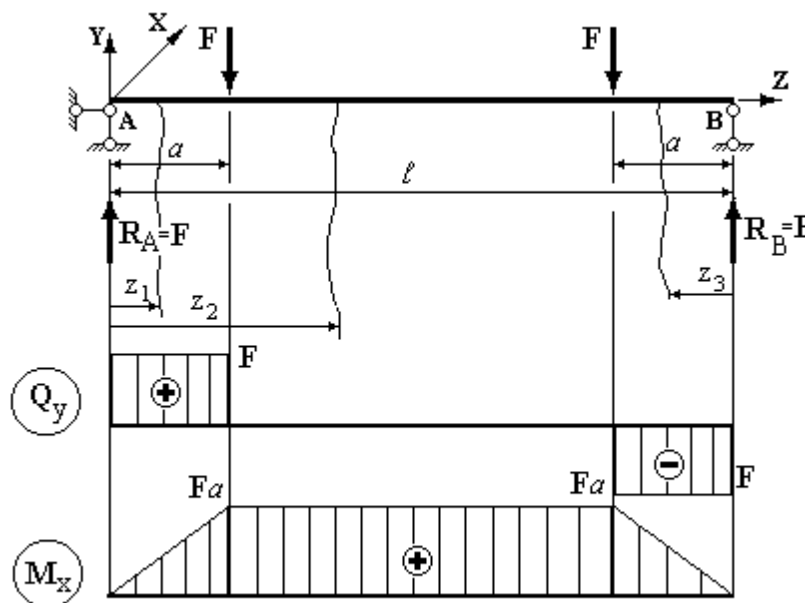


Рис. 6.9.

### ПРИКЛАД 3.

1. Легко показати, що  $R_A = R_B = F$ .
2. Запишемо функції і визначимо характерні значення  $Q_y$  і  $M_x$  для ділянок.

**1-а ділянка:**  $0 \leq z_1 \leq a \Rightarrow Q_y(z_1) = R_A = F; \quad M_x(z_1) = R_A \cdot z_1;$

$$z_1 = 0 \Rightarrow M_x = 0; \quad z_1 = a \Rightarrow M_x = Fa$$

$$\text{2-а ділянка: } a \leq z_2 \leq (\ell - a) \Rightarrow Q_y(z_2) = R_A - F = F - F = 0$$

$$M_x(z_2) = R_A z_2 - F(z_2 - a) = Fz_2 - Fz_2 + Fa = Fa.$$

Поперечна сила на ділянці дорівнює нулю, отже  $M_x = const$ , ділянка зазнає чисте згинання.

$$\text{3-я ділянка: } 0 \leq z_3 \leq a \Rightarrow Q_y(z_3) = -R_B = -F; \quad M_x(z_3) = R_B \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0 \Rightarrow M_x = 0; \quad z_3 = a \Rightarrow M_x = Fa.$$

#### ПРИКЛАД 4.

1. Величини опорних реакцій визначаються з наступних рівнянь.

$$\sum M_A = 0; \quad M - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 5 + R_B \cdot 4 = 0; \quad 2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + R_B \cdot 4 = 0,$$

$$R_B = 6 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad M + q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1 - R_A \cdot 4 = 0; \quad 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 - R_A \cdot 4 = 0;$$

$$R_A = 4 \text{ кН.}$$

$$\text{Перевірка: } \sum F_y = R_A + R_B - q \cdot 4 - F = 6 + 4 - 2 \cdot 4 - 2 \equiv 0.$$

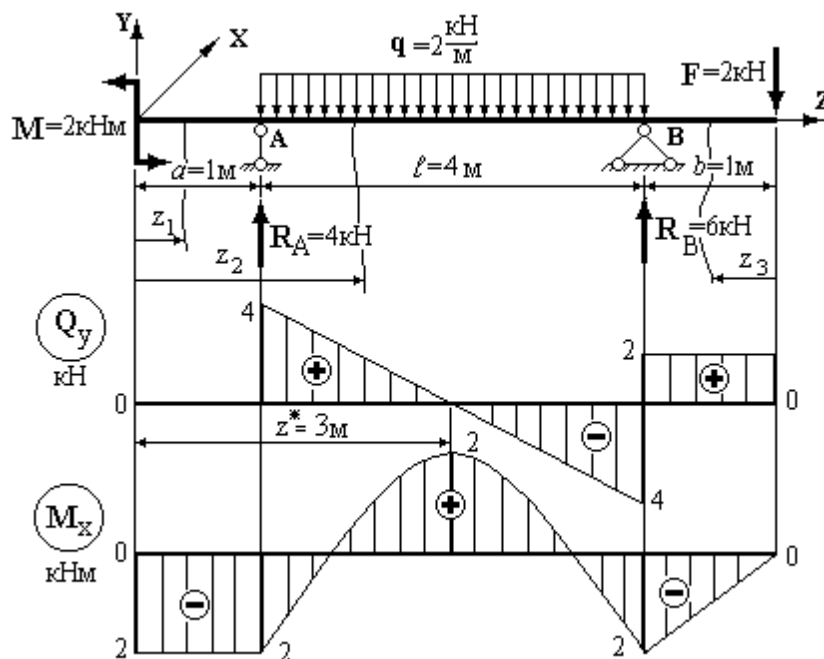


Рис. 6.10.

2. Розбиваємо балку на ділянки, показуємо перерізи на кожній з них, указуємо межі зміни  $z_i$ , визначаємо й обчислюємо функції  $Q_y$  і  $M_x$ .

$$\text{1-а ділянка: } 0 \leq z_1 \leq 1 \Rightarrow Q_y(z_1) = 0; \quad M_x(z_1) = -2 \text{ кНм.}$$

**2-а ділянка:**  $1 \leq z_2 \leq 5 \Rightarrow Q_y(z_2) = R_A - q(z_2 - 1) = 4 - 2(z_2 - 1)$ ;

$$M_x(z_2) = -M + R_A(z_2 - 1) - q(z_2 - 1) \cdot \frac{(z_2 - 1)}{2} = -2 + 4 \cdot (z_2 - 1) - 2 \cdot \frac{(z_2 - 1)^2}{2};$$

$$z_2 = 1 \Rightarrow Q_y = 4 \text{ кН}; \quad M_x = -2 \text{ кНм}. \quad z_2 = 5 \Rightarrow Q_y = -4 \text{ кН}; \quad M_x = -2 \text{ кНм}.$$

Поперечна сила  $Q_y$  змінює знак, згинальний момент  $M_x$  досягає екстремального – максимального значення при  $z^*$ , що визначиться з умови  $Q_y(z^*) = 4 - 2(z^* - 1) = 0$ , відкля  $z^* = 3$  м, а  $M_{x \max} = -2 + 8 - 4 = 2$  кНм.

**3-я ділянка:**  $0 \leq z_3 \leq 1 \Rightarrow Q_y(z_3) = F = 2 \text{ кН}; \quad M_x(z_3) = -Fz_3$ ;

$$z_3 = 0 \Rightarrow M_x = 0; \quad z_3 = 1 \Rightarrow M_x = -2 \text{ кНм}.$$

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який вигин називається поперечним, подовжнім, подовжньо-поперечним?
2. Який вигин називається плоским, який - просторовим?
3. Який вигин називається прямим, який - косим?
4. Який вигин називається чистим?
5. Якому типу деформації піддаються подовжні волокна матеріалу при чистому вигині, при поперечному вигині?
6. Який шар волокон балки називається нейтральним?
7. Що називається нейтральною віссю?
8. На які три основні типи діляться опори балок?
9. Які реакції виникають в кожному з трьох типів опорних пристроїв балок при дії навантажень вигину, направлених перпендикулярно до осі балки?
10. До яких навантажень приводиться зовнішня силова дія, їх розмірність?
11. Що називається поперечною силою і моментом вигину?
12. Як визначається знак поперечної сили і моменту вигину?
13. Яка існує диференціальна залежність між інтенсивністю зовнішнього навантаження, поперечною силою і моментом вигину?
14. Для чого будуються епюри поперечних сил і моментів вигину?

## Лекція 7. НАПРУЖЕННЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ЗГИНАННІ.

При прямому поперечному згинанні в перерізі виникають поперечна сила  $Q_y$ , що викликає деформацію зсуву, та згинальний момент  $M_x$ , що викликає деформацію згинання.

### НОРМАЛЬНІ НАПРУЖЕННЯ ПРИ ЧИСТОМУ ЗГИНАННІ.

Розглянемо випадок чистого згинання, коли в перерізі виникає тільки згинальний момент.

Покажемо стержень до деформації (рис. 7.1а) та після (рис. 7.1б) навантаження згинальними моментами  $M_x$ .

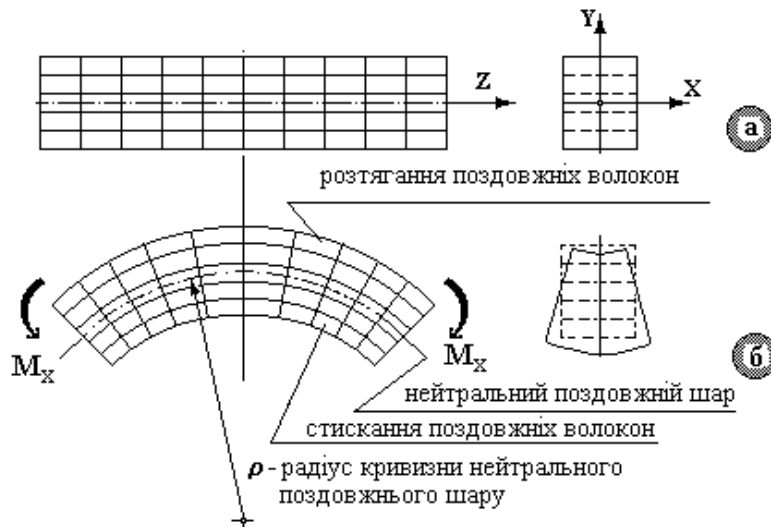


Рис 7.1.

Спостерігаючи за деформацією ортогональної сітки, попередньо нанесеної на бічну поверхню балки до навантаження (рис.7.1а) і після (рис 7.1б), відзначимо, що подовжні лінії при чистому згинанні викривляються по дузі кола, контури поперечних перерізів залишаються плоскими, сліди яких перетинають подовжні лінії під прямими кутами. У стиснутій області (у даному випадку внизу) волокна коротшають, у зоні розтягання (угорі) подовжуються.

Існує подовжній шар, довжина якого при чистому згинанні залишається незмінною. Цей шар називається **нейтральним**. Зона розтягання та зона стискання в балці розділяються нейтральним шаром з радіусом кривизни  $\rho$ .

Відзначені обставини дозволяють ввести наступні гіпотези. При чистому згинанні виконується **гіпотеза плоских перерізів**. Усі поперечні перерізи стержня при чистому згинанні не викривляються, а лише повертаються один відносно одного навколо осі X. **Подовжні волокна не давлять одне на одне. По ширині перерізу нормальні напруження не змінюються.**

Логічно припустити, що в точках поперечного перерізу при чистому згинанні виникають тільки нормальні напруження, що приводять до інтегрального внутрішнього силового фактора – згинального моменту  $M_x$ .

Через відсутність поперечних сил у напрямку осі  $Y$ , очевидно, що в точках перерізу **дотичні напруження відсутні**.

Розглянемо прямолінійний стержень довільного поперечного перерізу з віссю симетрії  $Y$  при чистому згинанні (рис.7.2а). В перерізі з координатою  $z$  застосуємо метод перерізів і одержимо:  $M_x = M$  (рис.7.2б).

В цьому перерізі момент  $M_x$  виникає як сума моментів від розподілених внутрішніх зусиль (нормальних напружень  $\sigma$ ). Виділимо елементарну площадку  $dA$  з координатами  $x, y$  (рис.7.2в). Нехай вісь  $Y$  – головна вісь, а вісь  $X$  збігається з нейтральним подовжнім шаром.

Задача про визначення внутрішніх зусиль відноситься до класу статично невизначених задач, тому далі застосовуємо схему рішення статично невизначених задач.

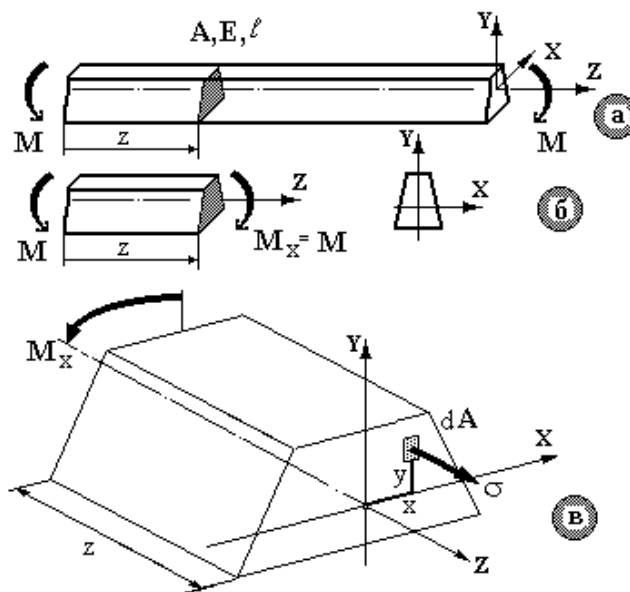


Рис.7.2.

**Статична сторона задачі.** Із шести рівнянь статичної рівноваги три рівняння  $\sum F_{ix} \equiv 0, \sum F_{iy} \equiv 0, \sum M_{iz} \equiv 0$  виконуються тотожно. Елементарна сила в осьовому напрямку, що діє на площадку  $dA$   $dN = \sigma dA$ , результуюча сила  $N = \int_A \sigma dA$ . Елементарний момент сили  $dN$  щодо осей  $X$  і  $Y$  запишеться як

$dM_x = dN \cdot y$  і  $dM_y = dN \cdot x$ . Відповідно згинаючі моменти:

$$M_x = \int_A dNy = \int_A \sigma y dA; \quad M_y = \int_A dNx = \int_A \sigma x dA.$$

Таким чином, умови статички приймуть вигляд:

$$\Sigma F_{iz} = 0; \quad \int_A \sigma dA = 0; \quad (7.1)$$

$$\Sigma M_{iy} = 0; \quad \int_A \sigma x dA = 0; \quad (7.2)$$

$$\Sigma M_{ix} = 0; \quad M_x - \int_A \sigma y dA = 0. \quad (7.3)$$

Відзначимо невідомі: **нормальне напруження  $\sigma$  – величина та закон розподілу; радіус кривизни  $\rho$  нейтрального шару; положення нейтрального шару.**

**Геометрична сторона задачі.** Розглянемо деформацію елемента довжиною  $dz$ . Нехай волокно  $OO_1$  збігається з нейтральним шаром, виділимо на відстані  $y$  від нього волокно  $ab$  (рис.7.3).

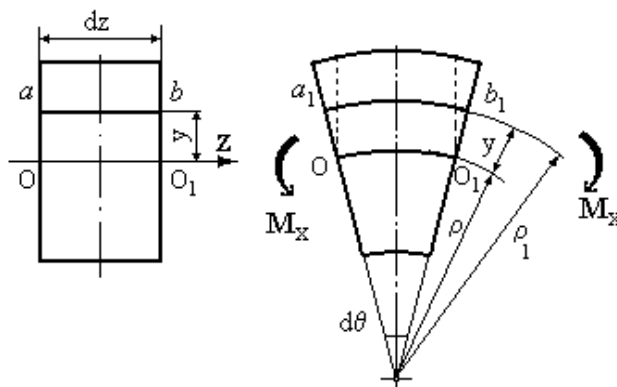


Рис.7.3.

Початкова довжина волокна  $l_0 = ab = OO_1 = \rho d\theta$ , тому що волокно  $OO_1$  не деформується. У процесі деформації довжина волокна  $a_1b_1$  складе довжину дуги:  $l_1 = \cup a_1b_1 = \rho_1 d\theta = (\rho + y)d\theta$ . Визначимо **відносну деформацію** волокна

$$ab \quad \varepsilon_{ab} = \frac{\Delta l_{ab}}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}.$$

Так як **подовжні волокна не давлять одне на одне**, то, мабуть, така залежність справедлива для будь-якого волокна:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (7.4)$$

Це і є додаткова умова – **рівняння спільності деформації при чистому згинанні.**

**Фізична сторона задачі.** При чистому згинанні подовжні волокна піддаються розтягання-стискання, тому справедливий закон Гука для одновісного напруженого стану  $\sigma = E\varepsilon$ .

Після підстановки значення  $\epsilon$  з виразу (7.4) маємо:

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (7.5)$$

Підставляючи (7.5) послідовно в рівняння (7.1), (7.2), (7.3), одержимо наступне.

$$1. \quad \int_A \sigma dA = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \frac{E}{\rho} S_x = 0. \quad \text{Модуль подовжньої пружності } E$$

для матеріалу ненульова константа; радіус кривизни  $\rho$  нейтрального шару  $\epsilon$  кінцевою величиною. Таким чином, статичний момент площі  $S_x = 0$ . Отже, **нейтральний шар при чистому згинанні збігається з центральною віссю перерізу**, тобто координата  $y$  відраховується від **нейтральної лінії** перерізу – геометричного місця точок, у яких нормальні напруження при згинанні дорівнюють нулю.

$$2. \quad \int_A \sigma x dA = \int_A E \frac{y}{\rho} x dA = \frac{E}{\rho} \int_A xy dA = \frac{E}{\rho} I_{xy} = 0. \quad \text{Якщо відцентровий момент}$$

інерції  $I_{xy}$  щодо центральних осей дорівнює нулю, то ці осі є головними осями інерції. Таким чином, **осі ХУ є головними осями інерції і нейтральна лінія є головною центральною віссю інерції, вона перпендикулярна площині дії навантаження.**

$$3. \quad M_x - \int_A \sigma y dA = M_x - \int_A E \frac{y}{\rho} y dA = M_x - \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M_x - \frac{E}{\rho} I_x = 0, \quad \text{відкіля}$$

кривизна нейтрального подовжнього шару визначається виразом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}, \quad (7.6)$$

яке називається **рівнянням Нав'є**. Тут  $\int_A y^2 dA = I_x$  – осьовий момент інерції

перерізу, а  $EI_x$  – **жорсткість стержня при згинанні**.

Порівнюючи значення кривизни  $\frac{1}{\rho}$  з рівнянь (7.5) і (7.6) одержимо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{Ey} \\ \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sigma}{Ey} = \frac{M_x}{EI_x}.$$

**Формула для визначення нормальних напружень** прийме вигляд:

$$\sigma = \frac{M_x y}{I_x}. \quad (7.7)$$

З отриманої формули випливає, що нормальні напруження  $\sigma$  по висоті перерізу змінюються лінійно, тому що згинальний момент  $M_x$  та момент інерції  $I_x$  перерізу величини постійні. На рис 7.4 показані розподіли нормальних напружень по висоті для різних за формою перерізів.

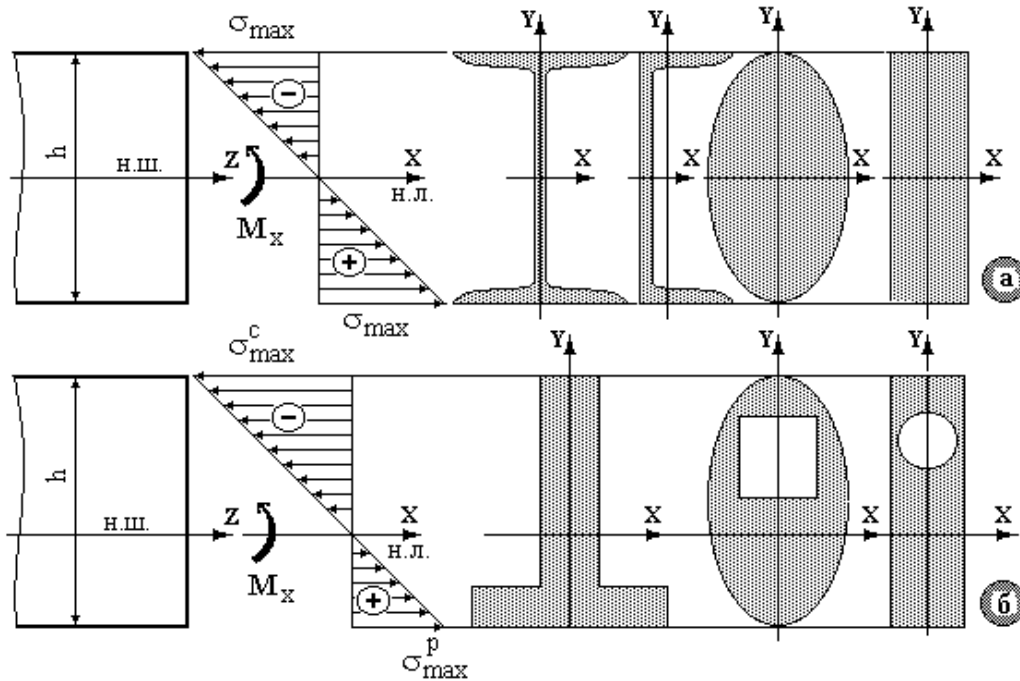


Рис.7.4.

**Максимальні напруження  $\sigma_{\max}$  виникають у найбільш віддалених точках від нейтральної лінії при  $y = y_{\max}$ , тобто  $\sigma_{\max} = \frac{M_x \cdot y_{\max}}{I_x}$ , що повинні зіставлятися з допустимим напруженням  $[\sigma]$ .**

Таким чином умова міцності при згинанні прийме вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max} \cdot y_{\max}}{I_x} \leq [\sigma]. \quad (7.8)$$

На практиці цей вигляд використовується для розрахунку перерізів, що мають одну вісь симетрії (рис. 7.4б). З обліком того, що  $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$  - **осьовий момент опору**, то для перерізів із двома осями симетрії (рис. 7.4а) зручніше використовувати **умову міцності при згинанні** у вигляді:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (7.9)$$



У випадку поперечного згинання, коли поперечна сила  $Q_y$  не дорівнює нулю, відбувається скривлення поперечних перерізів, і гіпотеза плоских перерізів не дотримується. Як показують дослідження, при відношенні довжини  $\ell$  стержня до висоти  $h$  поперечного перерізу  $\frac{\ell}{h} \geq 8$  (для більшості балок) можна вважати, що поперечний переріз практично не скривляється, тоді формула (7.7) для визначення нормальних напружень справедлива і при поперечному згинанні.

**Приклад.** Визначити розміри різних форм поперечних перерізів, якщо згинальний момент в перерізі  $M_x = 80$  кНм, допустиме напруження при згинанні  $[\sigma] = 160$  МПа.

З умови міцності  $\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} \leq [\sigma]$  осьовий момент опору перерізу

$W_x \geq \frac{M_{x\max}}{[\sigma]} = \frac{80 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 500 \text{ см}^3$ . Далі проектуємо переріз (рис.7.5).

1. **Прямокутний переріз** (рис.7.5а), для якого повинне задаватися відношення  $\frac{h}{b}$  (візьмемо  $\frac{h}{b} = 2$ ). Осьовий момент опору

$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3}b^3 = 500 \text{ см}^3$ , відкіля  $b = \sqrt[3]{750} \approx 9$  см. Висота перерізу  $h = 18$  см,

площа поперечного перерізу  $A = bh = 2b^2 = 162 \text{ см}^2$ .

2. **Прямокутний переріз** з відношенням  $\frac{h}{b} = \frac{1}{2}$  (рис.7.5б). За аналогією:

осьовий момент опору  $W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b^3}{24} = 500 \text{ см}^3$ , відкіля  $b = \sqrt[3]{12000} = 22,8$  см,

$h = 11,4$  см,  $A = 22,8 \cdot 11,4 = 260 \text{ см}^2$ .

3. **Круглий суцільний переріз** діаметром  $d$  (рис.7.5в). Осьовий момент

опору  $W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3 = 500 \text{ см}^3$ , відкіля діаметр перерізу:  $d = \sqrt[3]{5000} = 17,1$  см,

площа  $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 17,1^2}{4} = 229 \text{ см}^2$ .

4. **Кільцевий переріз** (рис.7.5г). Задаються відношенням діаметрів  $\alpha = \frac{d}{D}$ ,

осьовий момент опору:  $W_x = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3(1 - \alpha^4) = 500 \text{ см}^3$ . Нехай

$\alpha = 0,8$ , тоді  $D = 3\sqrt{\frac{5000}{1-0,8^4}} = 20,4 \text{ см}$ ,  $d = 20,4 \cdot 0,8 = 16,32 \text{ см}$ . Площа перерізу

$$A = \frac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2) = \frac{\pi \cdot 20,4^2}{4}(1-0,8^2) = 115 \text{ см}^2.$$

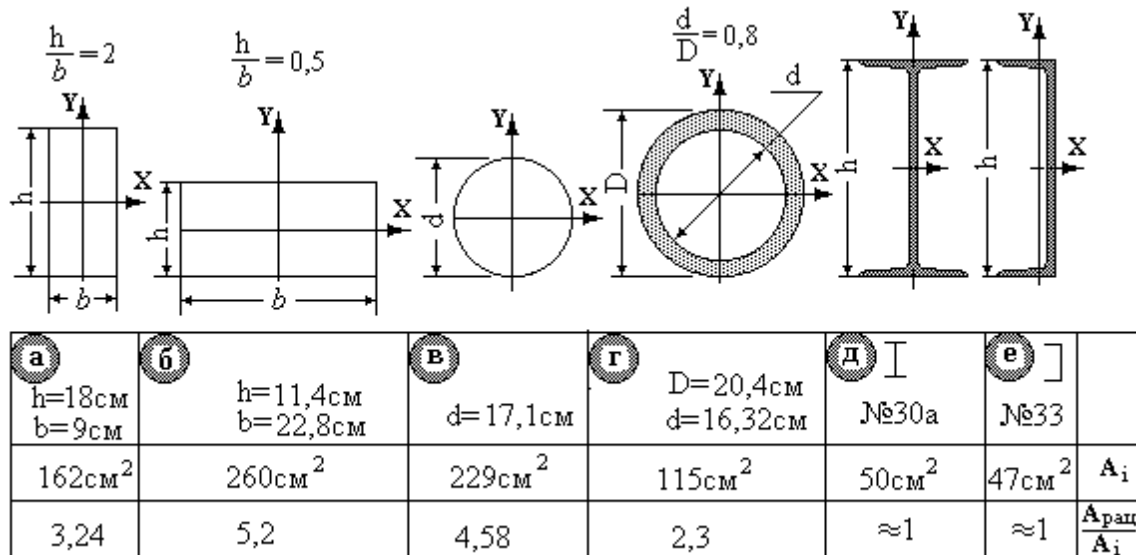


Рис.7.5.

5. **Двотавровий переріз** (рис.7.5д). За ДСТ 8239-72 підбираємо номер двотавра з найближчим більшим значенням осевого моменту опору до розрахункового. Так, для двотавра №30а:  $W_x = 518 \text{ см}^3$ ,  $A \approx 50 \text{ см}^2$ .

6. **Швелерний переріз** (рис.7.5е). За ДСТ 8240-72 підбираємо номер швелера з найближчим більшим значенням осевого моменту опору до розрахункового. Так, для швелера №33  $W_x = 484 \text{ см}^3$ ,  $A \approx 47 \text{ см}^2$ .

Узявши відношення окремих площ до площі **раціонального** поперечного перерізу (двотавр, швелер), одержимо **коефіцієнт перевитрати матеріалу**. Складемо таблицю (рис.7.5), з якої випливає, що **самими раціональними є двотавровий і швелерний перерізи, у яких найменша площа поперечного перерізу та найменша витрата матеріалу.**

**ДОТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ ПРИ ЗГИНАННІ.** Дія в перерізі поперечної сили  $Q_y$  викликає дотичні напруження  $\tau$ , що збігаються по напрямку з нею, по ширині перерізу не змінюються та визначаються за **формулою Д.И.Журавського**:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{відс}}{b_y \cdot I_x}, \quad (7.10)$$

де  $Q_y$  - поперечна сила, що діє в перерізі;  $I_x$  - осьовий момент інерції перерізу щодо центральної осі X (нейтральної лінії);  $b_y$  - ширина перерізу на тім рівні  $y$  від нейтральної лінії, де визначаються дотичні напруження;  $S_x^{відс} = A_{відс} \cdot y_c$  - абсолютне значення статичного моменту щодо центральної осі X частини перерізу, що лежить вище чи нижче того рівня, де визначаються дотичні напруження. Умова міцності по дотичним напруженням при поперечному згинанні записується у вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} S_x^{відс \max}}{b_y \cdot I_x} \leq [\tau] . \quad (7.11)$$

Таким чином, при прямому поперечному згинанні маємо умови міцності по нормальним  $\sigma$  та дотичним  $\tau$  напруженням. Основним вважається умова міцності по нормальним напруженням, а умова (7.11) по дотичним напруженням, як правило, перевіряється. Використання формули Д.И.Журавського розберемо на прикладах.

**Розподіл дотичних напружень для прямокутного перерізу.** В перерізі діють згинаючий  $M_x$  момент і поперечна сила  $Q_y$ , спрямовані, як показано на рис.7.6.

Поперечна сила  $Q_y$ , ширина перерізу  $b_y = b$  та осьовий момент інерції

$I_x = \frac{bh^3}{12}$  конкретні постійні величини (рис.7.6). Таким чином, **дотичні напруження змінюються за таким же законом, що і статичний момент відсіченої частини площі  $S_x^{відс}$ .**

Визначаємо дотичні напруження на рівні  $y$ . Площа відсіченої частини перерізу

$$A^{відс} = b \cdot \left( \frac{h}{2} - y \right) = \frac{bh}{2} \left( 1 - \frac{2y}{h} \right), \quad \text{положення її центра ваги}$$

$$y_c = \frac{h}{2} - \frac{\frac{h}{2} - y}{2} = \left( \frac{h}{4} + \frac{y}{2} \right) = \frac{h}{4} \left( 1 + \frac{2y}{h} \right). \quad \text{Статичний момент відсіченої частини}$$

$$\text{площі: } S_x^{відс} = A^{відс} \cdot y_c = \frac{bh}{2} \left( 1 - \frac{2y}{h} \right) \cdot \frac{h}{4} \left( 1 + \frac{2y}{h} \right) = \frac{bh^2}{8} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right].$$

Таким чином, дотичні напруження змінюються за законом **квадратної параболи**. **Максимальні дотичні напруження виникають на нейтральній лінії, де нормальні напруження  $\sigma$  дорівнюють нулю.** Для визначення  $\tau_{\max}$

необхідно обчислити статичний момент половини площі перерізу  $S_x^{відс} \max$ , і  
 максимальні дотичні напруження визначаються як:  $\tau_{\max} = \frac{Q_y S_x^{відс} \max}{b_y \cdot I_x}$ . Для

прямокутного перерізу  $b = b_y$ ,  $I_x = \frac{bh^3}{12}$ ,  $S_x^{відс} \max = \frac{bh^2}{8}$  :

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y bh^2/8}{b \cdot bh^3/12} = \frac{3 Q_y}{2 bh} = \frac{3 Q_y}{2 A}.$$

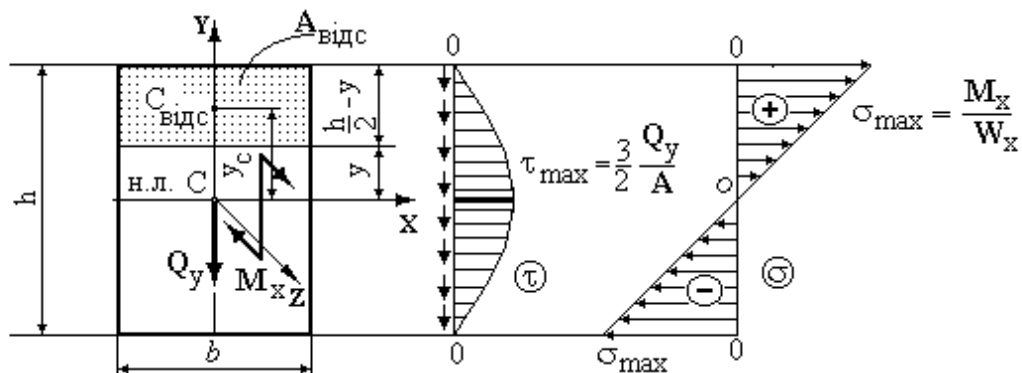


Рис.7.6.

**Розподіл дотичних напружень для двотаврового перерізу.** В перерізі діють згинальний  $M_x$  момент та поперечна сила  $Q_y$ , спрямовані, як показано на рис.7.7.

Використовуючи вираз (7.10) для дотичних напружень, визначимо їхні значення в характерних точках.

**Точка 1:**  $\tau_1 = 0$ , тому що  $S_x^{відс} = 0$  (вище рівня 1 відсічена площа відсутня).

**Точки 2,3.** Ці точки мають однакову координату  $y$ , але належать полиці та стінці одночасно, тобто відповідають різній ширині  $b_2=b$ ;  $b_3=d$ . Тому **в місці переходу полки в стінку виникає скачок дотичних напружень.**

**Точка 2** (приналежна полиці):  $\tau_2 = \frac{Q_y}{b \cdot I_x} bt \left( \frac{h-t}{2} \right) = \frac{Q_y t}{I_x} \left( \frac{h-t}{2} \right)$ ;

**Точка 3** (приналежна стінці):  $\tau_3 = \frac{Q_y}{d \cdot I_x} bt \left( \frac{h-t}{2} \right)$ ;

**Точка 4:**  $\tau_4 = \frac{Q_y}{b I_x} \left[ bt \left( \frac{h-t}{2} \right) + d \left( \frac{h}{2} - t \right) \cdot \left( \frac{\frac{h}{2} - t}{2} \right) \right] = \frac{Q_y S_x^{відс} \max}{d \cdot I_x}$ .

$S_{x \max}^{\text{відс}}$  - статичний момент щодо центральної осі половини площі перерізу, для стандартних профілів приведений у таблицях сортаменту. Зразковий графік розподілу дотичних напружень приведений на рис 7.7. Дійсний розподіл дотичних напружень трохи відрізняється від отриманого, тому що полиці мають ухили, а перехід від полиці до стінки здійснюється по радіусу кривини.

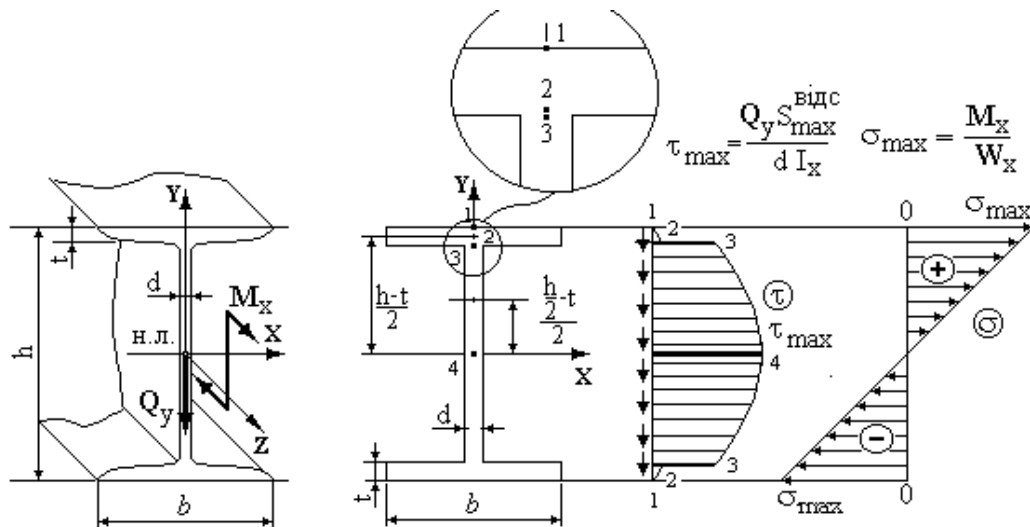


Рис.7.7.

**Порядок виконання проектувального розрахунку при згинанні.**

1.З умови міцності по нормальним напруженням визначаємо осьовий момент опору поперечного перерізу, тобто  $W_x \geq \frac{M_{x \max}}{[\sigma]}$ , та проектуємо переріз.

2.Перевіряємо переріз по дотичним напруженням. Якщо  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ , то розрахунок закінчений. Якщо  $\tau_{\max} > [\tau]$  (перевищення більш 5%), то розміри перерізу визначаються з умови міцності по дотичним напруженням. По нормальним напруженням перевіряти немає необхідності, тому що його розміри будуть більше початкового.

**ПРИКЛАД 1.** Для даної схеми навантаження балки (рис.7.8) визначити розміри двотаврового поперечного перерізу, якщо допустиме нормальне напруження  $[\sigma] = 150$  МПа, дотичне -  $[\tau] = 75$  МПа.

Визначаємо реакції:

$$\sum M_A = F \mathbf{a} + F(\ell + \mathbf{a}) - R_B \ell = 0, R_B = 45 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = F(\ell + \mathbf{a}) + F \mathbf{a} - R_A \ell = 0, R_A = 45 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевірка: } \sum F_y = -F + F + R_A - R_B \equiv 0.$$

1. Розбиваємо балку на три ділянки, записуємо для поточного перерізу на кожній ділянці вирази (функції)  $Q_y$  і  $M_x$ :

$$0 \leq z_1 \leq a \quad Q_y = -F = 30 \text{ кН}; \quad M_x = -F \cdot z_1;$$

$$0 \leq z_2 \leq \ell \quad Q_y = -F + R_A = +15 \text{ кН}; \quad M_x = -F(z_2 + a) + R_A \cdot z_2;$$

$$0 \leq z_3 \leq a \quad Q_y = -F = -30 \text{ кН}; \quad M_x = -F \cdot z_3.$$

Обчислюємо  $Q_y$  і  $M_x$  в характерних перерізах та будуємо епюри.

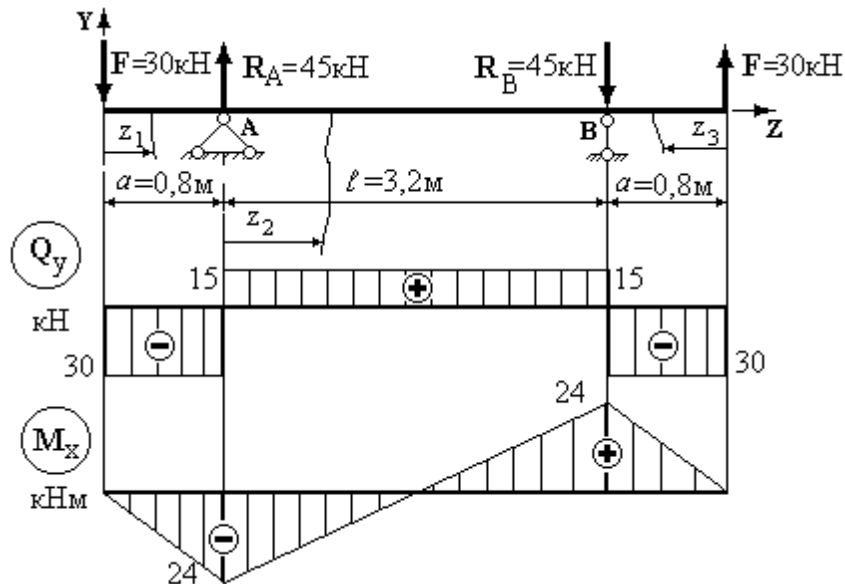


Рис.7.8.

2. З умови міцності по нормальним напруженням (де  $M_{x \max}$ ) - небезпечний переріз на опорах; з умови міцності по дотичним напруженням (де  $Q_{y \max}$ ) рівнонебезпечним є будь-який переріз на консолях. Таким чином,  $M_{x \max} = 24$  кНм;  $Q_{y \max} = 30$  кН.

3. З умови міцності по нормальним напруженням визначаємо момент опору:

$$W_x \geq \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{24 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} = 0,16 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 160 \text{ см}^3.$$

По таблицях ДСТ вибираємо двотавр №18а  $W_x = 159 \text{ см}^3$ , що незначно менше розрахункового значення.

Інші необхідні для розрахунку параметри:  $A = 25,4 \text{ см}^2$ ,  $I_x = 1430 \text{ см}^4 = 1430 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ;  $d = 5,1 \text{ мм} = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $S_{x \max}^{\text{відс}} = 89,8 = 89,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ .

Перевіряємо переріз по дотичним напруженням:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_{x \max}^{\text{відс}}}{d \cdot I_x} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 89,8 \cdot 10^{-6}}{5,1 \cdot 10^{-3} \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = 36,9 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 36,9 \text{ МПа} < [\tau], \text{ умова}$$

міцності виконується і розрахунок закінчений.

**ПРИКЛАД 2.** Для даної схеми навантаження дерев'яної балки перекриття (рис.7.9) визначити розміри прямокутного перерізу, якщо відношення сторін  $\frac{h}{b} = 2$ , допустиме нормальне напруження  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ , дотичне  $[\tau] = 2,5 \text{ МПа}$ . Так як навантаження симетричне, опорні реакції однакові і дорівнюють половині зовнішнього навантаження, тобто  $R_A = R_B = 40 \text{ кН}$ .

1. Визначаємо поперечні сили та згинальні моменти по ділянкам.

$$1\text{-а ділянка: } 0 \leq z_1 \leq a \Rightarrow Q_y = -F = -40 \text{ кН}; M_x = -F \cdot z_1.$$

$$2\text{-а ділянка: } 0 \leq z_2 \leq \ell \Rightarrow Q_y = -F + R = 0 ;$$

$$M_x = -F \cdot (z_2 + a) + R_A \cdot z_2 = -40z_2 - 40 \cdot a + 40z_2 = -40 \cdot a = -4 \text{ кНм.}$$

$$3\text{-я ділянка: } 0 \leq z_3 \leq a \Rightarrow Q_y = F = 40 \text{ кН}; M_x = -F \cdot z_3.$$

По отриманим даним будуємо епюри  $Q_y$  і  $M_x$ . З умови міцності по дотичним напруженням рівнонебезпечним є будь-який переріз на консолях, а з умови міцності по нормальним напруженням рівнонебезпечним є будь-який переріз на прольоті балки.

2. З умови міцності по нормальним напруженням осьовий момент опору:

$$W_x \geq \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{4 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 400 \text{ см}^3; W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3} b^3 = 400 \text{ см}^3,$$

$$\text{відкіля: } b = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 400} = 8,4 \text{ см}, h = 2b = 16,8 \text{ см}, A = bh = 2b^2 = 2 \cdot 8,4^2 = 142 \text{ см}^2.$$

3. Максимальне дотичне напруження для прямокутного перерізу:

$$\tau_{\max} = \frac{3 Q_{y \max}}{2 A} = \frac{3 \cdot 40 \cdot 10^3}{2 \cdot 142 \cdot 10^{-4}} = 4,22 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 4,22 \text{ МПа} > [\tau] = 2,5 \text{ МПа},$$

умова міцності не виконується.

Визначаємо розміри поперечного перерізу з умови міцності по дотичним

$$\text{напруженням: } \tau_{\max} = \frac{3 Q_{y \max}}{2 A} \leq [\tau], \text{ відкіля знаходимо площу поперечного}$$

$$\text{перерізу: } A = \frac{3 Q_{y \max}}{2 [\tau]} = \frac{3 \cdot 40 \cdot 10^3}{2 \cdot 2,5 \cdot 10^6} = 24 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 240 \text{ см}^2$$

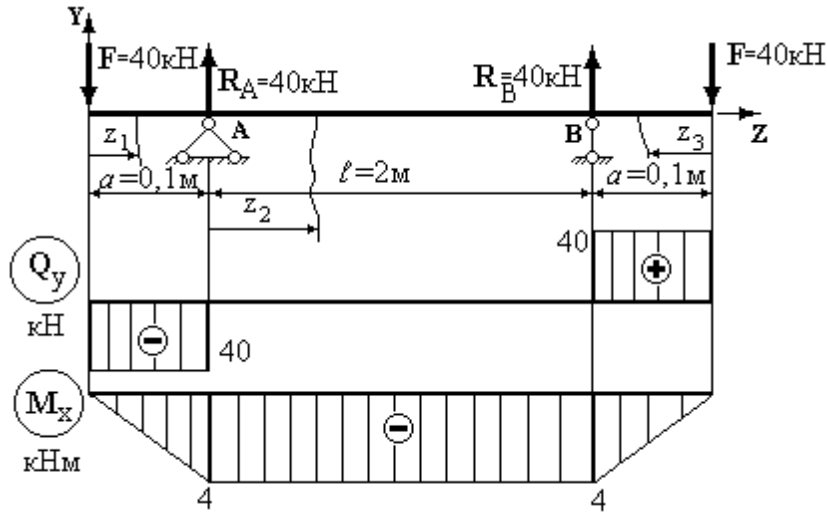


Рис.7.9.

Площа  $A = bh = 2b^2 = 240\text{см}^2$ , відкiля ширина перерiзу:  $b = \sqrt{120} \approx 11\text{см}$ , а висота  $h = 22\text{см}$ .

З умови мiцностi по дотичним напруженням розмiри поперечного перерiзу бiльше, нiж з умови мiцностi по нормальним напруженням.

**ПОТЕНЦIЙНА ЕНЕРГIЯ ДЕФОРМАЦIЇ ПРИ ЗГИНАННI.**

**Чисте згинання** ( $Q_y = 0, M_x \neq 0$ ). *Потенцiйна енергiя деформацiї при чистому згинаннi визначається роботою внутрiшнiх згинальних моментiв на кутовому перемiщеннi перерiзу.*

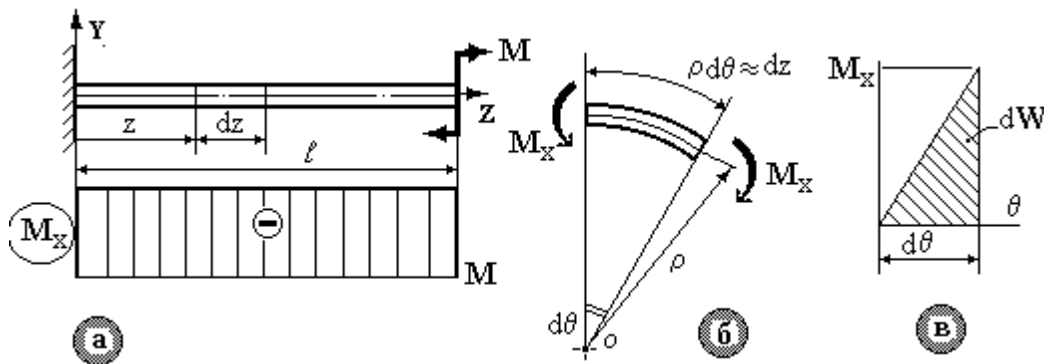


Рис. 7.10.

Розглянемо стержень при чистому згинаннi (рис.7.10а). Видiлимо елемент стержня довжиною  $dz$  (рис.7.10б). При статичному навантаженнi нейтральна вiсь викривляється по рiдiусу  $\rho$  кола, крайнi перерiзи повертаються на кут  $d\theta$ . У межах виконання закону Гука залежнiсть мiж моментом  $M_x$  та кутом повороту  $d\theta$  при статичному навантаженнi лiнiйна (рис.7.10в). Елементарна робота внутрiшнiх зусиль визначається площею трикутника, тобто



$dW = \frac{1}{2} M_x d\theta$ . Але робота чисельно дорівнює потенційній енергії деформації  $dU$ , тобто  $dU = \frac{1}{2} M \cdot d\theta$ . З рис.7.10б випливає, що  $d\theta = \frac{dz}{\rho}$ , таким чином,

$dU = \frac{1}{2} M_x \frac{dz}{\rho}$ . Кривизна нейтральної осі  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}$ , тоді  $dU = \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}$ . Повна

потенційна енергія стержня є інтеграл по довжині стержня:

$$U = \int_{\ell} \frac{M_x^2(z) dz}{2EI_x} \quad (7.12)$$

**Поперечне згинання** ( $Q_y \neq 0, M_x \neq 0$ ). Як показують розрахунки для стержнів, у яких відношення довжини  $\ell$  до висоти  $h$  перерізу більше  $8 \div 10$  ( $\frac{h}{\ell} > 8 \div 10$ ), потенційна енергія деформації від поперечної сили  $U_{Q_y}$  складає  $0,4 \div 0,5\%$  від потенційної енергії деформації згинаючого моменту  $U_{M_x}$ . Тому при визначенні потенційної енергії деформації при згинанні враховується тільки потенційна енергія деформації від згинального моменту  $M_x$ , що визначається виразом (7.12).

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які напруження виникають при чистому і які при поперечному вигинах?
2. По якому закону змінюються нормальні напруження по висоті поперечного перетину при чистому вигині?
3. В яких волокнах балки нормальні напруження приймають максимальне значення?
4. По якій формулі визначаються нормальні напруження при чистому вигині?
5. По якій формулі визначається кривизна нейтрального шару при чистому вигині?
6. Напишіть формулу, що виражає закон Гука при чистому вигині.
7. Що виражає осьовий момент опору?
8. По якій формулі визначаються дотичні напруження при чистому вигині?
9. В яких точках поперечного перетину балки дотичні напруження при поперечному вигині приймають максимальне і мінімальне значення?

**Лекція №8. ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРИ ПРЯМОМУ ЗГИНАННІ. РОЗРАХУНКИ НА ЖОРСКІСТЬ ПРИ ЗГИНАННІ.**

Одержимо диференціальне рівняння вигнутої осі при прямому згинанні (площина дії навантажень збігається з однією з головних осей інерції). **Прямолінійна вісь балки під дією зовнішніх навантажень (рис.8.1) перетворюється в плоску гладку криву і називається пружною лінією (зігнутою віссю балки).**

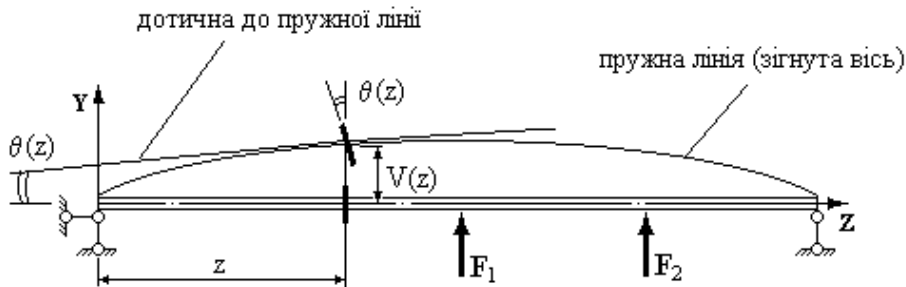


Рис.8.1.

**Прогин балки  $V(z)$  - це переміщення центра ваги перерізу по нормалі до початкової осі. Максимальний прогин називається стрілою прогину і позначається  $f$ . Кут повороту  $\theta(z)$  перерізу - це поворот перерізу щодо початкового положення.**

Тангенс кута нахилу дотичної до вигнутої осі є перша похідна від функції  $V(z)$ :  $\text{tg}\theta(z) = \frac{dV(z)}{dz} = V'(z)$ . Для малих кутів ( $\text{tg}\theta(z) \approx \theta(z)$ ) рівняння кутів повороту можна записати у вигляді:  $\theta(z) = V'(z)$ .

Диференціальне рівняння вигнутої осі балки одержимо за допомогою рівняння Нав'є, у якому кривизна нейтральної осі при згинанні визначається, як:  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}$ . З іншого боку, з курсу аналітичної геометрії відомо, що кривизна

плоскої кривої визначається як:  $\frac{1}{\rho} = \pm \frac{V''(z)}{\{1 + [V'(z)]^2\}^{\frac{3}{2}}}$ . Дорівнявши праві

частини цих двох залежностей, одержимо **нелінійне диференціальне рівняння відносно прогину  $V(z)$ :**

$$\frac{M_x(z)}{EI_x} = \pm V''(z) \cdot \{1 + [V'(z)]^2\}^{-\frac{3}{2}} \quad (8.1)$$

Для малих переміщень (у межах пружних деформацій), коли, наприклад,  $\operatorname{tg}\theta(z) = V'(z) \leq 0,01$ , квадратом першої похідної в порівнянні з одиницею можна зневажити. З обліком того, що **знаки другої похідної  $V''(z)$  і згинаючого моменту  $M_x$  збігаються**, одержимо диференціальне рівняння другого порядку, що і називається **диференціальним рівнянням вигнутої осі балки для малих переміщень**:

$$EI_x V''(z) = M_x(z). \quad (8.1a)$$

Послідовно інтегруємо двічі й одержуємо **рівняння для кутів повороту та прогинів**:

$$EI_x V'(z) = EI_x \theta(z) = \int M_x(z) dz + C_1, \quad (8.2)$$

$$EI_x V(z) = \int dz \int M_x(z) dz + C_1 z + C_2, \quad (8.3)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  - довільні постійні інтегрування, визначаються з граничних умов.

**ПРИКЛАД 1.** Розглянемо консольну балку, навантажену на вільному торці зосередженою силою  $F$  (рис.8.2).

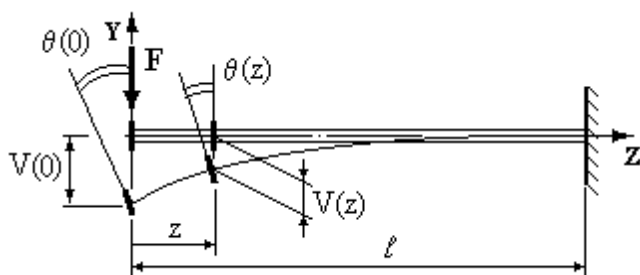


Рис. 8.2.

Згинальний момент у перерізі  $z$ :  $M_x(z) = -Fz$ . Запишемо диференціальне рівняння пружної лінії балки:  $EI_x V''(z) = -F \cdot z$ . Інтегруючи двічі це рівняння, одержимо відповідно до (8.2), (8.3):

$$EI_x V'(z) = \frac{-F \cdot z^2}{2} + C_1; \quad EI_x V(z) = \frac{-F \cdot z^3}{6} + C_1 z + C_2.$$

Запишемо та виконаємо граничні умови. При  $z = \ell$  кут повороту  $V'(\ell) = \theta(\ell) = 0$ , тобто  $-\frac{F \cdot \ell^2}{2} + C_1 = 0$ , відкіля:  $C_1 = \frac{F\ell^2}{2}$ . При  $z = \ell$  прогин  $V(\ell) = 0$ , тобто:

$$-\frac{F \cdot \ell^3}{6} + \frac{F \cdot \ell^2}{2} \ell + C_2 = 0, \text{ відкіля: } C_2 = \frac{F \cdot \ell^3}{6} - \frac{F \cdot \ell^3}{2} = -\frac{F\ell^3}{3}.$$

З урахуванням значень  $C_1$  і  $C_2$  рівняння пружної лінії та кутів повороту запишуться як:

$$EI_x V(z) = -\frac{Fz^3}{6} + \frac{F\ell^2}{2}z - \frac{F\ell^3}{3}; \quad EI_x \theta(z) = -\frac{Fz^2}{2} + \frac{F\ell^2}{2}.$$

Найбільші прогин та кут повороту виникають на початку координат при  $z = 0$ :

$$EI_x V(0) = -\frac{F\ell^3}{3}, \text{ відкіля: } |V(0)| = V_{\max} = f = \frac{F\ell^3}{3EI_x};$$

$$EI_x \theta(0) = \frac{F\ell^2}{2}, \text{ відкіля: } \theta(0) = \theta_{\max} = \frac{F\ell^2}{2EI_x}.$$

При розрахунках на жорсткість максимальні прогини  $V_{\max}$  балок повинні зіставлятися з прогином  $[V]$ , що допускається. Тоді умова жорсткості при згинанні консольної балки прийме вигляд:

$$V_{\max} = f = \frac{F\ell^3}{3EI_x} \leq [V]. \quad (8.4)$$

Звідси визначається осьовий момент інерції  $I_x \geq \frac{F\ell^3}{3E[V]}$ , на підставі чого проектуємо переріз. Прогин, що допускається, вибирається в залежності від відповідальності конструкції з діапазону  $[V] = \left(\frac{1}{100} \div \frac{1}{1000}\right)\ell$ , де  $\ell$  - проліт балки.

Безпосереднє інтегрування диференціального рівняння пружної лінії виявляється громіздким навіть у простих випадках. Тому для визначення переміщень у балках більш прийнятні енергетичні методи, що приводять до простих залежностей.

### **ЕНЕРГЕТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ.**

Введемо позначення й основні поняття.

**Згинальний момент від зовнішнього навантаження**  $M_{xF}(z) = M_{xF}$  позначимо як  $M_F$ . **Згинальний момент від одиничної сили (моменту) -  $\bar{M}_x$  чи  $\bar{M}$ .** **Переміщення (прогин, кут повороту) від зовнішнього навантаження** позначається  $\Delta_{ij}$ , де перший індекс  $i$  зв'язаний з точкою чи напрямком переміщення; другий індекс  $j$  зв'язаний з причиною, що викликала переміщення. **Лінійне переміщення (прогин) від одиничної сили та кутове переміщення від одиничного моменту** позначаємо  $\delta_{ij}$ , де індекс  $i$  - точка

балки і напрямком переміщення; індекс  $j$  - причина, що викликала одиничне переміщення.

**Інтеграл Максвелла-Мора.** Розглянемо балку довжиною  $\ell$ , навантажену в точці 1 силою  $F$  (рис.8.3). Визначимо переміщення  $\Delta_{21}$  (у точці 2 від сили, прикладеної в точці 1).

**1. Перший стан.** У точці 1 прикладемо зосереджену силу  $F$ . Прогин у точці 1 дорівнює  $\Delta_{11}$ , у точці 2 -  $\Delta_{21}$ . У перерізах балки виникає згинальний момент від зовнішнього навантаження  $M_{xF}$ . Сила  $F$  прикладається статично і виконує

роботу  $W_1 = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta_{11}$  на шляху  $\Delta_{11}$  (див. графік на рис.8.3.1). Визначаємо потенційну енергію деформації, виражену через згинальний момент  $M_{xF}$ , за

формулою (7.12):  $U_1 = \int_{\ell} \frac{M_{xF}^2 dz}{2EI_x}$ . Але потенційна енергія деформації  $U_1$

чисельно дорівнює роботі зовнішніх сил  $W_1$ , тобто:  $W_1 = U_1$ .

**2. Другий стан.** У точці 2 статично прикладемо одиничну силу, що, згинаючи балку, виконує роботу (див. графік на рис.8.3.2) на переміщенні  $\delta_{22}$ . У перерізах балки виникає згинальний момент  $\bar{M}_x$  від одиничної сили. Робота

одиничної сили  $W_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \delta_{22}$ . Потенційна енергія деформації  $U_2 = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_x^2 dz}{2EI_x}$ . Як

і в попередньому випадку  $W_2 = U_2$ .

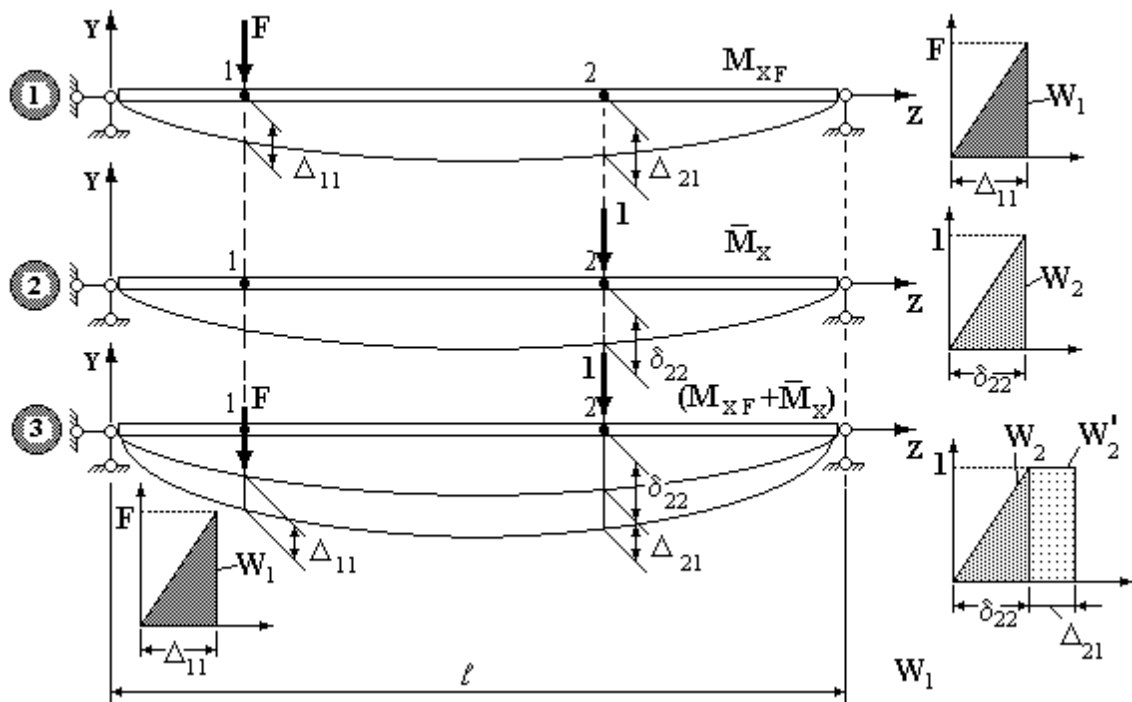


Рис.8.3.

**3. Третій стан.** У точці 2 статично прикладемо одиничну силу, що, деформує балку, виконує роботу  $W_2$  на переміщенні  $\delta_{22}$  (див. графік на мал.8.3.3). До деформованої балки статично у точці 1 прикладемо зосереджену силу  $F$ , що, деформує балку з уже прикладеною одиничною силою, виконує роботу  $W_1$  (див. графік) на переміщенні  $\Delta_{11}$ . Точка 2 одержить ще переміщення  $\Delta_{21}$ , а одинична сила виконає роботу  $W_2^* = 1 \cdot \Delta_{21}$  (див. графік) на переміщенні  $\Delta_{21}$ . Від дії сили  $F$  й одиничного навантаження в перерізах балки виникає сумарний згинальний момент  $(M_{xF} + \bar{M}_x)$ . Робота двох сил визначиться як:

$$W_3 = W_1 + W_2 + W_2^* = \frac{1}{2} F \cdot \Delta_{11} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \delta_{22} + 1 \cdot \Delta_{21},$$

а потенційна енергія пружної деформації виразиться через сумарний згинальний момент як:

$$U_3 = \int_{\ell} \frac{(M_{xF} + \bar{M}_x)^2}{2EI_x} dz = \int_{\ell} \frac{M_{xF}^2}{2EI_x} dz + \int_{\ell} \frac{\bar{M}_x^2}{2EI_x} dz + \int_{\ell} \frac{M_{xF}\bar{M}_x}{EI_x} dz.$$

Порівнюючи вирази для  $W_3, U_3$ , після нескладних перетворень одержимо:

$$\Delta_{21} = \int_{\ell} \frac{M_{xF}\bar{M}_x}{EI_x} dz. \quad (8.5)$$

### **Порядок визначення переміщень за допомогою інтеграла Максвелла-Мора.**

1. Прикладаємо зовнішнє навантаження, визначаємо опорні реакції, розбиваємо балку на ділянки, записуємо вирази (функції) згинаючого моменту  $M_{xF}$  для кожної ділянки.
2. У точці, переміщення якої визначаємо, прикладаємо:
  - а) **одиничну силу** при визначенні прогину (лінійного переміщення);
  - б) **одиничний момент** при визначенні кутового переміщення.
 Визначаємо опорні реакції й у такому ж порядку, як і для зовнішнього навантаження, на кожній ділянці записуємо вирази (функції) згинаючого моменту  $\bar{M}_x$ .
3. Підставляємо функції (вирази)  $M_{xF}$  і  $\bar{M}_x$  в інтеграл Максвелла-Мора та робимо відповідні обчислення.
4. Результат обчислень **позитивний**, якщо **напрямок одиничного навантаження збігається з напрямком дійсного переміщення**, і **негативний**, якщо **напрямок одиничного навантаження не збігається з напрямком дійсного переміщення**.

**ПРИКЛАД 2.** Консольна балка постійного поперечного перерізу ( $EI_x = \text{const}$ ) довжиною  $\ell$  навантажена на кінці зосередженою силою  $F$  (рис.8.4а). Визначити прогин  $V_A$  та кут  $\theta_A$  повороту на кінці консолі.

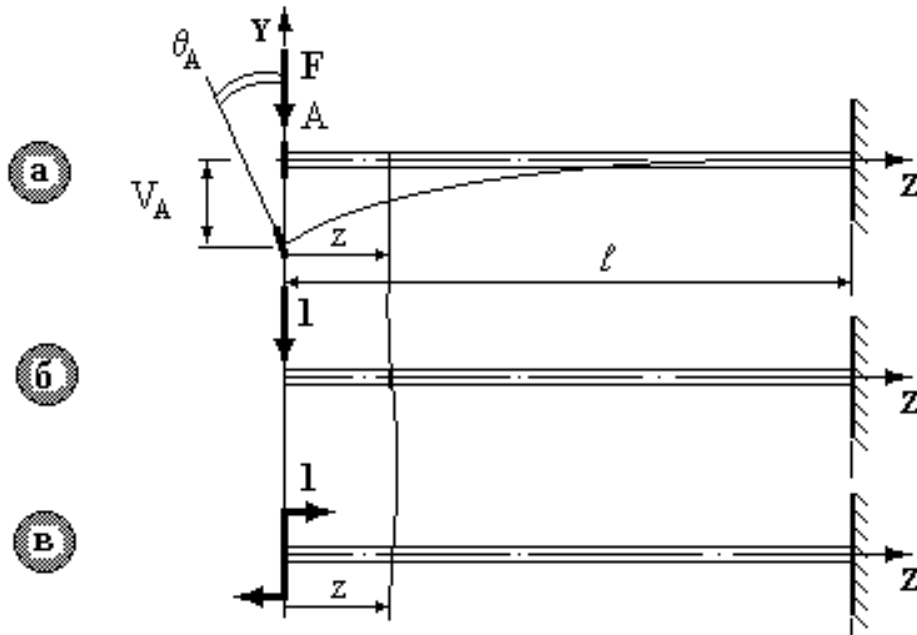


Рис. 8.4.

1. Запишемо функцію  $M_{xF} = -Fz$  (рис.8.4а).
2. У точці А прикладаємо одиничну силу (рис.8.4б) та записуємо функцію  $\bar{M}_x = -1 \cdot z$ .
3. Підставляючи  $M_{xF}$  й  $\bar{M}_x$  в інтеграл, одержимо:

$$V_A = \frac{1}{EI_x} \int_0^{\ell} F \cdot z \cdot z \cdot dz = \frac{F\ell^3}{3EI_x} \quad (\text{див. приклад 1 на рис. 8.2}).$$

4. Для визначення кутового переміщення у точці А прикладаємо одиничний момент (рис.8.4в) та записуємо функцію  $\bar{M}_x = 1$ .
5. Підставляючи  $M_{xF}$  й  $\bar{M}_x$  в інтеграл, одержимо:

$$\theta_A = \frac{1}{EI_x} \int_0^{\ell} (-F \cdot z) \cdot 1 \cdot dz = -\frac{F\ell^2}{2EI_x}.$$

**Результат обчислення прогину  $V_A$  позитивний, тому що прикладена одинична сила збігається з напрямком дійсного переміщення. Результат обчислення кута повороту  $\theta_A$  негативний, тому що прикладений одиничний момент по напрямку не збігається з дійсним напрямком кута повороту перерізу в точці А.**

## СПОСІБ ПЕРЕМНОЖУВАННЯ ЕПЮР. ПРАВИЛО ВЕРЕЩАГІНА.

1. Обчислення інтегралів Мора істотно спрощується, якщо одна з епюр (у дійсному чи одиночному стані) прямолінійна. Ця умова виконується для систем, що складаються з прямих стержнів, оскільки при цьому епюра внутрішніх сил від одиничного навантаження (зосередженої сили або пари сил) завжди обмежена прямими лініями.

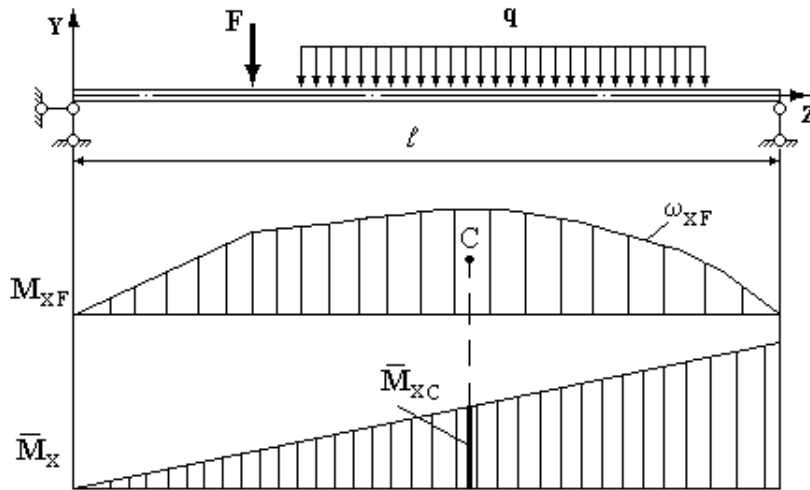


Рис. 8.5.

2. Обчислимо інтеграл Мора для випадку, коли епюра  $M_{xF}$  від заданого навантаження має довільну форму, а від одиничного  $\bar{M}_x$  - прямолінійну (рис. 8.5).

Використовуючи геометричну інтерпретацію визначення інтегралу як значення площі, інтеграл Мора для визначення переміщень у балках постійного перерізу можна обчислити за допомогою спеціальної операції над епюрами відповідних згинальних моментів.

В результаті одержимо наступне:

$$\Delta_{ij} = \int_{\ell} \frac{M_{xF} \bar{M}_x}{EI_x} dz = \frac{\omega_{xF} \cdot \bar{M}_{xC}}{EI_x}, \quad (8.6)$$

де  $\omega_{xF}$  - площа вантажної (від зовнішнього навантаження) епюри  $M_{xF}$ ;  $\bar{M}_{xC}$  - ордината, узята з одиничної епюри  $\bar{M}_x$  під центром ваги  $C$  вантажної епюри  $M_{xF}$ .

**Правило знаків.** Якщо епюри, що перемножуються, лежать по один бік (обидві нагорі або внизу), добуток додатний; якщо епюри, що перемножуються, лежать по різні боки - добуток від'ємний.

Якщо епюра від зовнішнього навантаження кусочно-лінійна на ділянках, а одинична епюра завжди кусочно-лінійна, результат перемножування не залежить від порядку використання співмножників:



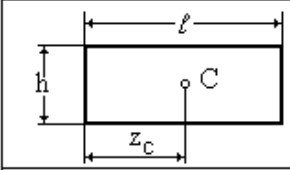
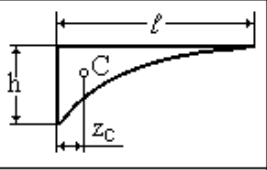
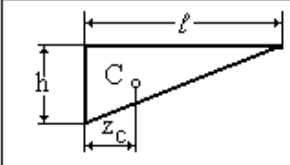
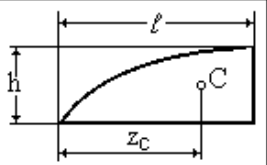
$$\frac{\omega_{xF} \cdot \bar{M}_{xC}}{EI_x} = \frac{\bar{\omega}_x \cdot M_{FC}}{EI_x}, \quad (8.7)$$

де  $\omega_{xF}$  - площа епюри від зовнішнього навантаження;  $\bar{\omega}_x$  - площа епюри від одиничного навантаження;  $M_{FC}$  - ордината під центром ваги одиничної  $\bar{M}_x$  епюри, узята з епюри  $M_{xF}$  від зовнішнього навантаження.

Якщо епюри  $M_{xF}$  і  $\bar{M}_x$  складаються з декількох ділянок, то перемножування здійснюється по ділянках, а результат підсумовується, тобто:

$$\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_{ixF} \cdot \bar{M}_{ixC}}{EI_x}. \quad (8.8)$$

Відзначимо, що в розглянутих задачах епюри вантажних та одиничних згинальних моментів складаються з досить простих площ: прямокутник, трикутник, параболічний трикутник і т.д. У таблиці приведені площі  $\omega$  та координати центрів ваги  $z_c$  плоских фігур, що зустрічаються в епюрах.

	$\omega$	$z_c$		$\omega$	$z_c$
	$h\ell$	$\frac{1}{2}\ell$		$\frac{1}{3}h\ell$	$\frac{1}{4}\ell$
	$\frac{1}{2}h\ell$	$\frac{1}{3}\ell$		$\frac{2}{3}h\ell$	$\frac{5}{8}\ell$

При рішенні конкретних задач доцільно використовувати правило трапеції для перемножування лінійних епюр і правило Симпсона-Карнаухова для перемножування будь-яких епюр (у більшості випадків нелінійних).

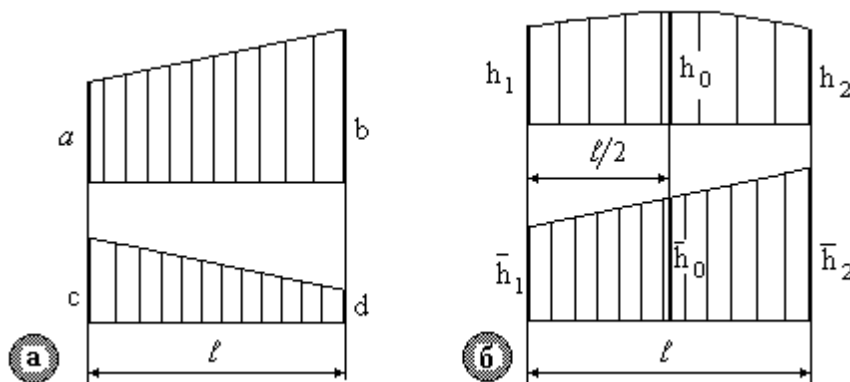


Рис.8.6.

**Правило трапеції** (тільки для лінійних епюр – рис.8.6а). У тому випадку, коли на ділянці еюра  $M_{xF}$  від зовнішнього навантаження лінійна, перемножування епюр можна виконати за правилом трапеції. Результат перемножування лінійних епюр на ділянці довжиною  $\ell$  дорівнює:

$$\Delta = \frac{\ell}{6EI_x} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 2 \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + 2 \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}).$$

**Правило знаків:** якщо ординати, що перемножуються, одного знака (лежать по одну сторону), одержуваний добуток позитивний, якщо знаки ординат різні - добуток негативний.

**Правило Симпсона - Карнаухова** (для лінійних епюр і епюр, описуваних квадратною параболою-рис.8.6б). Результат добутку наступний:

$$\Delta = \frac{\ell}{6EI_x} (h_1 \bar{h}_1 + h_2 \bar{h}_2 + 4h_0 \bar{h}_0).$$

Тут  $h_1, h_2$  - крайні ординати вантажної епюри (нелінійної) на ділянці;  $\bar{h}_1, \bar{h}_2$  - крайні ординати одиничної епюри (лінійної) на ділянці;  $h_0$  і  $\bar{h}_0$  - середні ординати епюр на ділянці. Правило знаків при перемножуванні ординат аналогічно правилу трапеції.

**ПРИКЛАД 3.** Для консольної балки, навантаженої зовнішніми силами, як показано на рис.8.7, визначити прогин та кут повороту на кінці консолі в перерізі А.

1. Визначаємо опорні реакції.

$$\sum F_{yi} = 0; F - q \cdot 3\mathbf{a} + R_B = 0 \Rightarrow R_B = 2q\mathbf{a}.$$

$$\sum M_{Bi} = 0; -F \cdot 6\mathbf{a} + q \cdot 3\mathbf{a} \cdot 3,5\mathbf{a} - M_B = 0 \Rightarrow M_B = 1,5q\mathbf{a}^2.$$

$$\text{Перевірка: } \sum M_{Ai} = -q \cdot 3\mathbf{a} \cdot 2,5\mathbf{a} - M + R_B \cdot 6\mathbf{a} - M_B = q\mathbf{a}^2(-7,5 - 3 + 12 - 1,5) \equiv 0.$$

2. Записуємо вирази  $Q_y$  і  $M_x$ , будуємо відповідні епюри.

$$0 \leq z_1 \leq \mathbf{a} : Q_y = F = q\mathbf{a}; M_x = F \cdot z_1 = q\mathbf{a} \cdot z_1.$$

$$0 \leq z_2 \leq 3\mathbf{a} : Q_y = F - q \cdot z_2 = q\mathbf{a} - q \cdot z_2.$$

$$\text{Поперечна сила змінює знак при } z = \mathbf{a}. M_x = F(z_2 + \mathbf{a}) - q \frac{z_2^2}{2} = q\mathbf{a}(z + \mathbf{a}) - q \frac{z^2}{2}.$$

$$M_{x \max} = M_x|_{z=\mathbf{a}} = 2q\mathbf{a}^2 - 0,5q\mathbf{a}^2 = 1,5q\mathbf{a}^2; \quad M_x|_{z=1,5\mathbf{a}} = q\mathbf{a}^2 \left(2,5 - \frac{1,5^2}{2}\right) = 1,375q\mathbf{a}^2.$$

$$0 \leq z_3 \leq 2\mathbf{a} : Q_y = -2q\mathbf{a}; \quad M_x = -M_B + R_B \cdot z = -1,5q\mathbf{a}^2 + 2q\mathbf{a} \cdot z.$$

3. У точці А прикладаємо одиничну силу, будуюмо епюру  $\bar{M}_x = -1 \cdot z$ , визначаючи ординати на границях кожної ділянки.

4. Перемножуючи епюри  $M_x$  і  $\bar{M}_x$ , визначаємо шуканий прогин:

$$V_A = \frac{qa^4}{EI_x} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{3}{6} (-1 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 - 4 \cdot 1,375 \cdot 2,5) + \frac{2}{6} (-2,5 \cdot 6 + 4 \cdot 1,5 - 2 \cdot 2,5 \cdot 4 + 2 \cdot 1,5 \cdot 6) \right] = \frac{qa^4}{6EI_x} [-2 - 38,25 - 22] = -\frac{10,375qa^4}{EI_x}.$$

Тут на першій ділянці перемножування епюр виконано за правилом Верещагіна; на другій - Симпсона, на третій - трапеції. Знак мінус указує на те, що під дією зовнішнього навантаження переріз переміщується уверх.

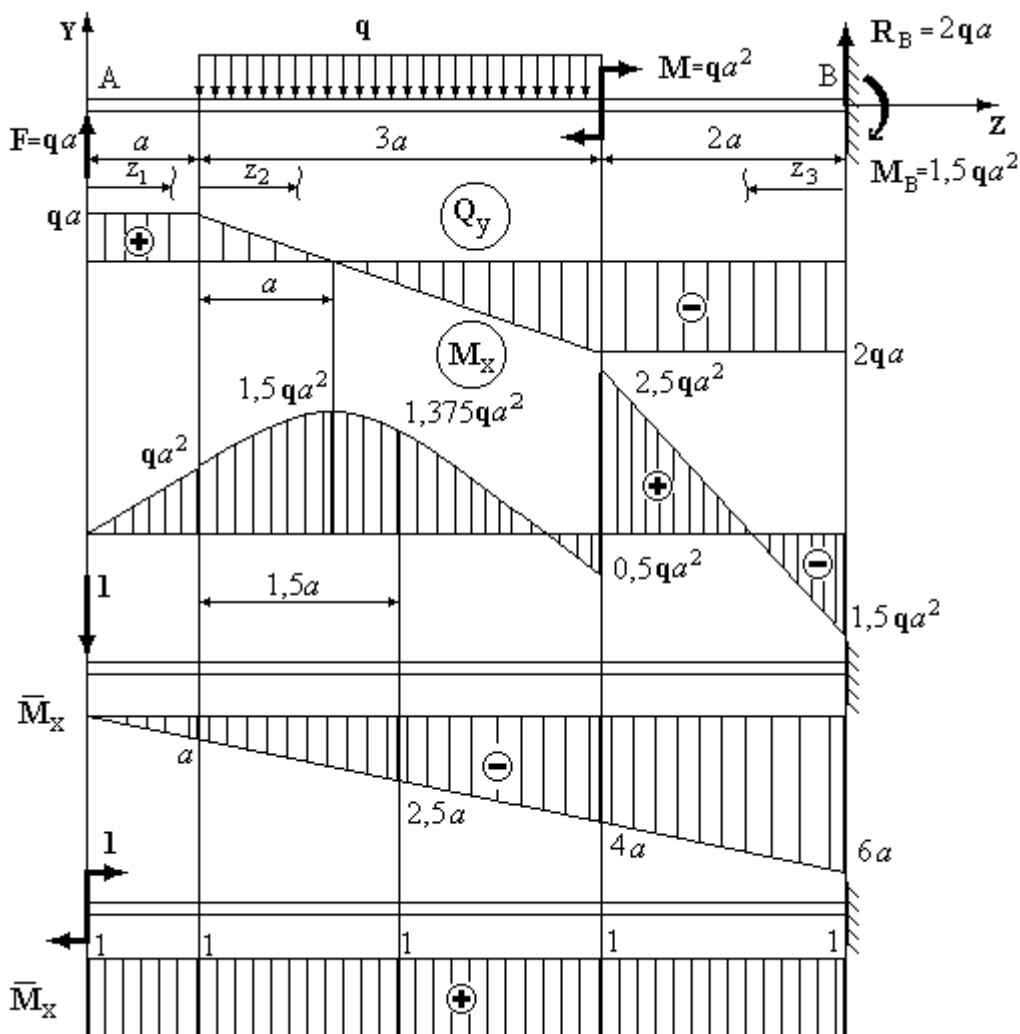


Рис.8.7.

5. У точці А прикладаємо одиничний момент, будуюмо епюру  $\bar{M}_x = 1$ . Перемножуючи її по ділянках з вантажною епюрою, визначаємо кут повороту перерізу А.

$$\theta_A = \frac{qa^3}{EI_x} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{3}{6} (1 \cdot 1 - 0,5 \cdot 1 + 4 \cdot 1,375 \cdot 1) + \frac{2}{6} (2,5 \cdot 1 - 1,5 \cdot 1 + 2 \cdot 2,5 \cdot 1 - 2 \cdot 1,5 \cdot 1) \right] = \frac{qa^3}{EI_x} [0,5 + 3 + 1] = \frac{4,5qa^3}{EI_x}.$$

Тут на першій ділянці перемножування виконане за правилом Верещагіна, на другій - Симпсона, на третій - трапеції. Результат обчислень позитивний, отже, напрямок кута повороту перерізу А збігається з напрямком одиничного моменту.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називається пружною лінією балки?
2. Що називається прогином балки і кутом повороту перетину?
3. Що називається жорсткістю при вигині?
4. Як записується диференціальне рівняння пружної лінії?
5. З яких умов визначається рівняння кутів повороту?
6. Як виходить з рівняння пружної лінії в диференціальній формі рівняння пружної лінії, що дає безпосередній зв'язок між прогином  $V(z)$  і абсцисою  $z$ ?
7. Чому дорівнює прогин консольної балки під дією сили, що прикладена на вільному кінці?
8. Чому рівний прогин балки, яка вільно лежить на двох опорах і навантажена силою посередині прольоту?
9. Яка балка називається балкою рівного опору вигину?
10. Який порядок визначення лінійних і кутових переміщень за допомогою інтеграла МАКСВЕЛЛА-МОРА?
11. В чим полягає сенс визначення переміщень за допомогою ПРАВИЛА ВЕРЕЩАГІНА? Яке правило знаків?
12. Напишіть порядок перемножування епюр за допомогою ПРАВИЛА ТРАПЕЦІЇ. Яке правило знаків?
13. Для перемножування яких епюр застосовується ПРАВИЛО ТРАПЕЦІЇ?
14. Напишіть порядок перемножування епюр за допомогою правила СІМПСОНА-КАРНАУХОВА. Яке правило знаків?
15. В чим полягає сенс розрахунків на жорсткість при вигині?

## Лекція №9. ЗСУВ (ЗРІЗ).

Деформація зсуву виникає в тому випадку, коли на площадках виділеного елемента діють дотичні напруження. Такий напружений стан називається **чистим зсувом** (рис.9.1).

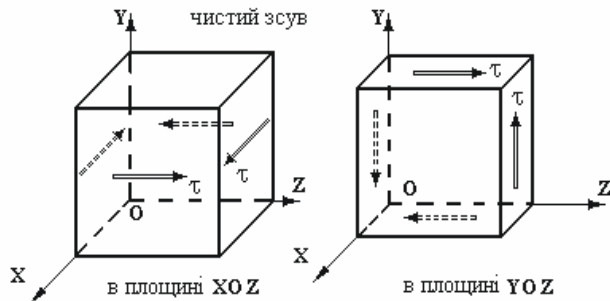


Рис.9.1.

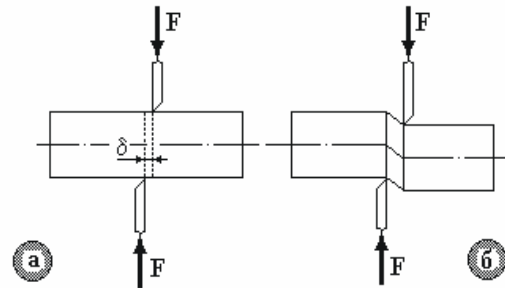


Рис.9.2.

Деформація зсуву може бути отримана (приблизно), коли на стержень діють дві рівні по величині і протилежно спрямовані сили, перпендикулярні до осі стержня. Прикладом такої дії сил на брус може бути різання ножицями металевих прутків (рис.9.2а).

Через те, що між діючими силами існує деяка відстань, то, звичайно, деформація зсуву супроводжується іншими видами деформацій, найчастіше деформацією згинання (рис.9.2б). Розглянемо короткий прямокутний елемент, затиснений одним кінцем, під дією сили  $Q$  (рис.9.3).

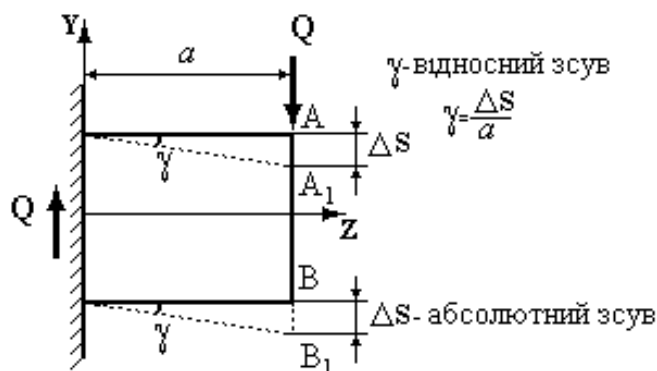


Рис.9.3.

Дія сили  $Q$  викликає зсув елемента. Так як відстань між площинами, що зсуваються, мала, то виникаючим згинальним моментом зневажаємо. З рис.9.3 неважко переконатися, що  $AA_1 = BB_1 = \Delta s$ . Величина  $\Delta s$  називається **абсолютним зсувом**.

При деформації прямокутного елемента прямі кути змінюються на величину  $\gamma$ , тангенс якого  $tg\gamma = \frac{\Delta s}{a}$ . Через малість кута  $tg\gamma \approx \gamma$ , тоді  $\gamma = \frac{\Delta s}{a}$  – називають **відносним зсувом** (кут зсуву, зрушення), що являє собою **відношення абсолютного зсуву  $\Delta s$  до відстані  $a$  між площинами**.

Одержимо формулу для розрахунку напружень при зсуві. Використовуючи метод перерізів (рис.9.4а), визначимо напруження, що виникають при зсуві.

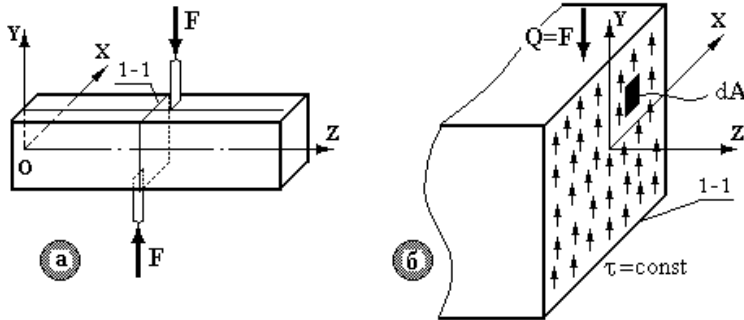


Рис.9.4.

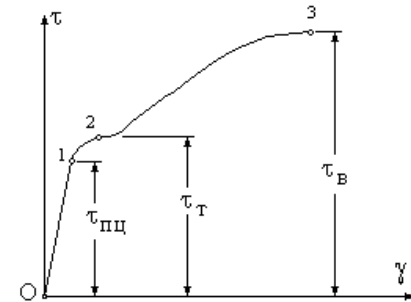


Рис.9.5.

Візьмемо переріз I-I і розглянемо рівновагу відсіченої частини (рис.9.4б), для чого складемо рівняння  $\sum F_{yi} = 0: Q - \int_A \tau dA = 0$ . Це рівняння не може бути вирішене без геометричного аналізу деформування (невідомі величина та закон зміни  $\tau$ ). При розрахунках на зсув **умовно** приймається **рівномірний закон розподілу  $\tau$  по перерізу**, тобто  $\tau = const$ . Тоді:

$$\tau = \frac{Q}{A_3}, \quad (9.1)$$

тут  $A_3$  – площа зрізу. Як і при будь-якому розрахунку опору матеріалів напруження в матеріалі повинні зіставлятися з напруженням, що допускається (допустиме напруження), тобто **умова міцності на зріз** має вигляд:

$$\tau = \frac{Q}{A_3} \leq [\tau]. \quad (9.2)$$

Допустиме напруження приймається рівним:  $[\tau] \approx (0,5 \div 0,6) \cdot [\sigma]$ .

Досвідчене вивчення зсуву в матеріалах проводиться на спеціальних тонкостінних трубках, що навантажуються крутильним моментом до руйнування. У результаті цього одержують діаграму зсуву, що для пластичного матеріалу має вид (рис.9.5). По діаграмі можна визначити **характеристики міцності матеріалу при зсуві (зрізі)**. **Межа (границя) пропорційності  $\tau_{пц}$**

матеріалу при зсуві – це *найбільше напруження, до якого виконується закон Гука* (точка 1). *Межа (границя) текучості  $\tau_T$*  – це *найменше напруження, при якому відносний зсув зростає при практично постійному навантаженні* (точка 2). *Межа (границя) міцності  $\tau_B$*  при зсуві – це *максимальне напруження в матеріалі, при якому не настає руйнування* (точка 3).

**ЗАКОН ГУКА ПРИ ЗСУВІ.** При центральному розтяганні-стисканні між нормальним напруженням  $\sigma$ , відносною деформацією  $\varepsilon$  та модулем подовжньої пружності  $E$  існує залежність  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ , що називається законом Гука при розтяганні-стисканні. Аналогічна залежність, як показують експерименти, також існує між дотичним напруженням  $\tau$ , відносним зсувом  $\gamma$  та модулем зсуву  $G$ , тобто закон Гука при зсуві:

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (9.3)$$

Зв'язок трьох пружних постійних для ізотропного матеріалу (модуля подовжньої пружності  $E$ , модуля зсуву  $G$  і коефіцієнта Пуассона  $\mu$ ) визначається залежністю:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (9.4)$$

Таким чином, модуль подовжньої пружності  $E$ , модуль зсуву  $G$  і коефіцієнт Пуассона  $\mu$  характеризують пружні властивості матеріалу.

### **ПРАКТИЧНІ (УМОВНІ) РОЗРАХУНКИ ПРИ ЗСУВІ (ЗРІЗІ).**

Далі розглянемо особливості розрахунків елементів конструкцій, у яких виникає деформація зсуву. До таких елементів відносяться заклепкові з'єднання, зварні шви, болтові і шпилькові з'єднання, шпонки, шліци і т.д.

**Розрахунок заклепкових з'єднань.** При розрахунку заклепкових з'єднань (рис.9.6а) припускають, що сприймане з'єднанням зусилля  $F$  рівномірно розподіляється між заклепками, тобто на кожну заклепку діє

зусилля  $Q = \frac{F}{n}$ . Основні параметри заклепкового з'єднання – це діаметр  $d$

заклепки та їхня кількість  $n$ . Діаметр заклепки вибирається в залежності від товщини листів, що склепуються -  $d = (1,5 \div 2) \cdot t_{\min}$ , де  $t_{\min}$  - мінімальна товщина листа,  $h$ - крок заклепкового шва вибирають як  $h = (3 \div 6) \cdot d$ . Приймають, що заклепка працює на наступні види деформацій.

1. **Згинальна деформація.** Відзначимо, що через малість згинального моменту в практичних розрахунках цією деформацією зневажають.

2. **Деформація зсуву (зрізу)** по площині  $AB$  (рис.9.6б).

3. **Деформація зминання**, що виникає на поверхнях заклепки і листа (рис.9.6в) в містах їхнього контакту.

Тому розрахунок заклепкового з'єднання повинний забезпечити міцність: а) заклепок на зріз; б) заклепок і контактних поверхонь листа на зминання; в) листів на розтягання у перерізах, ослаблених отворами під заклепки; г) країв елементів листів на зріз; д) на герметичність; е) на дію знакозмінних навантажень і т.д. При розрахунку на зріз припускають, що дотичні напруження  $\tau_c$  рівномірно розподіляються по поперечному перерізі заклепки, і **умова міцності на зріз** запишеться у вигляді:

$$\tau_3 = \frac{Q}{A_3} = \frac{F}{n_3 \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau]_3, \quad (9.5)$$

відкіля визначають **кількість заклепок** (з умови міцності на зріз):

$$n_3 \geq \frac{4F}{\pi d^2 [\tau]_3}, \quad (9.6)$$

де  $[\tau]_3$  – допустиме дотичне напруження на зріз заклепки, вибирається в залежності від матеріалу заклепки (легована чи маловуглецева сталі).

При розрахунку на зминання припускають, що напруження  $\sigma_{зм}$  рівномірно розподіляються по діаметральному перерізу заклепки (рис.9.6г) і **умова міцності на зминання** прийме вигляд:

$$\sigma_{зм} = \frac{Q}{A_{зм}} = \frac{F}{n_{зм} \cdot d \cdot t_{\min}} \leq [\sigma]_{зм}. \quad (9.7)$$

Відкіля **кількість заклепок** з умови міцності на зминання:

$$n_{зм} = \frac{F}{d \cdot t_{\min} \cdot [\sigma]_{зм}}, \quad (9.8)$$

допустиме напруження на зминання  $[\sigma]_{зм} = (2 \div 2,5) [\sigma]_p$ ;

$t_{\min}$  - мінімальна товщина листів, що склепуються.

**Розрахунок листа на розтягання** виконується з урахуванням ослаблення його поперечного перерізу просвердленими отворами (рис.9.6д), тобто:

$$\sigma_p = \frac{F}{A_{нетто}} \leq [\sigma]_p, \quad (9.9)$$

де  $A_{нетто}$  – площа листа в ослабленому перерізі I-I, дорівнюється в даному випадку  $A_{нетто} = (b - 2d)t$ .

**Розрахунок краю листа на зріз** (рис.9.6е):



$$\tau_3 = \frac{F}{n \cdot 2 \cdot (e - 0,5d) \cdot t_{\min}} \leq [\tau]_3. \quad (9.10)$$

При розрахунку заклепкових з'єднань необхідно враховувати його конструкцію, від якої залежить **кількість  $i$  площин зрізу** однієї заклепки (рис.9.7).

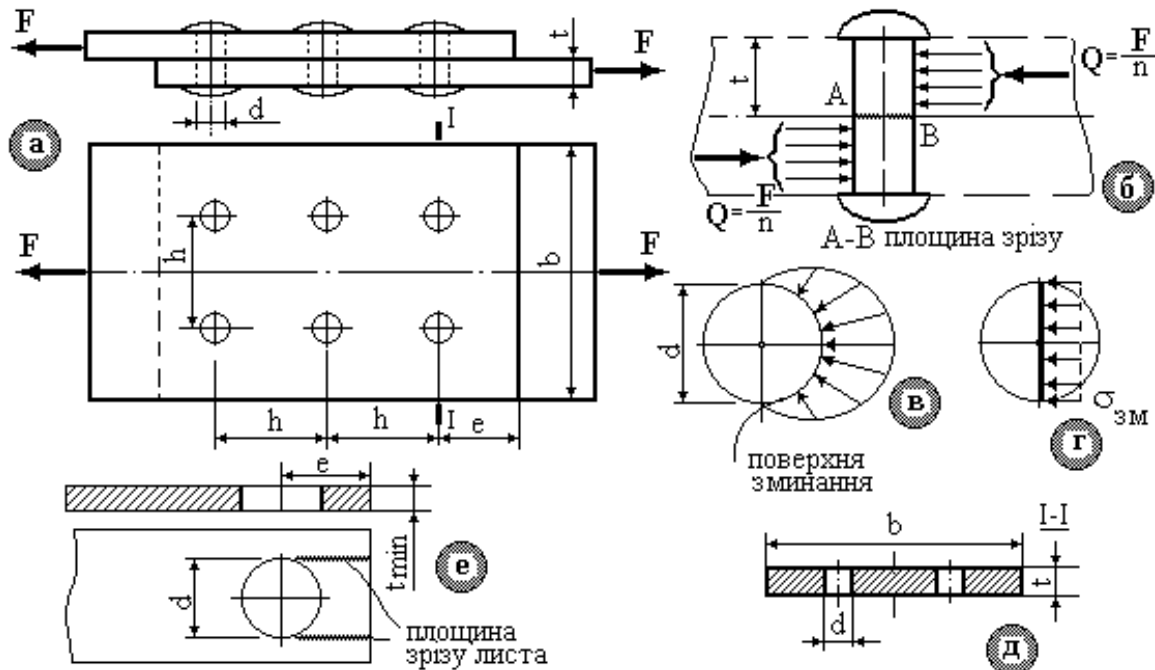


Рис.9.6.

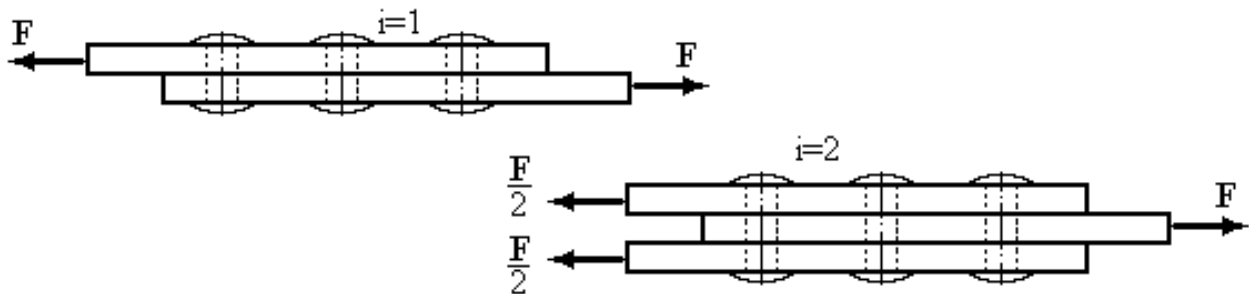


Рис.9.7.

З обліком цього **умова міцності на зріз** для заклепкового з'єднання запишеться у вигляді:

$$\tau_3 = \frac{F}{n_3 \cdot i \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau]_3, \quad (9.11)$$

**кількість заклепок** визначиться як:

$$n_3 \geq \frac{F}{i \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot [\tau]_3}. \quad (9.12)$$

При розрахунку заклепкових з'єднань на дію знакозмінних навантажень допустимі напруження повинні бути зменшені. Розрахунок на герметичність з'єднання ведеться за спеціальною методикою. Таким чином, основним параметром, обумовленим з умов міцності на зріз і зминання, є кількість заклепок  $n_z$  (9.12) і  $n_{zm}$  (9.8), з яких вибирають більше число.

**РОЗРАХУНОК ЗВАРЕНИХ ШВІВ.** Зварені шви стосовно напрямку діючого зусилля поділяють на стикові (рис.9.8а), лобові (рис.9.8б), флангові (рис.9.9а) і комбіновані, що складаються з комбінації вищевказаних. З усього різновиду швів (нормальний, опуклий, увігнутий, нерівнобічний) найбільш розповсюджений нормальний (рис.9.8в, 9.9б). Катет  $t$  шва приймають рівним товщині елементів, що з'єднуються, при цьому  $t \geq 3$  мм.

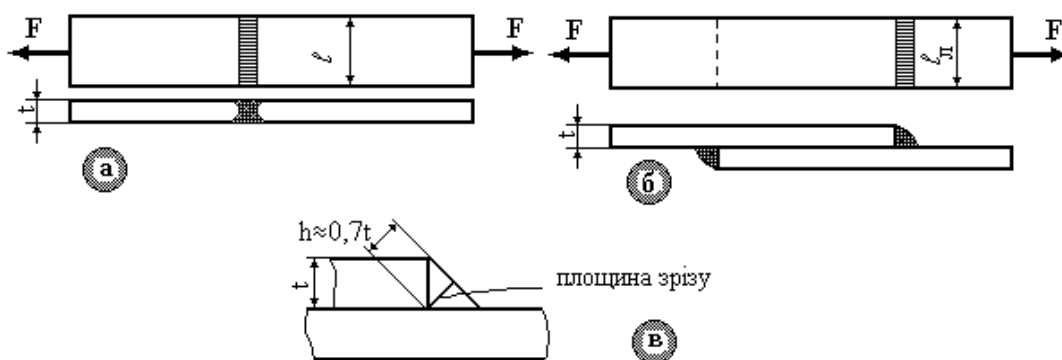


Рис.9.8.

Зварений шов при з'єднанні у стик (рис.9.8а) працює на розтягання чи стискання. Умова міцності шва:

$$\sigma = \frac{F}{\ell \cdot t} \leq [\sigma]_p \text{ чи } [\sigma]_c. \quad (9.13)$$

Тут  $\ell$  – робоча довжина шва;  $t$  – товщина листів, що зварюються; напруження  $[\sigma]_p$ , що допускається на розтягання та  $[\sigma]_c$  - на стискання.

**Флангові і лобові шви розраховуються на зріз у перерізі, що проходить через бісектрису прямого кута (рис.9.9б), при цьому ширина площини зрізу  $h = t \cdot \cos 45^\circ \approx 0,7t$ , і умова міцності:**

$$\tau = \frac{F}{0,7t \cdot L} \leq [\tau]_{ше}, \quad (9.14)$$

де  $[\tau]_{ше}$  – допустиме напруження для матеріалу шва електрозварювання, вибирається в залежності від матеріалу електрода і технології зварювання;  $L$ - розрахункова довжина шва.

**Робоча довжина шва** вибирається з урахуванням непровару на початку і наприкінці шва. Для випадків (рис.9.8б і 9.9а) відповідно довжина **лобового**  $l_L$  і **флангового**  $l_\Phi$  швів визначиться як:  $l_\Phi = \frac{L}{2} + 10\text{мм}$ ,  $l_L = \frac{L}{2} + 10\text{мм}$ .

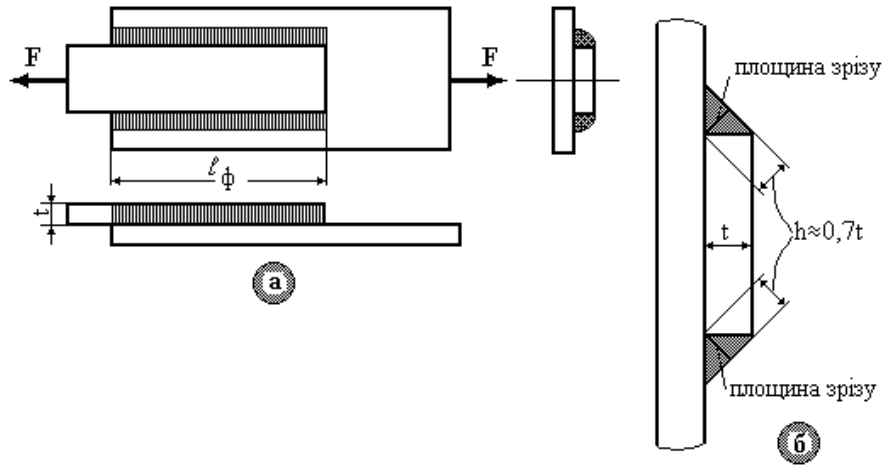


Рис.9.9.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. За яких умов відбувається зріз (зсув)?
2. У чому полягає деформація зсуву?
3. Що називається абсолютним і відносним зсувом? Яку вони мають розмірність?
4. По якій формулі визначають дотичні напруженні при зсуві?
5. Який напружений стан називається чистим зсувом?
6. Як виражається закон Гука при зсуві?
7. Які співвідношення приймаються між допустимими напруженнями на розтягання і зсув? Яка залежність між модулем подовжньої пружності і модулем зсув?
8. Які бувають типи зварних з'єднань?
9. Напишіть умову міцності для зварного шва.
10. Напишіть умову міцності для клепацького з'єднання.
11. Яка різниця між однозрізною і двозрізною клепацькою?

**Лекція №10. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ ПРИ КРУЧЕННІ**

Кручення стержня спостерігається в тому випадку, коли він навантажений моментами, площина дії яких перпендикулярна його осі. У цьому випадку в перерізі стержня виникає єдиний силовий фактор, що називається крутильним моментом  $M_k$ .

Розповсюдженим стержневим елементом конструкцій машин, що працюють на кручення, є вал. Відзначимо, що найбільш частіше зовнішній крутильний момент виникає у валах, що обертаються з кутовою швидкістю  $n$  (об/хв) та передають потужність  $K$  (кВт) (розподільні, передавальні вали зубчатих, пасових передач). У цьому випадку на валу в місцях посадки зубчатих коліс, шківів виникає зосереджений крутильний момент:

$$M_k = 9,55 \frac{K}{n} \text{ [кНм]}. \quad (10.1)$$

Побудова епюр крутильних моментів ґрунтується на наступному: **крутильний момент  $M_k(z)$  у даному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів щодо осі стержня усіх сил, розташованих по одну сторону від перерізу. Правило знаків: крутильний момент вважається позитивним, якщо обертає розглянуту область (відсічену частину) проти годинникової стрілки і навпаки.** Сформулюємо правила для побудови і перевірки правильності епюр крутильних моментів.

1. При побудові епюр варто перевіряти рівновагу вала, тобто  $\sum M_{zi} = 0$ .
2. На ділянці з інтенсивністю розподіленого моменту  $m = \text{const}$  епюра  $M_k$  лінійна, а якщо  $m = 0$ , то епюра  $M_k$  по довжині вала є кусочно-постійною по ділянках вала, тобто  $M_{ki} = \text{const}$ .
3. У точці прикладення зосередженого моменту на епюрі  $M_k$  спостерігається стрибок на величину зовнішнього моменту.

Експериментально встановлено, що при дії на вал двох протилежно спрямованих крутильних моментів  $M_k$ , прикладених по його кінцях (рис.10.1), вал буде закручуватися, тобто одні перерізи вала будуть повертатися щодо інших навколо осі, у той час як довжина вала залишається незмінною.

Якщо закручувати вал аж до руйнування і представити графічно залежність крутильного моменту від кута закручування то одержимо **діаграму кручення**, що у випадку пластичного матеріалу має вид діаграми, показаної на рис.10.2.

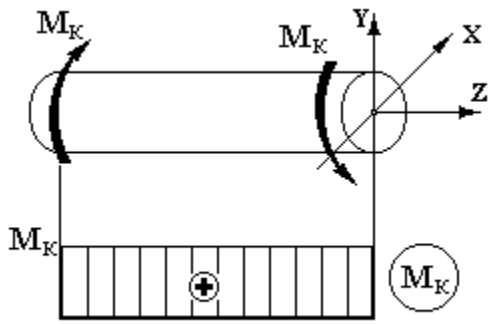


Рис.10.1.

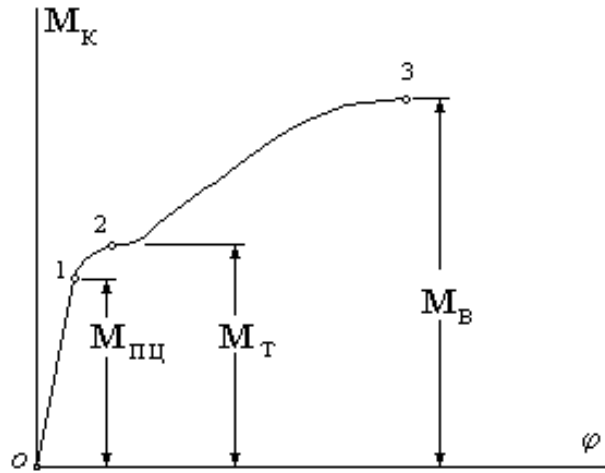


Рис.10.2.

На цій діаграмі також, як і на діаграмі розтягання, можна відзначити ряд характерних точок, що відповідають характеристикам матеріалу при крученні: **точка 1** відповідає максимальному значенню моменту  $M_{\text{пц}}$ , до якого зберігається лінійна залежність між навантаженням  $M_K$  і кутом закручування  $\varphi$ ; у **точці 2** спостерігається **явище текучості** матеріалу при крученні, коли при практично постійному моменті  $M_T$  збільшується кут закручування; **точка 3** відповідає максимальному значенню моменту  $M_{\text{max}}$ , при якому відбувається руйнування зразка.

### ДОТИЧНІ НАПРУЖЕННЯ ПРИ КРУЧЕННІ ДЛЯ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО ЧИ КІЛЬЦЕВОГО ПЕРЕРІЗУ.

Попередньо розглянемо експериментальні результати кручення стержнів круглого перерізу. На валу (рис.10.3а) відзначимо утворюючі (меридіани) та поперечні перерізи (паралелі).

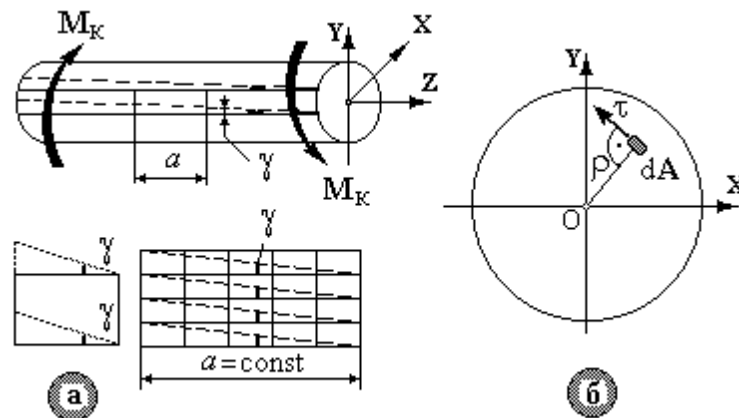


Рис.10.3.

1. При крученні поперечні перерізи стержня повертаються навколо його осі і відносно один одного.

2. Утворюючі повертаються на один і той же кут  $\gamma$ . Квадрати перетворюються в ромби, прямі кути змінюються, як і у випадку чистого зсуву (рис.10.3а). Це свідчить про те, що **виділений елементарний обсяг будь-якого шару вала знаходиться в умовах чистого зсуву.**

3. **Поперечні лінії після деформації не скривлюються**, тобто при крученні стержня круглого перерізу дотримується **гіпотеза плоских перерізів: переріз плоский і нормальний до осі до деформації залишається плоским і нормальним до осі в процесі деформації.**

4. Відстані між перерізами в процесі деформації не змінюються ( $a = \text{const}$ ), це підтверджує **відсутність у перерізі нормальних напружень.**

5. Довжина і прямолінійність радіусів перерізів не порушується, тобто **дотичні напруження  $\tau$  у будь-якій точці перерізу перпендикулярні радіусу  $\rho$**  (рис.10.3б).

Розглянемо стержень діаметром  $d$ , довжиною  $\ell$ , що навантажений моментом  $M$  (рис.10.4а). На відстані  $z$  виділимо елемент довжиною  $dz$  і розглянемо його рівновагу (рис.10.4б). У лівому перерізі прикладемо діючий у ньому крутильний момент  $M_k$ , а в правому перерізі замінимо  $M_k$  напруженням, що діє на елементарній площадці  $dA$  з координатами  $x, y$ , як показано на рис. 10.4б.

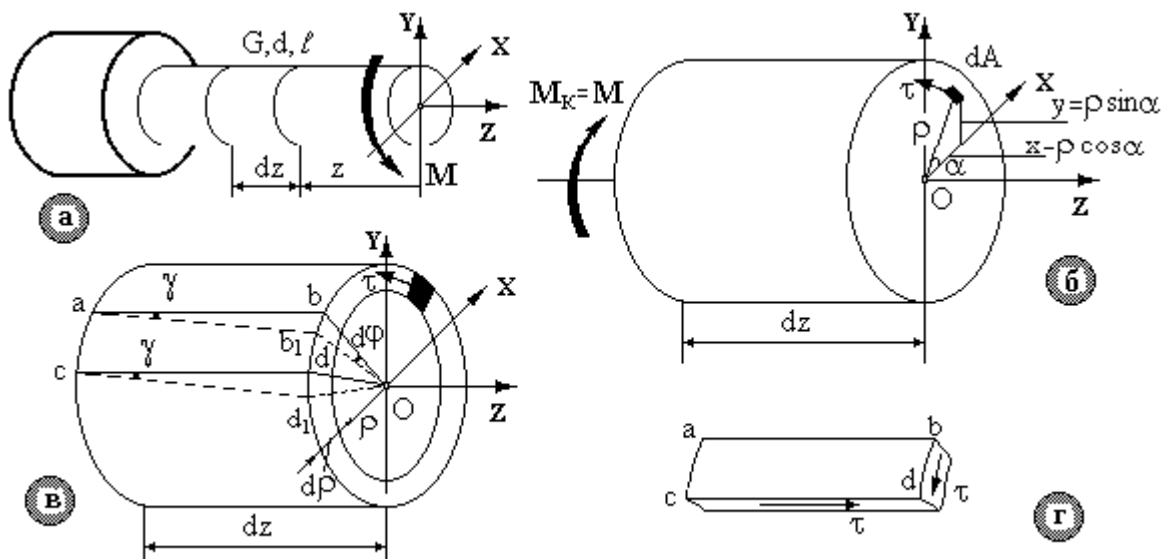


Рис.10.4.

Вважаючи, що початок координат співпадає з центром ваги  $O$  перерізу, запишемо рівняння статичної рівноваги від елементарної сили  $dF = \tau dA$ , що діє на площадці  $dA$  (результуюча сила  $F = \int_A \tau dA$ ):

$$\sum F_x = \int_A \tau dA \cdot \cos \alpha = 0; \quad (10.1)$$

$$\sum F_y = \int_A \tau dA \cdot \sin \alpha = 0; \quad (10.2)$$

$$\sum M_z = M_k - \int_A \tau \rho dA = 0. \quad (10.3)$$

Так як невідома величина і закон розподілу дотичного напруження  $\tau$ , кут кручення, положення нуля напружень, то рівняння рівноваги вирішити неможливо. Таким чином задача є статично невизначеною. Для розкриття статичної невизначеності проведемо геометричний аналіз деформацій при крученні. Для цього з нескінченно малої ділянки вала довжиною  $dz$  виділимо нескінченно тонке кільце товщиною  $d\rho$  (рис.10.4в). Умовно вважаємо, що лівий переріз нерухомий. Правий переріз нескінченно малого циліндра повернеться навколо осі  $Z$  на кут  $d\phi$ , причому  $\phi$  є абсолютним переміщенням при крученні і називається кутом закручування. Утворюючи  $ab$  і  $cd$  на бічній поверхні циліндра переміщуються в положення  $ab_1$  і  $cd_1$  відповідно, зміщаючись на кут зсуву  $\gamma$ .

Обчислимо довжину дуги  $\check{b}b_1$  (рис.10.4в), розглядаючи спочатку криволінійний трикутник  $abb_1$ :  $\check{b}b_1 = dz \cdot \text{tg} \gamma \approx dz \cdot \gamma$ , так як у межах малих пружних деформацій  $\text{tg} \gamma \approx \gamma$ . Розглядаючи потім криволінійний трикутник  $Obb_1$ , величина дуги  $\check{b}b_1$  виявляється рівною  $\check{b}b_1 = (\rho + d\rho) \cdot d\phi$ . Зневажаючи нескінченно малими величинами другого порядку, одержуємо  $\gamma \cdot dz = \rho \cdot d\phi$ , відкіля  $\gamma = \rho \frac{d\phi}{dz}$ .

Вводячи відносний кут закручування

$$\theta = \frac{d\phi}{dz}, \quad (10.4)$$

одержимо рівняння спільності деформацій при крученні:

$$\gamma = \rho \cdot \theta. \quad (10.5)$$

Так як в нескінченно малому елементі  $abdc$  виникає напружений стан чистий зсув (рис.10.4г), то в межах малих деформацій виконується закон Гука при зсуві:

$$\tau = \gamma G. \quad (10.6)$$

Підставляючи вираз (10.5) у (10.6), одержимо:

$$\tau = G\rho\theta. \quad (10.7).$$

Ця залежність виражає закон Гука при крученні, на підставі якого можна зробити висновок про те, що дотичні напруження в перерізі змінюються по лінійному закону, тобто пропорційно радіусу  $\rho$ .

Підставляючи залежність (10.7) у рівняння (10.1) і з обліком того, що  $G$  і  $\theta$  є постійними величинами, а  $\rho \cos \alpha = x$ , одержимо:

$$\int_A \tau \cos \alpha dA = \int_A G \rho \cos \alpha \cdot \theta dA = G \theta \int_A x dA = G \theta S_y = 0.$$

Після аналогічної підстановки залежності (10.7) у рівняння (10.2) одержимо:

$$\int_A \tau \sin \alpha dA = \int_A G \rho \sin \alpha \cdot \theta dA = G \theta \int_A y dA = G \theta S_x = 0.$$

З останніх рівнянь випливає, що статичні моменти  $S_x$ ,  $S_y$  площі перерізу щодо осей  $x, y$  дорівнюють нулю, оскільки  $G$  і  $\theta$  не дорівнюють нулю. **Статичні моменти площі тільки відносно центральних осей дорівнюють нулю.** Таким чином осі  $x, y$  є **центральною осями** перерізу. Іншими словами, **центр кручення** («нуль» напружень) **збігається з центром ваги перерізу.**

Підставляючи залежність (10.7) у рівняння (10.3), і з обліком того, що інтеграл  $\int_A \rho^2 dA = I_p$  - полярний момент інерції перерізу, одержимо наступне:

$$M_K - \int_A G \rho \theta \rho dA = M_K - G \theta \int_A \rho^2 dA = M_K - G \theta I_p = 0, \text{ відкіля } \text{відносний кут}$$

**закручування:**

$$\theta = \frac{M_K}{GI_p}. \quad (10.8)$$

Величина  $GI_p$  називається **жорсткістю стержня при крученні**. З виразу (10.7)

одержуємо відносний кут закручування  $\theta = \frac{\tau}{G\rho}$ . Дорівнюючи праві частини

останніх виразів, одержуємо формулу для визначення **дотичних напружень при крученні стержня круглого чи кільцевого перерізів:**

$$\tau = \frac{M_K \rho}{I_p}. \quad (10.9)$$

З рівняння (10.4) з урахуванням виразу (10.8) одержуємо, що **кут закручування** дорівнює  $\varphi = \int_0^{\ell} \theta dz = \int_0^{\ell} \frac{M_K dz}{GI_p}$ . Отримане рівняння являється

**законом Гука при крученні для абсолютного кута закручування.** Після інтегрування по довжині стержня  $\ell$  одержимо, що в нашому випадку **абсолютний кут закручування**  $\varphi$  стержня можна обчислити за формулою:

$$\varphi = \theta \ell = \frac{M_K \ell}{GI_p}. \quad (10.10)$$



## РОЗПОДІЛ ДОТИЧНИХ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО І КІЛЬЦЕВОГО ПЕРЕРІЗІВ. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ.

З рівняння (10.9) випливає, що дотичні напруження по радіусу перерізу розподіляються лінійно (рис.10.5).

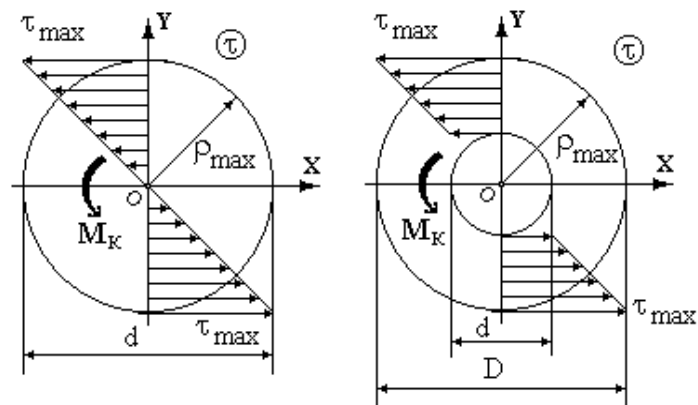


Рис.10.5.

Як видно з приведених на рис.10.5 епюр дотичних напружень, **максимальні дотичні напруження виникають у крайніх точках перерізу, де  $\rho = \rho_{\max}$** :

$$\tau_{\max} = \frac{M_K \rho_{\max}}{I_p} \quad (10.11)$$

З огляду на те, що величина  $\frac{I_p}{\rho_{\max}} = W_p$  є полярним моментом опору

перерізу, **умова міцності при крученні** запишеться у вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau], \quad (10.12)$$

де  $[\tau]$  – допустиме дотичне напруження, обумовлене відношенням границі текучості матеріалу до коефіцієнту запасу міцності  $n_T$ , тобто:  $[\tau] = \frac{\tau_T}{n_T}$ .

З умови міцності полярний момент опору повинний бути обраний за формулою:  $W_p \geq \frac{M_K}{[\tau]}$ . Значення полярних моментів опору для вала круглого

перерізу:  $W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$ ; для кільцевого

перерізу:  $(\alpha = \frac{d}{D}) : W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3 (1 - \alpha^4)$ . Діаметр перерізу для

круглого вала обчислюється за формулою:  $d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi[\tau]}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_K}{0,2[\tau]}}$ ; для

кільцевого вала:  $D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_K}{0,2[\tau](1-\alpha^4)}}$ .

**РОЗРАХУНОК НА ЖОРСТКІСТЬ.** Крім розрахунку на міцність вали розраховуються на жорсткість:

$$\theta_{\max} = \frac{M_K \ell}{GI_p} \leq [\theta] \quad (10.13)$$

У деяких випадках умова жорсткості при крученні складається в абсолютних кутах закручування  $\varphi$  ( $[\varphi]$  в радіанах – допустимий абсолютний кут закручування):

$$\varphi = \frac{M_K \ell}{GI_p} \leq \max [\varphi] . \quad (10.14)$$

З формули (10.13) полярний момент інерції  $I_p$ , що забезпечує жорсткість, визначається як:  $I_p \geq \frac{M_K \ell}{G[\theta]}$ . Полярний момент інерції для круглого перерізу

$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$ , для кільцевого  $I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) \approx 0,1D^4(1-\alpha^4)$ . З умови

жорсткості діаметр круглого перерізу:  $d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K \ell}{\pi G[\theta]}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_K \ell}{0,1G[\theta]}}$ ; зовнішній

діаметр кільцевого перерізу:  $D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K \ell}{\pi G[\theta](1-\alpha^4)}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_K \ell}{0,1G[\theta](1-\alpha^4)}}$ .

### **ПОТЕНЦІЙНА ЕНЕРГІЯ ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ КРУЧЕННІ.**

*Потенційна енергія деформації  $U$ , накопичена в пружному тілі, чисельно дорівнює роботі  $W$  зовнішніх сил, виконаній в процесі деформування пружного тіла.* Розглянемо стержень довжиною  $\ell$  навантажений крутильним моментом  $\mathbf{M}$  (рис.10.6а).

Виріжемо елементарний відрізок  $d\mathbf{z}$  і розглянемо його деформацію. Умовно закріпимо лівий переріз нескінченно малого елемента вала  $d\mathbf{z}$ . При статичному навантаженні моментом  $M_K$  правий переріз елемента повернеться на кут  $d\varphi$  (рис.10.6б). Елементарна робота  $dW$  моменту  $M_K$  на куті закручування  $d\varphi$  при навантаженні визначається площею трикутника (рис.10.6в), тобто

$dW = \frac{1}{2} M_K \cdot d\varphi$ . Кут закручування  $d\varphi$  визначається за формулою (10.10) і

складе:  $d\varphi = \frac{M_K dz}{GI_p}$ . Підставивши значення  $d\varphi$  у вираз для роботи  $dW$ ,

одержимо  $dW = \frac{M_K^2 dz}{2GI_p}$ , де  $I_p$  – полярний момент інерції при крученні. Але

робота  $dW$  чисельно дорівнює потенційної енергії деформації  $dU$ , тобто

$dU = dW = \frac{M_K^2 dz}{2GI_p}$ . Повна потенційна енергія деформації визначається як

інтеграл по довжині стержня:

$$U = \int_{\ell} \frac{M_K^2 dz}{2GI_p}. \quad (10.15)$$

Якщо стержень складається з декількох ділянок, потенційна енергія деформації обчислюється як сума інтегралів по ділянках:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M_{iK}^2 dz}{2GI_p}. \quad (10.16)$$

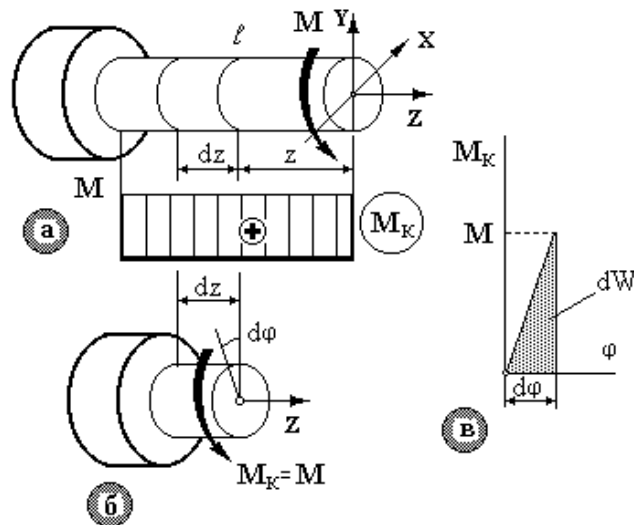


Рис.10.6.

### РОЗРАХУНОК ГВИНТОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПРУЖИНИ З МАЛИМ КРОКОМ.

Розглянемо пружину (рис.10.7а) під дією зовнішнього навантаження  $F$ . Основні параметри (рис.10.7б):  $D_1$  – внутрішній діаметр пружини (діаметр утворюючої циліндра, діаметр оправки);  $D$  – середній (розрахунковий) діаметр;  $D_2$  – зовнішній діаметр;  $d$  – діаметр прутка;  $\alpha$  – кут нахилу витка.

Приведемо зовнішню силу  $F$  до центра ваги поперечного перерізу витка. Зневажаючи через малість поздовжньою силою  $N = F \sin \alpha$  і згинальним

моментом  $M_3 = F \frac{D}{2} \sin \alpha$ , одержимо (рис.10.7в) поперечну силу  $Q = F$  і крутильний момент  $M_K = F \frac{D}{2}$ . Від дії поперечної сили  $Q$  (деформація зсуву, зрізу) у перерізі виникають **дотичні напруження  $\tau_3$ , що умовно прийmemo рівномірно розподілені по перерізу** (рис.10.7г) і рівними:  $\tau_3 = \frac{Q}{A_3} = \frac{4F}{\pi d^2}$ .

Від дії крутильного моменту  $M_K = F \frac{D}{2}$  також виникають **дотичні напруження, що лінійно розподіляються по перерізу** (рис.10.6д) і мають **максимальне значення  $\tau_{K \max}$  у крайніх точках перерізу**:  $\tau_{K \max} = \frac{M_K}{W_p} = \frac{F \frac{D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{8FD}{\pi d^3}$ . З епюр,

приведених на рис.10.7г та 10.7д видно, що дотичні напруження  $\tau_3$  і  $\tau_K$  в т. А збігаються по напрямку.

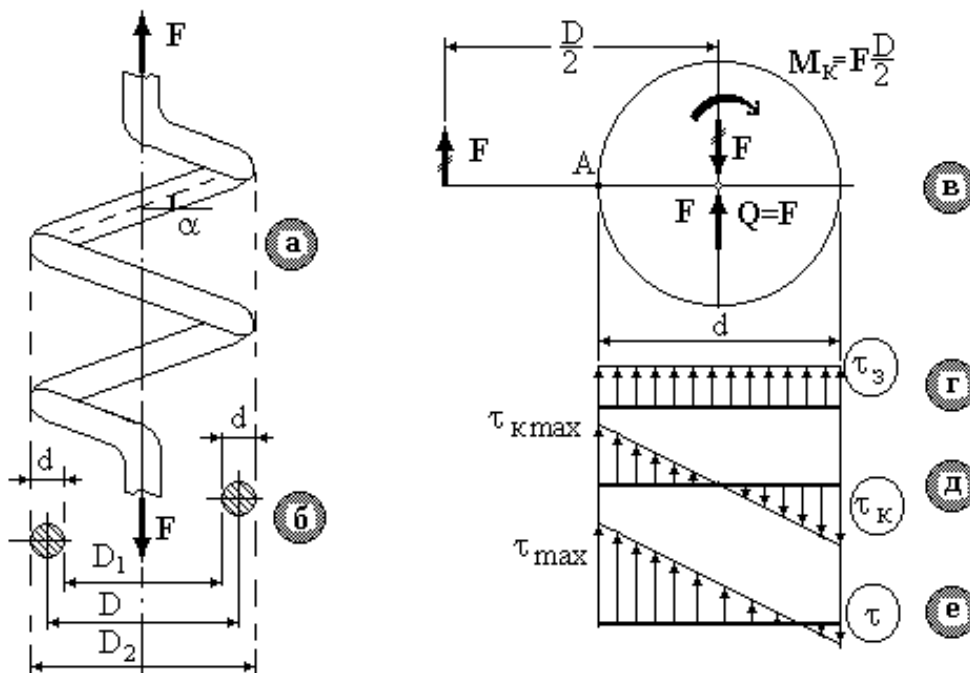


Рис.10.7.

Підсумуємо дві епюри (рис.10.7г і рис.10.7д) і одержимо, що в пружині **найбільш навантажені внутрішні точки (точка А)**, а максимальні напруження :

$$\tau_{\max} = \tau_{\kappa \max} + \tau_3 = \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right) = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{1}{2m}\right), \quad (10.17)$$

де  $m = \frac{D}{d}$  – індекс пружини. При розрахунку пружин великого діаметра  $D$  з

тонкого дроту ( $\frac{d}{2D} \ll 1$ ) максимальні напруження з достатнім ступенем

точності можна визначити за формулою:  $\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3}$ . З урахуванням

напружень від поздовжньої сили, згинального моменту та поперечної сили остання формула прийме вигляд:

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3}, \quad (10.18)$$

де поправочний коефіцієнт  $k = \frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m}$ , значення якого в

залежності від індексу пружини  $m$  приведені нижче:

$m = \frac{D}{d}$	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,58	1,4	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

### **При визначенні осадки $\lambda$ (деформації) гвинтової циліндричної пружини**

врахуємо лише деформацію від кручення. Деформаціями зсуву, розтягання-стискання та згинання зневажають через їхню малість.

Потенційна енергія деформації пружини при статичному навантаженні чисельно дорівнює роботі зовнішньої сили  $F$  на відповідному переміщенні  $\lambda$ , тобто:

$$U = \frac{1}{2} F \cdot \lambda. \quad (10.19)$$

Обчислимо потенційну енергію деформації при крученні витків пружини, для чого виріжемо нескінченно малий елемент довжиною  $ds$  (рис.10.8).

Жорстко закріпимо один його кінець, на вільному кінці стержня прикладемо виникаючий крутильний момент  $M_{\kappa} = F \frac{D}{2}$ .

Вільний крайній переріз елементарного стержня повернеться на кут  $d\varphi = \frac{M_{\kappa} ds}{GI_p}$ , а точка прикладення сили  $F$  одержить переміщення  $d\lambda$ . Вважаючи

незначним вплив кривизни елементарного стержня, величину потенційної енергії при крученні одного витка пружини стержня обчислимо за формулою

$$(10.15) U_{\text{витка}} = \int_0^{\pi D} \frac{M_K^2}{2GI_p} dS = \frac{M_K^2 \pi D}{2GI_p}. \text{ З огляду на те, що крутильний момент}$$

$M_K = F \frac{D}{2}$ , полярний момент інерції  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ , пружина має  $n$  витків, потенційна енергія при статичному навантаженні пружини силою  $F$  дорівнює :

$$U = \frac{4F^2 D^3 n}{Gd^4}. \quad (10.20)$$

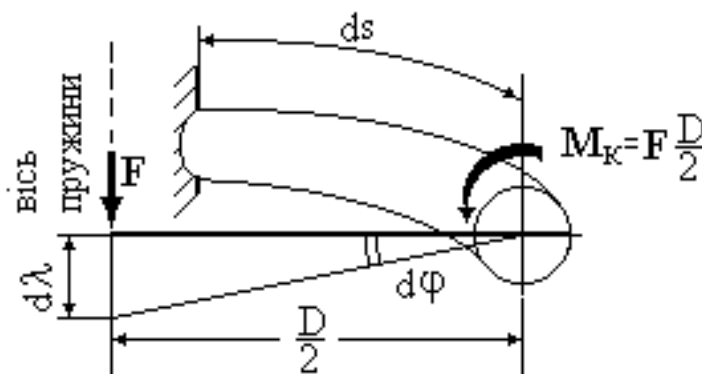


Рис.10.8.

Порівнюючи значення потенційної енергії, що обчислюється за формулою (10.19) і (10.20), залежність для визначення осадки  $\lambda$  прийме вигляд:

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4}. \quad (10.21)$$

Щоб пружина була більш податливою, діаметр прутка повинний бути найменшим, при цьому максимальні дотичні напруження досягають значних величин. Для виключення цієї невідповідності пружини виготовляються зі спеціальних пружинних матеріалів, що мають високі міцні характеристики. Приведемо значення допустимих дотичних напружень для пружинних матеріалів: **високо загартовані пружинні сталі:**  $[\tau] = 500$  МПа при діаметрі прутка  $d = 6$  мм;  $[\tau] = 400$  МПа при  $d = 10$  мм;  $[\tau] = 380$  МПа при  $d = 12$  мм; **хромонікелеві сталі:**  $[\tau] = 700$  МПа при  $d = 12$  мм; **фосфористі бронзи:**  $[\tau] = 130$  МПа при  $d = 16$  мм.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В якому випадку виникає кручення?
2. Яка існує залежність між крутильним моментом, потужністю, що передається валом, і числом обертів?
3. Які припущення лежать в основі теорії кручення стрижнів круглого перетину?
4. Який кут називається відносним, повним кутом закручування?
5. Як записуються формули для відносного і повного кутів закручування?
6. Що називається полярним моментом інерції і яка його розмірність?
7. Напишіть формулу полярного моменту інерції для суцільного круглого і кільцевого перетинів.
8. Що називається жорсткістю при крученні?
9. В яких точках перетину валу виникають найбільші напруження при крученні?
10. Як розподіляються напруження кручення по поперечному перетині валу?
11. В чим полягає перевага валу кільцевого перетину в порівнянні з валом круглого перетину?
12. Напишіть формулу для визначення дотичних напружень в будь-якій точці поперечного перетину валу круглого перетину.
13. Напишіть умову міцності при крученні.
14. Що називається моментом опору крученню? Яка його розмірність?
15. По яких формулах визначаються полярні моменти опору крученню стрижня суцільного і кільцевого перетинів?
16. Як повинен змінитися діаметр валу, якщо потужність, що передається ним, залишається без зміни, а число обертів збільшується?
17. В яких точках перетину виникають найбільші дотичні напруження при крученні бруса прямокутного поперечного перетину?
18. Як виражається потенційна енергія деформації при крученні?
19. Які напруження виникають у витках циліндрової гвинтової пружини при її розтяганні-стисканні?
20. З яких міркувань і по якій формулі визначається осідання гвинтової циліндрової пружини?

## Лекція № 11. СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТРИЖНІВ.

### ВСТУП.

При розрахунках на міцність і жорсткість вважалося, що під час деформації будь-якої системи має місце лише одна наперед відома форма рівноваги. Насправді рівновага у деформованому стані між зовнішніми та внутрішніми силами пружності може бути не тільки стійкою, а й нестійкою.

Пружна рівновага буде стійкою, якщо деформоване тіло при будь-якому малому відхиленні від стану рівноваги намагається повернутися до початкового стану й повертається до нього після припинення зовнішнього впливу.

Пружна рівновага нестійка, якщо деформоване тіло, виведене неї будь-якою зовнішньою дією, продовжує деформуватися в напрямі наданого йому відхилення.

Навантаження, перевищення якого спричиняє втрату стійкості вихідної форми тіла, називають критичним і позначають  $P_{кр}$ . Можна стверджувати, що досягнення навантаженнями критичних значень рівнозначно руйнуванню конструкції, оскільки нестійка форма рівноваги неминуче буде втрачена, що пов'язано з практично необмеженим зростанням деформацій та напружень.

До моменту настання критичного стану пружні деформації за модулем зовсім невеликі, і зростання їх майже непомітне для ока. Проте з моменту настання критичного стану до моменту руйнування залишкові деформації нарастають надто швидко і практично немає часу вжити заходів щодо запобігання катастрофи, яка загрожує.

Для забезпечення певного запасу стійкості необхідно, щоб задовольнялася умова  $P \leq [P]$ . Тут  $[P] = P_{кр} / n_{ст}$ , де  $P$  - діюче навантаження,  $n_{ст}$  - коефіцієнт запасу стійкості.

Отже для розрахунків стиснутих стрижнів на стійкість необхідно знати засоби визначення критичних навантажень.

### ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОЇ СИЛИ СТИСНУТОГО СТРИЖНЯ.

Розглянемо стрижень з шарнірно закріпленими кінцями (рис.11.1а), який трохи зігнувся під дією сили  $P$ , яка дещо перевищує критичну силу  $P_{кр}$ . Віднесемо викривлену вісь стрижня до прямокутної системи координат  $WOX$  (рис. 11.1б) і припустимо, що напруження в стрижні під дією сили  $P_{кр}$  не перевищують границю пропорційності. Для визначення поздовжньої сили скористаємось наближеним диференціальним рівнянням пружної лінії:

$$EI_{\min} \frac{d^2W(x)}{dx^2} = \pm M(x), \quad (11.1)$$

де  $I_{\min}$  - найменший момент інерції перерізу стрижня. Оскільки  $|M(x)| = |PW(x)|$ , а знак прогину завжди протилежний знаку другої похідної, тобто знаки  $M(x)$  і  $\frac{d^2W(x)}{dx^2}$  протилежні при будь-якому напрямі  $W$ , то в



правій частині (11.1) треба ставити знак „мінус”. Тоді рівняння (11.1) набуває вигляду

$$EI_{\min} \frac{d^2W(x)}{dx^2} = -PW, \text{ або } \frac{d^2W(x)}{dx^2} + k^2W = 0, \quad (11.2)$$

де 
$$k^2 = \frac{P}{EI_{\min}}. \quad (11.3)$$

Ми отримали однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку, загальний інтеграл якого можна представити у вигляді:

$$W = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx.$$

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  визначаємо з граничних умов  $W(x)|_{x=0} = 0$ ,  $W(x)|_{x=l} = 0$ . З першої граничної умови випливає, що  $C_2 = 0$ , а з другої знаходимо  $C_1 \sin kl = 0$ .

При викривленій формі стрижня має виконуватися рівність  $\sin kl = 0$ . Корінь цього рівняння  $kl$  може мати нескінчену кількість значень:  $0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots$ , тобто:  $kl = n\pi$ , де  $n$  - довільне ціле число.

Однак перший корінь  $kl = 0$  відкидається, оскільки він не відповідає вихідним даним задачі. Отже,  $k^2 l^2 = n^2 \pi^2$ , тоді з рівняння (11.3) дістанемо вираз для сили, що стискає:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (11.4)$$

Рівняння (11.4) має назву формули Л.Ейлера.

Практично нас цікавить найменше значення поздовжньої сили  $P$ , при якому стає можливим поздовжнє згинання. Найменше значення критичної сили  $P_{кр}$  визначимо при  $n=1$  та  $kl = \pi$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (11.5)$$

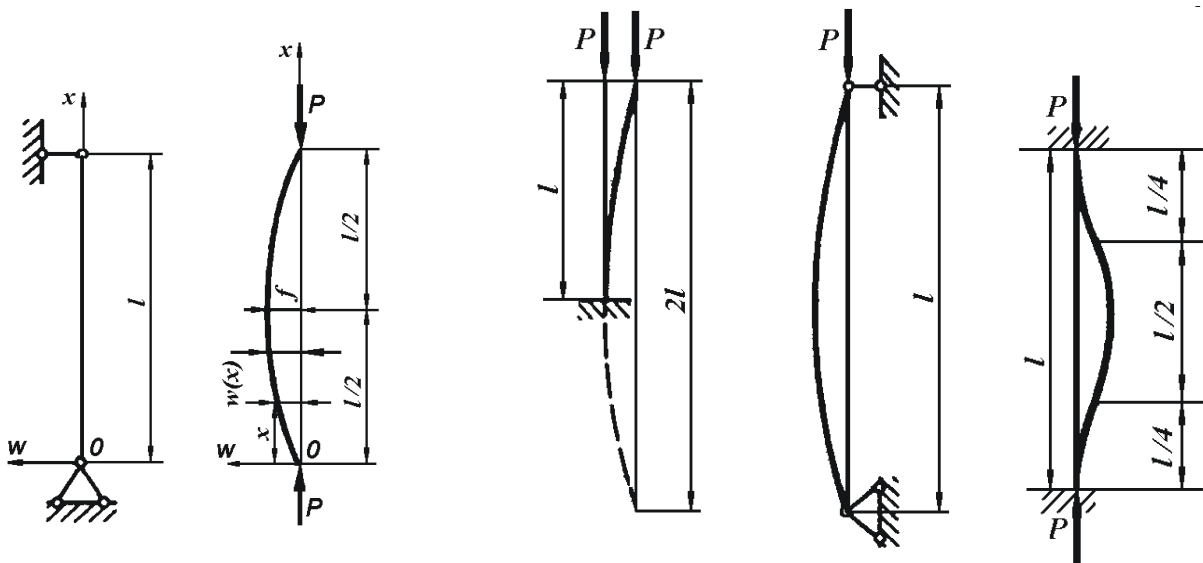


Рис. 11.1а Рис. 11.1б

Рис. 11.2а

Рис. 11.2б

Рис. 11.3

## ВПЛИВ УМОВ ЗАКРІПЛЕННЯ КІНЦІВ СТРИЖНЯ НА ЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОЇ СИЛИ.

Розглянемо інші приклади закріплення кінців стрижня.

1) Стрижень завдовжки  $l$  закріплений одним кінцем та стиснутий поздовжньою силою, прикладеною до вільного кінця (рис. 11.2а).

Якщо порівняти рис. 11.2а з рис. 11.2б, бачимо, що зігнута вісь стрижня, закріпленого одним кінцем, перебуває в тих самих умовах, що й верхня половина стрижня завдовжки  $2l$  з шарнірно закріпленими кінцями.

Отже, критична сила для стрижня з одним закріпленим кінцем дорівнює

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{4l^2}. \quad (11.6)$$

2) Стрижень завдовжки  $l$ , обидва кінця якого жорстко закріплені (рис. 11.3).

Після втрати стійкості стрижня внаслідок його симетрії його середня частина завдовжки  $l/2$  працює в тих самих умовах, що й стрижень при шарнірно опертих кінцях. Критичну силу в цьому разі знаходимо з рівняння (11.4), якщо в ньому замість  $l$  покласти  $l/2$ , що дає

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(l/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (11.7)$$

3) Стрижень завдовжки  $l$ , жорстко закріплений одним кінцем та пружно опертий на іншому (рис. 11.4).

Після втрати стійкості опертий кінець стрижня переміщується у вертикальному напрямі на величину  $f_B$ ,  $R_B = cf_B$ , де  $c$  - коефіцієнт пружності опори В.

Складемо диференційне рівняння пружної лінії стиснутого стрижня після втрати стійкості

$$EI_{\min} \frac{d^2W(x)}{dx^2} = P_{кр} (f_B - W) - cf_B (l - x)$$

Поділивши рівняння на  $EI_{\min}$  та позначивши  $\frac{P_{кр}}{EI_{\min}} = k^2$ , отримаємо:

$$\frac{d^2W(x)}{dx^2} + k^2W = k^2 f_B \left(1 - \frac{cl}{P_{кр}}\right) + k^2 \frac{cf_B}{P_{кр}} x.$$

Загальний інтеграл цього рівняння

$$W = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + f_B \left(1 - \frac{cl}{P_{кр}}\right) + f_B x \frac{c}{P_{кр}}. \quad (11.8)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  і критичного навантаження маємо такі граничні умови:

$$\text{при } x = 0 \quad W(0) = W_A = 0, \quad \frac{dW}{dx} = \theta(0) = \theta_A = 0$$

$$\text{при } x = l \quad W(l) = W_B = f_B.$$

Використовуючи граничні умови при  $x = 0$  знаходимо сталі  $C_1$  і  $C_2$ :

$$C_1 = -\frac{c}{kP_{кр}} f_B; \quad C_2 = -f_B \left(1 - \frac{cl}{P_{кр}}\right).$$

Підставивши у (11.8) замість довільних сталих отримані вирази, запишемо остаточно рівняння зігнутої осі стиснутого стрижня

$$W(x) = -\frac{c}{kP_{кр}} f_B \sin kx - f_B \left(1 - \frac{cl}{P_{кр}}\right) \cos kx + f_B \left(1 - \frac{cl}{P_{кр}}\right) + \frac{cf_B}{P_{кр}} x. \quad (11.9)$$

Щоб вивести рівняння, яке дає можливість визначити критичне навантаження, використовуємо граничну умову при  $x = l$

$$W(l) = -\frac{c}{kP_{кр}} f_B \sin kl - f_B \left(1 - \frac{cl}{P_{кр}}\right) \cos kl + f_B \left(1 - \frac{cl}{P_{кр}}\right) + \frac{cf_B}{P_{кр}} l = f_B,$$

або

$$-\frac{c}{kP_{кр}} \sin kl - \left(1 - \frac{cl}{P_{кр}}\right) \cos kl = 0,$$

звідки з урахуванням (11.3) маємо:

$$\operatorname{tg} kl = kl \left(1 - \frac{k^2 EI_{\min}}{cl}\right). \quad (11.10)$$

Якщо розв'язати це рівняння, тобто визначити найменший корінь  $k$  ( $k \neq 0$ ), то тим самим можна знайти значення критичного навантаження, оскільки  $P_{кр} = k^2 EI_{\min}$ .

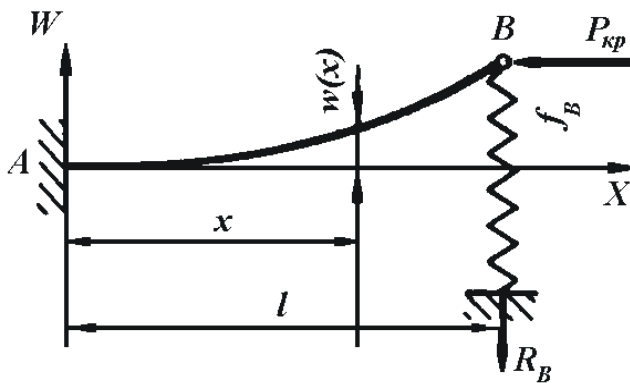


Рис. 11.4

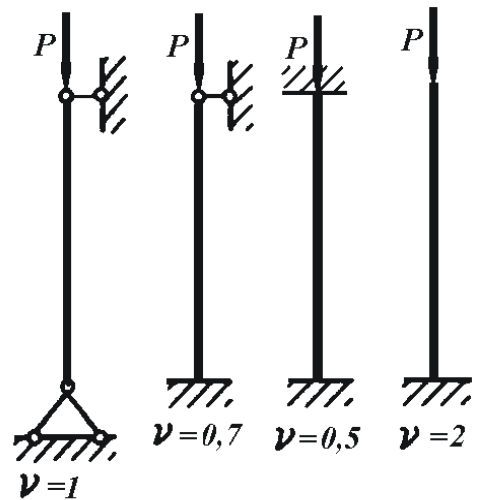


Рис. 11.5

Розглянемо два граничних випадки.

При  $c \rightarrow 0$  маємо  $\operatorname{tg} kl = -\infty$ , тобто  $kl = \frac{\pi}{2}$  і таку розрахункову схему

стрижня, коли один кінець (лівий) жорстко закріплений, а інший (правий) вільний. Критична сила

$$P_{кр} = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 EI_{\min} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{4l^2}$$

збігається з виразом (11.6).

При  $c \rightarrow \infty$  (дуже жорстка опора – защемлення) запишемо визначальне рівняння  $tgkl = kl$ , тобто  $kl = 4,493 \approx \frac{\pi}{0,7}$ .

Критична сила

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0,7l)^2}, \quad (11.11)$$

що дає формулу для стрижня, один кінець якого закріплений, а інший шарнірно опертий.

Співвідношення (11.5), (11.6), (11.7), (11.11) можна об'єднати в одну формулу:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\nu l)^2}, \quad (11.12)$$

де  $l$  - фактична довжина стрижня,  $\nu l = l_{зв}$  - зведена довжина стрижня,  $\nu$  - коефіцієнт зведення довжини. Отже різні випадки обпирання та навантаження стрижня зводяться до основного випадку введенням у формулу для  $P_{кр}$  так званої зведеної довжини. Це поняття вперше було використано Ф.С.Ясинським. З формули Ейлера (11.12) випливає, що критичне навантаження залежить від найменшої жорсткості  $EI_{\min}$ , довжини стрижня  $l$  та коефіцієнта  $\nu$ .

Так, якщо коефіцієнт пружності опори  $c$  змінюється від 0 до  $\infty$ , то це можна врахувати коефіцієнтом зведення  $\nu$ , який при цьому відповідно змінюється від 2 до 0,7 (див. рис.11.5).

Треба підкреслити, що виведення формули (11.12) ґрунтується на застосуванні диференціального рівняння рівної пружної лінії. Тому використовувати цю формулу можна лише тоді, коли справедливий закон Гука, тобто доки критичне напруження (напруження стискання, що відповідає критичній силі) не перевищує границі пропорційності:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \leq \sigma_{нц}, \text{ де } F - \text{ площа перерізу стрижня.}$$

**ПРИКЛАД:** визначити  $P_{кр}$  для круглого стрижня діаметром  $d=0,05$  м, довжиною  $l=2$  м (рис. 11.4). Матеріал стрижня Ст3, модуль пружності  $E=2,1 \cdot 10^5$  МПа, границя пропорційності  $\sigma_{нц} = 200$  МПа, коефіцієнт пружності опори  $c=7000$  Н/м.

Розв'язок:

$$\text{Момент інерції } I_{\min} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 5^4 \cdot 10^{-8}}{64} = 30,66 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4. \text{ Запишемо}$$

рівняння (11.10) у вигляді  $tgkl = kl \left(1 - \frac{(kl)^2 EI_{\min}}{cl^3}\right)$ . Покладемо  $kl = y$  і,

підставивши чисельні значення відомих величин, отримаємо трансцендентне рівняння

$tgy = y(1 - 1,15y^2)$ , яке не має аналітичного розв'язку. Серед нескінченної кількості його коренів нас цікавить найменший ненульовий. З геометричної точки зору це є абсциса точки  $M$  перетину гілки функції  $f(y) = tgy$  (рис. 11.6, крива 1),  $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  з дугою кубічної параболи  $f(y) = y(1 - 1,15y^2)$  (рис. 11.6, крива 2).

Введемо функцію  $\varphi(y) = tgy - y(1 - 1,15y^2)$ .

При  $y = y_1 = 1,780$  маємо  $\varphi(y_1) = -4,710 + 4,706 = -0,004$ ,

при  $y = y_2 = 1,781$  маємо  $\varphi(y_2) = -4,687 + 4,716 = 0,028$ .

Остаточно приймаємо  $y = kl = 1,78 = \frac{\pi}{1,76}$ , що дає можливість

визначити критичну силу  $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(1,76l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 64,39 \cdot 10^3}{(1,76 \cdot 2)^2} = 51,24$  кН.

Відповідно до неї критичне напруження становить  $\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{4 \cdot 51,24 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,05^2} = 26,1$  МПа  $< \sigma_{ну} = 200$  МПа.

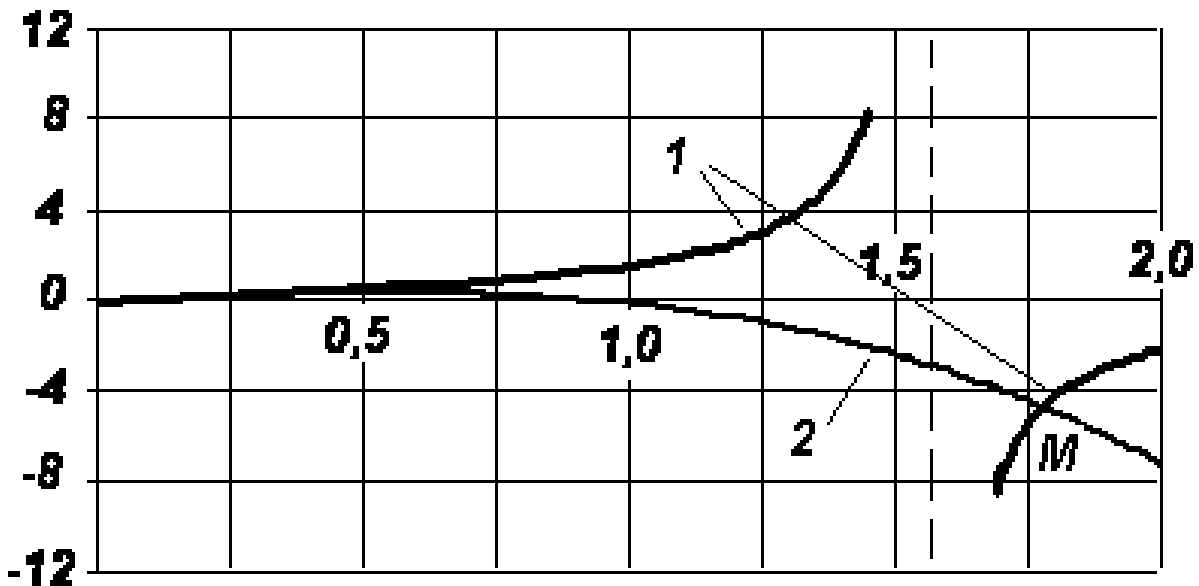


Рис.11.6.

Отже, критичне напруження менше границі пропорційності, а це в свою чергу означає правильність розрахунку критичної сили.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В чим полягає суть явища подовжнього вигину?
2. Які види рівноваги називаються СТІЙКИМ, НЕСТІЙКИМ, БАЙДУЖИМ?
3. Яке навантаження називається критичним?
4. Що називається запасом стійкості?
5. Як в загальному вигляді записується формула Ейлера?
6. Що називається коефіцієнтом приведення довжини і чому він дорівнює для чотирьох випадків закріплення кінців стрижня?
7. Чи можливі проміжні випадки?
8. Який момент інерції перетину підставляється у формулу Ейлера? Чому?
9. В якому випадку вірогідність витріщення стрижня на всіх напрямках однакова?
10. Що називається гнучкістю стрижня? Яка її формула?
11. Для яких випадків застосовується формула Ейлера?
12. Як записується формула для визначення критичних напружень при втраті стійкості за межею пружності?
13. Що визначає собою коефіцієнт при визначенні напруженні стискання, що допускається?
14. Від чого залежить коефіцієнт?

## ЗМІСТ

стор.

Вступ.....	2
Лекція №1. Вступ. Задачі і методи опору матеріалів.....	3
Лекція №2. Центральне розтягання та стискання прямолінійного стержня.....	11
Лекція №3. Статично невизначені системи (снс) при розтяганні-стисканні.....	22
Лекція №4. Експериментальне вивчення механічних властивостей матеріалів..	9
Лекція №5. Геометричні характеристики плоских перерізів.....	39
Лекція №6. Згинання прямолінійних стержнів.....	49
Лекція №7. Напруження при поперечному згинанні.....	59
Лекція №8. Переміщення при прямому згинанні. Розрахунки на жорсткість при згинанні.....	73
Лекція №9. Зсув (зріз).....	84
Лекція №10. Розрахунки на міцність і жорсткість при крученні.....	91
Лекція № 11. Стійкість стиснутих стрижнів.....	103

Навчальне видання

**“Прикладна механіка”. Розділ “Опір матеріалів”. Конспект лекцій**

Укладачі: **Лавінський** Володимир Іванович  
**Вамболь** Сергій Олександрович  
**Халипа** Віктор Маркович  
**Міщенко** Ігор Вікторович

Відповідальний за випуск І.В. Міщенко

---

Підп. до друку 16.02.2006 р.  
Друк різнограф.  
Тираж 100 прим.

Формат 60x84 1/16  
Умовн.-друк. арк. 7,0  
Вид. № 38/06 зам. №

**Розмножувально-копіювальний сектор  
Академії цивільного захисту України  
61023, Харків, вул. Чернишевського, 94**