

**Кафедра прикладної механіки**  
**Університету цивільного захисту України**

# **ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА** **РІДИНИ І ГАЗУ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

**Харків 2007**

Друкується  
за рішенням кафедри  
прикладної механіки УЦЗУ.  
Протокол від 19.03.2007 р.  
№ 29.

**Укладачі:** В.М.Халипа, С.О.Вамболь, І.В.Міщенко

**Рецензенти:** О.В.Бетін - головний науковий співробітник науково-дослідного інституту проблем фізичного моделювання Національного аерокосмічного університету «ХАІ», лауреат Державної премії, доктор технічних наук, професор;

К.В.Аврамов - професор кафедри газогідромеханіки та тепломасообміну Національного технічного університету «ХПІ», доктор технічних наук.

**Технічна механіка рідини і газу.** Конспект лекцій /Уклад. В.М.Халипа, С.О.Вамболь, І.В.Міщенко.- Х.: УЦЗУ, 2007.-164 с.

Викладено питання технічної механіки рідини і газу. Наведено теоретичний матеріал і приклади вирішення задач, які мають практичне значення. В конспекті лекцій розглянуто такі розділи курсу: основи гідростатики, газостатики, гідромеханіки, розрахунок трубопровідних систем, спорожнення простих і складених резервуарів, методи розрахунку параметрів гідравлічних пожежних струменів.

Конспект складається з 12 лекцій, додатку та питань для самоконтролю.

Для курсантів, студентів і слухачів відповідно до програми вищої освіти у напрямках «Пожежна безпека», «Цивільний захист», «Охорона праці». Може бути корисним під час аудиторних занять та для самостійної роботи.

Відповідальний за випуск І.В.Міщенко

© Університет цивільного захисту України, 2007

## ПЕРЕДМОВА

Конспект лекцій з технічної механіки рідини і газу складений відповідно до навчальних програм для підготовки фахівців за спеціальністю «Пожежна безпека» Університету цивільного захисту України. Його мета – надати допомогу курсантам, студентам і особливо слухачам заочної форми навчання при оволодінні теоретичними положеннями курсу та розв'язанні типових прикладних задач. Окремі розділи лекційного курсу можна використовувати також при вивченні деяких спеціальних дисциплін пожежно-технічного профілю: «Спеціальне водопостачання», «Пожежна та аварійно-рятувальна техніка», «Пожежна профілактика в населених пунктах», «Пожежна тактика».

Конспект складається з «Вступу» з коротким історичним оглядом розвитку гідромеханіки як науки, 12 лекцій з викладенням усіх тем і питань, які передбачені навчальною програмою та тематичним планом дисципліни, та «Додатку». Назва кожної лекції, як правило, містить тему та розгорнутий перелік питань, що вивчаються в неї. Теоретичне викладення супроводжується розгляданням та розв'язанням 51 типової задачі, більшість з яких мають безпосереднє практичне застосування. Під час вирішення цих задач використовуються також знання, набуті при вивченні близьких до даної дисципліни курсів «Фізика», «Теоретична механіка» і, безумовно, методи математичного аналізу з курсу «Вища математика». В кінці «Конспекту лекцій» наведено перелік теоретичних питань для самоконтролю в процесі вивчення матеріалу дисципліни «Технічна механіка рідини і газу».

Автори усвідомлюють, що запропоноване видання не позбавлено окремих недоліків як технічного, так і методичного плану, тому вони будуть заздалегідь вдячними за будь-які пропозиції і зауваження, що спрямовані на поліпшення цього конспекту.

Укладачі висловлюють щире подяку рецензентам головному науковому співробітнику науково-дослідного інституту проблем фізичного моделювання Національного аерокосмічного університету «ХАІ», лауреату Державної премії, професору, доктору технічних наук О.В.Бетіну і професору кафедри газогідромеханіки та тепломасообміну Національного технічного університету «ХПІ», доктору технічних наук К.В.Аврамову.

## ВСТУП

Короткий історичний огляд гідромеханіки.

Гідравлікою (від грец. *hydōr* - вода і *aulos* - трубка), називається прикладна наука, що займається вивченням законів спокою і руху рідких тіл і що розглядає додатки цих законів до рішення конкретних технічних задач. Практичне значення гідравліки дуже велике, оскільки вона є основою для інженерних розрахунків в багатьох областях техніки і є базою для ряду спеціальних дисциплін: гідротехніки, гідравлічних машин (насоси і турбіни), водопостачання і каналізації, осушення і зрошування, водного транспорту, нафтової справи і т.д.

Гідравліка - одна з найстародавніших наук в світі. Ще у глибокій старовині, задовго до нашої ери, з перших кроків свого історичного розвитку, людина була вимушена практично займатися рішенням різних гідравлічних питань. Про це говорять результати археологічних досліджень і спостережень, які показують, що ще за 5000 років до нашої ери в Китаї, а потім і в деяких інших країнах стародавнього світу вже існували зрошувальні канали і були відомі деякі прості пристрої для підйому води. У багатьох місцях збереглися також залишки водонапірних і гідротехнічних споруд (водоводи, дамби, акведуки), що свідчать про досить високий рівень будівельного мистецтва в стародавньому світі.

Перші вказівки про науковий підхід до рішення гідравлічних питань відносяться до 250 року до нашої ери, коли Архімедом був відкритий закон про рівновагу тіла, зануреного в рідину. Надалі, проте, впродовж подальших більш ніж півтора тисячоліть гідравліка не одержала скільки-небудь помітного розвитку. У цю епоху, що характеризувалася загальним застоєм в науці і культурі, були не тільки загублені перші елементи знання, але і в значній мірі забуті практичні навички інженерного мистецтва. І лише в XVI-XVII століттях, в епоху Відродження, коли з'явилися роботи Стевіна, Леонардо да Вінчі, Галілея, Паскаля, Ньютона, що дослідили, зокрема, низку важливих гідравлічних явищ, була покладена серйозна підстава подальшому розвитку гідравліки як науки. Крім гідравліки, вивченням спокою і руху рідин займається також і інша наука - теоретична гідромеханіка, що розвинулася як самостійний розділ теоретичної механіки.

В XVII-XVIII століттях працями ряду найбільших учених - математиків і механіків (Ейлер, Бернуллі, Лагранж) були встановлені основні закони і одержані початкові рівняння гідромеханіки. Ці дослідження носили в основному теоретичний характер, включаючи ряд допущень відносно фізичних властивостей рідини, давали більше якісну, а не кількісну оцінку явищ, значно розходившись іноді з даними досвіду, який до недавнього часу не грав в гідромеханіці значної ролі. Природно тому, що гідромеханіка не могла задовольнити численним запитам практики, особливо сильно збільшеним в XIX столітті у зв'язку з бурхливим зростанням техніки, що вимагала негайного, конкретного рішення різних чисто інженерних завдань. Це і з'явилося причиною розвитку особливої прикладної науки, створеної в XVIII-XIX століттях працями Шезі, Дарсі, Буссинеска, Вейсбаха, М.Є.Жуковського і багатьох інших учених і інженерів, яку прийнято в даний час називати гідравлікою у власному сенсі цього слова. На відміну від гідромеханіки гідравліка будує свої висновки на основі розгляду спрощених схем гідравлічних явищ, вводячи в той же час в теоретичні рівняння емпіричні коефіцієнти, що одержуються в результаті обробки даних досвіду, що має в гідравліці вельми велике значення. Так, наприклад, при дослідженні руху потоку рідини гідравліка звичайно задовольняється визначенням середніх швидкостей руху і середнього тиску в потоці, тоді як гідромеханіка в більшості випадків розглядає зміну цих величин в потоці при переході від однієї крапки до іншої.

Протягом довгого часу розвиток гідравліки і гідромеханіки йшов відособленими шляхами. Проте якщо спочатку методи дослідження, вживані в гідравліці і гідромеханіці, сильно відрізнялися один від одного, то з часом ця різниця поступово стиралася. Зближення між цими двома напрямками в науці, що намітилося на початку XX століття і пов'язане з ім'ям видатного вченого Л.Прандтля, значною мірою усунуло істотні недоліки, властиві як гідравліці минулого, що була суто емпіричною наукою - наукою досвідчених формул і коефіцієнтів, так і класичній гідромеханіці, що мала переважно теоретичний характер. Сучасна гідравліка - це комплекс знань, об'єднуючий теорію і досвід, наука, в якій досвід узагальнюється теорією, а теорія виправляється і доповнюється досвідом, що одержав в даний час широке застосування і в гідромеханіці. Гідравліка широко використовує мето-

ди і результати гідромеханіки і, очевидно, з часом відмінність в поняттях «гідромеханіка» і «гідравліка» зникне і збереже хіба лише історичний інтерес.

Велику роль в розвитку гідравліки і гідромеханіки зіграли наші вітчизняні учені. Основоположники гідромеханіки Даниїл Бернуллі і Леонард Ейлер жили і працювали в Росії і були членами Петербурзької Академії наук. Широко відомі роботи Н.П.Петрова, який створив гідродинамічну теорію мастила, М.Є.Жуковського, що провів низку важливих досліджень в різних областях гідромеханіки, В.Г.Шухова, що розробив методи розрахунку нафтопроводів.

Працями А.Н.Крилова створена сучасна теорія корабля; важливе практичне значення мають дослідження Н.Н.Павловського по теорії нерівномірного руху і фільтрації рідини, Л.С.Лейбензона, що поклав початок підземній гідромеханіці, і інших радянських учених.

# ЛЕКЦІЯ № 1. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИН І ГАЗІВ. ОСНОВНІ СИСТЕМИ ТА ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ГУСТИНОЮ ГАЗУ ТА ТИСКОМ.

## I. ОСНОВНІ СИСТЕМИ ТА ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ.

Вибір одиниць, необхідних для вимірювань усіх фізичних величин, можна зробити двома шляхами. По-перше, можна скласти набір одиниць, установлюючи кожен одну одиницю незалежно від всіх інших. По-друге, можна утворити систему одиниць, установлюючи незалежно тільки одиниці невеликого числа величин — так звані основні одиниці, відносячи всі інші до розряду похідних, розмір яких закономірно зв'язаний з розмірами основних одиниць. При сучасному рівні розвитку науки і техніки другий спосіб є єдино прийнятним. Історично в хронологічному порядку лише найбільш відомими системами були Система Гаусса, Система Британської Асоціації, Система МКГСС, Природна система одиниць Планка, Система МТС, Міжнародна система одиниць — ***Le Systeme International d'Unites***, скорочено ***SI***.

Введемо поняття фізичної величини та одиниці фізичної величини.

**Фізична величина** – властивість, загальна в якісному відношенні багатьом фізичним об'єктам (фізичним системам, їхнім станам і процесам, що відбувається в них), але в кількісному відношенні індивідуальна для кожного об'єкта.

**Одиниця фізичної величини** – фізична величина, якій по визначенню надано значення, що дорівнює одиниці.

На даний час ***SI*** містить у своїй основі сім основних (еталонних) одиниць і дві додаткові.

1. Фізична величина – довжина (***length***), позначення ***L***, одиниця фізичної величини – метр (***meter***), скорочені позначення м і ***m***.

2. Фізична величина – маса (***mass***), позначення ***M***, одиниця фізичної величини – кілограм (***kilogram***), скорочені позначення кг і ***kg***.

3. Фізична величина – час (***time***), позначення ***T***, одиниця фізичної величини – секунда (***second***), скорочені позначення с і ***s***.

4. Фізична величина – сила електричного струму (***electric current***), позначення  $I$ , одиниця фізичної величини – ампер (***ampere***), скорочені позначення А і  $A$ .

5. Фізична величина – термодинамічна температура (***temperature***), позначення  $\Theta$ , одиниця фізичної величини – кельвін (***kelvin***), скорочені позначення К і  $K$ .

6. Фізична величина – сила світла (***luminous intensity***), позначення  $J$ , одиниця фізичної величини – кандела (***candela***), скорочені позначення кд і  $cd$ .

7. Фізична величина – кількість речовини (***amount of substance***), позначення  $N$ , одиниця фізичної величини – моль (***mole***), скорочені позначення моль і  $mol$ .

Поряд із сьома основними одиницями  $SI$  прийнято ще користуватися двома додатковими одиницями, досить корисними для рішення фізичних задач, але приналежних скоріше до такої науки як геометрія, чим фізика. Мова йде про радіан і стерадіан.

Фізична величина – плоский кут (***plane angle***), позначення  $\Omega$ , одиниця фізичної величини – радіан (***radian***), скорочені позначення рад і  $rad$ .

Фізична величина – тілесний кут (***solid angle***), позначення  $\Omega$ , одиниця фізичної величини – стерадіан (***steradian***), скорочені позначення ср і  $sr$ .

Похідні одиниці  $SI$  утворюються на підставі законів, що встановлюють зв'язок між фізичними величинами, або на підставі прийнятих визначень відповідних величин. У загальному випадку для кожної фізичної величини її розмірність може бути записана з використанням величин, одиниці яких попередньо встановлені, тобто використовуючи довжину ( $L$ ), масу ( $M$ ), час ( $T$ ), температуру ( $\Theta$ ), силу електричного струму ( $I$ ), силу світла ( $J$ ), кількість речовини ( $N$ ). Вираз, що відображає залежність даної похідної величини від основних величин, у якому коефіцієнт пропорційності прийнятий рівним одиниці, називається **розмірністю** фізичної величини. Вона є собою добутком основних величин, зведених у відповідні ступені, що показують, у скільки разів збільшується або зменшується значення похідної величини при зміні значень основних величин. Для розмірності величин уведено позначення ***dim*** (скорочено від англ. ***dimension*** – розмірність, розмір). Таким чином, формула розмірності похідної одиниці має вигляд



$$[z] = \dim z = L^\alpha M^\beta T^\gamma \Theta^\varepsilon I^\eta J^\lambda N^\zeta,$$

де  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta, \lambda, \zeta$  – показники ступеня, що називаються розмірностями похідних величин щодо відповідних основних одиниць. Якщо фізична величина не залежить від жодної з основних величин, то вона називається безрозмірною величиною. Для того, щоб одержати формулу розмірності якої-небудь похідної одиниці, треба у визначальне рівняння підставити розмірності всіх одиниць фізичних величин, що входять у нього, і зробити необхідні математичні операції.

Кратні та часткові одиниці вимірювань утворюються від вихідної одиниці множенням або діленням на ступінь числа 10. В Додатку 1 наведені найменування приставок для кратних та часткових одиниць вимірювань.

## II. ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИН І ГАЗІВ.

**Технічною механікою рідини і газу** (ТМРГ) називається дисципліна, що вивчає закони рівноваги та руху рідин і газів, та розробляє методи застосування цих законів при вирішенні прикладних задач.

**Рідиною** називають фізичне тіло, якому властиве плинність, внаслідок чого рідина не має власної форми і приймає форму того резервуара, який вона заповнює.

Рідини поділяються на два види: **краплинні** та **газоподібні**. Перші є рідинами в звичайному, загальноприйнятому розумінні цього слова. до них відносять різні рідини, що зустрічаються в природі та застосовуються в техніці: вода, нафта, керосин тощо. Краплинні рідини характеризуються великим опором стиску (майже повністю нестисливі) і малим опором дотичним і розтягуючим зусиллям. У посудині вони утворюють вільну поверхню. Газоподібні на відміну від краплинних майже не мають опору стиску, не утворюють граничну вільну поверхню, а заповнюють увесь вільний об'єм.

Рідини, що зустрічаються в природі та застосовуються в техніці, їхній стан і поведінка при різних гідравлічних явищах знаходяться в безпосередній залежності від таких фізичних властивостей рідин, як густина, питома вага, в'язкість тощо. Тому, передусім, необхідно визначити ці фізичні властивості, виявити фактори, що впливають на них, встановити їхні одиниці вимірю-

вання (в Додатку 2 наведені розмірності та одиниці вимірювання основних фізичних величин, які використовуються в технічній механіці рідини і газу).

**Густина** рідини, або питома маса,  $\rho$  - це маса одиниці об'єму, визначається за формулою

$$\rho = \frac{m}{W}, \text{ [кг/м}^3\text{]}, \quad (1.1)$$

де  $m$  - маса, в системі  $SI$  має розмірність «кілограм» [кг],  $W$  - об'єм, в системі  $SI$  має розмірність «кубічний метр» [м<sup>3</sup>]. В Додатку 3 наведені густини деяких рідин  $\rho$  при 20°С.

**Питома вага** рідини  $\gamma$  - це вага її одиниці об'єму, визначається за формулою

$$\gamma = \frac{G}{W}, \text{ [Н/м}^3\text{]}, \quad (1.2)$$

де  $G$  - вага, в системі  $SI$  має розмірність «ньютон» [Н], тобто має розмірність сили.

**Стисливість** – це властивість рідин і газів змінювати свій об'єм при зміні тиску. Вона характеризується **коефіцієнтом стисливості (коефіцієнтом об'ємного стиснення)**

$$\beta_w = -\frac{\Delta W}{\Delta P \cdot W}, \text{ [1/Па]}, \quad (1.3)$$

де  $W$  - початковий об'єм рідини,  $\Delta W$  - зміна об'єму  $W$  при збільшенні тиску на величину  $\Delta P$ , в системі  $SI$ , як і тиск  $P$  має розмірність «паскаль» [Па]. Знак «-» показує, що збільшення тиску супроводжується зменшенням об'єму та навпаки. Коефіцієнт стисливості краплинних рідин мало змінюється при зміні температури та тиску. В середньому, для води його можна прийняти  $\beta_w = 5,097 \cdot 10^{-10}$  1/Па. Таким чином, при підвищенні тиску на 1 ат об'єм води зменшується на 1/20000 частину початкової величини. Коефіцієнт об'ємного стиснення для інших краплинних рідин приблизно того ж порядку, тому стисливістю води можна нехтувати, вважаючи її густину такою, що не залежить від тиску.

**Модуль об'ємної пружності** є величиною, зворотною до коефіцієнта стисливості, тому

$$E = \frac{1}{\beta_w}, [\text{Па}]. \quad (1.4)$$

Температурне розширення рідини при зміні температури характеризується **коефіцієнтом температурного розширення**

$$\beta_t = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot W}, [1/K], \quad (1.5)$$

де  $\Delta t$  - зміна температури, яка, як і температура, має розмірність  $^{\circ}\text{C}$  - градус за Цельсієм (хоча в системі *SI* температура має розмірність  $K$  -Кельвін). Вказаний коефіцієнт для нестисливих рідин дуже малий (наприклад, для води при температурі від  $0^{\circ}\text{C}$  до  $10^{\circ}\text{C}$  і тиску 1 ат  $\beta_t = 0,00015$ ).

**В'язкістю** називається властивість рідини чинити опір відносному руху (зсуву) її частинок. В'язкість має місце тільки при русі реальної рідини. Всі реальні рідини мають певну в'язкість, яка проявляється у вигляді внутрішнього тертя при відносному переміщенні суміжних частинок рідини. Поряд з легко рухомими рідинами (наприклад, водою) існують дуже в'язкі рідини, опір яких зсуву досить значний (гліцерин, важкі мастила тощо). Таким чином, в'язкість характеризує ступінь текучості її частинок. На Рисунку 1.1 показано дослід І.Ньютона по визначенню динамічної в'язкості  $\mu$ , під час проведення якого І.Ньютон встановив, що сила тертя  $\tau$ , котра припадає на деяку площу контакту елементів рідини  $S$ , прямо пропорційна зміні швидкості рідини  $\Delta V$  в напрямі, перпендикулярному до руху, і зворотно пропорційна відносному зсуву  $\Delta Y$

$$\tau = \mu \cdot \frac{\Delta V}{\Delta Y} \cdot S, [\text{Н}], \quad (1.6)$$

де  $\mu$  в системі *SI* має розмірність «ньютон-секунда на квадратний метр» або «паскаль-секунда», а скорочені позначення

$\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$ , або  $\text{Па}\cdot\text{с}$ . Слід зауважити, що для динамічної в'язкості використовують також позначення  $\eta$ . Одиницею для вимірювання динамічної в'язкості в системі СГС є «пуаз», скорочене позначення П:  $1 \text{ П} = 0,1 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2 = 0,1 \text{ Па}\cdot\text{с}$ . Також застосовувався «сантипуаз», скорочене позначення сП:  $1 \text{ сП} = 1 \text{ мН}\cdot\text{с}/\text{м}^2 = 1 \text{ мПа}\cdot\text{с}$ . В

формулі (1.6) співвідношення  $\frac{\Delta V}{\Delta Y}$  називається градієнтом швидкості. У випадку, коли воно не є постійним, його слід замінити

на похідну  $\frac{dV}{dY}$ .

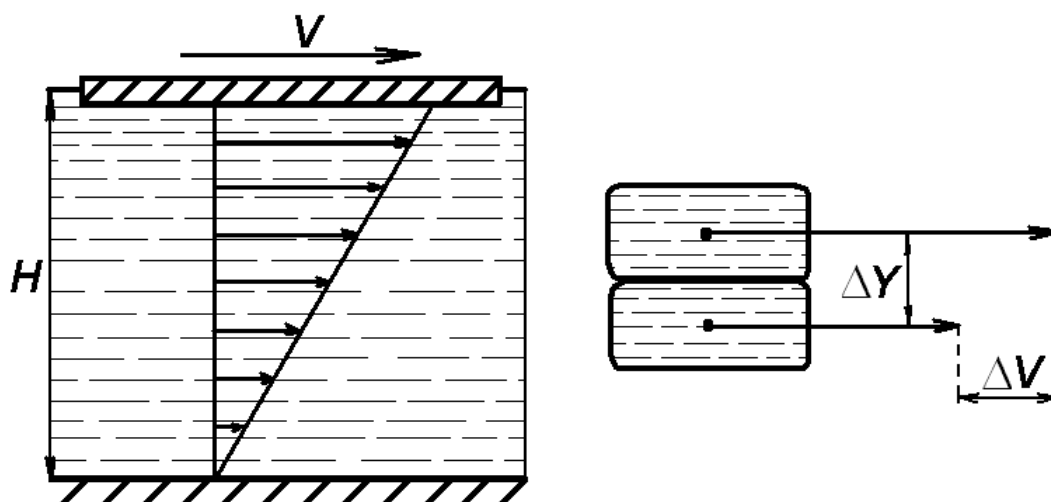


Рисунок 1.1

У гідромеханіці поряд з динамічною в'язкістю під час розрахунків використовується так звана кінематична в'язкість

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, [\text{м}^2/\text{с}]. \quad (1.7)$$

Походження назви кінематичної в'язкості пояснюється тим, що в розмірності цієї величини відсутня одиниця сили. Одиницею для вимірювання кінематичної в'язкості в системі СГС є «квадратний сантиметр на секунду» (або «стокс»), скорочені позначення  $\text{см}^2/\text{с}$  (або Ст):  $1 \text{ Ст} = 1 \text{ см}^2/\text{с} = 0,0001 \text{ м}^2/\text{с}$ . Частіше

застосовується в 100 разів менша одиниця - сантістокс (сСт):  
 $1 \text{ сСт} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

В'язкість рідин сильно залежить від температури, причому, в'язкість рідин при підвищенні температури зменшується, а в'язкість газів зростає. Для чистої прісної води залежність динамічного коефіцієнту в'язкості відображає формула Пуазейля

$$\mu = \frac{0,0179}{1 + 0,0368t + 0,000221t^2}$$

де розмірність  $\mu$  є «пуаз»,  $t$  - температура в  $^{\circ}\text{C}$ . Кінематичний коефіцієнт в'язкості рідин при тиску до 200 ат мало залежить від тиску. Тому при звичайних гідравлічних розрахунках ця залежність не враховується.

Таблиця 1.1.

Одиниця тиску	Па	бар	атм	ат	psi	м вод. ст.	мм рт. ст.
Па	1	$10^{-5}$	$9,869 \cdot 10^{-6}$	$1,0197 \cdot 10^{-5}$	$1,45038 \cdot 10^{-4}$	$1,0197 \cdot 10^{-4}$	$7,50062 \cdot 10^{-3}$
бар	$10^5$	1	0,9869	1,0197	14,5038	10,1972	750,062
атм	101325	1,0133	1	1,0333	14,6959	10,3323	760
ат	98066,5	0,9807	0,9678	1	14,2233	10,0	735,559
psi	6894,77	0,0689	0,06805	0,0703	1	0,7031	51,7152
м вод. ст.	9806,65	0,0981	0,09678	0,1	1,42233	1	73,5559
мм рт. ст.	133,323	$133,323 \cdot 10^{-5}$	$1,3158 \cdot 10^{-6}$	$1,3595 \cdot 10^{-3}$	0,01934	0,0136	1

Кінематичний коефіцієнт в'язкості газів залежить як від температури, так і від тиску. збільшуючись з підвищенням температури та зменшуючись з підвищенням тиску.

В Додатку 4 наведені значення динамічної в'язкості для деяких рідин і газів, а в Додатку 5 показана залежність густини та кінематичної в'язкості води від температури.

За одиницю тиску в системі *SI* прийнято рівномірно розподілений тиск, при якому на площу  $1 \text{ м}^2$  діє сила  $1 \text{ Н}$ , і ця оди-

ниця називається Паскаль:  $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$ . Водночас в техніці використовуються позасистемні величини для визначення тиску, співвідношення між деякими з них наведені в Таблиці 1.1. (**бар**, **атм** – атмосфера, **ат** – технічна атмосфера, **psi** – тиск на квадратний дюйм (від англ. фунт-сила на квадратний дюйм), **м вод. ст.** – метр водного стовпа, **мм рт. ст.** – міліметр ртутного стовпа).

У гідромеханіці та аеродинаміці малих швидкостей широко застосовується поняття ідеальної рідини – рідини, в'язкістю та стисливістю якої у розглядаємих задачах можна нехтувати.

### III. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ГУСТИНОЮ ГАЗУ ТА ТИСКОМ.

Густина рідини мало залежить від тиску. Наприклад, при збільшенні тиску на воду в 1000 ат її об'єм зменшиться тільки на 5%, тому в тих розрахунках, де величина тиску змінюється не більш ніж на десятки атмосфер, можна нехтувати зміною об'єму.

Натомість, густина газу істотно залежить від тиску. При постійній температурі густина (або питома маса) пропорційна тиску (закон Бойля-Маріотта)

$$\frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma} = \frac{P_{\Pi}}{P},$$

де  $P_{\Pi}$  - початковий тиск,  $\gamma_{\Pi}$  - питома вага, що відповідає тиску  $P_{\Pi}$ ,  $P$  - деякий тиск, що відрізняється від початкового,  $\gamma$  - питома вага, що відповідає цьому тиску. Відомо також, що при зміні температури тиск і питома маса так званих ідеальних газів задовольняє рівнянню Клапейрона, яке для технічних розрахунків має вигляд:

$$P \cdot W = m \cdot R_m \cdot T, \quad (1.8)$$

де  $P$  - тиск,  $W$  - об'єм,  $m$  - маса,  $R_m$  - питома газова стала, яка в системі *SI* має розмірність [Дж/(кг·К)],  $T$  - температура, яка в наведеній формулі має розмірність [К] (формула переводу граду-

сів за Цельсієм у градуси Кельвіна має лінійний характер  $K = ^\circ C + 273,15$ ). Нагадуємо, що ідеальний газ - це газ, силами взаємодії між молекулам якого у розглядаємих задачах можна нехтувати. Реальні гази близькі за своїми властивостями до ідеального газу, якщо вони достатньо сильно розріджені (наприклад, повітря при атмосферному тиску і звичайній температурі). Водень, гелій, кисень, азот також вважаються ідеальними газами при густині, яка відповідає нормальним умовам. В формі (1.8) рівняння, що встановлює зв'язок між тиском, об'ємом і температурою газів, вперше застосував російський вчений Менделєєв, тому остаточно рівняння стану газу має назву рівняння Менделєєва-Клапейрона. Питома газова стала  $R_m$  пов'язана з молярною газовою сталою  $R = 8,3144 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$  співвідношенням

$$R_m = \frac{R}{M},$$

де  $M$  - молярна маса певного газу.

Таблиця 1.2.

Речовина	Хімічна формула	Молярна маса $M$ , кг	Питома газова стала $R_m$ , Дж/(кг·К)
Повітря	Суміш газів	$\approx 0,029$	286,7
Водень	$H_2$	$\approx 0,002$	4157,2
Кисень	$O_2$	$\approx 0,032$	259,8
Азот	$N_2$	$\approx 0,028$	296,9
Гелій	$He$	$\approx 0,004$	2078,6
Метан	$CH_4$	$\approx 0,016$	519,6
Етан	$C_2H_6$	$\approx 0,030$	277,2
Етилен	$C_2H_4$	$\approx 0,028$	296,9

Для деяких газів в Таблиці 1.2 наведені величини  $M$  та відповідні  $R_m$  для певних газів.

## \*ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

**ЗАДАЧА № 1.** 8 літрів антифризу (густина  $\rho_A = 800 \text{ кг/м}^3$ ) змішали з 4 літрами води (густина  $\rho_B = 1000 \text{ кг/м}^3$ ). Визначити густину отриманої суміші  $\rho_C$ .

Розв'язання. Для суміші (масою  $m_C$  й об'ємом  $W_C$ ) двох рідин – антифризу та води, що розчиняються одна в одній, формула

$$(1.1) \text{ набуває вигляду } \rho_C = \frac{m_C}{W_C} = \frac{m_A + m_B}{W_A + W_B} = \frac{\rho_A \cdot W_A + \rho_B \cdot W_B}{W_A + W_B}.$$

Таким чином,  $\rho_C = \frac{800 \cdot 8 + 1000 \cdot 4}{8 + 4} = 866,7 \text{ кг/м}^3$ . Під час ви-

рішення цієї задачі необхідно зробити певні зауваження:

- розмірність об'єму можна залишати позасистемною (у літрах), це не впливає на відповідь: в остаточній формулі в чисельнику стоїть сума добутків густини на об'єм певної речовини, а у знаменнику – сума об'ємів речовин; тому розмірність відповіді визначається тільки розмірністю густини.
- отримана відповідь завжди знаходиться в межах між величинами густин рідин, які змішують; вона не може бути менше густини більш легкої рідини, і більше густини більш важкої рідини.

Відповідь. Густина суміші  $\rho_C = 866,7 \text{ кг/м}^3$ .

**ЗАДАЧА № 2.** Пожежний водопровід діаметром  $d = 300 \text{ мм}$  та довжиною  $l = 50 \text{ м}$  під час випробувань на міцність заповнюється водою при атмосферному тиску  $P_0 = 1 \text{ атм} \approx 101,3 \text{ кПа}$ . Який додатковий об'єм води необхідно закачати у водопровід для отримання в ньому надлишкового тиску  $P_1 = 5 \text{ МПа}$ . Модуль об'ємної



пружності води  $E_B \approx 2 \cdot 10^9$  Па. Деформацією водопроводу можна знехтувати.

Розв'язання. З формули (1.4) знаходимо  $\beta_w$  - коефіцієнт стисливості для води

$$\beta_w = \frac{1}{E_B} = \frac{1}{2 \cdot 10^9} = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ 1/Па.}$$

Початковий об'єм води, який закачується у водопровід, складає

$$W = \frac{\pi d^2}{4} \cdot l = \frac{3,1415 \cdot 0,3^2 \cdot 50}{4} \approx 3,53 \text{ м}^3.$$

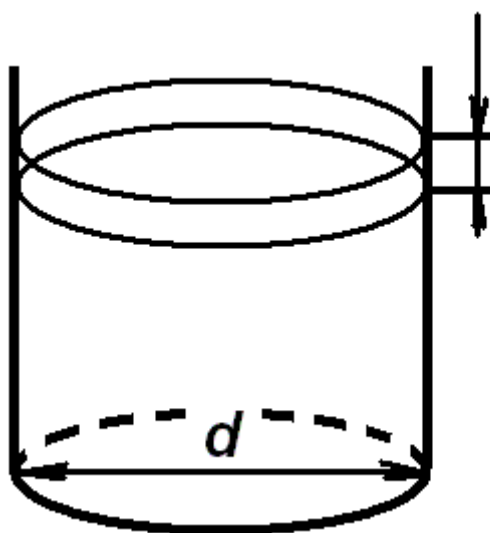
Використовуючи формулу (1.3), знаходимо залежність зміни об'єму  $\Delta W$  від зміни тиску  $\Delta P$  в рідині  $\Delta W = \beta_w \cdot \Delta P \cdot W$ . Оскільки за умов задачі

$$\Delta P = P_1, \text{ остаточно маємо } \Delta W = \beta_w \cdot P_1 \cdot W = 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 3,53 = 8,825 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 8,825 \text{ л.}$$

Як бачимо, під час вирішення задачі необхідно привести розмірності всіх величин відповідно до системи *SI*.

Відповідь. Додатковий об'єм води  $\Delta W = 8,825$  л.

**ЗАДАЧА № 3.** Визначити зміну рівня вільної поверхні 100 т нафти



густиною  $\rho = 850 \text{ кг/м}^3$  в циліндричному резервуарі діаметром  $d = 4$  м при підвищенні температури нафти від  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 30^\circ\text{C}$ . Об'ємний коефіцієнт температурного розширення нафти  $\beta_t = 0,72 \cdot 10^{-3} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ , зміною об'єму резервуару при вирішенні можна знехтувати.

Розв'язання. Для вирішення задачі треба розглянути геометричну та фізичну складові цієї задачі. Позначимо через  $\Delta W$  зміну об'єму нафти (зі знаком «+» через підвищення температури), а через  $\Delta h$  - шукану зміну рівня вільної поверхні.

Тоді з точки зору геометрії  $\Delta W = \Delta h \cdot S = \Delta h \cdot \frac{\pi d^2}{4}$ , де  $S$  - площа перерізу резервуару. Водночас, з фізичної точки зору зміна об'єму нафти залежно від температури  $\Delta W = \beta_t \cdot (t_2 - t_1) \cdot W$ , де  $W = \frac{m}{\rho}$  - початковий об'єм нафти,  $m$  - маса нафти. З ураху-

ванням обох виразів для  $\Delta W$  остаточно отримаємо

$$\Delta h = \frac{\Delta W}{S} = \frac{\beta_t \cdot (t_2 - t_1) \cdot 4 \cdot m}{\pi d^2 \cdot \rho} = \frac{0,72 \cdot 10^{-3} \cdot (30 - 0) \cdot 4 \cdot 100 \cdot 10^3}{3,1415 \cdot 4^2 \cdot 850} \approx$$

0,2 м.

Відповідь. Зміна рівня вільної поверхні  $\Delta h \approx 0,2$  м.

**ЗАДАЧА № 4.** Густина нафти  $\rho = 850$  кг/м<sup>3</sup>, кінематична в'язкість нафти  $\nu = 0,614 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с, визначити динамічну в'язкість  $\mu$ .

Розв'язання. З формули (1.7) безпосередньо отримуємо  $\mu = \nu \cdot \rho = 0,614 \cdot 10^{-4} \cdot 850 = 5,22$  Па·с.

Відповідь. Динамічна в'язкість  $\mu = 5,22$  Па·с.

**ЗАДАЧА № 5.** Обчислити мінімальний об'єм балона  $W$  для зберігання кисню масою  $m = 6,4$  кг при температурі  $t = 20^\circ\text{C}$ , якщо балон здатний витримати тиск  $P = 15,7$  МПа.

Розв'язання. З рівняння (1.8) отримуємо  $W = \frac{m \cdot R_m \cdot T}{P}$ , де

$T = t + 273,15 = 293,15$  К,  $R_m$  для кисню дорівнює 259,8

Дж/(кг·К) (див. Таблицю 1.2). Тому  $W = \frac{6,4 \cdot 259,8 \cdot 293,15}{15,7 \cdot 10^6} =$

$3104610^{-6}$  м<sup>3</sup>  $\approx 31,05$  л.

Відповідь. Мінімальний об'єм балона  $W \approx 31,05$  л.

## ЛЕКЦІЯ № 2. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ГІДРОСТАТИКИ. ТИСК РІДИНИ НА ПЛОСКІ ПОВЕРХНІ, ЕПЮРИ ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ.

**Гідростатика** – розділ гідромеханіки, що вивчає закони рівноваги рідини, яка перебуває в стані спокою.

Рідина, що знаходиться в стані спокою, зазнає дії зовнішніх сил двох категорій – масових і поверхневих. Прикладом масових сил є вага та сила інерції. До поверхневих відносяться сили, що діють на поверхні виділеного об'єму рідини (тиск поршня, атмосферний тиск на вільну поверхню рідини).

Гідростатичний тиск у точці – це границя відношення сили тиску  $F$ , що діє на елементарну площину  $\Omega$  при зменшенні цієї площини до нуля

$$P = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{F}{\Omega}. \quad (2.1)$$

Як вже було зазначено, в системі  $SI$  одиницею тиску є «паскаль», скорочено позначення  $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$ . Зв'язок з позасистемними величинами наведено у Лекції №1, Таблиця 1.1.

Гідростатичний тиск має три важливі властивості:

1. Гідростатичний тиск завжди діє по внутрішній нормалі до площини прикладення.
2. Гідростатичний тиск у будь-якій точці рідини діє однаково в усіх напрямках (закон Паскаля).
3. Гідростатичний тиск у точці залежить від її координат у просторі (від глибини занурення точки під рівень рідини).

### I. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ГІДРОСТАТИКИ.

Розглянемо основний випадок рівноваги рідини, коли на неї діє лише одна масова сила – вага, а на вільну поверхню – тиск  $P_0$  (див. Рисунок 2.1). Виділимо у деякій точці елементарну горизонтальну площину  $\Omega$  і побудуємо на ній вертикальний циліндричний об'єм довільної висоти  $h$ . Маса рідини в циліндрі  $m = \rho h \Omega$ . Сили, що діють на об'єм, дорівнюють відповідно: вага  $mg = \rho h \Omega g$ , сила тиску на верхню поверхню  $P_0 \Omega$ , на нижню –  $P \Omega$ .

Запишемо рівняння рівноваги сил, діючих на зазначений об'єм у вертикальному напрямі  $P\omega - P_0\omega - \rho gh\omega = 0$ , або

$$P = P_0 + \rho gh. \quad (2.2)$$

Отримане рівняння має назву **основного рівняння гідростатики**. Таким чином встановлено, що залежність абсолютного тиску  $P$  від глибини  $h$  занурення точки має лінійний характер.

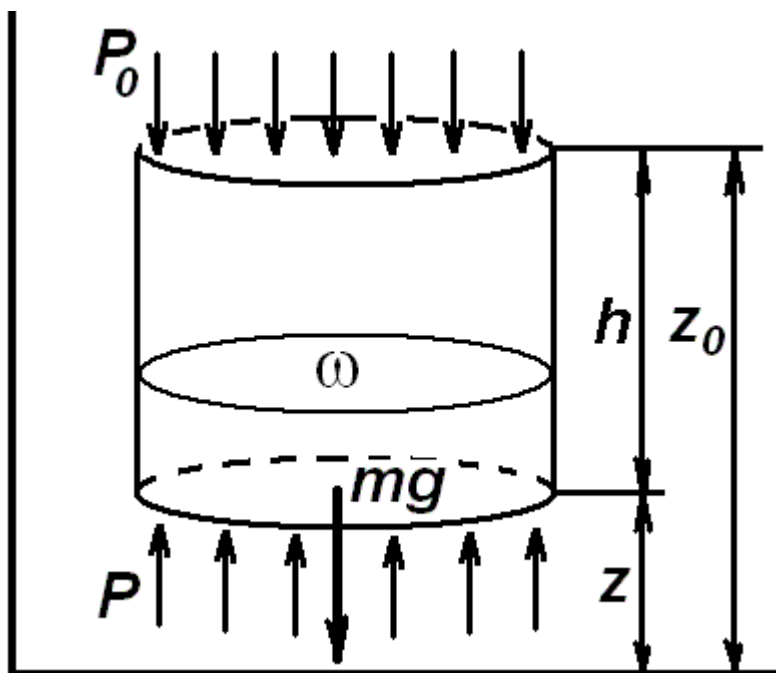


Рисунок 2.1.

Введемо довільну систему координат і замінимо  $h$  на  $z_0 - z$ , тоді рівняння (2.2) отримує вигляд

$$z + \frac{P}{\rho g} = z_0 + \frac{P_0}{\rho g}. \quad (2.3)$$

Оскільки точка, в якій була виділена елементарна горизонтальна площина, взята довільно, тому  $z + \frac{P}{\rho g} = const$  для всього нерухомого об'єму рідини. Ця сума називається **гідростатичним напором**, а координата  $z$  має назву **нівелірної висоти**.

## II. ТИСК РІДИНИ НА ПЛОСКІ ПОВЕРХНІ. ЕПЮРИ ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ.

Візьмемо плоску прямокутну стінку  $ABCD$  резервуара у вигляді куба або паралелепіпеда шириною  $b$ , нахилену до горизонту під кутом  $\alpha$ , висота стінки  $a$ . Поверхневий тиск враховувати не будемо. Епюри тиску графічно відображають закон гідростатичного тиску в рідині. На Рисунку 2.2. показано схему визначення сили тиску рідини на плоску стінку. Епюра тиску в нашому випадку має вигляд прямокутної трапеції  $ABEN$ .

Сила гідростатичного тиску  $F$  рідини спрямована перпендикулярно до стінки  $ABCD$ , а її величина дорівнює

$$F = b\omega,$$

де  $\omega$  - площа епюри гідростатичного тиску (площа прямокутної трапеції  $ABEN$  (Рисунок 2.2).

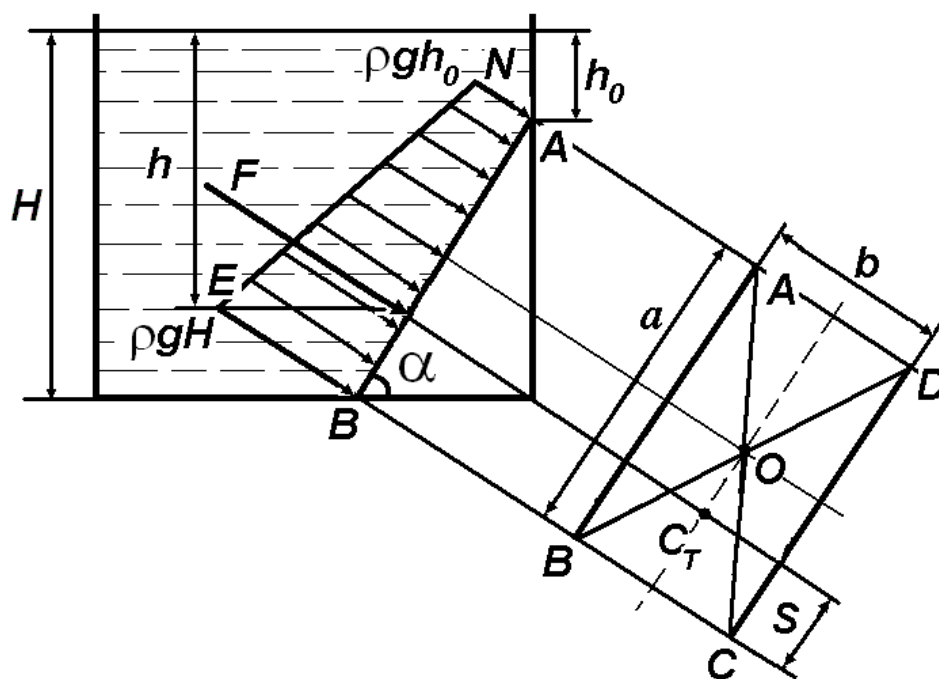


Рисунок 2.2.

З урахуванням  $h_0 = H - a \sin \alpha$  отримуємо остаточну формулу для визначення сили гідростатичного тиску

$$F = b \cdot \frac{1}{2} (\rho g H + \rho g h_0) \cdot a = \frac{\rho g b a}{2} (2H - a \sin \alpha) = \rho g b a \left( H - \frac{a}{2} \sin \alpha \right) \quad (2.4)$$

Точку дії сили тиску  $F$  називають **центром тиску**. Слід зауважити, що сила  $F$ , як рівнодійна елементарних паралельних сил, має проходити через центр ваги епюри тиску – точку  $C_T$ . Її положення визначається за формулою

$$S = \frac{2h_o + H}{3(h_o + H)} a. \quad (2.5)$$

Для вертикально розташованої прямокутної стінки треба покласти  $\alpha = 90^\circ$ . Якщо потрібно врахувати поверхневий (надлишковий тиск)  $P_o$  формула (2.4) набуває вигляду

$$F = b \cdot \frac{1}{2} (P_o + \rho g H + P_o + \rho g h_o) \cdot a = b \left[ P_o + \rho g \left( H - \frac{a}{2} \sin \alpha \right) \right]. \quad (2.6)$$

При вирішенні практичних задач зручніше застосовувати наступну формулу для сили тиску на плоску поверхню

$$F = (P_o + \rho g H_o) \cdot \omega_{\Pi}, \quad (2.7)$$

де  $H_o$  - глибина занурення центру ваги змоченої частини площі плоскої поверхні,  $\omega_{\Pi}$  - площа плоскої поверхні. Положення точки центра ваги плоскої фігури відносно прийнятої системи координат і моментів інерції відносно осей, які проходять через точку центра ваги паралельно координатним осям (головні моменти інерції  $I_{Ox}, I_{Oy}$ ) розглядається окремо в курсах «Вища математика» і «Теоретична механіка». Ці величини для яких плоских фігур наведені в Додатку 7, які як довідкові дані можна використовувати під час вирішення задач даного розділу.

З огляду на другу властивість гідростатичного тиску можна сформулювати закон Паскаля: тиск, який прикладений до вільної поверхні рідини, передається в усі точки рідини без зміни. На законі Паскаля заснована побудова найпростіших гідравлічних машин – пресів, домкратів, підйомників тощо.

### III. ГІДРАВЛІЧНИЙ ПРЕС І ЙОГО СХЕМА

Гідравлічний прес (Рисунок 2.3) складається з двох сполучених між собою силових циліндрів різного діаметра – меншого  $d_1$  і більшого  $d_2$ . Якщо на поршень площею  $\omega_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$  малого циліндра діє сила  $F_1$ , то сила тиску  $F_2$  на інший поршень площею  $\omega_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$  визначають з умови рівності тиску  $P$  в пресі:

$$P = \frac{F_1}{\omega_1} = \frac{F_2}{\omega_2},$$

звідки  $F_2 = P \cdot \omega_2$ . Співвідношення  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = n$  визначається як передавальне число преса.

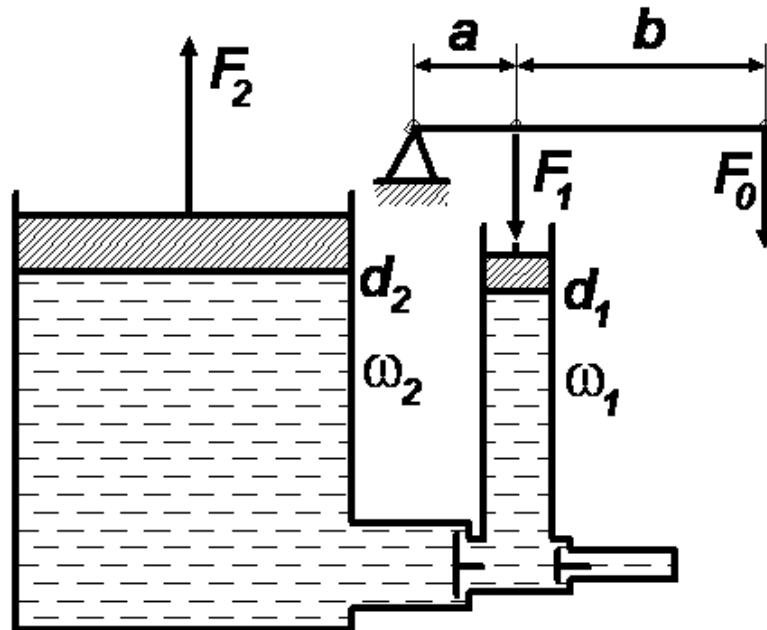


Рисунок 2.3.

Внаслідок тертя в поршнях і важелі сила  $F_2$ , що передається піднімальному механізму, менша за  $F_1$ . Це зменшення враховується коефіцієнтом корисної дії  $\eta$

$$F_2 = \eta P \omega_2 = \eta F_1 \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2. \quad (2.8)$$

#### IV. РОЗПОДІЛ АТМОСФЕРНОГО ТИСКУ

Тиск у газі в стані рівноваги буде збільшуватися до низу завдяки тяжінню вище розташованих шарів. Очевидно, що тиск буде однаковим у довільній горизонтальній площині. При визначенні закону розподілу тиску вздовж вертикалі необхідно враховувати зміну питомої маси (або питомої ваги) залежно від тиску.

Запишемо умову рівноваги для циліндра з площею перерізу  $1 \text{ м}^2$  (Рисунок 2.4) і дуже малої висоти  $dh$  у такому вигляді:  $P + dP + \gamma dh - P = 0$ , або

$$dP = -\gamma dh, \quad (2.9)$$

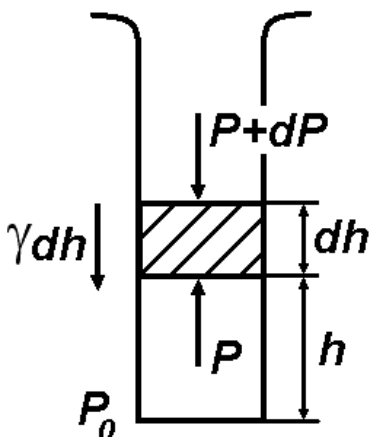
де  $dP$  - різниця тисків на верхній і нижній основі циліндра,  $\gamma$  - питома вага газу.

Будемо вважати, що газ має постійну температуру, тоді питома вага  $\gamma$  і тиск  $P$  зв'язані законом Бойля-Маріотта

$$P = \gamma \frac{P_0}{\gamma_0}. \quad (2.10)$$

Підставляємо (2.10) в (2.9)

$$dP = -P \frac{\gamma_0}{P_0} dh \quad \text{або} \quad \frac{dP}{P} = -\frac{\gamma_0}{P_0} dh.$$



Інтегруємо цей вираз в границях від 0 до  $h$ :

$$\int_{P_0}^{P_h} \frac{dP}{P} = -\frac{\gamma_0}{P_0} \int_0^h dh, \quad \text{або} \quad \ln \frac{P_h}{P_0} = -\frac{\gamma_0}{P_0} h.$$

Перетворивши останній вираз, маємо



$$P_h = P_0 \exp\left(-\frac{\gamma_0}{P_0} h\right). \quad (2.11)$$

Це так звана барометрична формула, яка свідчить, що тиск зменшується з висотою за експоненціальним законом. Для повітря при температурі  $15^\circ\text{C}$  і при нормальному атмосферному тиску на рівні моря  $P_0 = 1,01325 \cdot 10^5$  Па питома вага повітря  $\gamma_0 = 12 \text{ Н/м}^3$ . Таким чином, з формули (2.9) можна, наприклад, обчислити висоту  $h$ , на якій тиск  $P_h = 0,5P_0$ . Скорочуючи обидві частини рівняння на  $P_0$ , маємо

$0,5 = \exp\left(-\frac{12 \cdot h}{1,01325 \cdot 10^5}\right) \approx \exp(-12 \cdot 10^{-5} \cdot h)$ . Беремо натуральний логарифм від обох частин рівняння  $-0,693 = -12 \cdot 10^{-5} \cdot h$ , звідки  $h = 5775$  м.

Слід нагадати, що формула (2.11) справедлива, якщо вважати температуру повітря постійною вздовж вертикалі. У дійсності це припущення не є справедливим. Приблизно до висоти 11 км температура зменшується лінійно, а далі залишається постійною на рівні  $-55^\circ\text{C}$ . Вимірювання, зроблені за допомогою реактивних снарядів, показали такі температурні зміни: від 25 км до 45 км температура збільшується до  $0^\circ\text{C}$ , з 55 км температура знову зменшується до  $-90^\circ\text{C}$  на висоті 80-95 км. Потім вона знову збільшується і досягає  $1000^\circ\text{C}$  на висоті 230 км.

#### \*ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

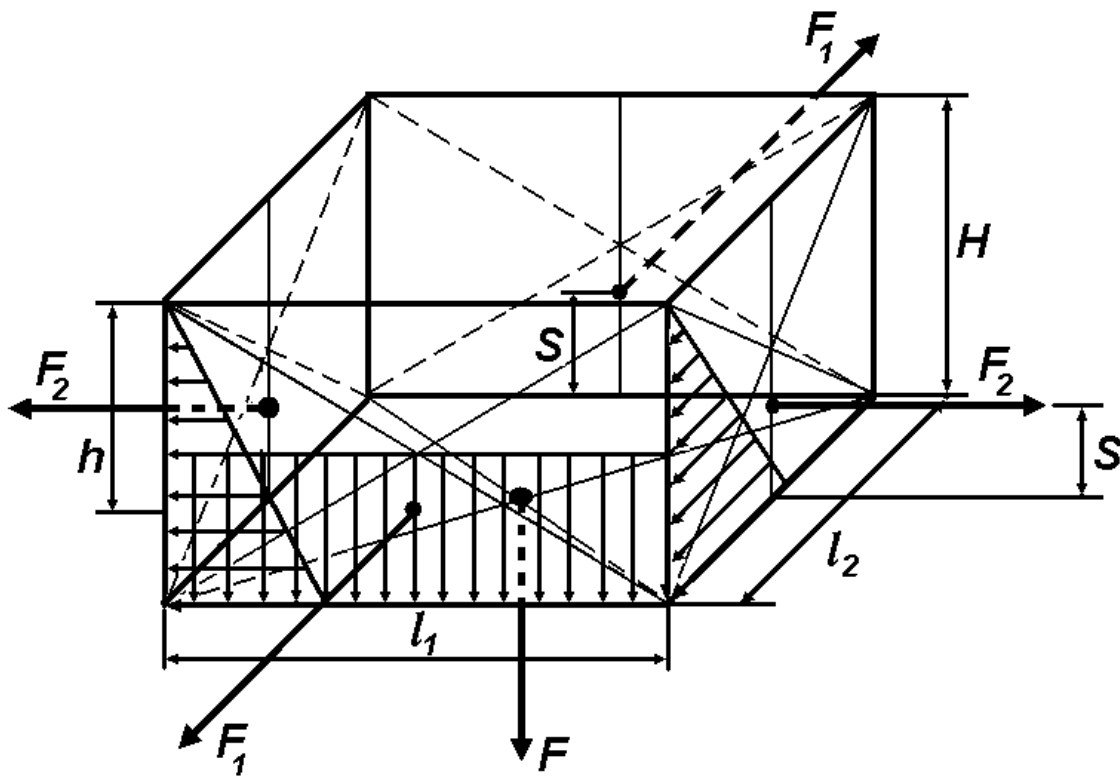
**ЗАДАЧА № 1.** Бак з розмірами  $l_1 = 4$  м,  $l_2 = 2$  м,  $H = 3$  м доверху заповнений водою густиною  $\rho_B = 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Побудувати епюри гідростатичного тиску та обчислити сили гідростатичного тиску, що діє на бокові стінки та на дно бака.

Розв'язання. За відсутністю надлишкового тиску ( $P_0 = 0$ ) основне рівняння гідростатики (2.2) має вигляд  $P = \rho gh$ , де  $0 \leq h \leq H$ .

Закон зміни тиску за глибиною занурення  $h$  є лінійним й епюри гідростатичного тиску на бокові стінки мають вигляд прямокутного трикутника, а на дно – прямокутника.

Сила гідростатичного тиску  $F_1$ , що діє на бокову стінку довжиною  $l_1$ , визначимо за формулою (2.4), в якій треба покласти  $\alpha = 90^\circ$ ,  $h = H$ ,  $b = l_1$ :

$$F_1 = \rho g l_1 H \left( H - \frac{H}{2} \right) = \frac{1}{2} \rho g l_1 H^2 = \frac{1}{2} 10^3 \cdot 9,81 \cdot 4 \cdot 3 = 176,58 \text{ кН.}$$



Сила гідростатичного тиску  $F_2$ , що діє на бокову стінку довжиною  $l_2$ , визначимо за формулою (2.4), в якій треба покласти  $\alpha = 90^\circ$ ,  $h = H$ ,  $b = l_2$ :

$$F_2 = \rho g l_2 H \left( H - \frac{H}{2} \right) = \frac{1}{2} \rho g l_2 H^2 = \frac{1}{2} 10^3 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 3 = 88,29 \text{ кН.}$$

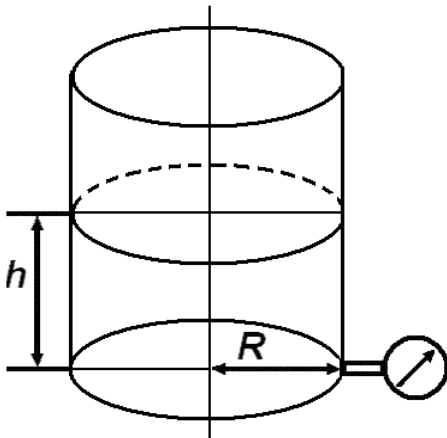
Сила гідростатичного тиску  $F$ , що діє на дно бака, визначимо за формулою (2.4), в якій треба покласти  $\alpha = 0^\circ$ ,  $h = l_1$ ,  $b = l_2$ :

$$F = \rho g l_1 l_2 H = 10^3 \cdot 9,81 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 235,44 \text{ кН.}$$

Точкою прикладення сили  $F$  (див. Рисунок) є точка перетину діагоналей прямокутника, який є дном бака. Для визначення точок прикладення сил  $F_1$  і  $F_2$  скористаємось формулою (2.5). Лінія дії сили  $F_1$ , а також  $F_2$ , знаходиться на відстані

$$S = \frac{H}{3} \text{ від дна бака.}$$

Відповідь. Сила гідростатичного тиску  $F_1 = 176,58$  кН, сила гідростатичного тиску  $F_2 = 88,29$  кН, сила гідростатичного тиску  $F = 235,44$  кН.



**ЗАДАЧА № 2.** Визначити масу нафти  $m$ , що міститься у циліндричному резервуарі радіусом  $R = 6$  м, якщо манометр показує тиск на дно  $50$  кПа, густина нафти  $\rho_H = 840$  кг/м<sup>3</sup>.

Розв'язання. Тиск, що показує манометр  $P = \rho_H g h$ , маса нафти  $m = W_H \rho_H$ , об'єм нафти  $W_H = \pi R^2 h$ .

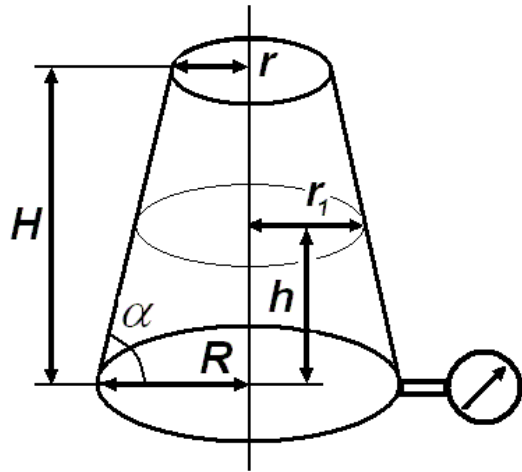
Остаточно  $m = \pi R^2 \cdot \frac{P}{\rho_H g} \cdot \rho_H$  або

$$m = \pi R^2 \cdot \frac{P}{g} = 3,1414 \cdot 6^2 \cdot \frac{50 \cdot 10^3}{9,81} = 576439 \text{ кг} \approx 576 \text{ т.}$$

Слід зазначити цікавий, на перший погляд, парадоксальний факт, що при вирішенні цієї задачі густина рідини, яка міститься у циліндричному резервуарі, є зайвим параметром і остаточна відповідь від нього не залежить. Натомість, при обчисленні

об'єму рідини, безперечно, густина рідини є необхідним параметром.

Відповідь. Маса нафти  $m \approx 576$  т.



**ЗАДАЧА № 3.** Визначити об'єм нафти  $W$  у відкритому резервуарі у формі зсіченого конуса з розмірами  $R = 2$  м,  $r = 1$  м,  $H = 6$  м, якщо манометр, вмонтований на дні, показує тиск  $P_M = 0,4$  ат, густина нафти  $\rho_H = 850$  кг/м<sup>3</sup>.

Розв'язання. Визначаємо висоту  $h = \frac{P_M}{\rho_H g} = \frac{0,4 \cdot 0,981 \cdot 10^5}{850 \cdot 9,81} = 4,71$  м

вільної поверхні та знаходимо її радіус  $r_1$ , використовуючи геометричні співвідношення для даної геометричної фігури

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{R-r} = \frac{h}{R-r_1}, \quad \frac{R-r}{H} = \frac{R-r_1}{h}, \quad \text{звідки}$$

$$r_1 = R - \frac{h}{H}(R-r) = 2 - \frac{4,71}{6}(2-1) = 1,216 \text{ м.}$$

Визначимо об'єм нафти, скориставшись формулою для зсіченого конуса,

$$W = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr_1 + r_1^2) = \frac{3,1415 \cdot 4,71}{3} (2^2 + 2 \cdot 1,216 + 1,216^2) =$$

$$39,02 \text{ м}^3.$$

Відповідь. Об'єм нафти  $W = 39,02$  м<sup>3</sup>.

**ЗАДАЧА № 4.** Зсічений конус, який має об'єм  $W = 50$  м<sup>3</sup>, радіус нижньої основи  $R = 2,5$  м, повністю заповнений нафтою  $\rho_H = 850$  кг/м<sup>3</sup>. манометричний тиск на дні  $P_M = 0,5$  ат. Визначити радіус верхньої основи  $r$ .

Розв'язання. Знаходимо висоту конуса  $h = \frac{P_M}{\rho_H g} = \frac{0,5 \cdot 0,981 \cdot 10^5}{850 \cdot 9,81} =$

5,88 м. Використовуючи формулу для об'єму зсіченого конуса

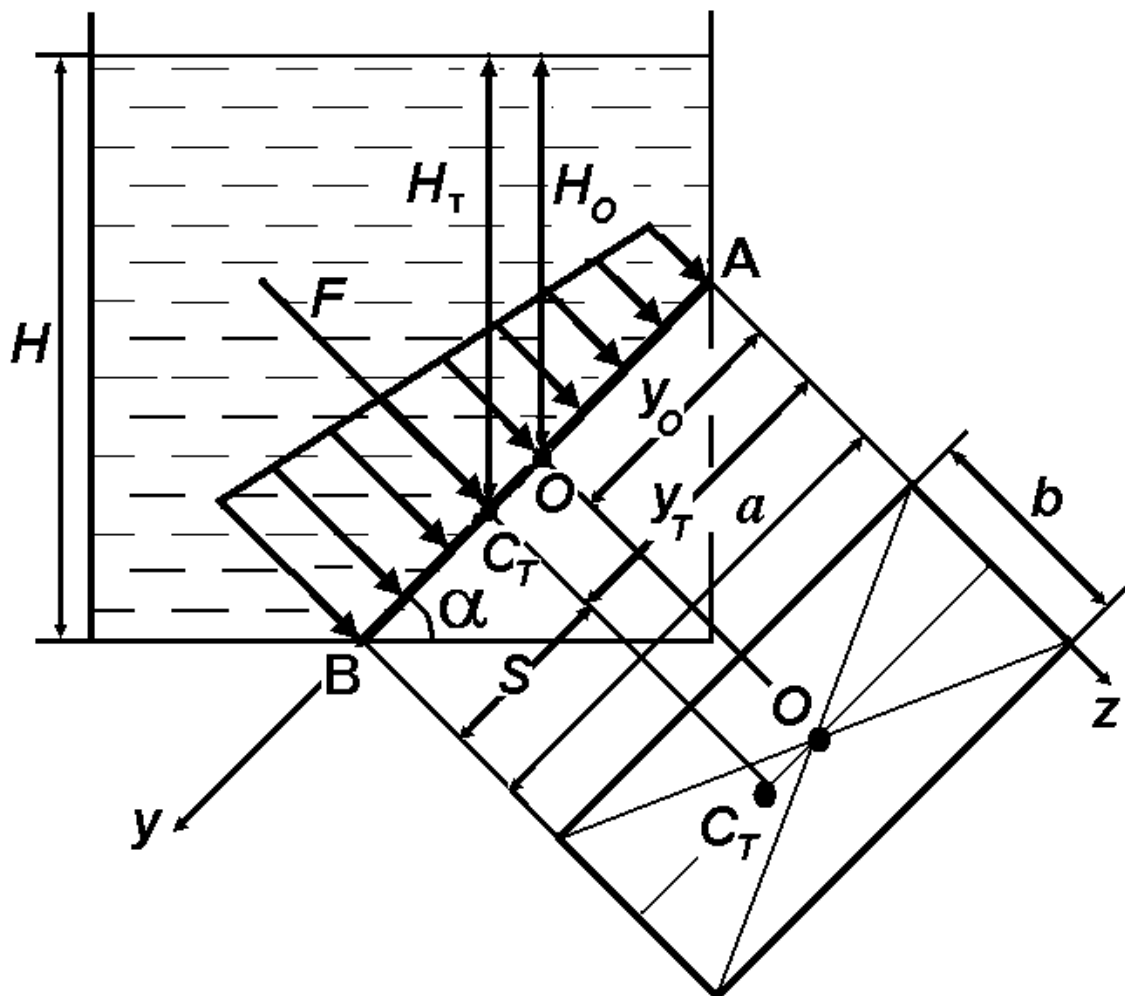
$W = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$ , отримуємо квадратне рівняння відносно невідомого  $r$ :

$$r^2 + Rr + R^2 = \frac{3W}{\pi h}, \quad \text{або} \quad r^2 + 2,5r + 6,25 = \frac{3 \cdot 50}{3,1415 \cdot 5,88} = 8,12.$$

Остаточно  $r^2 + 2,5r - 1,87 = 0$ , звідки  $r_{1,2} = -1,25 \pm 1,853$  м. Звичайно, від'ємний корінь відкидаємо, залишаючи тільки значення  $r = 0,603$  м.

Відповідь. Радіус верхньої основи  $r = 0,603$  м.

**ЗАДАЧА № 5.** Обчислити силу тиску води  $F$  (без урахування поверхневого тиску) на прямокутну пластину (затвор прямокутного отвору), яка нахилена до горизонту під кутом  $\alpha = 60^\circ$ . Висота пластини  $a = 3$  м, ширина  $b = 2$  м, напір води  $H = 4$  м. Обчислити координати центру тиску  $H_T$ .



Розв'язання. За формулою (2.4) визначаємо силу тиску на прямокутну засувку

$$F = \rho g b a \left( H - \frac{a}{2} \sin \alpha \right) = 10^3 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 3 \left( 4 - \frac{3}{2} \sin 60^\circ \right) = 158922 \quad \text{Н.}$$

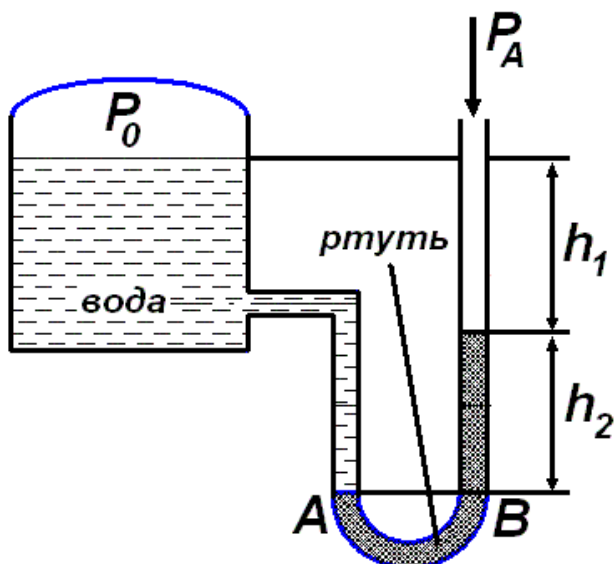
Глибина занурення точки  $A$   $h_0 = H - a \sin \alpha = 4 - 3 \cdot \sin 60^\circ \approx 2,7$  м.

Використовуючи формулу (2.5), отримуємо  $S = \frac{2 \cdot 2,7 + 4}{3 \cdot (2,7 + 4)} 2,7 =$

$1,263$  м. Остаточо  $H_T = H - S \sin \alpha = 4 - 1,263 \cdot \sin 60^\circ = 2,91$  м.

Відповідь. Сила тиску води (без урахування поверхневого тиску) на прямокутну пластину  $F = 158922$  Н, координата центру тиску  $H_T = 2,91$  м.

**ЗАДАЧА № 6.** Ртутний манометр з'єднаний з резервуаром, заповненим водою. Визначити тиск  $P_0$  на поверхні води в резервуарі, якщо  $h_1 = 150$  мм,  $h_2 = 250$  мм, атмосферний тиск  $P_A = 98,1$  кПа, густина води  $\rho_B = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, ртуті  $\rho_P = 13,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.



Розв'язання. Тиск у точках  $A$  і  $B$  однаковий, тому що вони лежать в одній горизонтальній площині, яка проходить через ту ж саму рідину – в даному випадку це ртуть. Складаємо рівняння гідростатики

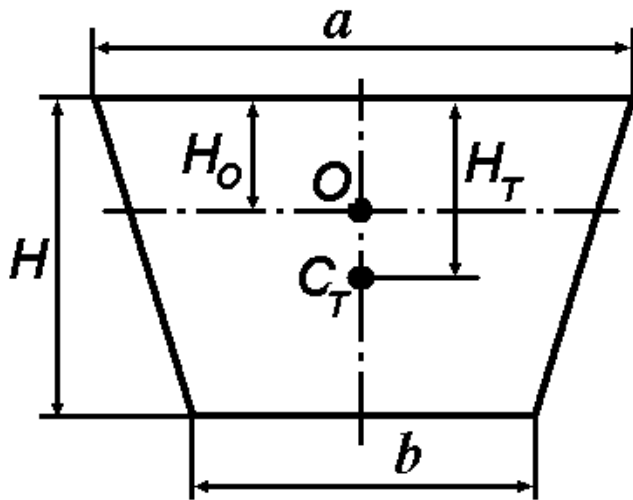
$$P_0 + \rho_B g (h_1 + h_2) = P_A + \rho_P g h_2.$$

Після перетворень одержуємо:

$$P_0 = P_A + g [\rho_P h_2 - \rho_B (h_1 + h_2)]$$

$$= 98,1 \cdot 10^3 + 9,81 \cdot (13600 \cdot 0,25 - 1000 \cdot (0,15 + 0,25)) = 127,53 \text{ кПа.}$$

Відповідь. Тиск  $P_0 = 127,53$  кПа.



**ЗАДАЧА № 7.** Канал в поперечному перерізі має форму рівнобічної трапеції з верхньою основою  $a = 4$  м, з нижньою -  $b = 3$  м, висотою  $H = 2,5$  м, який перекривається щитом такої ж форми. Знайти силу гідростатичного тиску на щит і точку її прикладення.

Розв'язання. Точка  $O$  - центр ваги трапеції, для якої відстань

$$H_0 = \frac{H}{3} \left( 1 + \frac{b}{a+b} \right) = \frac{2,5}{3} \cdot \left( 1 + \frac{3}{3+4} \right) = 1,19 \text{ м.}$$

Момент інерції відносно горизонтальної осі, яка проходить через точку  $O$  (головний момент інерції)

$$I_0 = \frac{H^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)} = \frac{2,5^3(4^2 + 4 \cdot 3 \cdot 4 + 3^2)}{36(4+3)} =$$

$$4,53 \text{ м}^4. \text{ Площа трапеції } \omega = \frac{(a+b)}{2} H = \frac{4+3}{2} \cdot 2,5 = 18,75 \text{ м}^2.$$

Сила гідростатичного тиску

$$F = \rho g H_0 \omega = \rho g H_0 \cdot \frac{a+b}{2} H = 10^3 \cdot 9,81 \cdot 1,19 \cdot \frac{4+3}{2} \cdot 2,5 =$$

102,15 кН.

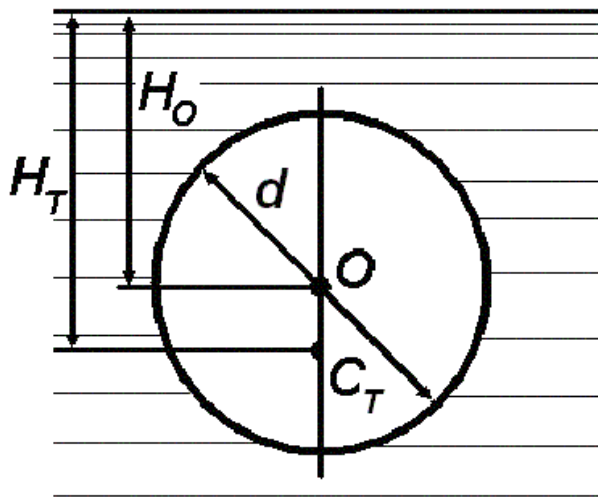
Сила прикладена у центрі тиску – точці  $C_1$ , координата якої визначається за формулою

$$H_T = H_0 + \frac{I_0}{\omega H_0} = 1,19 + \frac{4,53}{18,75 \cdot 1,19} = 1,39 \text{ м.}$$

Відповідь. Сила гідростатичного тиску на щит  $F = 102,15$  кН і точка її прикладення  $H_T = 1,39$  м.

**ЗАДАЧА № 8.** Отвір у формі кола діаметром  $d = 40$  см у вертикальній плоскій стінці резервуара з водою перекрито плоским

клапаном. Знайти величину і точку прикладення сили гідростатичного тиску  $F$  на клапан, якщо центр отвору розташований нижче рівня вільної поверхні рідини на 0,5 м.



Розв'язання. Сила гідростатичного тиску води на клапан дорівнює  $F = \rho g H_0 \omega$ , де  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$  – густина води,  $H_0 = 0,5 \text{ м}$ ,

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = 3,1415 \cdot \frac{0,4^2}{4} =$$

$0,126 \text{ м}^2$  – площа клапана (отвору). Таким чином,  $F = 9,81 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 0,126 = 616 \text{ Н}$ . Сила  $F$  прикладена до точки  $C_1$ , відстань якої від вільної поверхні  $H_T$  визначається за формулою  $H_T = H_0 + \frac{I_0}{\omega H_0}$ , де  $I_0 = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,1415 \cdot 0,4^4}{64} = 0,126 \cdot 10^{-2}$

$\text{м}^4$  – момент інерції клапана відносно осі, що проходить через центр ваги перерізу – точки  $O$ . Остаточно

$$H_T = 0,5 + \frac{0,126 \cdot 10^{-2}}{0,126 \cdot 0,5} = 0,52 \text{ м}.$$

**Відповідь.** Сила гідростатичного тиску на клапан  $F = 616 \text{ Н}$  і точка її прикладення  $H_T = 0,52 \text{ м}$ .

**ЗАДАЧА № 9.** Який вантаж  $F_2$  можна підняти за допомогою гідравлічного домкрату (Рисунок 2.3), якщо до рукоятки прикладена сила  $F_0 = 196 \text{ Н}$ , співвідношення діаметрів  $\frac{d_2}{d_1} = 10$ . Розміри рукоятки такі, що  $\frac{a}{b} = \frac{1}{9}$ .

Розв'язання. Сила тиску  $F_1$  на малий поршень, згідно із законами теоретичної механіки, визначається зі співвідношення



$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{a+b}{a} \quad \text{або} \quad F_1 = F_0 \cdot \frac{a+b}{a} = F_0 \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) = 196 \cdot (1+9) =$$

1960 Н. Манометричний тиск від цієї сили  $P_M = \frac{F_1}{\pi d_1^2 / 4}$ . Сила ти-

ску на великий поршень  $F_2 = P_M \cdot \frac{\pi d_2^2}{4}$ , або з урахуванням попе-

реднього виразу,  $F_2 = F_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 1960 \cdot 10^2 = 19600 \text{ Н} = 196$

кН.

Якщо враховувати коефіцієнт корисної дії  $\eta$ , то, звичайно, дійсна сила (або вантаж) визначається  $F_{20} = \eta \cdot F_2$ .

Відповідь. За допомогою гідравлічного домкрату можна підняти вантаж  $F_2 = 196$  кН.

ЛЕКЦІЯ № 3. СИЛА ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ НА КРИВОЛІНІЙНІ ПОВЕРХНІ. ЗАКОН АРХІМЕДА. ПЛAVАННЯ ТІЛ, ОСТІЙНІСТЬ.

I. СИЛА ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ НА КРИВОЛІНІЙНІ ПОВЕРХНІ.

Сила тиску рідини на криволінійну поверхню являє собою рівнодійну всіх елементарних сил гідростатичного тиску на задану криволінійну стінку. Визначення цієї сили ускладнюється тим, що треба знаходити суму сил, що мають різний напрям. На практиці з криволінійних поверхонь різного виду найчастіше використовують циліндричні.

Розглянемо криволінійну поверхню  $AB$  циліндричної форми (Рисунок 3.1), ширина якої в напрямі, перпендикулярному до площини рисунка, дорівнює  $b$ .

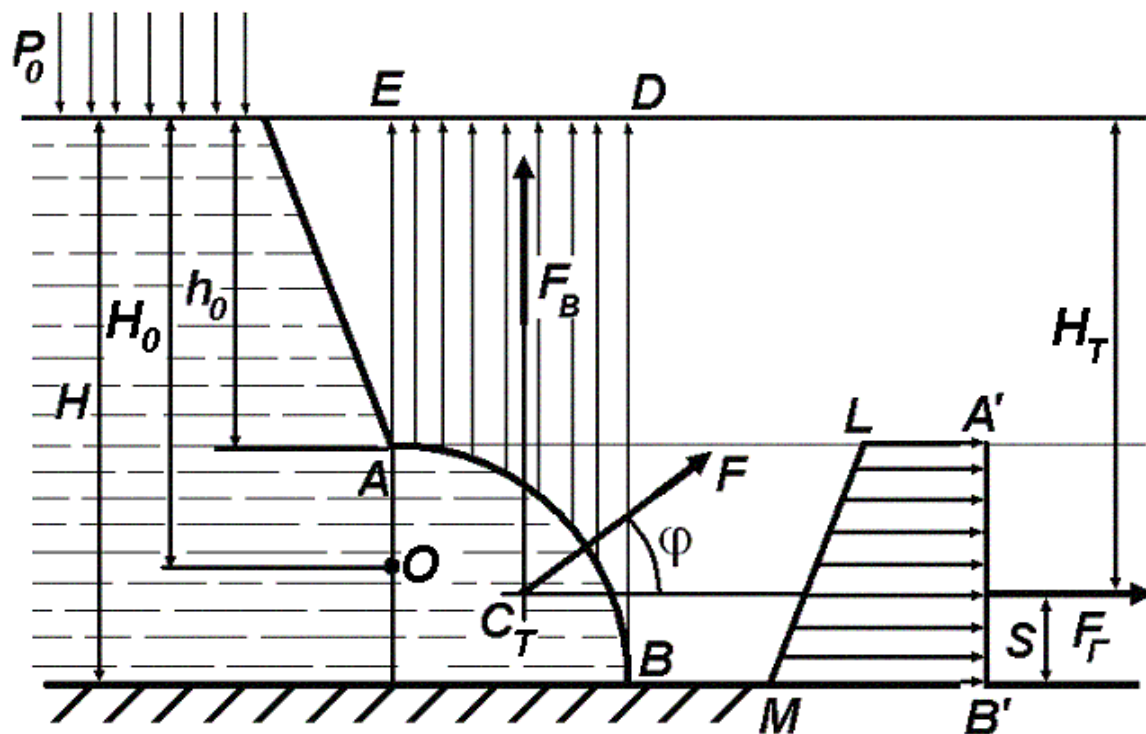


Рисунок 3.1.

У гідростатиці силу тиску розкладають на горизонтальну  $F_T$  і вертикальну  $F_B$  проєкції на відповідні координатні вісі.

**Горизонтальна складова** дорівнює силі тиску на вертикальну проєкцію  $A'B'$  криволінійної поверхні  $AB$ .

$$F_{\Gamma} = (P_0 + \rho g H_0) \omega_B, \quad (3.1)$$

де  $P_0$  - надлишковий (манометричний) тиск на вільну поверхню рідини,  $H_0$  - глибина занурення центра ваги вертикальної проекції криволінійної поверхні, для проекцій у вигляді прямокутника, кола, еліпса (тобто геометричних фігур, які мають, принаймні, дві перпендикулярні осі симетрії) центр ваги розташований на середині проекції, тому

$$H_0 = h_0 + \frac{H - h_0}{2} = \frac{H + h_0}{2}, \quad (3.2)$$

$\omega_B$  - площа вертикальної проекції криволінійної поверхні

$$\omega_B = (H - h_0)b. \quad (3.3)$$

Якщо манометричний тиск на вільній поверхні рідини дорівнює нулю, тобто  $P_0 = P_{атм}$ , то

$$F_{\Gamma} = \rho g H_0 \omega_B. \quad (3.4)$$

Горизонтальна складова сили проходить через центр ваги епюри тиску (на Рисунку 3.1 – прямокутна трапеція  $LA'B'M$ ). Від вільної поверхні рідини лінія дії горизонтальної складової знаходиться на відстані

$$H_T = H - S, \quad (3.5)$$

де  $S$  підраховується за формулою (2.5), в якій замість  $a$  треба підставити  $H - h_0$ , тобто

$$H_T = H - \frac{2h_0 + H}{3(h_0 + H)}(H - h_0). \quad (3.6)$$

Вертикальна складова дорівнює сумі ваги рідини в об'ємі «тіла тиску» і добутку манометричного тиску (на поверхню рідини) на площу горизонтальної проекції  $\omega_{\Gamma}$  криволінійної поверхні.

«Тіло тиску» розташовано між вертикальними площинами, які проходять через крайні утворюючі циліндричної поверхні ( $AE$  - крайня ліва,  $BD$  - крайня права), самою циліндричною поверхнею  $AB$  і вільною поверхнею рідини  $ED$ , або її продовженням. На Рисунку 3.1 фігура  $ABDE$  являє собою вертикальний переріз «тіла тиску», об'єм якого позначаємо через  $W$ , тоді

$$F_B = \rho g W + P_0 \omega_\Gamma. \quad (3.7)$$

Якщо  $P_0 = P_{атм}$ , то  $F_B = \rho g W$ .

Вертикальна складова проходить через центр ваги «тіла тиску». Напрямок дії сили  $F_B$  (вгору чи вниз) визначається взаємним розташуванням рідини та поверхні. Якщо рідина діє знизу на криволінійну поверхню, тобто розташована нижче нею (як на Рисунку 3.1), то вертикальна складова сили тиску спрямована вертикально вгору. Якщо рідина діє зверху на криволінійну поверхню, тобто розташована над нею, то вертикальна складова сили тиску спрямована вертикально вниз.

Сама сила тиску  $F$  визначається як рівнодійна горизонтальної і вертикальної складової. Її модуль

$$F = \sqrt{F_\Gamma^2 + F_B^2}. \quad (3.8)$$

Напрямок дії сили  $F$  визначається кутом  $\varphi$  її нахилу до горизонту

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_B}{F_\Gamma}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{F_B}{F_\Gamma}. \quad (3.9)$$

Вектор сили тиску повинен пройти через точку перетину її складових  $F_\Gamma$  і  $F_B$ , на Рисунку 3.1 це точка  $C_T$ . Точка перетину вектора сили  $\vec{F}$  з криволінійною поверхнею  $AB$  і буде шуканою точкою центру тиску рідини на криволінійну поверхню  $AB$ .

В тому випадку, коли криволінійна поверхня є частиною циліндра, всі елементарні сили тиску спрямовані за нормаллю до поверхні тиску, а для цих поверхонь нормалі збігаються з радіусами. Отже, в будь-якій точці цієї поверхні елементарна сила тиску має проходити через центр окружності, що утворює циліндр.

Очевидно, що й рівнодійна цих сил теж має пройти через цю точку.

## II. ЗАКОН АРХІМЕДА, ПЛАВАННЯ ТІЛ, ОСТІЙНІСТЬ ТІЛ, ЯКІ ПЛАВАЮТЬ НА ПОВЕРХНІ РІДИНИ.

Тверде тіло, об'єм якого у відомих границях не залежить від тиску, буде плавати на поверхні рідини, або спуститься на дно. Якщо вага тіла точно дорівнює вазі витисненої тілом рідини, то воно перебуває на тій глибині, де його розташують (завислий стан).

На тіло, яке занурене повністю або частково в рідину (чи газ) діє виштовхувальна (архімедова) сила. Ця **сила**, яку позначимо  $F_A$ , згідно з законом Архімеда **дорівнює вазі рідини (чи газу), витисненої тілом**, вона спрямована вертикально вгору та прикладена до центра ваги витисненої рідини. Таким чином,

$$F_A = \rho g W, \quad (3.10)$$

де  $W$  - об'єм зануреної в рідину частини тіла. Формула (3.10) є математичним записом закону Архімеда.

На законі Архімеда заснована теорія плавання тіл. Усяке занурене в рідину тіло у стані спокою знаходиться під дією двох сил: сили ваги тіла  $G$  і виштовхувальної сили  $F_A$ . Ці сили діють уздовж однієї вертикальної прямої.

Зіставляючи вагу тіла  $G$  в повітрі та виштовхувальну силу  $F_A$ , виділяють три випадки:

- якщо  $G > F_A$ , тіло тоне;
- якщо  $G = F_A$ , тіло перебуває у завислому стані;
- якщо  $G < F_A$ , тіло буде впливати доти, доки вага  $G$  не зрівняється з силою  $F_A$ .

Оскільки на тіло діє виштовхувальна сила, вага його в рідині  $G_p$  буде меншою, ніж у повітрі  $G$

$$G_p = G \left( 1 - \frac{\rho_p}{\rho_T} \right), \quad (3.11)$$

де  $\rho_P$  і  $\rho_T$  - відповідно густина рідини та тіла.

Для однорідного тіла з питомою вагою  $\gamma_T$  і об'ємом  $W_T$ , яке плаває на поверхні рідини з питомою вагою  $\gamma_P$ , маємо таку умову його рівноваги

$$\gamma_P W'_T = \gamma_T W_T, \text{ або } \frac{W'_T}{W_T} = \frac{\gamma_T}{\gamma_P}, \quad (3.12)$$

де  $W'_T$  - об'єм зануреної частини тіла (витисненої рідини). Останнє співвідношення є початковим для визначення глибини занурення (осадки) однорідного плаваючого тіла. Властивість плаваючого тіла (судна) відновлювати порушену при крені рівновагу характеризується в теорії плавання тіл терміном «остійність».

Розглянемо плаваюче тіло – судно з віссю симетрії під час плавання у нормальному стані в вертикальному положенні (Рисунок 3.2).

Центр ваги судна позначимо точкою  $C$ . Центр ваги  $D$  витисненого об'єму води має назву центра водотонажу, або центру тиску. Лінія, яка проходить через точки  $C$  і  $D$  у положенні рівноваги перпендикулярно до вільної поверхні води називається віссю плавання. В положенні рівноваги вісь плавання вертикальна, при крені вона нахилена до вертикалі під кутом  $\varphi$ . Ватерлінія – лінія дотику поверхні води з корпусом плаваючого судна. Вантажна ватерлінія збігається із спокійною поверхнею при навантаженні судна і відповідає найбільш можливій глибині занурення судна в експлуатації. Ватерлінія огинає площу площини плавання.

Остійність вважається одною з основних мореплавних якостей судна. Розглядають остійність поперечну та поздовжню (при крені судна у поперечній або поздовжній площині), а за характером дії зовнішніх сил – статичну та динамічну. Кількісною мірою остійності є метацентрична висота (метацентричний радіус).

Метацентр – центр кривизни кривої лінії, по якій переміщується центр ваги зануреної частини плаваючого тіла, якщо його вивести зі стану рівноваги. У симетричному тілі (Рисунок 3.2) метацентр – точка  $M$  - збігається з точкою перетину напряду виштовхувальної сили з віссю симетрії. Рівновага плаваючого тіла

стійка, якщо його центр ваги – точка  $C$  – розташована нижче найнижчого положення точки  $M$ . Відстань між центром ваги тіла – точкою  $C$  – і метацентром  $M$  позначається через  $h_M$  і називається метацентрична висота, або радіус.

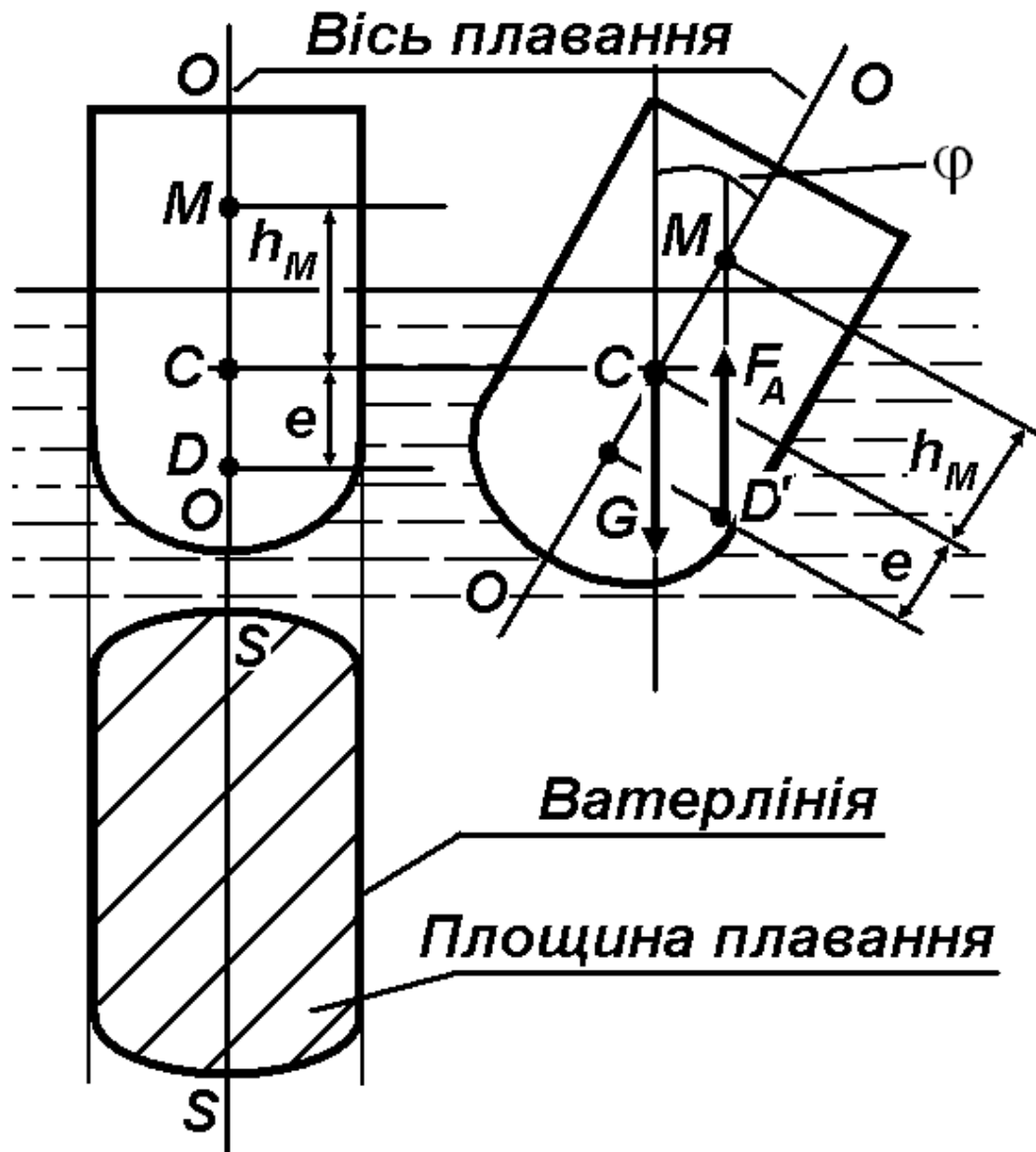


Рисунок 3.2.

Величина метацентричної висоти визначається за формулою

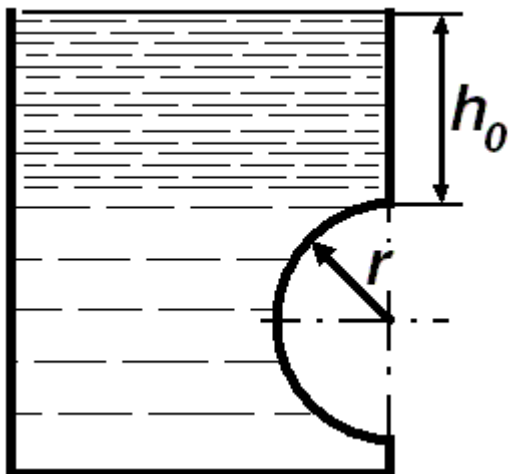
$$h_M = \frac{I_0}{W} - e, \quad (3.13)$$

де  $I_0$  - момент інерції площі площини плавання відносно поздовжньої вісі  $S - S$ ,  $W$  - водотонаж (об'єм зануреної частини судна),  $e$  - відстань між центром ваги та центром тиску.

Якщо  $h_M > 0$ , то судно остійне,  $h_M = 0$  - завислий стан,  $h_M < 0$  - судно неостійне.

### \*ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

**ЗАДАЧА № 1.** Знайти вертикальну та горизонтальну проекції сили тиску води на засувку у вигляді половини сфери. Радіус засувки  $r = 4$  м, відстань від поверхні до засувки  $h_0 = 2$  м, поверхневий тиск  $P_0 = 0$ .



Розв'язання. Горизонтальна складова сили тиску на будь-яку поверхню дорівнює добутку площі проекції поверхні  $\omega_\phi$  на вертикальну площину на тиск в центрі ваги цієї проекції  $P_B$ . Тому  $F_\Gamma = \omega_\phi P_B$ , для сфери  $\omega_\phi = \pi r^2$ , а за умов задачі  $h_0 + r$  - положення центру ваги проекції сфери (проекція – звичайне коло радіусом  $r$ ).

Тому остаточно

$$F_\Gamma = \omega_\phi P_B = \pi r^2 \cdot \rho g (h_0 + r) = 3,1415 \cdot 0,4^2 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot (2 + 0,4) = 11835 \text{ Н} = 11,835 \text{ кН.}$$

Вертикальна складова сили тиску на будь-яку поверхню дорівнює вазі рідини в об'ємі тіла тиску  $F_B = \rho g W$ , де

$$W = \frac{2}{3} \pi r^3 - \text{об'єм напівсфери. На нижню частину сфери діє сила}$$

тиску, спрямована догори, на верхню частину – спрямована донизу. В першому випадку об'єм тіла занурення більший, ніж другому, саме на об'єм на півсфери, і рівнодіюча обох сил спрямована догори. Остаточно



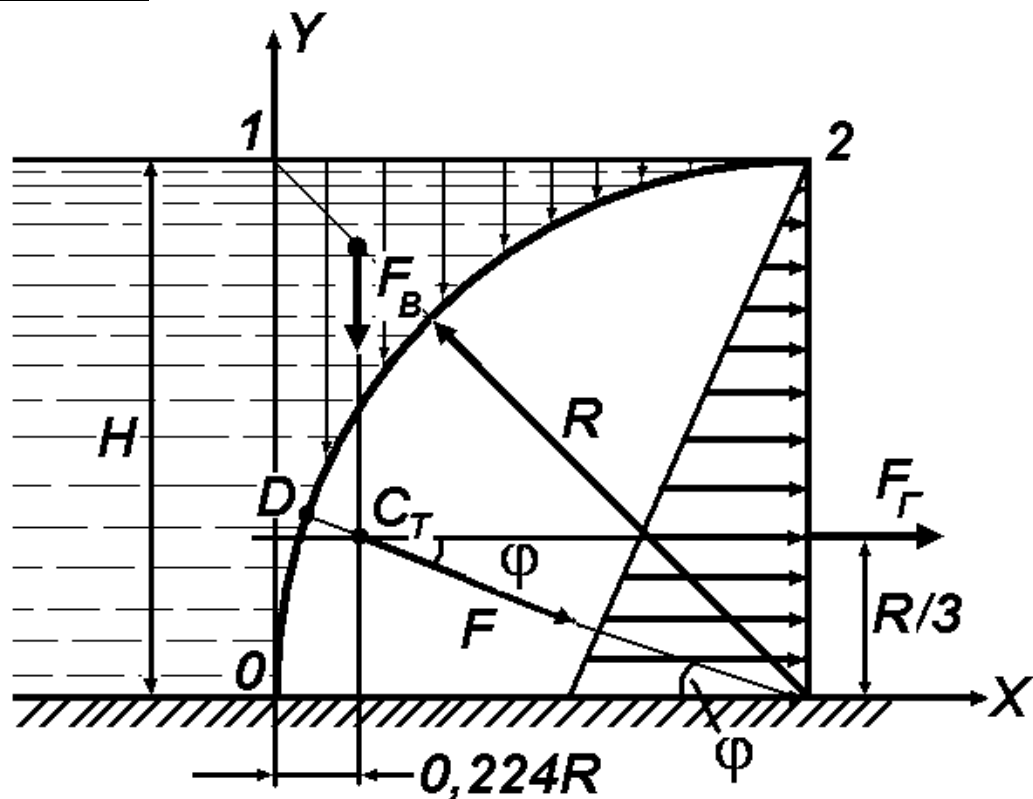
$$F_B = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,1415 \cdot 0,4^3 = 1314 \text{ Н} = 1,134 \text{ кН. Сила тис-}$$

ку за формулою (3.8)  $F = \sqrt{F_{\Gamma}^2 + F_B^2} = \sqrt{11,835^2 + 1,134^2} = 11,889 \text{ кН.}$

Відповідь. Горизонтальна складова сили тиску  $F_{\Gamma} = 11,835 \text{ кН}$ , вертикальна складова сили тиску  $F_B = 1,134 \text{ кН}$ .

**ЗАДАЧА № 2.** Визначити величину, напрям і точку прикладення сили тиску води на 1 м ширини затвора, який представляє чверть круглого циліндра радіуса  $R = 1,5 \text{ м}$ , густина води  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

Розв'язання.



1. Горизонтальна складова сили тиску дорівнює силі тиску на вертикальну проекцію чверті круглого циліндра. Для її визначення скористуємось формулою (3.4), в якій замість  $H_0$  треба підста-

вити  $\frac{R}{2}$ . Тоді маємо  $F_{\Gamma} = \rho g \frac{R}{2} R b = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{1,5}{2} \cdot 1,5 \cdot 1 =$

$11 \cdot 10^3 \text{ Н}$ . Сила тиску проходить через центр ваги епюри гідростатичного тиску – прямокутного трикутника, для якого вказаний

центр  $C_T$  розташований на відстані  $2R/3$  від вільної поверхні, або  $R/3$  від осі  $OX$ . Останнє значення дорівнює 0,5 м.

2. Вертикальна складова  $F_B$  дорівнює вазі рідини в об'ємі «тіла тиску» (3.7). Позначимо площину фігури 0-1-2 через  $\omega_\phi$ , яка є різницею між площею квадрату зі стороною  $R$  і площею чверті кола з радіусом  $R$ , тоді

$$F_B = \rho g \omega_\phi b = \rho g b \left[ R^2 - \frac{\pi R^2}{4} \right] \approx 0,215 \rho g b R^2 = 0,215 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 1 \cdot 1,5^2$$

$= 4,745 \cdot 10^3$  Н. Ця складова спрямована вертикально вниз і проходить через центр ваги фігури 0-1-2 на відстані  $0,224R = 0,336$  м від осі  $OY$ .

Сила тиску  $F$  проходить через точку  $C$  перетину ліній дії горизонтальної і вертикальної складової. Сама сила тиску  $F$  визначається як рівнодійна горизонтальної і вертикальної складової (3.8)

$$F = \sqrt{F_\Gamma^2 + F_B^2} = \sqrt{(11 \cdot 10^3)^2 + (4,745 \cdot 10^3)^2} = 12 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Напрямок дії сили  $F$  визначається кутом  $\phi$  (3.9) її нахилу до горизонту

$$\phi = \arctg \frac{F_B}{F_\Gamma} = \arctg \frac{4,745 \cdot 10^3}{11 \cdot 10^3} = . = 23^\circ 30'.$$

Точка  $D$  перетину лінії дії сили  $F$  з циліндричною поверхнею є точкою прикладення сили гідростатичного тиску до самої поверхні. Сама сила спрямована за нормаллю до поверхні.

Відповідь. Сила тиску  $F = 12 \cdot 10^3$  Н.

**ЗАДАЧА № 3.** Визначити силу тиску  $F$  води на 1 м ширини ( $b = 1$  м) циліндричної поверхні  $AB$ , яка перекриває отвір між камерами. Глибина  $H = 4$  м, радіус кривизни поверхні  $R = 1$  м, кут  $\alpha = 30^\circ$ .

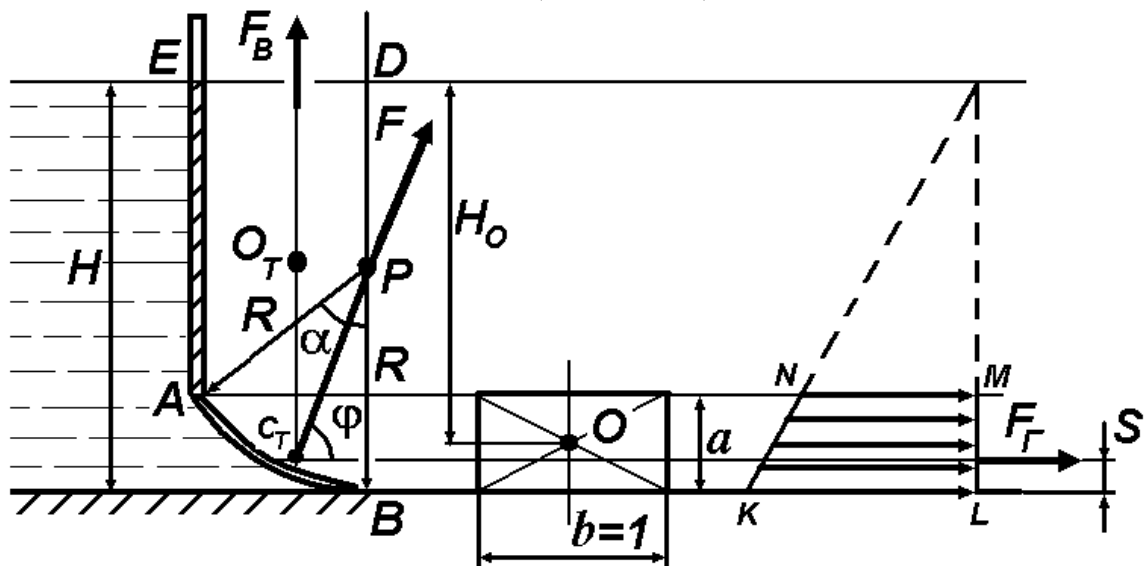
Розв'язання. Горизонтальна складова сили тиску визначається за формулою (3.4)  $F_\Gamma = \rho g H_o \omega_B$ , де  $O$  - центр ваги проекції криволінійної поверхні на вертикальну площину. У даному випадку

$$H_o = H - \frac{a}{2}, \quad a = R(1 - \cos \alpha), \quad \omega_B = a \cdot b.$$

Тоді  $F_r = \rho g \left[ H - \frac{1}{2} R(1 - \cos \alpha) \right] \cdot R(1 - \cos \alpha) b =$   
 $10^3 \cdot 9,81 \cdot [4 - 0,5 \cdot (1 - 0,866)] \cdot 1 \cdot (1 - 0,866) \cdot 1 = 5,17 \text{ кН.}$   
 Лінія дії горизонтальної складової проходить на відстані  $H - S$   
 від вільної поверхні води, де  $S = \frac{2 \cdot NM + KL}{3(NM + KL)} a$ . В свою чергу,  
 $NM = \rho g(H - h)$ ,  $KL = \rho gH$ . Підставляючи чисельні дані та  
 скорочуючи на  $\rho g$ , знаходимо

$$S = \frac{[3H - 2R(1 - \cos \alpha)] \cdot R(1 - \cos \alpha)}{4H - 3R \cdot R(1 - \cos \alpha)}$$

$$= \frac{[3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot (1 - 0,866)] \cdot 1 \cdot (1 - 0,866)}{4 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \cdot (1 - 0,866)} \approx 0,1 \text{ м.}$$



Вертикальна складова за (3.7) дорівнює  $F_B = \rho g W$ , де  $W$  -  
 об'єм «тіла тиску», перерізом якого є фігура  $ABDE$ . Тому з ура-  
 хуванням довжини  $b$  у напрямі, перпендикулярному до площини  
 рисунку, запишемо

$$W = \left[ \frac{1}{2} R^2 \pi \frac{\alpha}{180^\circ} + \frac{1}{2} (H - a + H - R) \cdot R \sin \alpha \right] b.$$

Зробимо деякі пояснення до цієї формули. Площа перерізу  
 $ABDE$  складається, по-перше, з площі колового сектору  $APD$   
 з центральним кутом  $\alpha$  (перший доданок), по-друге, з площі  
 трапеції  $APDE$  (другий доданок), а по-третє, при обчисленні

площі колового сектора необхідно перевести градусну міру в радіани, тобто куту  $\alpha = 30^\circ$  відповідає значення  $\pi/6$  рад. Остаточ-но маємо

$$F_B = 10^3 \cdot 9,81 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 3,1415 \cdot \frac{30}{180} + \frac{1}{2} \cdot (4 - 1 \cdot (1 - 0,866) + 4 - 1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right] \cdot 1 =$$

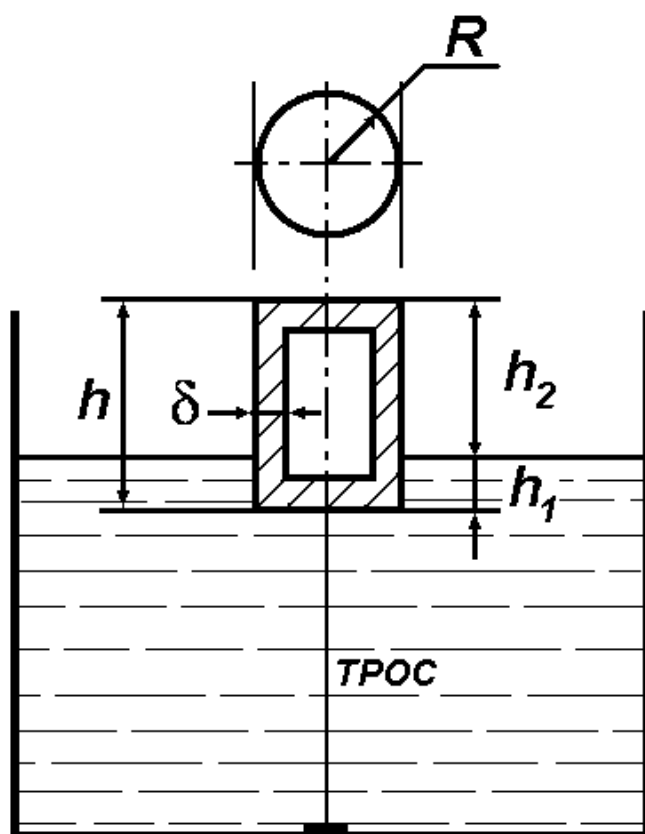
$= 19,4$  кН. Вертикальна складова проходить через точку  $C_T$  - центр ваги «тіла тиску» і спрямована вертикально вгору. Сила тиску за (3.8) дорівнює  $F = \sqrt{F_T^2 + F_B^2} = \sqrt{5,17^2 + 19,4^2} = 20,1$

кН. Ця сила проходить через точку  $O_T$  під кутом

$$\varphi = \arctg \frac{F_B}{F_T} = \arctg \frac{19,4 \cdot 10^3}{5,17 \cdot 10^3} \approx 75^\circ \quad (3.9)$$
 до горизонту. Точка

перетину лінії дії сили  $F$  з циліндричною поверхнею є точкою прикладення сили гідростатичного тиску до самої поверхні. Сама сила спрямована за нормаллю до поверхні.

Відповідь. Сила тиску на циліндричну поверхню  $F = 20,1$  кН.



#### **ЗАДАЧА № 4.**

Циліндричний поплавок, вісь якого збігається з вертикаллю, повинен відкривати за допомогою троса клапан при підвищенні рівня води в резервуарі на  $h_2 = 4$  см. Зусилля відкривання клапана  $F = 10$  Н. Знайти радіус  $R$  кола поплавка та його висоту  $h$ , якщо товщина стінки поплавка  $\delta = 1$  мм, густина матеріалу поплавка  $\rho_{\Pi} = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, густина води  $\rho_B = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Розв'язання. При нормальному рівні води в резервуарі поплавков плаває повільно, без натягу троса, який при  $h_2 = 4$  см досягає піднімальної сили відкриття клапану  $F_{A2} = 10$  Н. Отже з рівняння

$$F_{A2} = \rho g W_2 = \rho g \pi R^2 h_2 = F \quad \text{маємо}$$

$$R = \sqrt{\frac{F}{\rho g \pi h_2}} = \sqrt{\frac{10}{10^3 \cdot 9,81 \cdot 3,1415 \cdot 0,04}} = 0,09 \text{ м} = 9 \text{ см.}$$

Глибину занурення поплавка під дією власної ваги  $G$  знайдемо з рівняння  $G = F_{A1}$ , з урахуванням незаповнення всього об'єму поплавка матеріалом з густиною  $\rho_{\Pi}$ ,

$$\left[ \pi R^2 (h_1 + h_2) - \pi (R - \delta)^2 (h_1 + h_2 - 2\delta) \right] \rho_{\Pi} g = \pi R^2 h_1 \rho_{\text{В}} g.$$

Розв'язуємо це рівняння відносно  $h_1$  і маємо

$$h_1 = \frac{\left[ 2R^2 + 2R(h_2 - \delta) - \delta(h_2 - 2\delta) \right] \rho_{\Pi} \delta}{R^2 \rho_{\text{В}} - 2R\delta \rho_{\Pi} + \delta^2 \rho_{\Pi}} = \frac{\left[ 2 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9 \cdot (4 - 0,2) - 0,1 \cdot (4 - 0,2) \right] \cdot 7,8 \cdot 10^3 \cdot 0,1}{9^2 \cdot 10^3 - 2 \cdot 9 \cdot 0,1 \cdot 7,8 \cdot 10^3 + 0,1^2 \cdot 7,8 \cdot 10^3} = 2,68 \text{ см.}$$

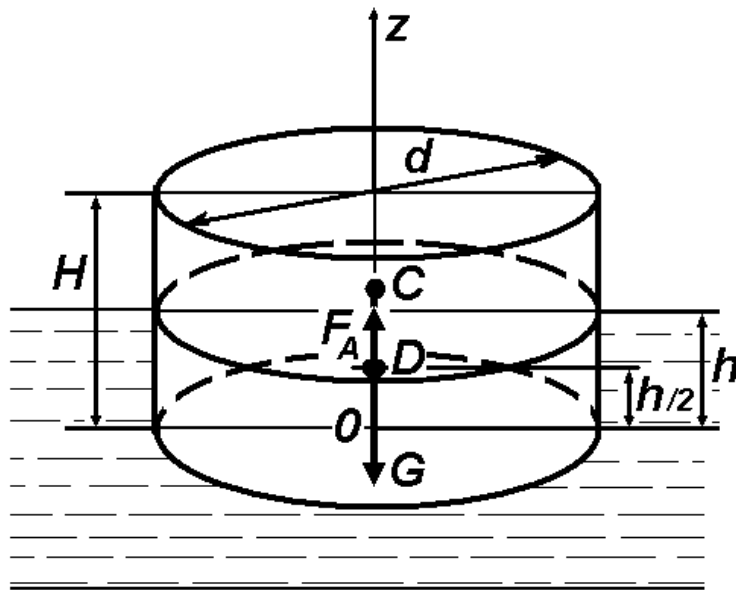
Отже, загальна висота поплавка  $h = h_1 + h_2 = 2,68 + 4 = 6,68$  см.

Зважаючи на те, що у виразі для  $h_1$  в чисельнику добуток густини на лінійний розмір у третьому ступені, а в знаменнику – добуток густини на лінійний розмір у другому ступені, не є необхідним переводити лінійні розміри до системи  $SI$ . Скорочення залишає висоту  $h_1$  в розмірності, що була обрана для усіх лінійних величин в цьому виразі, тобто в даному випадку - сантиметр.

Відповідь. Радіус кола поплавка  $R = 9$  см, висота поплавка  $h = 6,68$  см.

**ЗАДАЧА № 5.** Дерев'яний (густина  $\rho_{\text{дер}} = 800$  кг/м<sup>3</sup>) циліндр діаметром  $d = 50$  см і висотою  $H = 20$  см плаває вертикально у воді, густина  $\rho_{\text{В}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Необхідно: 1) перевірити остійність

циліндра; 2) знайти висоту  $H_1$ , при якій його остійність втрачається.



Розв'язання. 1)  $C$  - центр ваги  $G$  циліндра, тому координата точки  $C$  для цієї об'ємної фігури

$$z_C = \frac{H}{2} = 0,1 \text{ м (для}$$

довільної фігури, звичайно, цю координату необхідно визначати з урахуванням її форми та геометричних розмірів);  $h$  - глибина занурення

ної у воду частини циліндра, яку визначаємо за умов плавання

циліндра - рівняння  $G = F_A$ , або  $\rho_{\text{деп}} g \frac{\pi d^2}{4} H = \rho_{\text{в}} g \frac{\pi d^2}{4} h$ , звідки

$$h = \frac{\rho_{\text{деп}}}{\rho} H = \frac{800}{1000} H = 0,8H = 0,16 \text{ м. Позначимо точкою}$$

$D$  центр водотонажу (центр ваги витисненого об'єму води) з координатою

$$z_D = \frac{h}{2} = 0,08 \text{ м. Тоді відстань між точками } C \text{ і } D$$

дорівнює  $e = z_C - z_D = 0,1 - 0,08 = 0,02 \text{ м. За формулою (3.13)}$

визначаємо метацентричну висоту

$$h_M = \frac{I_O}{W} - e = \left( \frac{\pi d^4}{64} / \frac{\pi d^2 h}{4} \right) - e = \frac{d^2}{16h} - e = \frac{0,5^2}{16 \cdot 0,16} - 0,02 =$$

0,0776 м, або  $\approx 7,8$  см. Оскільки  $h_M > 0$ , циліндр остійний.

2) Знаходимо висоту  $H_1$ , при якій циліндр втрачає остійність, тобто має виконуватися умова  $h_M = 0$ . Тому за умов:

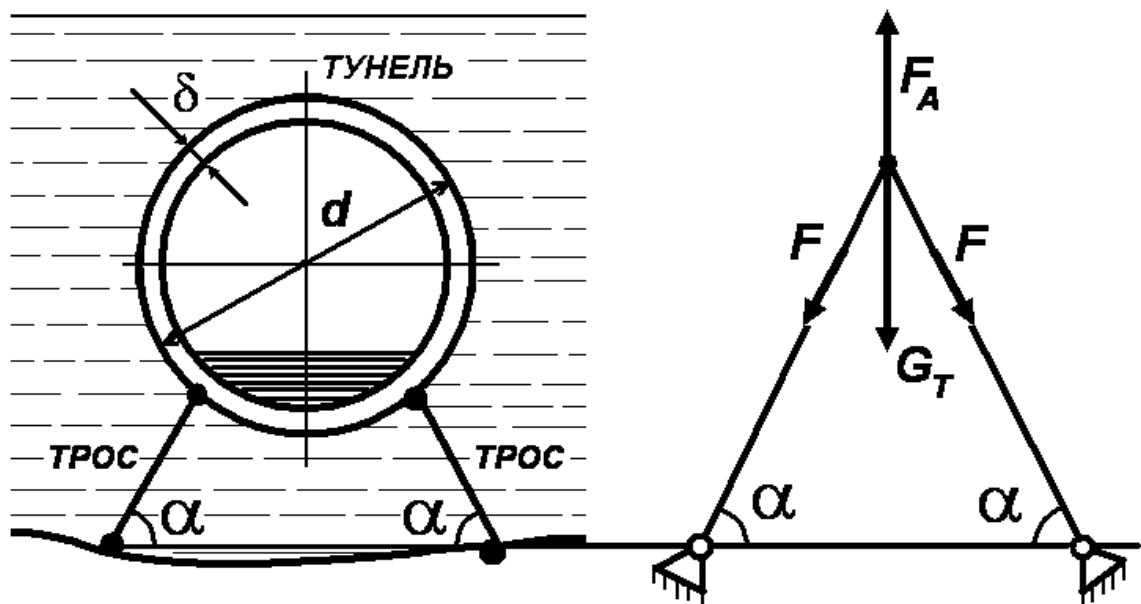
$$h = 0,8H_1, \quad z_D = \frac{h}{2} = 0,4H_1, \quad z_C = \frac{H_1}{2} = 0,5H_1 \quad \text{запишемо}$$

$$\frac{d^2}{16 \cdot 0,8H_1} = 0,5H_1 - 0,4H_1, \quad \text{звідки} \quad \text{остаточно}$$

$$H_1 = \frac{d}{\sqrt{0,1 \cdot 16 \cdot 0,8}} = \frac{0,5}{1,13} = 0,443 \text{ м.}$$

Відповідь. За умов задачі циліндр є остійним. Втрата остійності відбудеться при висоті циліндра  $H_1 = 0,443$  м.

**ЗАДАЧА № 6.** Плавучий залізобетонний тунель із зовнішнім діаметром  $d = 10$  м і товщиною стінок  $\delta = 0,4$  м утримується у зануреному стані у воді тросами, розташованими попарно через кожні 25 м довжини тунелю. Визначити силу натягу  $F$  троса, якщо вага погонного метра додаткового навантаження (так зване розподілене навантаження) по довжині складає  $q = 9,81$  кН/м, густина залізобетону  $\rho_{зб} = 2450$  кг/м<sup>3</sup>, кут  $\alpha = 60^\circ$ .



Розв'язання. Силу натягу троса знайдемо із умови рівноваги однієї секції тунелю довжиною  $l = 25$  м під дією сили ваги тунелю  $G_T$ , сили Архімеда  $F_A$  і сили натягу троса  $F$

$$F_A - G_T - 2F \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0, \quad \text{де} \quad F_A = \rho_B g \frac{\pi d^2}{4} l,$$

$G_T = \rho_{\text{зб}} g l \pi [R^2 - (R - \delta)^2] + ql$ ,  $R = \frac{d}{2}$ . Тому з урахуванням формул приведення для тригонометричних функцій  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$  запишемо

$$F = \frac{\rho_B g \frac{\pi d^2}{4} l - l[\pi(2R\delta - \delta^2)\rho_{\text{зб}} g + q]}{2 \sin \alpha} =$$

$$= \frac{10^3 \cdot 9,81 \cdot \frac{3,1415 \cdot 10^2}{4} - 25[3,1415 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 0,4 - 0,4^2) \cdot 2450 \cdot 9,81 + 9810]}{2 \cdot 0,866} =$$

$$= 6,35 \cdot 10^6 \text{ Н} = 6,35 \text{ МН.}$$

Відповідь. Сила натягу троса  $F = 6,35 \text{ МН}$ .



ЛЕКЦІЯ № 4. ГІДРАВЛІЧНІ ЕЛЕМЕНТИ ПОТОКУ РІДИНИ. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ ПОТОКУ. РЕЖИМИ РУХУ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ПОТОКУ ІДЕАЛЬНОЇ ТА РЕАЛЬНОЇ РІДИНИ. ВИЗНАЧЕННЯ ОБ'ЄМНИХ ВИТРАТ РІДИНИ У ТРУБОПРОВОДІ.

I. ГІДРАВЛІЧНІ ЕЛЕМЕНТИ ПОТОКУ РІДИНИ.

В технічній механіці рідини та газу **ПОТОКОМ** рідини називають сукупність елементарних струминок, які, частіше за все, рухаються з різними швидкостями, внаслідок чого ковзають одна по одній.

**Площиною живого перерізу потоку** називають поперечний переріз потоку, перпендикулярний до його напрямку руху.

**Витратами** називається кількість рідини, яка протікає через площину живого перерізу за одиницю часу. Витрати вимірюються в одиницях об'єму, в одиницях маси, або вагових одиницях, віднесених до одиниці часу, у зв'язку з чим витрати поділяють на об'ємні  $Q$ , масові  $M$  і вагові  $G$

$$Q = \frac{W}{t}, [\text{м}^3/\text{с}], \quad (4.1)$$

де  $W$  - об'єм рідини,  $[\text{м}^3]$ ,  $t$  - час,  $[\text{с}]$ ;

$$M = \frac{m}{t}, [\text{кг}/\text{с}], \quad (4.2)$$

де  $m$  - маса рідини,  $[\text{кг}]$ ;

$$G = \frac{mg}{t}, [\text{Н}/\text{с}], \quad (4.3)$$

де  $g = 9,81 \text{ м}/\text{с}^2$  – прискорення сили ваги, або прискорення вільного падіння.

Змоченим периметром  $\Pi$  називається довжина лінії, по якій живий переріз потоку стикається з твердими стінками, які його обмежують. У водопровідній трубі діаметром  $d$  він дорівнює

$$\Pi = \pi d. \quad (4.4)$$

Відношення площі живого перерізу  $\omega$  до змоченого периметра  $\Pi$  називається гідравлічним радіусом  $R_r$

$$R_r = \frac{\omega}{\Pi}. \quad (4.5)$$

Не слід плутати гідравлічний радіус  $R_r$ , який має зміст для будь-якого потоку, обмеженому стінками, з геометричним радіусом, який існує тільки при течії рідини по круглій трубі. Дійсно, для круглої труби геометричний радіус  $R = d/2$ , а гідравлічний

$$R_r = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4} \neq R.$$

Середня швидкість  $V$  [м/с] визначається об'ємними витратами через одиницю площини живого перерізу

$$V = \frac{Q}{\omega}. \quad (4.6)$$

## II. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ ПОТОКУ (ПЕРШИЙ ЗАКОН ГІДРОДИНАМІКИ).

Розглянемо усталений рух рідини у твердому руслі перемінного перерізу між двома довільно обраними перерізами 1-1 і 2-2, проведеними нормально до середньої лінії потоку.

На Рисунку 4.1 представлена елементарна струминка з відповідними параметрами руху, що дозволяє довести рівняння нерозривності потоку. Через переріз 1-1 за одиницю часу надійде об'єм рідини  $Q_1$ , а через переріз 2-2 – відповідно  $Q_2$ . Оскільки рідина нестислива, стінки русла тверді, рух суцільного потоку без розривів, тому  $Q_1 = Q_2$ . Але  $Q_1 = V_1 \omega_1$  та  $Q_2 = V_2 \omega_2$ , тому отримаємо рівняння

$$V_1 \omega_1 = V_2 \omega_2 = const, \quad (4.7)$$

яке має назву **рівняння нерозривності потоку** або **постійності витрат**.

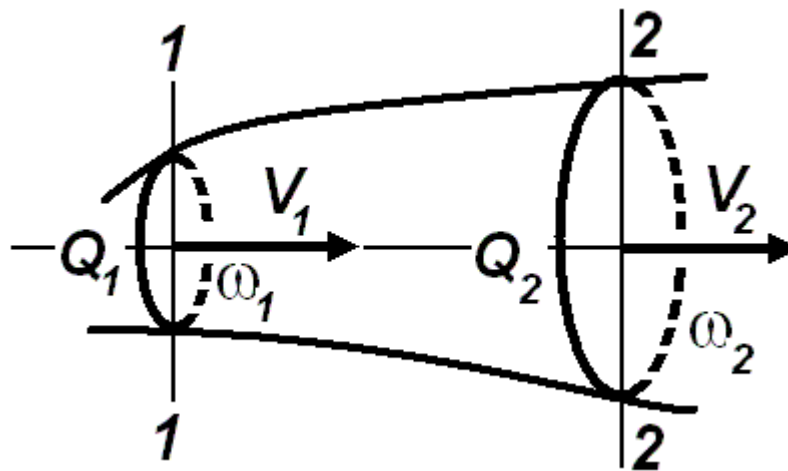


Рисунок 4.1.

### III. ЛАМІНАРНИЙ І ТУРБУЛЕНТНИЙ РЕЖИМИ РУХУ РІДИНИ.

Припущення про існування двох принципово різних режимів руху рідини було висловлено Д.І.Менделєєвим і найбільш повно досліджено англійським фізиком О.Рейнольдсом. Він в 1883 р. експериментально встановив, що при швидкості руху рідини у трубі  $V$  меншою за деяку критичну  $V_{кр}$  підфарбований струмінь не перемішується з рідиною та чітко видний по всій довжині скляної трубки (Рисунок 4.2, а). Такий рух має назву **ламіна́рний рух** (від лат. **Lamina** – пластинка, стрічка). При швидкості  $V > V_{кр}$  підфарбований струмінь спочатку приймає хвилюву форму, втрачає суцільність. При деякому значенні швидкості струмінь взагалі повністю розривається, окремі частинки барвника розходяться по всьому об'єму скляної трубки та перемішуються з усією масою рідини, рівномірно її підфарбовуючи. Переміщення окремих частинок барвника здійснюється за складними криволінійними траєкторіями, що дає можливість говорити про їхній хаотичний рух (Рисунок 4.2., б). Такий рух має назву **турбулентний рух** (від лат. **Turbulentus** – бурхливий, безладний).

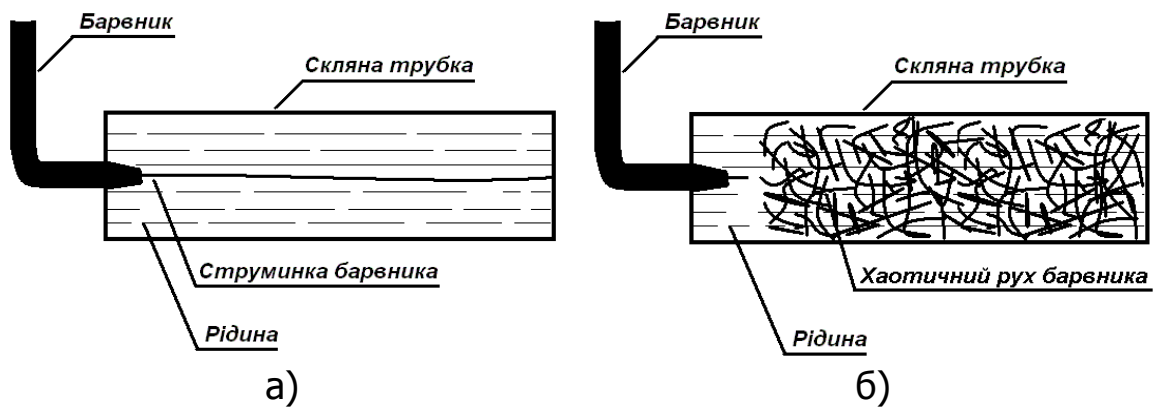


Рисунок 4.2.

О.Рейнольдс встановив, що критерієм режиму руху є безрозмірний параметр – число  $Re$  (число Рейнольдса)

$$Re = \frac{Vd}{\nu}, \quad (4.8)$$

де  $V$  - середня швидкість руху рідини по трубі,  $d$  - внутрішній діаметр труби,  $\nu$  - кінематична в'язкість рідини. Також можна стверджувати, що число Рейнольдса характеризує відносну роль сил в'язкості – чим менше число Рейнольдса, тим більшу роль відіграють сили в'язкості в русі рідини, натомість, чим більше число Рейнольдса, тим більший вплив сил інерції в потоку у порівнянні з силами в'язкості.

Експериментально встановлено, що критичне число  $Re$ , при якому відбувається зміна режиму руху для круглих труб постійного діаметра приблизно дорівнює  $Re_{кр} \approx 2320$ . Величина критичного числа Рейнольдса залежить від низки обставин: умов входу в трубу, шорсткості стінок труби, відсутності або наявності початкових зворушень в рідині, конвекційних потоків тощо. По критичному значенню числа Рейнольдса легко знайти критичну швидкість, тобто швидкість, нижче якої завжди буде мати місце

ламінальний рух рідини  $V_{кр} = \frac{Re_{кр} \nu}{d}$ .

В трубопроводах систем опалення, вентиляції, газопостачання, тепlopостачання, водопостачання та інших рух, як правило, завжди є турбулентним внаслідок того, що вода, повітря, газ, пар є малов'язкими. Наприклад, в газопроводах мережі домогo споживання числа Рейнольдса зазвичай бувають не

нижче 3000, в мережах міста – не нижче 200000, у вентиляційних мережах – не нижче 150000, мережах стисненого повітря – не нижче 400000, в паропроводах центрального опалення – не нижче 30000. Ламінарний рух води та повітря можливий лише при русі в трубах дуже малого діаметра. Більш в'язкі рідини, наприклад, мастила, можуть рухатися ламінарно навіть в трубах значного діаметра.

Досліди показують, що з переходом ламінарного руху в турбулентний змінюється характер залежності сил тертя від швидкості руху та картина розподілу швидкостей по перерізу труби.

У системах протипожежного водопостачання рідина рухається у турбулентному режимі.

#### IV. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ І ДЛЯ ПОТОКУ РЕАЛЬНОЇ РІДИНИ.

Рівняння Бернуллі вказує на взаємозв'язок між координатою частинки  $z$ , тиском  $P$  і швидкістю  $V$  в різних перерізах струменя рідини. Воно використовується при розрахунках трубопроводних систем і спочатку було отримано для руху ідеальної рідини.

В потоці ідеальної рідини потенційна енергія повністю витрачається на зміну кінетичної енергії потоку та зміну положення елементів рідини в полі сили ваги.

Питома потенційна робота потоку нестисливої рідини, яка віднесена до 1 кг маси рідини на деякій ділянці труби дорівнює добутку питомого об'єму  $w$  рідини на різницю тисків в перерізах 1-1 і 2-2 ділянки трубопроводу (Рисунок 4.3)

$$w(P_1 - P_2). \quad (4.9)$$

Зміна питомої кінетичної енергії потоку на ділянці, що розглядається, дорівнює

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}, \quad (4.10)$$

де  $V_1$  і  $V_2$  - відповідно середні лінійні швидкості рідини в перерізах 1-1 і 2-2.

Зміна питомої енергії положення при підйомі рідини на висоту від  $z_1$  до  $z_2$  дорівнює

$$g(z_2 - z_1), \quad (4.11)$$

де  $z_1$  і  $z_2$  - вертикальні координати осі трубопроводу відповідно в перерізах 1-1 і 2-2 відносно довільної горизонтальної площини  $O - O$ ,  $g$  - прискорення вільного падіння. Розподіл потенційної роботи виражається рівнянням

$$w(P_1 - P_2) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1). \quad (4.12)$$

Оскільки питомий об'єм рідини  $w$  - це об'єм, який займає одиниця маси, тобто

$$w = \frac{W}{m} = \frac{1}{\rho}, \text{ [м}^3\text{/кг]},$$

то з урахуванням цього вираз (4.12) можна записати так

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1).$$

Останнє рівняння можна представити у вигляді

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}. \quad (4.13)$$

Отримане рівняння носить назву рівняння Бернуллі на честь видатного швейцарського математика і механіка Даниїла Бернуллі, який вивів його в 1738 р.

Оскільки перерізи 1-1 і 2-2 були узяті довільно, то уздовж цієї довжини струменя для будь-яких поперечних перерізів рівняння можна узагальнити на весь струмінь і представити у вигляді

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = const. \quad (4.14)$$

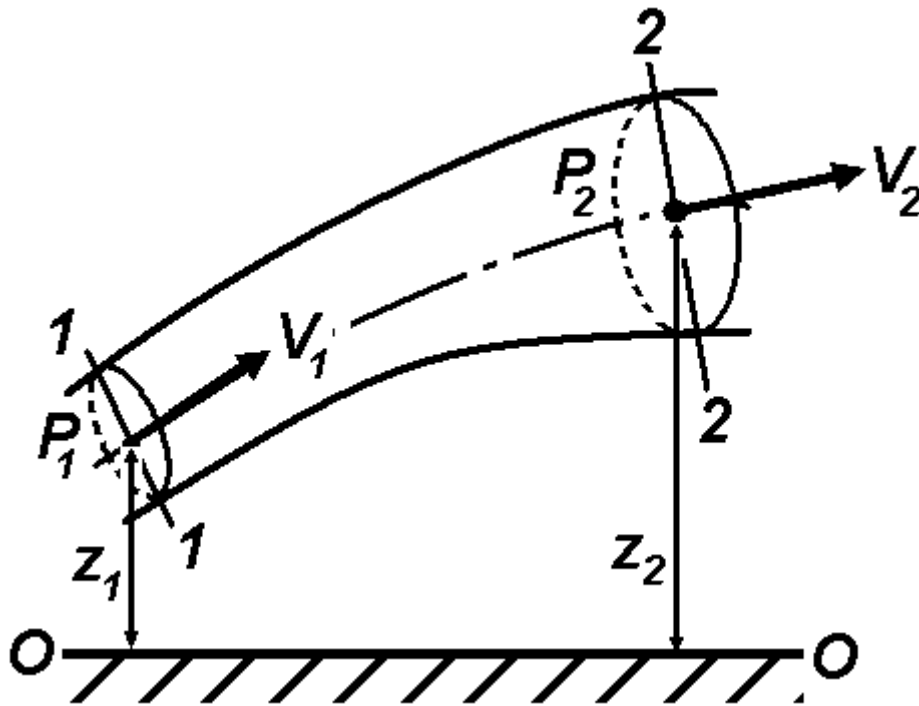


Рисунок 4.3.

У цьому вигляді рівняння називають рівнянням Бернуллі для елементарного струменя нестисливої рідини (або **другим законом гідродинаміки**).

Порівнюючи отримане рівняння з формулою (2.3) – основним рівнянням гідростатики, можна побачити, що сума перших двох доданків є гідростатичним напором, а формула (2.3) є окремим випадком формули (4.14), якщо рідина є нерухомою.

Розглянемо детальніше рівняння (4.14). Перший член  $z$  називається геометричною висотою положення, або **геометри-**

**чним напором**. Другий член  $\frac{P}{\rho g}$  називається п'єзометричною

висотою або **п'єзометричним напором**. Третій член рівняння  $\frac{V^2}{2g}$  - це висота, на яку піднялася б за відсутності будь-якого

опору рідина, що почала рухатись з вертикально спрямованою швидкістю  $V$ . Тому цей вираз називається швидкісною висотою, або **швидкісним напором**.

Слід зазначити, що за суттю виводу рівняння Бернуллі для ідеальної рідини являє собою закон збереження механічної енергії. Звідси стає очевидним, що оскільки член рівняння  $\frac{V^2}{2g}$  є мірилом кінетичної енергії одиниці ваги рідини, що рухається, то сума членів  $z + \frac{P}{\rho g}$  буде мірилом її потенційної енергії. Для ідеальної рідини повна питома енергія незмінна по всій довжині струменя.

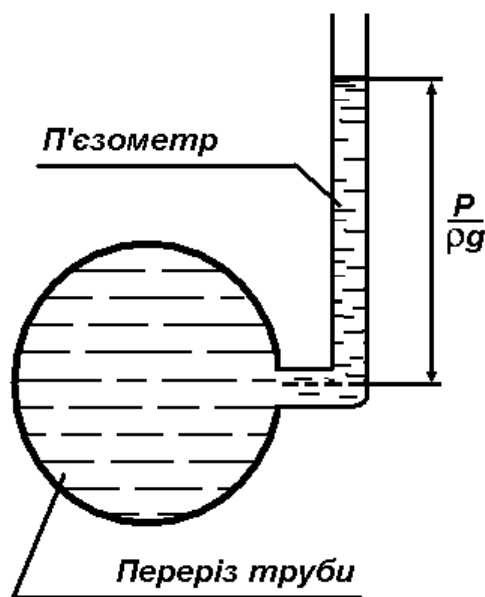


Рисунок 4.4.

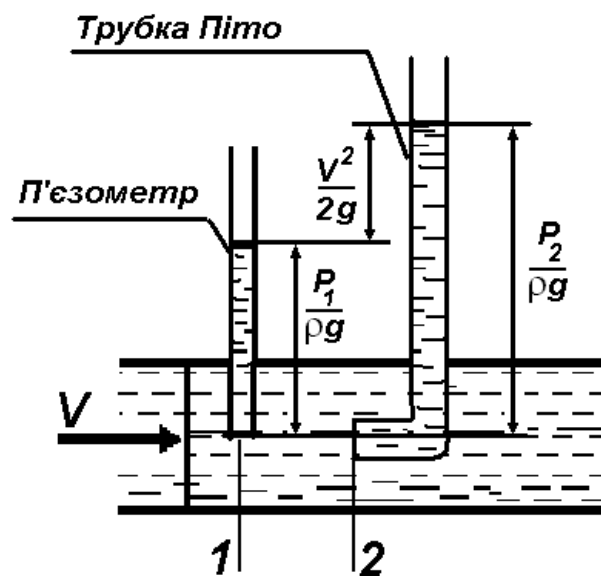


Рисунок 4.5.

Прилад, яким вимірюють п'єзометричну висоту, називається **п'єзометром** (див. Рисунок 4.4). Швидкісний напір вимірюють за допомогою **трубки Піто** (див. Рисунок 4.5). Розглянемо перерізи 1 і 2, розташовані близько один до одного. В першому встановлений п'єзометр, а в другому – трубка Піто. В результаті дії тиску рідина в п'єзометричній трубці підніметься на висоту  $\frac{P_1}{\rho g}$ , а в трубці Піто під дією повного напору – на висоту  $\frac{P_2}{\rho g}$ . Запишемо рівняння Бернуллі для вказаних перерізів, для яких  $z_1 = z_2$ , а швидкість руху рідини в точці занурення нижнього краю п'єзометра дорівнює нулю, то



$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g}, \text{ або } \frac{V^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} - \frac{P_1}{\rho g}. \quad (4.15)$$

Різниця висот, які вимірюються за допомогою двох зазначених трубок, звичайним чином суміщених в одному приладі, носить назву **висоти швидкісного напору**.

Рівняння Бернуллі для двох перерізів потоку реальної рідини записується так:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{1-2}.$$

Воно відрізняється від рівняння для ідеальної рідини появою в правій частині члена  $h_{1-2}$ , який є втратою напору на подолання опору руху рідини, та коефіцієнтами  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  (коефіцієнти Коріоліса, або коефіцієнти кінетичної енергії потоку), які враховують нерівномірність розподілу швидкостей в поперечному перерізі потоку і завжди більше одиниці. Для ламінарного режиму в циліндричній трубці  $\alpha = 2$ , а для турбулентного  $\alpha = 1,045 \div 1,10$ . При практичних розрахунках коефіцієнтом  $\alpha$  часто нехтують і приймають  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

#### V. ВИЗНАЧЕННЯ ВИТРАТ РІДИНИ У ТРУБОПРОВОДІ.

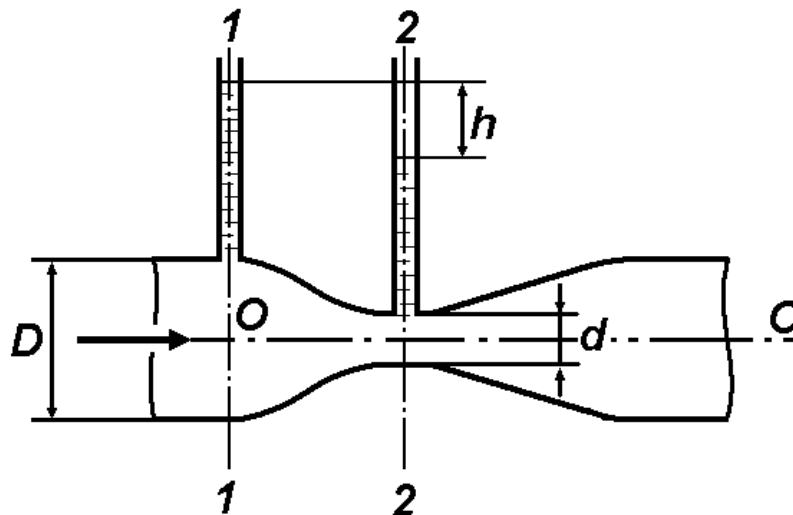


Рисунок 4.6.

На практиці частіше за все для вимірювання витрат рідини користуються спеціальними приладами, одним з яких є витратомір Вентурі, схема якого приведена на Рисунку 4.6. Основною перевагою цього приладу перед іншими є простота конструкції і відсутність рухомих частин.

На Рисунку 4.6 зображено трубопровід діаметром  $D$  з місцевим звуженням діаметром  $d$ . У перерізах 1-1 і 2-2 вмонтовано два п'єзометри. Нехтуючи падінням напору між перерізами, а також нерівномірністю розподілу швидкості руху рідини по перерізу труби, запишемо для даного випадку рівняння Бернуллі, припустивши, що довільна площина проходить через вісь трубопроводу  $O - O$  ( $z_1 = z_2$ )

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}. \quad (4.17)$$

З цього рівняння витікає, що при збільшенні швидкості тиск повинен зменшуватися та навпаки. Ця закономірність і використовується у водомірі Вентурі. По різниці  $h$  рівнів п'єзометрів і величинам діаметрів  $D$  і  $d$  трубопроводу можна підрахувати витрати  $Q$ . Використовуючи рівняння нерозривності потоку, маємо

$$Q = V_1 \omega_1 = V_2 \omega_2, \text{ з урахуванням } \omega_1 = \frac{\pi D^2}{4}, \omega_2 = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ маємо}$$

$$V_1 \frac{\pi D^2}{4} = V_2 \frac{\pi d^2}{4}. \text{ Звідси } V_2 = V_1 \frac{D^2}{d^2}, \text{ а } V_2^2 = V_1^2 \frac{D^4}{d^4}. \text{ Отриманий}$$

$$\text{вираз підставимо в (4.17) } \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + V_1^2 \frac{D^4}{2gd^4}, \text{ звідки ви-}$$

$$\text{тікає, що } \frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} = h = V_1^2 \frac{D^4}{2gd^4} - \frac{V_1^2}{2g}, \text{ і остаточно}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{D^4}{d^4} - 1}}. \text{ Формула для визначення об'ємних витрат рідини}$$

$Q$  у розглянутому трубопроводі має такий вигляд

$$Q = \omega_1 V_1 = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{D^4}{d^4} - 1}}. \quad (4.18)$$

**\*ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ**

**ЗАДАЧА № 1.** По трубопроводу діаметром  $d = 150$  мм перекачується нафта з густиною  $\rho_H = 800$  кг/м<sup>3</sup> в кількості  $m = 1200$  т за добу. Визначити об'ємні витрати нафти  $Q$  і середню швидкість  $V$  її течії.

Розв'язання. Знаходимо спочатку об'єм нафти  $W$ , який перекачується за добу  $W = \frac{m}{\rho_H} = \frac{1200 \cdot 10^3}{800} = 1500$  м<sup>3</sup>. Об'ємні витрати

нафти  $Q = \frac{W}{t} = \frac{1500}{24 \cdot 3600} = 0,01736$  м<sup>3</sup>/с = 17,36 л/с. З рівняння

нерозривності (4.7)  $V = \frac{Q}{\omega} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,01736}{3,1415 \cdot 0,150^2} = 0,983$  м/с.

Відповідь. Об'ємні витрати нафти  $Q = 0,01736$  м<sup>3</sup>/с = 17,36 л/с і середня швидкість її течії  $V = 0,983$  м/с.

**ЗАДАЧА № 2.** Нафта з кінематичним коефіцієнтом в'язкості  $\nu = 0,3$  см<sup>2</sup>/с рухається по трубопроводу. Знайти мінімальний діаметр  $d_{min}$  трубопроводу, при якому нафта буде рухатися у ламінарному режимі з об'ємними витратами  $Q = 8,14$  л/с.

Розв'язання. З формули (4.7) виразимо  $V = \frac{Q}{\omega} = \frac{4Q}{\pi d^2}$  і підстави-

мо в (4.8)  $Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu}$ , звідки зрозуміло, що величина  $d_{min}$

відповідає максимально можливому числу Рейнольдса, при якому ще зберігається ламінарність руху рідини, - критичному числу  $Re_{кр} = 2320$ , тому остаточно

$$d_{min} = \frac{4Q}{\pi \nu Re_{кр}} = \frac{4 \cdot 8,14 \cdot 10^{-3}}{3,1415 \cdot 0,3 \cdot 10^{-4} \cdot 2320} = 0,149 \text{ м. Звичайно,}$$

для отримання вірної відповіді необхідно застосовувати величини  $Q$  (м<sup>3</sup>/с) і  $\nu$  (м<sup>2</sup>/с) у вказаних розмірностях системи  $SI$ .

Відповідь. Діаметр трубопроводу  $d_{min} = 0,149$  м.

**ЗАДАЧА № 3.** Визначити теоретичні витрати  $Q$  води, якщо різниця напорів у перерізах водоміра Вентурі  $h = 500$  мм рт. ст. Діаметр трубопроводу  $D = 0,3$  м, діаметр звуженої частини водоміра  $d = 0,1$  м.

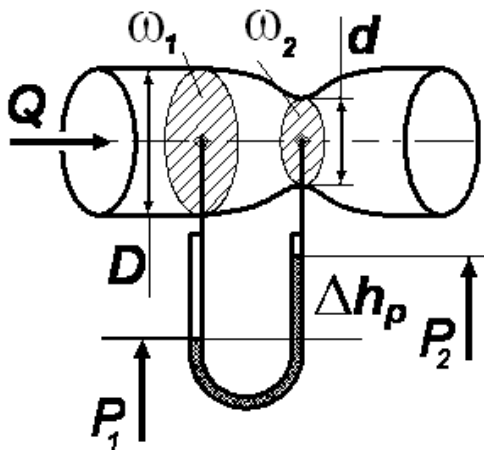
Розв'язання. Переводимо величину  $h$ , яка дана в позасистемній розмірності, у систему  $SI$ , скориставшись Таблицею 1.1, маємо:  $h = 500 \cdot 0,0136 = 6,8$  м. Теоретичні витрати

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{D^4}{d^4} - 1}} = \frac{3,1415 \cdot 0,3^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6,8} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{0,3}{0,1}\right)^4 - 1}}$$

$$= 0,09 \text{ м}^3/\text{с.}$$

Відповідь. Теоретичні витрати води  $Q = 0,09$  м<sup>3</sup>/с = 90 л/с.

**ЗАДАЧА № 4.** Площі перерізів витратоміра складають  $\omega_1 = 0,012$  м<sup>2</sup>,  $\omega_2 = 0,007$  м<sup>2</sup>, манометричні тиски в перерізах відповідно дорівнюють  $P_1 = 2 \cdot 10^4$  Па,  $P_2 = 0,7 \cdot 10^4$  Па. Визначити різницю  $\Delta h_{рТ}$  в ртутному диференціальному манометрі. Визначити об'ємні витрати води  $Q$  [л/с] у трубопроводі, густина води  $\rho_B = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.



Розв'язання. Скористаємось рівнянням Бернуллі (4.13). В даному випадку  $z_1 = z_2 = 0$ , що спрощує це рівняння  $\frac{P_1}{\rho_B g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho_B g} + \frac{V_2^2}{2g}$ , де  $\rho_B$  - густина води. Застосуємо рів-

няння нерозривності потоку (4.7)  $Q = \omega_1 V_1 = \omega_2 V_2$ , з якого

$$V_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} V_1 \quad \text{та} \quad V_2^2 = \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 V_1^2. \quad \text{Після} \quad \text{підстановки}$$

$$\frac{1}{\rho_B g} (P_1 - P_2) = \frac{V_1^2}{2g} \left( \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 - 1 \right), \quad \text{звідки для швидкості } V_1 \text{ маємо}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (P_1 - P_2)}{\rho_B \cdot \left[ \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 - 1 \right]}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (2 \cdot 10^4 - 0,7 \cdot 10^4)}{10^3 \cdot \left[ \left( \frac{0,012}{0,007} \right)^2 - 1 \right]}} \approx 3,66 \text{ м/с.}$$

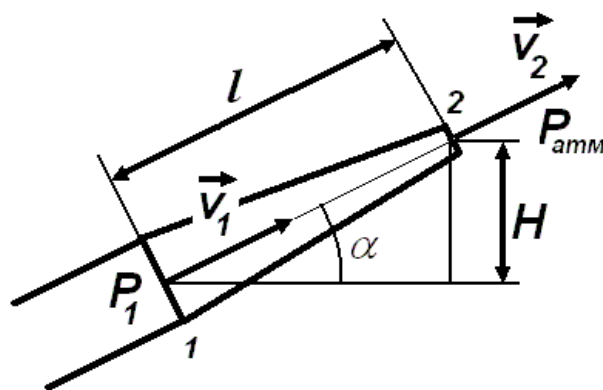
Об'ємні витрати  $Q = \omega_1 V_1 = 0,012 \cdot 3,66 = 43,92 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с} = 43,92$  л/с. Висота ртутного стовпа  $\Delta h_{\text{РТ}}$  визначається зі співвідношення

$$P_1 = P_2 + \rho_{\text{РТ}} g \cdot \Delta h_{\text{РТ}}, \quad \text{звідки} \quad \Delta h_{\text{РТ}} = \frac{P_1 - P_2}{\rho_{\text{РТ}} g} = \frac{2 \cdot 10^4 - 0,7 \cdot 10^4}{13,52 \cdot 10^3 \cdot 9,81} = 0,098$$

м.

**Відповідь.** Різниця  $\Delta h_{\text{РТ}} = 0,098$  м, об'ємні витрати води  $Q = 43,92$  л/с.

### **ЗАДАЧА № 5.**



Знайти швидкість  $V_2$  витікання води через конічну насадку без урахування втрат напору, якщо:

тиск  $P_1 = 6$  атм, швидкість  $V_1 = 6$  км/годину,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $l = 30$  см,  $P_2 = P_{\text{атм}}$ .

**Розв'язання.** Скористаємось рівнянням Бернуллі (4.9). В даному випадку  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = H = l \cdot \sin \alpha$ ;  $V_1 = \frac{6000}{3600} \approx 1,67$  м/с. Тому

для швидкості  $V_2$   $\frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{1}{\rho g} (P_1 - P_2) + z_1 - z_2$  і остаточно з

приведенням розмірностей величин до системи *SI*

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 + \frac{2 \cdot (P_1 - P_2)}{\rho} - 2g \cdot l \sin \alpha} =$$
$$= \sqrt{1,67^2 + \frac{2 \cdot (6 - 1) \cdot 1,01325 \cdot 10^5}{10^3} - 2 \cdot 9,81 \cdot 0,3 \cdot 0,866} \approx 31,8$$

м/с.

Відповідь. Швидкість витікання води через конічну насадку  $V_2 \approx 31,8$  м/с.

## ЛЕКЦІЯ № 5. ВИДИ ВТРАТ НАПОРУ. ФОРМУЛИ ВТРАТ НАПОРУ. КОЕФІЦІЄНТ ГІДРАВЛІЧНОГО ТЕРТЯ.

### I. ВИДИ ВТРАТ НАПОРУ.

Вирішення багатьох практичних задач гідромеханіки зводиться до визначення втрат напору під час руху рідини по трубах або пожежних рукавах.

Втрати напору потоку рідини, що рухається, обумовлені опорами двох основних видів:

- опори, які проявляють себе по всій довжині потоку, обумовлені силами тертя частинок рідини одна об одну та об стінки, що обмежують потік; відповідно, втрати напору цього виду називаються лінійними і позначаються  $h_{\Lambda}$ ;
- так звані місцеві опори, які обумовлені різного роду перешкодами, що встановлюються в потоці (звуження або розширення перерізу трубопроводу, засувка, вентиль, коліно тощо) та призводять до змін в величині або напрямку швидкості течії рідини; відповідно, втрати напору цього виду називаються місцевими і позначаються  $h_M$ .

В рівнянні (4.6) величина доданка  $h_{1-2}$  дорівнює повній втраті напору між двома перерізами потоку при наявності опорів обох видів  $h_{1-2} = h_{\Lambda} + h_M$ . В енергетичному сенсі  $h_{1-2}$  - це кількість питомої механічної енергії, яка витрачається на подолання сил тертя, що виникають в реальній рідині під час її руху. Ця частина енергії перетворюється в теплову. Загальні втрати напору  $h_{1-2}$  для ділянки трубопроводу, прокладеного між двома перерізами, визначаємо за допомогою рівняння Бернуллі

$$h_{1-2} = z_1 - z_2 + \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}. \quad (5.1)$$

Отже, для визначення  $h_{1-2}$  потрібно знайти різниці геометричних висот  $z_1 - z_2$ , показів п'єзометрів  $\frac{P_1 - P_2}{\rho g}$  і швидкісних напорів

$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$  у зазначених перерізах. При усталеному русі в горизонтальній трубі ( $z = const, V = const$ ) втрати напору визначаються за формулою

$$h_{1-2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{\Delta P}{\rho g}. \quad (5.2)$$

Для нев'язкої рідини втрата напору дорівнює нулю.

## II. ВТРАТИ НАПОРУ ПО ДОВЖИНІ ТРУБОПРОВОДУ.

При усталеному русі рідини втрати напору залежать від фізичних властивостей рідини, швидкості руху, розмірів трубопроводу та шорсткості стінок труби. Ця залежність виражається формулою Дарсі-Вейсбаха як при ламінарному, так і при турбулентному режимах

$$h_\lambda = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g}, \quad (5.3)$$

де  $h_\lambda$  - втрати напору по довжині труби;

$\lambda$  - коефіцієнт гідравлічного тертя (коефіцієнт Дарсі);

$l$  - довжина труби,  $d$  - її внутрішній діаметр;

$V$  - середня швидкість руху рідини.

З цієї формули випливає, що втрати напору на тертя по довжині труби прямо пропорційні квадрату швидкості руху і довжині труби й зворотно пропорційні діаметру труби. Слід зазначити, що втрати напору мають таку ж саму розмірність, що й напір,

тобто визначаються розмірністю величини  $\frac{V^2}{2g}$ . Тому, зважаючи

на розмірності  $l$  та  $d$ , коефіцієнт  $\lambda$  має бути безрозмірним.

Коефіцієнт гідравлічного тертя  $\lambda$  в загальному випадку залежить від двох параметрів – числа Рейнольдса  $Re$  та відносної шорсткості труби  $\frac{\Delta}{d}$ , де  $\Delta$  - абсолютна шорсткість, середній розмір виступів. Ця величина коливається від 0,01 мм для чистих

суцільнотягнутих труб з латуні, міді, свинцю до 2,0 мм для старих



сталевих труб. Тобто залежить від матеріалу, з якого виготовлені труби, та віку й умовами їхнього зберігання або експлуатації. Обидва зазначених параметри є величинами безрозмірними.

Встановлено, що при ламінарному русі рідини  $\lambda$  залежить тільки від числа  $Re$  і визначається за формулою Пуазейля-Стокса

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (5.4)$$

При турбулентному режимі  $\lambda$  розраховують за емпіричними формулами, що враховують в тому чи іншому ступені вплив на рух рідини шорсткості труб. Якщо розмір виступів шорсткості  $\Delta$  буде меншим за товщину ламінарної плівки  $\delta_{\text{ПЛ}}$ , нерівності стінки будуть повністю занурені в цьому шарі, турбулентна частина потоку не буде входити в безпосередній контакт зі стінками. Внаслідок цього втрати енергії не будуть залежати від шорсткості стінок, а будуть зумовлені лише властивостями рідини. У цьому випадку поверхня труби називається **гідравлічно гладкою**.

Якщо величина виступів така, що вона перевищує товщину ламінарної плівки, нерівності стінок будуть виступати в турбулентну область, збільшувати безлад руху та істотним чином впливати на величину втрат. У цьому випадку поверхня труби називається шорсткою.

Поняття гладкої чи шорсткої поверхні є відносним, тому що товщина ламінарної плівки залежить від числа  $Re$ , зменшуючись з його збільшенням. Взагалі, приймається наступне співвідношення

$$\delta_{\text{ПЛ}} = \frac{30d}{Re \sqrt{\lambda}},$$

яке встановлює залежність між товщиною ламінарної плівки та числом Рейнольдса.

Весь загальний діапазон чисел Рейнольдса на графіку Нікурадзе, досліді якого були присвячені вивченню гідравлічних опорів у шорстких трубах і які (досліді) були узагальнені в залежності  $lg(100\lambda) - lg Re$ , можна поділити на п'ять таких зон:

1-а зона – ламінарний режим, коли  $\lambda = f(Re)$  (формула (5.4));  
 2-а зона – перехідна з ламінарного режиму в турбулентний;  
 3-а зона – область «гладких труб» при турбулентному режимі, коли

$$\lambda = f(Re);$$

4-зона – область шорстких труб (доквадратична область) при турбулентному режимі, коли  $\lambda = f(Re, \Delta/d)$ ;

5-зона – область «цілком шорстких труб» (квадратична область, де втрати енергії пропорційні квадрату швидкості рідини) при турбулентному режимі, коли  $\lambda = f(\Delta/d)$ .

Приблизні границі окремих зон турбулентного режиму визначаються наступними співвідношеннями.

Для 3-ої зони:  $4000 \leq Re \leq 40 \frac{d}{\Delta}$  (іноді нижню границю приймають рівною  $Re_{кр} = 2320$ ). В цій зоні застосовується формула Блазіуса, яка встановлює залежність коефіцієнта  $\lambda$  тільки від числа  $Re$ , і має вигляд

$$\lambda = \frac{0,3165}{Re^{0,25}}. \quad (5.5)$$

Значення  $\lambda$ , обчислені за формулою (5.5), добре відповідають дійсності при невеликій відносній шорсткості труб і малих значеннях числа  $Re$  (до 70000). При збільшенні  $Re$  формула Блазіуса є невірною і дає применшені значення  $\lambda$ .

Для 4-ої зони:  $40 \frac{d}{\Delta} \leq Re \leq 500 \frac{d}{\Delta}$ . В цій зоні коефіцієнт  $\lambda$  залежить як від числа  $Re$ , так і від шорсткості труб, і застосовується формула А.Д.Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25}. \quad (5.6)$$

Формула (5.5) може бути отримана як окремий випадок формули (5.6) при  $\frac{\Delta}{d} = 0$ .

Для 5-ої зони:  $500 \frac{d}{\Delta} \leq Re$ . В цій зоні коефіцієнт  $\lambda$  залежить від шорсткості труб, і застосовується формула Б.Л.Шифрінсона

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25}. \quad (5.7)$$

При швидкості руху води  $V \geq 1,2$  м/с для водогінних мереж зі сталевих і чавунних труб, що були в експлуатації,  $\lambda$  можна визначати за формулою Ф.А.Шевельова

$$\lambda = \frac{0,021}{d^{0,3}}, \quad (5.8)$$

де  $d$  - діаметр труби (визначається в метрах).

Розглянемо сумісно рівняння (5.3) і рівняння нерозривності потоку (4.1). Виразимо у формулі (4.1) середню швидкість руху рідини через об'ємну витрату  $V = \frac{Q}{\omega}$ , з урахуванням для

круглих труб  $\omega = \frac{\pi d^2}{4}$  формула (5.3) набуває вигляду

$$h_{\lambda} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2 2g} = \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} l Q^2 = A l Q^2, \quad A = \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5}. \quad (5.9)$$

Величину  $A$  (розмірність  $\text{с}^2/\text{м}^6$ ) називають питомим опором труби, дані про  $A$  зведені до таблиць.

З урахуванням (5.9) опір по всій довжині труби  $S_{\lambda} = A l$  і втрати напору складають  $h_{\lambda} = S_{\lambda} Q^2$ .

### III. ВТРАТИ НАПОРУ НА МІСЦЕВИХ ОПОРАХ.

Місцеві опори викликані фасонними частинами, арматурою та іншим обладнанням трубопроводних мереж. В водопровідних мережах втрати напору на місцеві опори зазвичай не дуже великі – на рівні 10-20% від втрат на тертя. В повітропроводах вентиляційних і пневматичних установок втрати на подолання місцевих опорів часто значно перевищують втрати напору на терті. Місцеві втрати також є значними при розрахунку паропроводів.

Місцеві втрати напору залежать від швидкості руху рідини, геометричних розмірів і форми місцевих опорів, і визначаються за формулою Вейсбаха

$$h_M = \zeta \cdot \frac{V^2}{2g}, \quad (5.10)$$

де  $\zeta$  - безрозмірний коефіцієнт, який називається коефіцієнтом місцевого опору. Його величина визначається дослідним шляхом і залежить від вигляду місцевого опору. При турбулентному режимі  $\zeta$  є сталою величиною. А.Д.Альтшуль запропонував визначати коефіцієнти місцевого опору за узагальненою формулою, яка використовується при ламінарному та турбулентному режимах

$$\zeta = \frac{C}{Re} + \zeta_T, \quad (5.11)$$

де  $C$  - коефіцієнт, який залежить від вигляду місцевого опору,  $\zeta_T$  - коефіцієнт місцевого опору при турбулентному режимі (в квадратичній області). Для  $C$  і  $\zeta_T$  існують складені таблиці.

Розглянемо сумісно рівняння (5.10) і рівняння нерозривності потоку (4.1). За аналогією (див. Розділ II) формула (5.10) набуває вигляду

$$h_M = \zeta \cdot \frac{Q^2}{\omega^2 2g} = \frac{8\zeta}{\pi^2 g d^4} Q^2 = S_M Q^2, \quad S_M = \frac{8\zeta}{\pi^2 g d^4}. \quad (5.12)$$

Величину  $S_M$  (розмірність  $c^2/m^5$ ) визначають для певного місцевого опору.

Місцеві опори викликають зміну швидкості руху рідини за величиною (раптові або поступові звуження та розширення потоку), напряду (коліно, кутники, відводи) або водночас за величиною та напрямом (трійник), і за цими ознаками умовно поділяються на певні групи. Окремою групою виділяють втрати, що пов'язані з протіканням рідини через арматуру різного типу (вентилі, крани, зворотні клапани, сітки, відбори). Слід зауважити, що для випадку раптового розширення коефіцієнт місцевих втрат можна отримати теоретичним шляхом, решта коефіцієнтів для раптового звуження, поворотів, діафрагм тощо не може бути визначена теоретично, а встановлюється виключно дослідним шляхом.

Розглянемо схеми деяких характерних місцевих опорів.

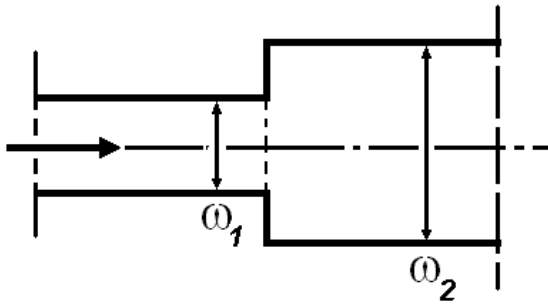


Рисунок 5.1.

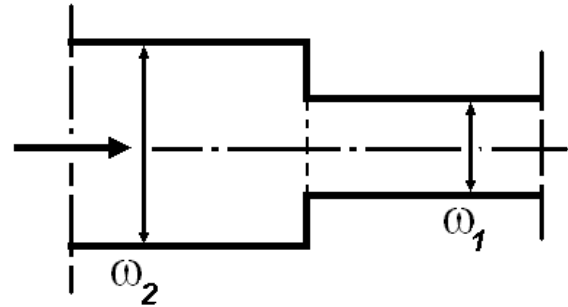


Рисунок 5.2.

На Рисунку 5.1 показано раптове розширення трубопроводу, коли поперечний переріз різко збільшується з величини  $\omega_1$  до  $\omega_2$ . В цьому випадку  $\zeta = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2$ . При раптовому звуженні (Рисунок 5.2) трубопроводу коефіцієнт  $\zeta$  залежить також від співвідношення  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  і визначається дослідним шляхом.

При поступовому розширенні (перехідні конуси, що розширюються, або дифузори – Рисунок 5.3)  $\zeta = k \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2$ , де  $k$  залежить від кута конусності  $\varphi$  і може бути взятий з табличних даних. Однак  $\zeta$  можна визначити за такою формулою

$$\zeta = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2} + \left(\frac{n - 1}{n}\right)^2 \sin \varphi,$$

де  $\lambda$  - коефіцієнт, що враховує втрати напору за довжиною,  $n = \frac{\omega_2}{\omega_1}$  - ступінь розширення дифузора.

При поступовому звуженні (перехідні конуси, що звужуються, або конфузори – Рисунок 5.4)  $\zeta$  можна визначити за такою формулою

$$\zeta = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

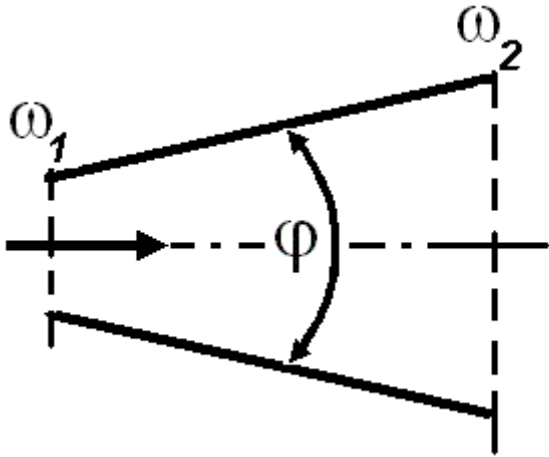


Рисунок 5.3.

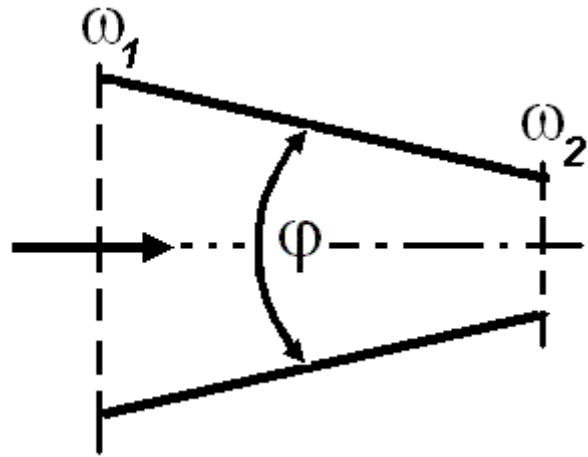


Рисунок 5.4.

Діафрагмою (Рисунок 5.5) називається пластинка з отвором в центрі, яка встановлюється в трубопроводі для вимірювання витрати рідини. В цьому випадку коефіцієнт  $\zeta$  залежить від відношення площі перерізу отвору діафрагми  $\omega_0$  до площі перерізу труби  $\omega$  і може бути визначений за формулою

$$\zeta = \left( 1 + \frac{0,707}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0}{\omega}}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right)^2.$$

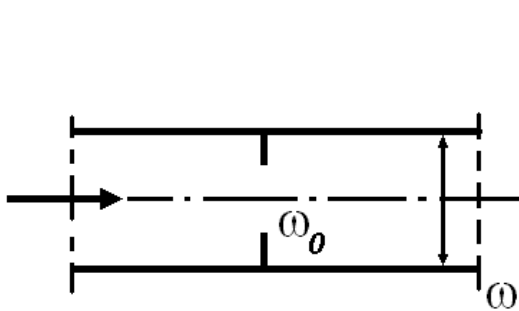


Рисунок 5.5.

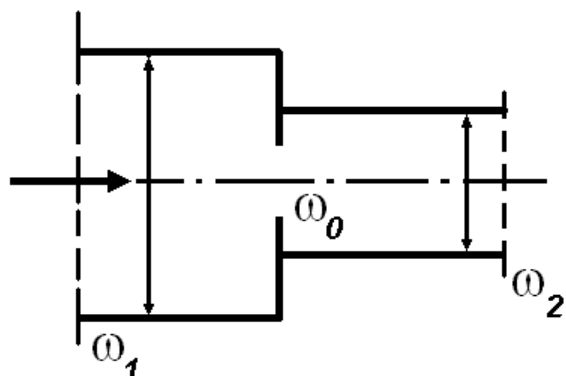


Рисунок 5.6.

Якщо діафрагма встановлена в трубі змінного перерізу (Рисунок 5.6) слід розрізняти так зване «досконале стиснення» при

$\omega_1 > 20\omega_0$  і «недосконале стиснення» при  $\omega_1 < 20\omega_0$ . Коефіцієнт  $\zeta$  в цих випадках представлений у вигляді табличних даних.

В тому випадку, коли труба приєднана до ємності під прямим кутом і має гострі входні кромки (Рисунок 5.7, а), можна приймати  $\zeta = 0,50$ . При плавному вході  $\zeta = 0,04 \div 0,10$  залежно від плавності входу (в середньому можна прийняти  $\zeta = 0,08$ ).

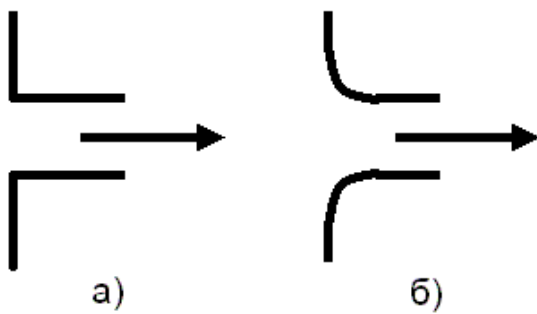


Рисунок 5.7.

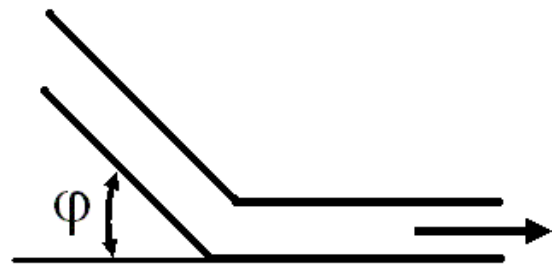


Рисунок 5.8.

Для коліна без закруглення (Рисунок 5.8) при невеликих діаметрах труби  $\zeta$  можна визначити за такою формулою

$$\zeta = 0,946 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2,047 \sin^4 \frac{\varphi}{2},$$

причому для труб з діаметром  $d > 30$  мм  $\zeta$  істотно зменшується.

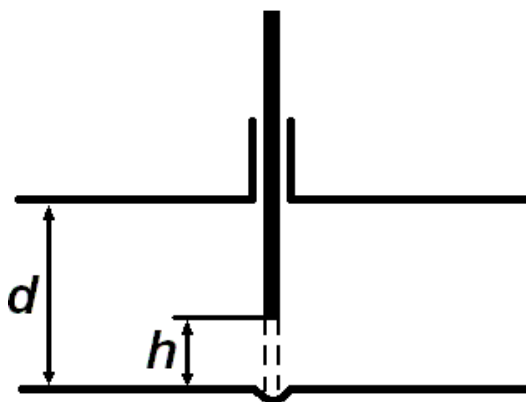


Рисунок 5.9.

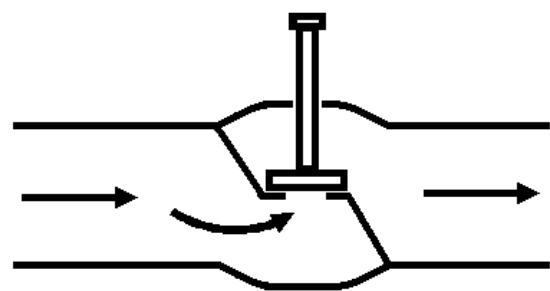


Рисунок 5.10.

Для засувки (Рисунок 5.9) коефіцієнт  $\zeta$  змінюється залежно від ступеня відкриття, що визначається співвідношенням  $h/d$ . Для вентиля (Рисунок 5.10) коефіцієнт  $\zeta \approx 7 \div 16$ , для крану прохідного  $\zeta \approx 2 \div 4$ .

При визначенні коефіцієнтів опору для трійників слід розрізнити два випадки – улиття в магістраль з відведення (Рисунок 5.11) і відтік з магістралі у відведення (Рисунок 5.12).

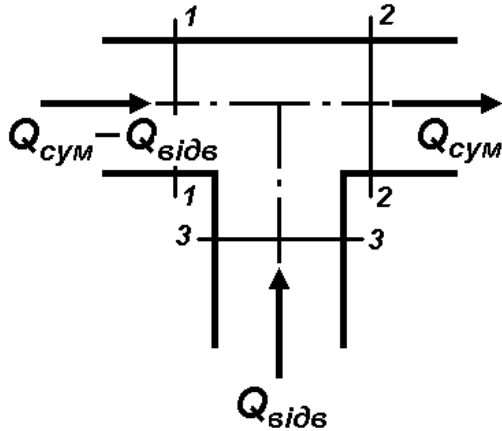


Рисунок 5.11.

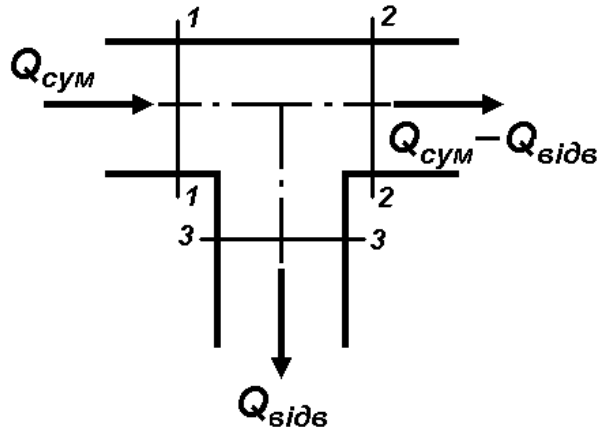


Рисунок 5.12.

На рисунках позначено  $Q_{сум}$  - сумарні витрати,  $Q_{відв}$  - витрати відведення. Для відповідних величин коефіцієнту  $\zeta$  складені таблиці.

#### IV. ВТРАТИ НАПОРУ В ПОЖЕЖНИХ РУКАВАХ.

Для спрощення розрахунків рукавних систем експериментально встановлена величина опору одного рукава довжиною 20 м при робочих напорах, які використовуються у практиці пожежегасіння

$$h = S'_p Q^2, \quad S'_p = A \cdot 20, \quad (5.13)$$

де  $Q$  - витрати рідини (розмірність л/с),  $A$  - питомий опір пожежного рукава (розмірність  $c^2/л^2$ ),  $S'_p$  - опір стандартного (20 м) пожежного рукава (розмірність  $м \cdot c^2/л^2$ ). В Таблиці 5.1. наведені величини  $A$  і  $S'_p$  залежно від діаметра та типу рукава.

Таблиця 5.1.

Діаметр рукава $d$ , мм	Прогумовані рукава		Непрогумовані рукава	
	$S'_p$	$A$	$S'_p$	$A$
51	0,13	0,0065	0,24	0,012
66	0,034	0,0017	0,077	0,00385
77	0,015	0,00075	0,030	0,0015



89	0,007	0,00035	—	—
110	0,0022	0,00011	—	—
150	0,0004	0,00002	—	—

Втрати напору в рукавній лінії, що складається з послідовно з'єднаних  $n$  рукавів

$$h = nS'_p Q^2. \quad (5.14)$$

\*ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

**ЗАДАЧА № 1.** Визначити втрати напору на ділянці трубопроводу довжиною  $l = 400$  м, яка складається з чавунних труб діаметра  $d = 150$  мм під час руху води з об'ємними витратами  $Q = 35$  л/с.

Розв'язання. Визначимо середню швидкість руху води

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 35 \cdot 10^{-3}}{3,1415 \cdot 0,15^2} = 1,98 \text{ м/с.}$$

Оскільки  $V > 1,2$  м/с втрати напору визначаємо за формулою (5.9). Питомий опір чавунної труби визначаємо з таблиці:  $A = 39,54 \text{ с}^2/\text{м}^6$ . Тоді

$$h_\Lambda = 39,54 \cdot 400 \cdot 0,035^2 \approx 19,37 \text{ м.}$$

Як бачимо, під час вирішення задачі необхідно привести розмірності всіх величин відповідно до системи  $SI$ .

Відповідь. Втрати напору  $h_\Lambda \approx 19,37$  м.

**ЗАДАЧА № 2.** По трубі діаметром  $d = 100$  мм, довжиною  $l = 150$  м з об'ємними витратами  $Q = 20$  л/с рухається нафта. Обчислити величину втрат напору  $h_\Lambda$ , якщо абсолютна шорсткість труби  $\Delta = 0,1$  мм, а кінематичний коефіцієнт в'язкості  $\nu = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Розв'язання. Для визначення формули, за якою необхідно розрахувати коефіцієнт  $\lambda$  у формулі (5.3) для обчислення лінійних втрат напору, необхідно знати число Рейнольдса для нафти за умов задачі. Тому

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi \nu d} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{3,1415 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 0,100} = 8488. \text{ При співвід-}$$

ношенні  $\frac{d}{\Delta} = \frac{100}{0,1} = 1000$  будемо користуватися формулою Блазі-

уса (5.5), за якою  $\lambda = \frac{0,3165}{Re^{0,25}} = \frac{0,3165}{8488^{0,25}} = 0,038$ . Швидкість ру-

ху нафти обчислюємо з використанням рівняння нерозривності

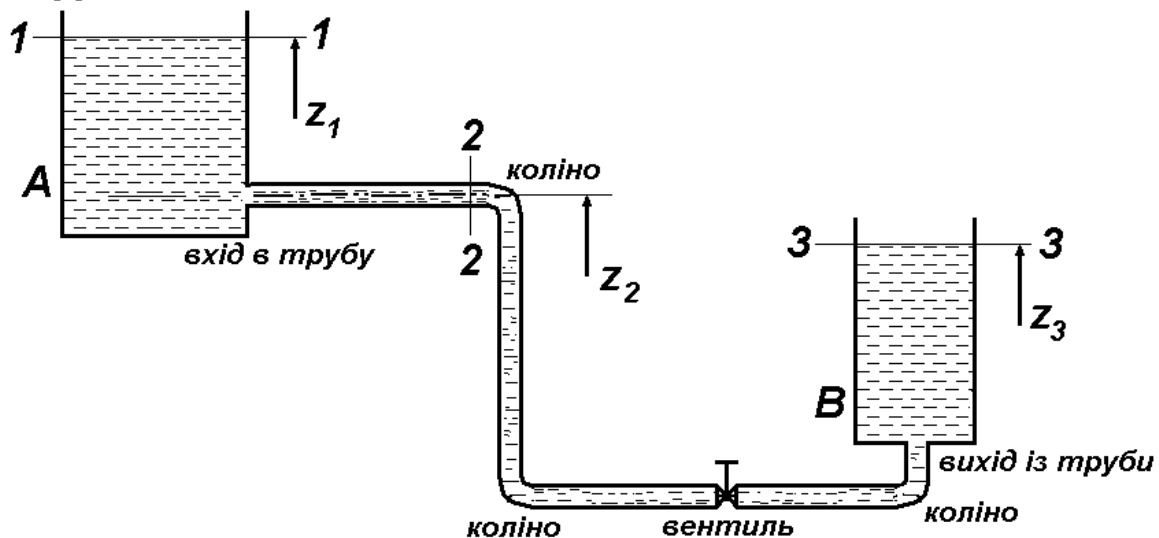
(4.1), тому  $V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{3,1415 \cdot 0,1^2} = 2,547 \text{ м/с}$ . Остаточні втрати

напору обчислюємо за формулою (5.3)

$$h_{\Lambda} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} = 0,038 \cdot \frac{150}{0,100} \cdot \frac{2,547^2}{2 \cdot 9,81} = 18,847 \text{ м.}$$

Відповідь. Втрати напору  $h_{\Lambda} = 18,847 \text{ м}$ .

### **ЗАДАЧА № 3.**



Вода із резервуару  $A$  перетікає в резервуар  $B$  по трубі діаметром  $d = 100 \text{ мм}$  загальною довжиною  $l = 100 \text{ м}$ . Визначити об'ємні витрати  $Q$  і тиск в перерізі 2-2, що знаходиться на відстані  $l_1 = 90 \text{ м}$  від початку труби. Коефіцієнти місцевих опорів: на вході та виході із труби відповідно  $\zeta_{\text{ВХ}} = 0,5$  при гострих кромках вхідного отвору та  $\zeta_{\text{ВИХ}} = 1$ , для коліна з закругленням  $\zeta_{\text{КОЛ}} = 0,4$ , для вентилля  $\zeta_{\text{ВЕНТ}} = 4$ . Геодезичні відмітки відповідних

перерізів  $z_1 = 102,5$  м,  $z_2 = 100$  м,  $z_3 = 99$  м. Для розрахунку лінійних втрат прийняти коефіцієнт  $\lambda = 0,028$ .

Розв'язання. Повні втрати напору в трубі з урахуванням лінійних та місцевих опорів дорівнюють різниці геодезичних рівнів вільних поверхонь у резервуарах

$$z_1 - z_3 = \left( \lambda \frac{l}{d} + \zeta_{\text{ВХ}} + 3\zeta_{\text{КОЛ}} + \zeta_{\text{ВЕНТ}} + \zeta_{\text{ВИХ}} \right) \cdot \frac{V^2}{2g}, \text{ де } V - \text{ шви-}$$

дкість руху води по трубі

$$V = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_3)}{\lambda \frac{l}{d} + \zeta_{\text{ВХ}} + 3\zeta_{\text{КОЛ}} + \zeta_{\text{ВЕНТ}} + \zeta_{\text{ВИХ}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot (102,5 - 99)}{0,028 \cdot \frac{100}{0,1} + 0,5 + 3 \cdot 0,4 + 4 + 1}} \approx$$

$\approx 1,41$  м/с. Витрати води з рівняння нерозривності потоку (4.1)

$$Q = V \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 1,41 \cdot \frac{3,1415 \cdot 0,1^2}{4} = 0,011 \text{ м}^3/\text{с} = 11 \text{ л/с. Для ви-}$$

значення тиску в перерізі 2-2 запишемо рівняння Бернуллі для вільної поверхні 1-1 та перерізу 2-2

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{2-2}, \text{ де } \sum h_{2-2} - \text{ сума ліній-}$$

них та місцевих втрат напору на ділянці від входу в трубу до перерізу 2-2. Враховуючи, що  $P_1 = 0$  та  $V_1 = 0$ , а

$$\sum h_{2-2} = \left( \lambda \frac{l_1}{d} + \zeta_{\text{ВХ}} \right) \cdot \frac{V_2^2}{2g}, \text{ запишемо}$$

$$\frac{P_2}{\rho g} = z_1 - z_2 - \left( 1 + \lambda \frac{l_1}{d} + \zeta_{\text{ВХ}} \right) \cdot \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\text{або } P_2 = \left[ z_1 - z_2 - \left( 1 + \lambda \frac{l_1}{d} + \zeta_{\text{ВХ}} \right) \cdot \frac{V_2^2}{2g} \right] \cdot \rho g =$$

$$= \left[ 102,5 - 100 - \left( 1 + 0,028 \cdot \frac{90}{0,1} + 0,5 \right) \cdot \frac{1,41^2}{2 \cdot 9,81} \right] \cdot 1000 \cdot 9,81 =$$

$-2016,14 \text{ Н/м}^2$ . Отже, знак «-» свідчить, що в перерізі 2-2 встановився невеликий вакуум, який відповідає приблизно 0,206 м вод. ст.

Відповідь. Об'ємні витрати  $Q = 11$  л/с, тиск  $P_2 = -2016,14 \text{ Н/м}^2$ .

**ЗАДАЧА № 4.** Визначити втрати напору в рукавній лінії довжиною  $l = 160$  м (прогумовані рукава), діаметром  $d = 66$  мм під час руху води з об'ємними витратами  $Q = 12$  л/с.

Розв'язання. З Таблиці 5.1. знаходимо  $S'_p = 0,044$  м·с<sup>2</sup>/л<sup>2</sup>. Тоді кі-

лькість рукавів  $n = \frac{l}{20} = 8$ . Остаточню за формулою (5.14)

$$h = 8 \cdot 0,044 \cdot 12^2 = 50,69 \text{ м.}$$

Відповідь. Втрати напору  $h = 50,69$  м.

## ЛЕКЦІЯ № 6. ГІДРАВЛІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ТРУБОПРОВОДІВ.

### I. ТРУБОПРОВОДИ ТА ТРУБОПРОВОДНІ МЕРЕЖІ.

Залежно від з'єднання окремих ділянок трубопроводи поділяють на прості та складні. **Простий** – це трубопровід, що складається з однієї нитки труб постійного діаметра або послідовних ділянок різного діаметра без бокових відгалужень. Прості трубопроводи можуть бути з'єднані послідовно, паралельно або розгалужено.

**Складний** трубопровід, або трубопровідна мережа, містить в собі декілька ділянок, в яких прості трубопроводи з'єднані послідовно, паралельно або розгалужено в різних комбінаціях.

Трубопровідні мережі поділяються на тупикові (незамкнені) і кільцеві (замкнені). Залежно від кількості місцевих опорів виділяють трубопроводи **короткі** та **довгі**. В короткому трубопроводі втрати напору на місцевих опорах складають більше 8% від поздовжніх втрат, в довгому – менше 8%.

Для гідравлічного розрахунку трубопроводів і мереж використовуються рівняння нерозривності потоку, Бернуллі, формули для визначення числа Рейнольдса, гідравлічного коефіцієнта тертя, втрат напору по довжині та місцевих втрат.

### II. РОЗРАХУНОК І ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТОГО ТРУБОПРОВОДУ.

Схема зазначеного трубопроводу з постійним діаметром показана на Рисунку 6.1.

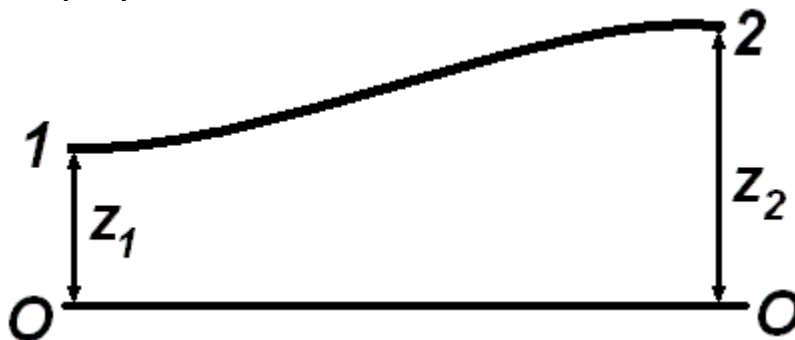


Рисунок 6.1.

Для його розрахунку необхідно визначити 1-й і 2-й перерізи, в яких починається та закінчується рух рідини, позначити

умовну горизонтальну площину. Для зазначених перерізів записують рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини (за формулою (4.6))

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2} \quad (6.1)$$

й аналізують всі величини, що входять до нього.

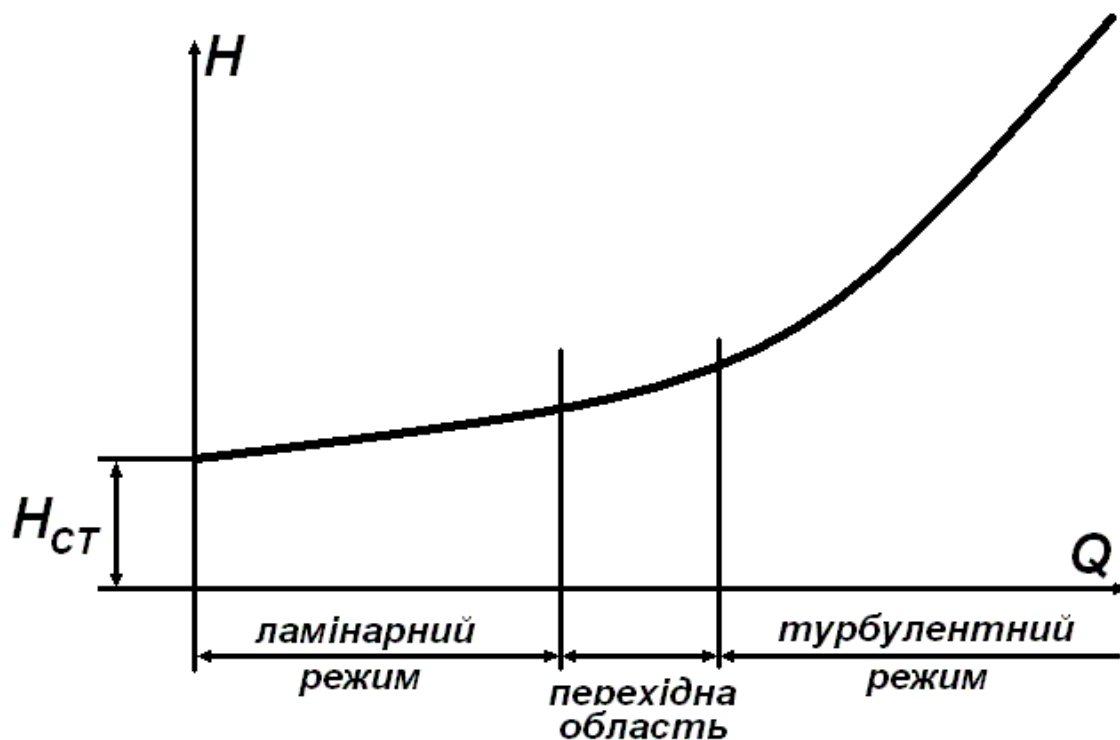


Рисунок 6.2.

В даному випадку швидкість руху рідини за умов постійного діаметра трубопроводу  $V_1 = V_2$ . Після перетворень з урахуванням виконаного аналізу одержують вираз для потрібного напору  $H_{\Pi}$ , тобто напору на початку трубопроводу, необхідного для руху рідини

$$H_{\Pi} = \frac{P_1}{\rho g} = z_2 - z_1 + \frac{P_2}{\rho g} + \sum h_{1-2} = H_{ст} + \sum h_{1-2}, \quad (6.2)$$

де  $H_{CT} = z_2 - z_1 + \frac{P_2}{\rho g}$  - статичний напір, величина якого не залежить від витрати рідини, а загальні втрати напору визначаються у вигляді

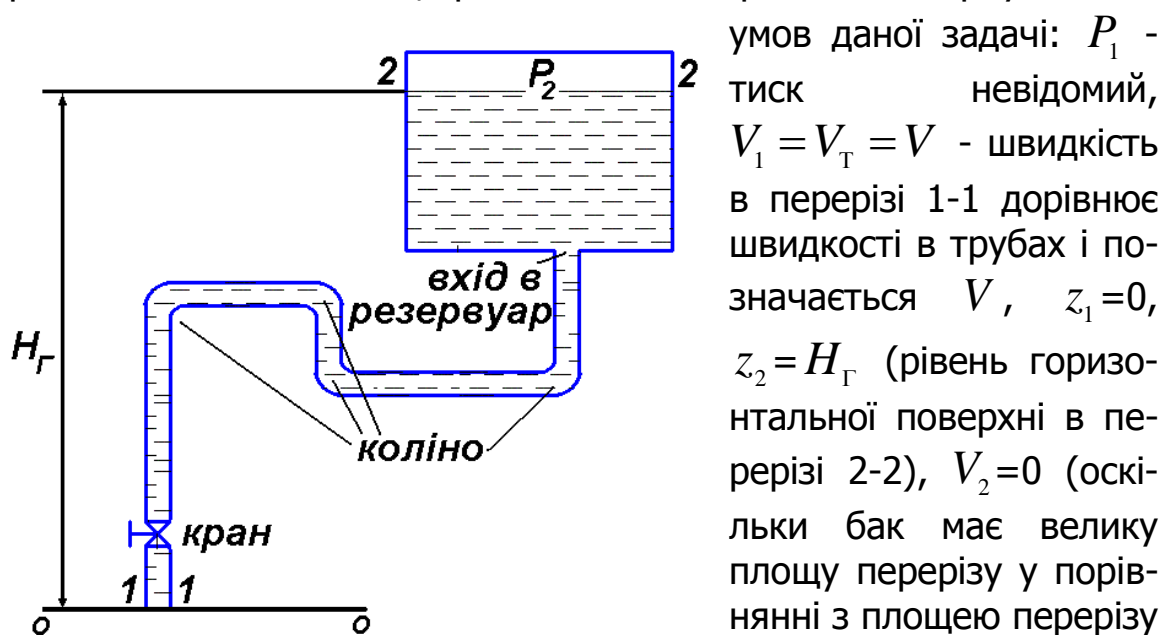
$$\sum h_{1-2} = h_{\Lambda} + h_M = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} + \sum \zeta \cdot \frac{V^2}{2g} = \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \cdot \frac{8Q^2}{\pi^2 g d^4}. \quad (6.3)$$

Графічна залежність потрібного напору від витрати рідини називається характеристикою трубопроводу (Рисунок 6.2).

Користуючись цією характеристикою, для будь-якої витрати можна визначити потрібний напір і навпаки.

**ЗАДАЧА № 1.** Визначити напір, який потрібно створити на початку трубопроводу для подачі в бак води з кінематичною в'язкістю  $\nu = 8 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$ . Довжина трубопроводу  $l = 80 \text{ м}$ , його діаметр  $d = 100 \text{ мм}$ , витрати води  $Q = 15 \text{ л/с}$ , висота  $H_{\Gamma} = 15 \text{ м}$ , тиск в баку  $P_2 = 200 \text{ кПа}$ . Коефіцієнт опору крана  $\zeta_1 = 5$ , коліна  $\zeta_2 = 0,8$ , входу в резервуар  $\zeta_3 = 1$ , шорсткість стінок труб  $\Delta = 0,04 \text{ мм}$ .

Розв'язання. Вибравши перерізи 1-1, 2-2, а також положення горизонтальної площини, робимо аналіз рівняння Бернуллі для умов даної задачі:



труби). Визначаємо втрати напору, які складаються з лінійних втрат і місцевих втрат (кран, чотири коліна, вхід в бак)

$$\sum h_{1-2} = \left( \lambda \frac{l}{d} + \zeta_1 + 4\zeta_2 + \zeta_3 \right) \cdot \frac{8Q^2}{\pi^2 g d^4}. \quad \text{Потрібний напір}$$

$$H_{\Pi} = \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + H_{\Gamma} + \left( \lambda \frac{l}{d} + \zeta_1 + 4\zeta_2 + \zeta_3 \right) \frac{8Q^2}{\pi^2 g d^4}. \quad \text{В}$$

цьому виразі всі величини, окрім  $\lambda$  відомі, для визначення якого необхідно знайти число Рейнольдса

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu} = \frac{4 \cdot 15 \cdot 10^{-3}}{3,1415 \cdot 100 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-7}} \approx 238732. \quad \text{Режим}$$

руху турбулентний і тому коефіцієнт гідравлічного опору знаходимо за формулою А.Д.Альтшуля (5.6)

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25} = 0,11^4 \sqrt[4]{\frac{68}{238732} + \frac{0,04}{100}} = 0,0178. \quad \text{Тепер}$$

остаточно визначаємо потрібний напір

$$H_{\Pi} = \frac{200 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9,81} + 15 + \left( 0,0178 \frac{80}{0,1} + 5 + 4 \cdot 0,8 + 1 \right) \cdot \frac{8 \cdot 0,015^2}{3,1415^2 \cdot 9,81 \cdot 0,1^4}$$

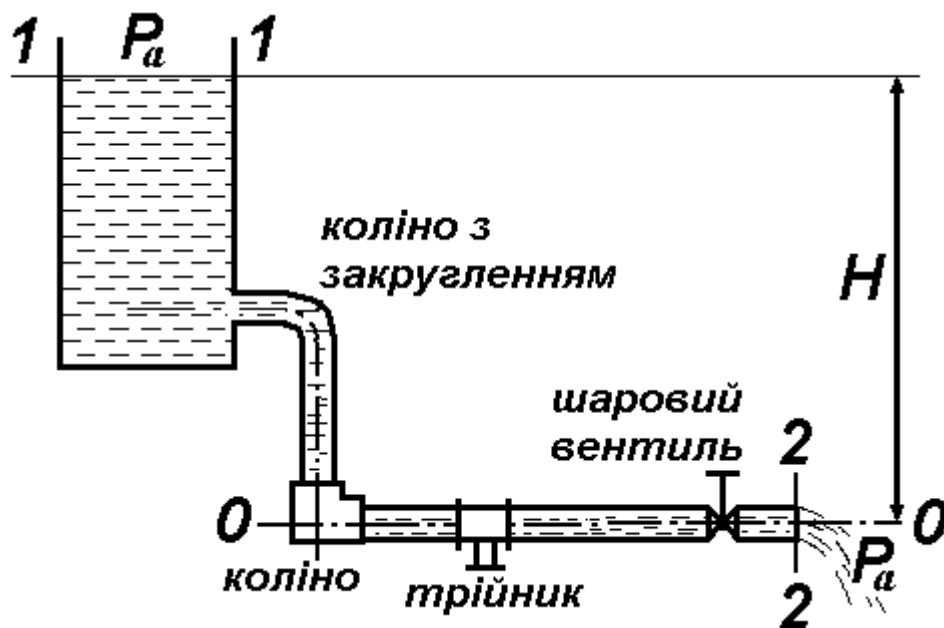
= 39,7 м. Після цього необхідний тиск в перерізі 1-1 визначається як  $P_1 = \rho g H_{\Pi} = 10^3 \cdot 9,81 \cdot 39,7 = 389,46 \cdot 10^3 \text{ Па} \approx 0,39 \text{ МПа}$ .

Як завжди, наголошуємо, що під час вирішення задачі необхідно привести розмірності всіх величин відповідно до системи  $SI$ , за одним винятком. В формулі для визначення  $\lambda$  присутній доданок  $\Delta/d$ , в якому обидві величини є лінійними розмірами. Тому саме тут за рахунок скорочення можна ці величини брати в будь-якій лінійній розмірності, але обов'язково однаковій. Під час вирішення задачі обраною розмірністю є міліметр.

Відповідь. Потрібний напір  $H_{\Pi} = 39,7 \text{ м}$ .

**ЗАДАЧА № 2.** Визначити напір  $H_{\Pi}$ , необхідний для пропуску витрат води  $Q = 12 \text{ л/с}$  по старому сталевому трубопроводу (див. Рисунок). Загальна довжина трубопроводу  $l = 200 \text{ м}$ , його діаметр  $d = 100 \text{ мм}$ , кінематична в'язкість води  $\nu = 0,0131 \text{ см}^2/\text{с}$ .





Розв'язання. Знайдемо швидкість руху води та режим руху

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,012}{3,1415 \cdot 0,1^2} = 1,53 \text{ м/с}; \quad Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{153 \cdot 10}{0,0131} =$$

116000, де  $Q = 0,012 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $d = 0,1 \text{ м}$ . Розмірність величин у виразі для визначення числа Рейнольдса:  $V$  - см/с,  $d$  - см,  $\nu$  - см<sup>2</sup>/с.

Складемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2 відносно площини 0-0. Нехтуючи швидкісним напором в першому перерізі, враховуючи, що манометричний тиск в обох перерізах дорівнює нулю (атмосферний тиск не враховується), отримуємо

$$H = H_{\Pi} = z_2 - z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + h_{1-2}.$$

Діаметр трубопроводу по всій довжині постійні, тому  $V_2 = V$ , а втрати напору дорівнюють

$$h_{1-2} = h_{\Lambda} + \sum h_{\text{М}} = \lambda \frac{l}{d} + \zeta_{\text{ВХ}} + \zeta_{\text{КОЛ1}} + \zeta_{\text{КОЛ2}} + \zeta_{\text{ТР}} + \zeta_{\text{ВЕНТ}},$$

де  $\zeta_{\text{ВХ}} = 0,5$  при гострих кромках вхідного отвору,  $\zeta_{\text{КОЛ1}} = 0,4$  для коліна з закругленням,  $\zeta_{\text{КОЛ2}} = 1,7$  для коліна без закруглення,  $\zeta_{\text{ТР}} = 3,8$  для трійника і  $\zeta_{\text{ВЕНТ}} = 2,5$  для шарового вентиля.

Тоді потрібний напір  $H_{\Pi}$

$$H_{\Pi} = \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} + \zeta_{\text{ВХ}} + \zeta_{\text{КОЛ1}} + \zeta_{\text{КОЛ2}} + \zeta_{\text{ТР}} + \zeta_{\text{ВЕНТ}} \right) \cdot \frac{V^2}{2g}.$$

Для визначення коефіцієнта  $\lambda$  скористаємось формулою А.Д.Альтшуля (5.6)  $\lambda = 0,11 \left( \frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25}$ , де для сталевих звар-

них труб приймаємо  $\Delta = 2$  мм, тому

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25} = 0,11 \left( \frac{68}{116000} + \frac{2}{100} \right)^{0,25} = 0,0417 \approx 0,042.$$

Остаточно

$$H_{\Pi} = \left( 1 + 0,042 \cdot \frac{200}{0,1} + 0,5 + 0,4 + 1,7 + 3,8 + 2,5 \right) \cdot \frac{1,53^2}{2 \cdot 9,81} =$$

11,2 м.

Відповідь. Потрібний напір  $H_{\Pi} = 11,2$  м.

### III. РОЗРАХУНОК І ХАРАКТЕРИСТИКИ СКЛАДНОГО ТРУБОПРОВОДУ.

На Рисунку 6.3 показано приклад складного розгалуженого, а на Рисунку 6.4 – складеного з декількох ліній трубопроводів.

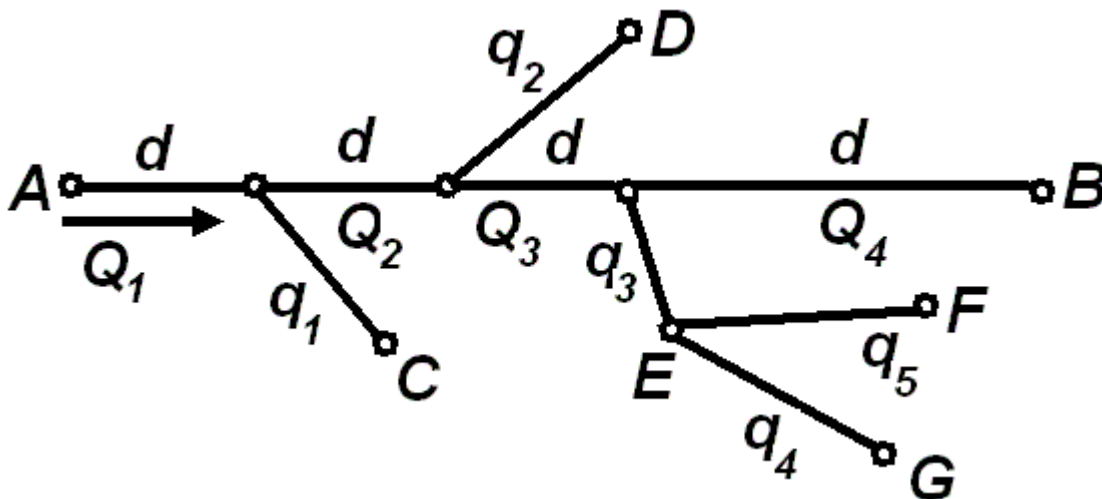


Рисунок 6.3.

Розрахунок складних трубопроводів виходить за межі змісту нашого курсу і зазвичай вивчається в спеціальних курсах водопостачання або трубопроводів. Тому розглянемо лише найпростіші приклади розрахунків трубопроводів, беручи до уваги лише лінійні втрати напіру  $h_{\lambda} = SQ^2$ . Вважаємо, що опір

$S = A \cdot l$  ( $A$  - питомий опір трубопроводу) будь-якої труби та витрати  $Q$  в неї є відомими.

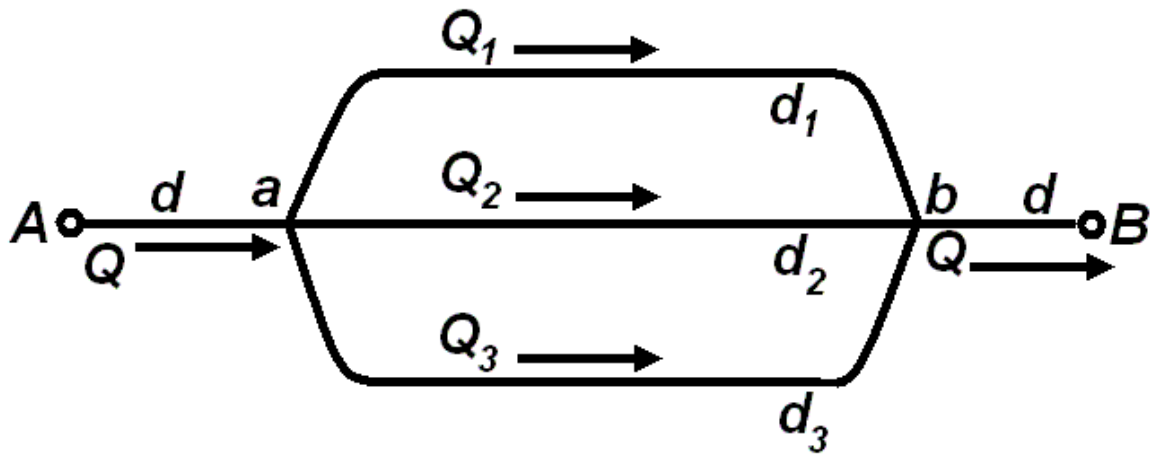


Рисунок 6.4.

Система з послідовно з'єднаних труб. В цьому випадку витрати в кожній ділянці є величиною постійною. Для  $n$  труб запишемо

$$Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n, \quad (6.4)$$

а сумарний опір системи дорівнює сумі опорів окремих ділянок

$$S_{\text{сист}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n. \quad (6.5)$$

Система з паралельно з'єднаних труб. В цьому випадку витрати  $Q$  в ділянці, яка розгалужується на  $n$  ділянок, дорівнюють сумі витрат в кожній ділянці. Для  $n$  труб запишемо

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n, \quad (6.6)$$

а опір системи визначається наступним чином

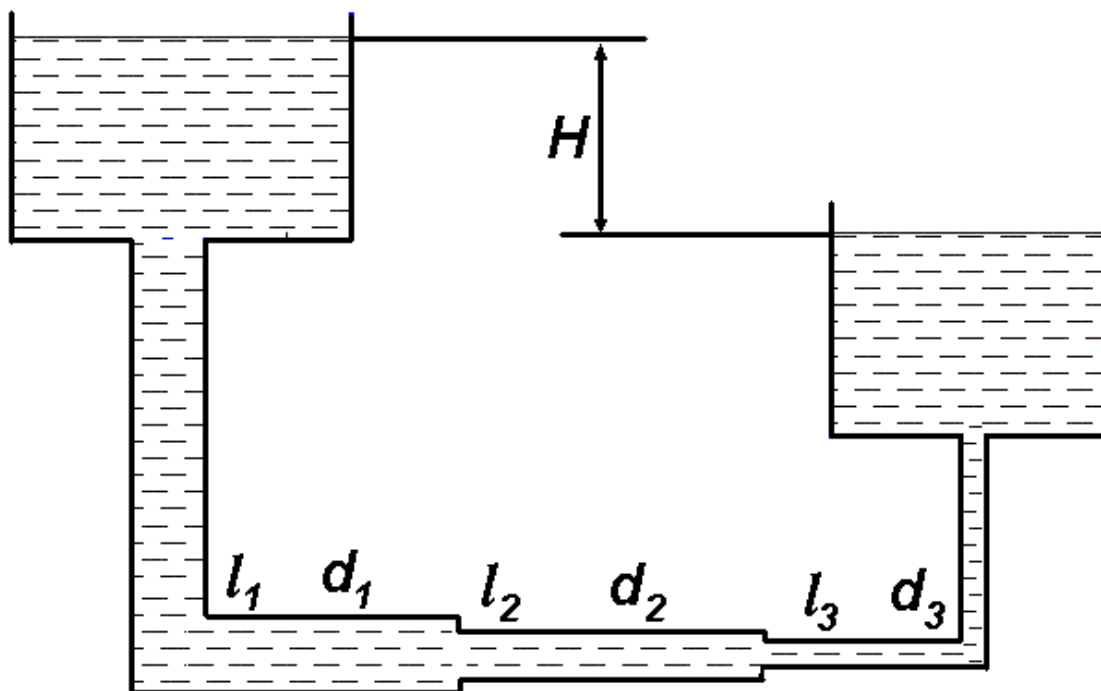
$$S_{\text{сист}} = \frac{1}{\left( \frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{S_n}} \right)^2}. \quad (6.7)$$

Якщо опори кожної ділянки однакові  $S = S_1 = S_2 = \dots = S_n$ , то

$$S_{\text{сист}} = \frac{S}{n^2}.$$

Неважко відмітити аналогію з законами Кірхгофа, що застосовуються при розрахунках паралельного та послідовного з'єднання провідників. В цьому випадку ідеологічно витратам  $Q$  відповідає електричний струм  $I$ , втратам напору  $h$  - електрична напруга  $U$ , а опору трубопроводу  $S$  - опір провідника  $R$ .

**ЗАДАЧА № 3.** Визначити втрати напору на кожній ділянці трубопроводу, якщо різниця напорів в вежах  $H = 12$  м, а діаметри та довжини окремих ділянок відповідно дорівнюють:  $d_1 = 200$  мм,  $l_1 = 900$  м,  $d_2 = 175$  мм,  $l_2 = 650$  м,  $d_3 = 150$  мм,  $l_3 = 750$  м. Місцевими опорами знехтувати, абсолютну шорсткість труб прийняти  $\Delta = 1$  мм.



Розв'язання. Напір  $H$  повністю витрачається на подолання опорів трубопроводу, тому для послідовно з'єднаних труб:

$$H = (l_1 \cdot A_1 + l_2 \cdot A_2 + l_3 \cdot A_3) \cdot Q^2.$$

З табличних даних, залежно від діаметра і шорсткості трубопроводу визначаємо питомі опори кожної ділянки:  $A_1 = 7,87$  с<sup>2</sup>/м<sup>6</sup>,

$A_2 = 16,1 \text{ c}^2/\text{м}^6$ ,  $A_3 = 36,2 \text{ c}^2/\text{м}^6$ . Звідси можна визначити витрати води через трубопровід

$$Q = \sqrt{\frac{H}{l_1 A_1 + l_2 A_2 + l_3 A_3}} = \sqrt{\frac{12}{900 \cdot 7,87 + 650 \cdot 16,1 + 750 \cdot 36,2}} = 0,0164 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Втрати напору на першій ділянці:

$$h_1 = l_1 \cdot A_1 \cdot Q^2 = 900 \cdot 7,87 \cdot 0,0164^2 = 1,9 \text{ м}.$$

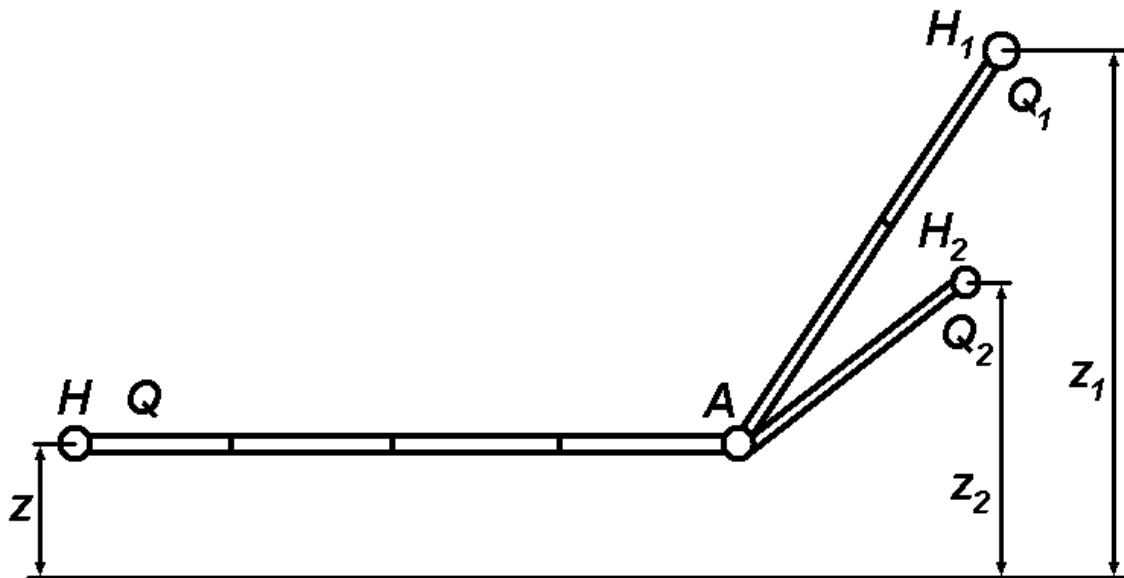
Втрати напору на другій ділянці:

$$h_2 = l_2 \cdot A_2 \cdot Q^2 = 650 \cdot 16,1 \cdot 0,0164^2 = 2,8 \text{ м}.$$

Втрати напору на третій ділянці:

$$h_3 = l_3 \cdot A_3 \cdot Q^2 = 750 \cdot 36,2 \cdot 0,0164^2 = 7,3 \text{ м}.$$

Відповідь. Втрати напору на кожній ділянці  $h_1 = 1,9 \text{ м}$ ,  $h_2 = 2,8 \text{ м}$ ,  $h_3 = 7,3 \text{ м}$ .



**ЗАДАЧА № 4.** Рукавна лінія має на висоті  $z = 1 \text{ м}$  горизонтальну ділянку з чотирьох послідовно з'єднаних прогумованих рукавів діаметром  $d_1 = 77 \text{ мм}$ , яка переходить у два розгалуження. Перше утворене двома, а друге – одним непрогумованими рукавами діаметром  $d_2 = 51 \text{ мм}$ . Кінець першого розгалуження знаходиться на висоті  $z_1 = 8 \text{ м}$ , а другого -  $z_2 = 3 \text{ м}$ . Напір на вході в рукавну лінію  $H = 70 \text{ м}$ , а об'ємні витрати  $Q = 9 \text{ л/с}$ . Обчислити напори

$H_1$ ,  $H_2$  та об'ємні витрати  $Q_1$ ,  $Q_2$  на кінцях розгалужень, якщо різниця  $H_2 - H_1 = 4$  м.

Розв'язання. Обчислимо опори окремих ділянок. При цьому скористаємось довідниковими даними (Таблиця 5.1). Для першого типу рукавів  $S'_{P1} = 0,015$  (м·с<sup>2</sup>/л<sup>2</sup>), для другого  $S'_{P2} = 0,24$  (м·с<sup>2</sup>/л<sup>2</sup>). Втрати напору на окремих ділянках визначаються за формулою (5.14)  $h = nS'_p Q^2$ . Опір на горизонтальній ділянці  $S = 4 \cdot S'_{P1} = 4 \cdot 0,015 = 0,06$  (м·с<sup>2</sup>/л<sup>2</sup>), на першому розгалуженні  $S_1 = 2 \cdot S'_{P2} = 2 \cdot 0,24 = 0,48$  (м·с<sup>2</sup>/л<sup>2</sup>), на другому розгалуженні  $S_2 = 1 \cdot S'_{P2} = 1 \cdot 0,24 = 0,24$  (м·с<sup>2</sup>/л<sup>2</sup>).

З рівності напорів у спільній точці розгалужень (точка А) одержимо  $H_2 + S_2 \cdot Q_2^2 + (z_2 - z) = H_1 + S_1 \cdot Q_1^2 + (z_1 - z)$ . Використовуючи (6.6), запишемо  $Q_2 = Q - Q_1$  і підставимо в наведений вираз, щоб знайти  $Q_1$

$$Q_1 = \sqrt{\left(\frac{S_2 \cdot Q}{S_1 - S_2}\right)^2 + \frac{S_2 \cdot Q^2 + H_2 - H_1 + z_2 - z_1}{S_1 - S_2} - \frac{S_2 \cdot Q}{S_1 - S_2}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0,24 \cdot 9}{0,48 - 0,24}\right)^2 + \frac{0,24 \cdot 9^2 + 4 + 3 - 8}{0,48 - 0,24} - \frac{0,24 \cdot 9}{0,48 - 0,24}} =$$

3,563 л/с, звідки  $Q_2 = Q - Q_1 = 9 - 3,563 = 5,437$  л/с. Аналізуючи рукавну лінію, запишемо  $H - H_1 = S \cdot Q^2 + S_1 \cdot Q_1^2 + (z_1 - z)$ ,  $H - H_2 = S \cdot Q^2 + S_2 \cdot Q_2^2 + (z_2 - z)$  та визначимо відповідні напори

$$H_1 = H - S \cdot Q^2 - S_1 \cdot Q_1^2 - (z_1 - z) = 70 - 0,06 \cdot 9^2 - 0,48 \cdot 3,563^2 - 7 = 52,046 \text{ м,}$$

$$H_2 = H - S \cdot Q^2 - S_2 \cdot Q_2^2 - (z_2 - z) = 70 - 0,06 \cdot 9^2 - 0,24 \cdot 5,437^2 - 2 = 56,046 \text{ м.}$$

Відповідь. На кінцях розгалужень напори  $H_1 = 52,046$  м,  $H_2 = 56,046$  м та об'ємні витрати  $Q_1 = 3,563$  л/с,  $Q_2 = 5,437$  л/с.

ЛЕКЦІЯ № 7. РІВНЯННЯ ГАЗОСТАТИКИ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ  
ДЛЯ ПОТОКУ ГАЗУ. РОЗРАХУНОК ГАЗОПРОВОДІВ.

I. РІВНЯННЯ СТАНУ ТА НЕРОЗРИВНОСТІ ДЛЯ ГАЗУ.

Параметри газу, які при стисканні та розширенні змінюються, пов'язані між собою рівнянням Менделєєва-Клапейрона для ідеального газу, тобто для будь-якого газу при тиску до 10 МПа

$$PW = \frac{m}{\mu} RT, \text{ або } P = \frac{m}{W} \cdot \frac{R}{\mu} T = \rho R_m T, \quad (7.1)$$

де  $P$  - абсолютний тиск,  $W$  - об'єм газу,  $T$  - абсолютна температура,  $\rho$  - густина газу,  $\mu$  - молярна маса газу,  $R$  - молярна газова стала  $R = 8,3144 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$ ,  $R_m$  - газова стала певного газу. Для повітря (див. Таблицю 1.2)  $R_m = 286,7 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ , для природного газу  $R_m = 519,6 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ .

Рух газу в газопроводах може відбуватися при таких процесах:

- політропному  $PW^n = const$  - враховується теплообмін між газом, газопроводом і навколишнім середовищем, процес характеризується постійною теплоємністю;
- адіабатному  $PW^k = const$  - без теплообміну з навколишнім середовищем;
- ізотермічному  $PW = const$  - при постійній температурі.

Показник політропи змінюється в межах  $n = 1,15 \div 1,8$  залежно від умов теплообміну між газом, газопроводом і навколишнім середовищем. При інтенсивному теплообміні показник політропи

має менше значення. Показник адіабати  $k = \frac{C_p}{C_v}$  ( $C_p$  - теплоєм-

ність газу при постійному тиску,  $C_v$  - теплоємність при постійному об'ємі), для повітря  $k = 1,41$ , для природного газу  $k = 1,31$ , для інертних газів  $k = 1,67$ , для багатоатомних газів  $k = 1,33$ .

При русі газу зі зміною тиску змінюється його густина, але масова витрата вздовж потоку залишається постійною, що призводить до запису рівняння нерозривності у вигляді

$$M = \rho V \omega,$$

або

$$\rho_1 V_1 \omega_1 = \rho_2 V_2 \omega_2 = \rho \omega V = \text{const}. \quad (7.2)$$

## II. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ГАЗУ.

Для газів (подібно до стисливих рідин) рівняння Бернуллі у диференціальній формі має вигляд

$$dz + \frac{dP}{\rho g} + \frac{VdV}{g} + dh_{1-2} = 0. \quad (7.3)$$

Інтегрування його за довжиною  $l$  від першого до другого перерізів дає рівняння

$$z_2 - z_1 + \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho g} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \sum h_{1-2} = 0. \quad (7.4)$$

Інтеграл  $\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho g}$  можна визначити, якщо відома залежність

$$\rho = f(P).$$

Для ізотермічного процесу, коли  $\rho = \frac{P}{R_m T}$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{R_m T dP}{P g} = \frac{R_m T}{g} \ln P \Big|_{P_1}^{P_2} = \frac{R_m T}{g} \ln \frac{P_2}{P_1},$$

і рівняння Бернуллі набуває вигляду

$$z_1 + \frac{R_m T}{g} \ln P_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{R_m T}{g} \ln P_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}. \quad (7.5)$$



При політропному процесі  $\frac{P_1}{\rho_1^n} = \frac{P_2}{\rho_2^n}$ ,  $\rho_2 = \rho_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{n}}$ , тому

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho g} = \frac{n}{n-1} \left( \frac{P_2}{\rho_2 g} - \frac{P_1}{\rho_1 g} \right).$$

Після перетворень отримуємо рівняння Бернуллі

$$z_1 + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{P_1}{\rho_1 g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{P_2}{\rho_2 g} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}. \quad (7.6)$$

При адіабатному процесі показник політропи  $n$  замінюється показником адіабати  $k$ , але загальний вигляд рівняння (7.6) залишається незмінним.

### III. РІВНЯННЯ ГАЗОСТАТИКИ.

При рівновазі газу його швидкість  $V$ , тому основне рівняння газостатики можна отримати з рівнянь Бернуллі для газів. При ізотермічному процесі рівняння (7.5) перетворюється на

$$z_1 + \frac{R_m T}{g} \ln P_1 = z_2 + \frac{R_m T}{g} \ln P_2, \quad (7.7)$$

або  $z_2 - z_1 = R_m T \ln \frac{P_1}{P_2}$  (це рівняння визначає розподіл тиску по

висоті при рівновазі газу в ізотермічних умовах), а при політропному процесі рівняння (7.6) перетворюється на

$$z_1 + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{P_1}{\rho_1 g} = z_2 + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{P_2}{\rho_2 g}. \quad (7.8)$$

### IV. РОЗРАХУНОК ГАЗОПРОВОДІВ.

Перекачування по трубах газів (природний і штучний газ, повітря, пар) має досить широке застосування для різних ці-

лей (побутових і технічних). У порівнянні з рухом рідини рух газів характеризується низкою особливостей, що зумовлено різницею фізичних властивостей крапельних рідин і газоподібних рідин. З точки зору гідравлічних розрахунків слід розрізняти два випадки: течія при малих відносних перепадах тиску і течія при великих перепадах (мається на увазі перепад  $\Delta P$  між початковим і кінцевим перерізами труб, віднесений до середнього тиску). Також треба пам'ятати – при розрахунках течії в трубах газів зазвичай розглядаються втрати не напором, а тиску.

При малих перепадах тиску, коли значення  $\frac{\Delta P}{P_c} \cdot 100 < 5\%$ , де  $\Delta P = P_1 - P_2$ ,  $P_c = \frac{P_1 + P_2}{2}$  стисненням газу можна нехтувати і прийняти, що густина газу вздовж газопроводу не змінюється. Прикладами таких газопроводів можуть бути вентиляційні системи. У цьому випадку розрахунок проводиться за рівнянням Бернуллі у формі тиску

$$\rho g(z_1 - z_2) + P_1 - P_2 + \rho \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \Delta P. \quad (7.9)$$

Оскільки густина газу  $\rho$  невелика, то  $\rho g(z_1 - z_2) = 0$ , а якщо діаметр постійний ( $V_1 = V_2$ ), то рівняння Бернуллі спрощується до

$$P_1 - P_2 = \Delta P, \quad (7.10)$$

де сума втрат тиску  $\Delta P = \Delta P_\lambda + \sum \Delta P_M = \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \cdot \frac{\rho V^2}{2}$ ,

тобто до суми втрат на тертя та місцеві втрати. Величина  $\rho \frac{V^2}{2} = \frac{\rho V^2}{2g}$  називається динамічним тиском. Коефіцієнт  $\lambda$  ви-

значається за відомими формулами для нестисливих рідин.

Вентиляційні труби часто мають не круглий переріз, тому замість діаметра в наведене рівняння для  $\Delta P$  вводять еквівалентний діаметр. До того ж, при розрахунках вентиляції втрати на місцеві опори мають, як правило, більшу величину у порівнянні з втратами на тертя. В довгих газопроводах, навпаки, втрати тиску

на місцеві опори невеликі, тому одним з видів опорів, зважаючи на об'єкт, який розраховується, можна нехтувати.

При розрахунках довгих газопроводів, а також трубопроводів стисненого повітря мають місце значні перепади тиску між початковою і кінцевою точками трубопроводу. При цьому, при великих перепадах тиску, коли  $\frac{\Delta P}{P_c} \cdot 100 > 5\%$ , густина газу сут-

тєво зменшується і збільшуються об'ємні витрати та швидкість. Масові витрати не змінюються. Рух газу навіть при збереженні постійності діаметра по довжині трубопроводу є нерівномірним. Дійсно, згідно з рівнянням нерозривності (7.2) при  $\omega = const$  і  $\rho V = const$ , але тиск газу по довжині трубопроводу зменшується, тобто зменшується його густина, водночас зростає швидкість течії газу, яка в кінцевій точці газопроводу завжди вище, ніж у початковій точці.

Вважається, що у більшості промислових газопроводів проходить ізотермічний процес, при якому  $T$  є сталою величиною. За наявності теплообміну між газом та навколишнім середовищем температура газу  $T$  може зберігатися постійною по всій довжині газопроводу (ізотермічна течія), що дорівнює температурі навколишнього середовища. Це зазвичай має місце для довгих трубопроводів без теплової ізоляції, тому більшість промислових газопроводів працює в умовах ізотермічної течії.

Для елементарно малої ділянки газу, на якій зміною геометричної висоти можна нехтувати, об'ємна вага газу та швидкість його течії можна вважати незмінними, диференціальне рівняння Бернуллі має вигляд

$$\frac{dP}{\rho g} + \frac{VdV}{g} = -\lambda \frac{dl}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}. \quad (7.11)$$

Для інтегрування цього рівняння необхідно знати характер зміни швидкості, об'ємної ваги та коефіцієнта гідравлічного тертя вздовж газопроводу, тобто  $V = f_1(l)$ ,  $\rho g = f_2(l)$ ,  $\lambda = f_3(l)$ . Після інтегрування цього рівняння з урахуванням (7.1) та (7.2) маємо

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{2} = \left( \lambda \frac{L}{D} + 2 \ln \frac{P_1}{P_2} \right) \cdot \frac{M^2}{2\omega^2} R_m T. \quad (7.12)$$

Величиною  $2 \ln \frac{P_1}{P_2}$  можна знехтувати у порівнянні з  $\lambda \frac{L}{D}$ , тому

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{2} = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{M^2}{2\omega^2} R_m T, \quad (7.13)$$

звідки масові витрати  $M = \sqrt{\frac{(P_1^2 - P_2^2) D \omega^2}{\lambda L R_m T}}$ .

Коефіцієнт гідравлічного тертя  $\lambda$ , визначається за формулами, що використовуються для нестисливих рідин. У випадку турбулентної течії, застосовуючи формулу А.Д.Альтшуля (5.6) з приведенням до нормальних умов (поняття, яке визначається в метрології) – температура 0°C, тиск 760 мм рт. ст., отримуємо формулу

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{L} = 1,45 \left( \frac{K_E}{D} + 1922 \frac{Dv}{Q} \right)^{0,25} \cdot \frac{Q^2}{D^5} \rho g,$$

де  $P_1$  і  $P_2$  - абсолютний тиск газу на початку та в кінці газопроводу;  $L$  - його довжина, км;  $d$  - діаметр трубопроводу, см;  $K_E$  - еквівалентна шорсткість стінок трубопроводу, см;  $\rho$  - густина газу;  $Q$  - об'ємні витрати газу, м<sup>3</sup>/година;  $v$  - кінематичний коефіцієнт в'язкості, приведений до нормальних умов.

\*ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

**ЗАДАЧА № 1.** Визначити тиск повітря на висоті 200 м над рівнем моря, якщо при температурі  $t = 27^\circ\text{C}$  тиск на рівні моря атмосферний.

Розв'язання. За формулою (7.1) визначаємо густину повітря з урахуванням, що для нього  $P_1 = 101325$  Па,  $R_m = 286,7$  Дж/(кг·К).

$$\text{Тоді } \rho = \frac{P}{R_m T} = \frac{101325}{286,7 \cdot (273,15 + 27)} = 1,18 \text{ кг/м}^3. \text{ Для постійної}$$

густини розподіл тиску за висотою визначається:  $P_2 = P_1 + \rho g(z_1 - z_2) = P_1 - \rho g(z_2 - z_1)$  (аналогічно до нестисливої рідини). Остаточню  $P_2 = 101325 - 1,18 \cdot 200 = 101089$  Па.

Відповідь. Тиск дорівнює 101089 Па.

**ЗАДАЧА № 2.** Визначити висоту ізотермічної атмосфери та політропічної атмосфери.

Розв'язання. За формулою (7.7) визначаємо

$$H = z_2 - z_1 = R_m T \ln \frac{P_1}{P_2}. P_1 \text{ і } z_1 - \text{ тиск і відмітка на рівні моря. В}$$

найвищій точці  $P_2 = 0$ . Оскільки при  $P_2 \rightarrow 0 \ln \frac{P_1}{P_2} \rightarrow \infty$ , висота  $H$

ізотермічної атмосфери дорівнює нескінченості. Для знаходження висоти політропічної атмосфери тиск на рівні моря приймаємо

$P_1 = 101325$  Па, густина  $\rho = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>, показник політропи  $n = 1,4$ . З рівняння (7.8) з урахуванням  $P_2 = 0$  можна отримати

$$z_2 - z_1 = H = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{P_1}{\rho g} = \frac{1,4}{1,4-1} \cdot \frac{101325}{1,29 \cdot 9,81} = 28023 \text{ м.}$$

Відповідь. При ізотермічному стані висота атмосфери  $H$  дорівнює нескінченості, при політропічному стані висота атмосфери  $H$  дорівнює приблизно 28 км.

## ЛЕКЦІЯ № 8. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ НЕУСТАЛЕНОГО РУХУ РІДИНИ. ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР В ТРУБОПРОВОДІ.

### I. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ НЕУСТАЛЕНОГО РУХУ РІДИНИ.

Неусталеним (нестационарним) називають такий рух рідини, при якому швидкість, витрати, тиск в окремих точках потоку з часом змінюються. Неусталений рух рідини відбувається при швидкому вмиканні та вимиканні подачі рідини в установках пожежегасіння, при різкому відкритті та закритті кранів у водопровідній мережі, при пуску та зупинці насосів.

Під час нестационарного руху рідини в трубопроводі, тобто під час руху з прискоренням, в ньому діє інерційний напір  $h_i$ , який для труби постійного діаметра обчислюється за формулою

$$h_i = \frac{a_p l}{g}, \text{ де } a_p - \text{ прискорення рідини, } l - \text{ довжина трубопроводу.}$$

Рівняння Бернуллі в цьому випадку має вигляд

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{1-2} \pm h_i. \quad (8.1)$$

Члени цього рівняння представляють суму п'езометричного  $z + \frac{P}{\rho g}$ , швидкісного  $\frac{\alpha V^2}{2g}$  та інерційного  $h_i$  напорів. При розгоні потоку напір  $h_i$  є додатним ( $h_i > 0$ ), при гальмуванні напір  $h_i$  є від'ємним ( $h_i < 0$ ).

### II. ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР В ТРУБАХ.

**Гідравлічний удар** – це різке збільшення тиску в рідині, що виникає в трубопроводі при миттєвій зміні швидкості руху.

Процес характеризується чергуванням різких підвищень і знижень тиску, що відбуваються за досить малий проміжок часу. Наприклад, при раптовій зупинці насоса, що має привід від електродвигуна, потік води в напірному трубопроводі спочатку зупиняється, а потім під дією гідростатичного тиску і сили ваги змінює напрямок і спрямовується до насоса, зустрічаючи на своєму шля-

ху зворотний клапан. При закритті клапана відбудеться гідравлічний удар, що миттєво підвищить тиск у трубопроводі.

Вперше гідравлічний удар в трубах описаний М.Є.Жуковським, який у 1898 році дав теоретичне обґрунтування цього явища і запропонував метод його розрахунку. Розглянемо явища, що відбуваються в рідині, яка рухається під тиском  $P$  з постійною швидкістю  $V$  при раптовому закритті крана.

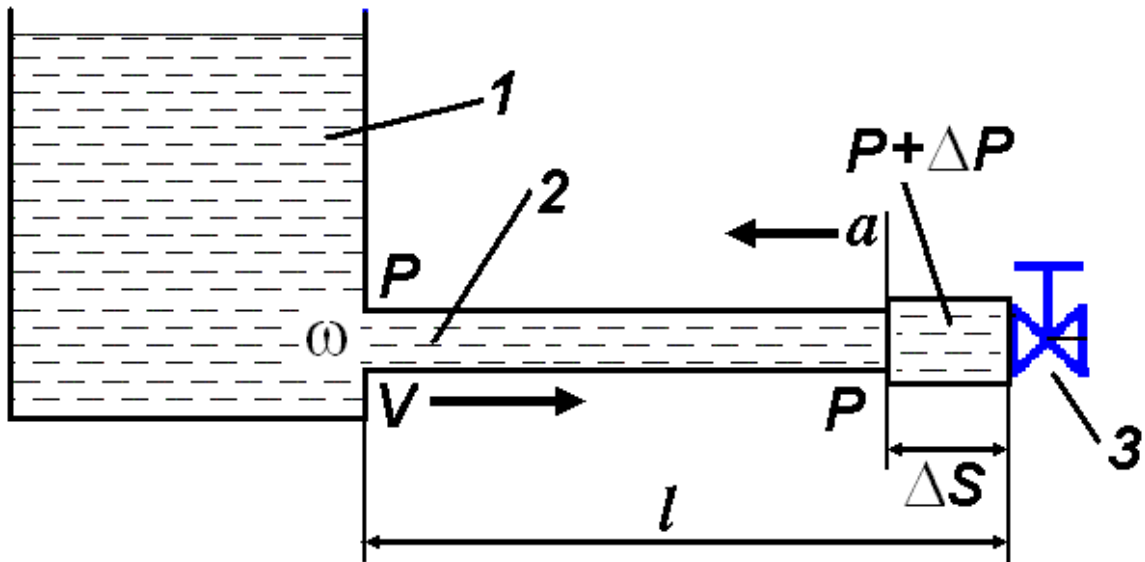


Рисунок 8.1.

На Рисунку 8.1 цифрами позначені: 1 – напірний резервуар, 2 – трубопровід, 3 – кран.

Якби рідина була абсолютно нестислива, а труба абсолютно тверда і нездатна до деформацій, то рідина зупинилася б по всій трубі одночасно. У дійсності, внаслідок деякого стискування рідини і деформації стінок труби, рідина зупиняється поступово; спочатку зупиняється шар  $\Delta S$ , розташований безпосередньо в крані, потім наступний і так далі. Швидкість руху рідини безпосередньо в крані дорівнюватиме нулю, а кінетична енергія потоку буде витрачена на стискування рідини та розширення стінок труби. Внаслідок стиснення рідини тиск у ній збільшується на  $\Delta P$ , а безпосередньо в крані виникає ударна хвиля, спрямована в сторону резервуара. Повна зупинка рідини в трубі відбудеться тоді, коли ударна хвиля досягне резервуара, в цей момент у всій трубі встановиться тиск  $P + \Delta P$ . Внаслідок різниці тисків рідина почне надходити з труби в резервуар, а ударна хвиля переміщується в зворотному напрямку. Після зниження тиску у всій трубі знову

почнеться рух рідини від резервуара до крана і так буде тривати доти, доки коливання не згаснуть внаслідок втрат енергії на тертя і деформацію стінок труби.

Нехтуючи силами тертя і ваги, відповідно до теореми про зміну кількості руху запишемо залежність

$$F \cdot \Delta t = mV - mV_s, \quad (8.2)$$

де  $F$  - сила тиску рідини в шарі  $\Delta S$ ,  $\Delta t$  - час утворення шару  $\Delta S$ ,  $m$  - маса рідини в зупиненому шарі,  $V$  - початкова швидкість рідини в трубі,  $V_s$  - швидкість у зупиненому шарі, котра дорівнює нулю. У свою чергу  $F = \Delta P \cdot \omega$ ,  $m = \rho \omega \cdot \Delta S$ , де  $\omega$  - площа перерізу труби, тоді

$$\Delta P = \rho V \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (8.3)$$

позначаючи через  $\frac{\Delta S}{\Delta t} = a$  швидкість поширення ударної хвилі остаточно запишемо формулу М.Є.Жуковського

$$\Delta P = \rho a V. \quad (8.4)$$

Швидкість поширення ударної хвилі визначається як

$$a = \sqrt{\frac{E_p}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{E_p \cdot d'}{E_T \cdot \delta}}}, \quad (8.5)$$

де  $E_p$  - модуль пружності рідини, Па;  $\rho$  - густина рідини, кг/м<sup>3</sup>;  $d'$  - внутрішній діаметр труби, м;  $E_T$  - модуль пружності матеріалу труби, Па;  $\delta$  - товщина стінок труби, м. Під час розрахунків, зважаючи на співвідношення у знаменнику  $d'/\delta$  двох лінійних величин, суворою вимогою до кожної з них дотримання розмірності системи  $SI$  не існує. Тобто ці величини можна підставляти до формули в будь-якій лінійній (можна позасистемній), але



обов'язково однаковій, розмірності, наприклад, в сантиметрах або міліметрах.

Якщо вважати матеріал труби абсолютно непружним ( $E_T \rightarrow \infty$ ), то формула (8.5) перетворюється на  $a = \sqrt{\frac{E_P}{\rho}}$  і швидкість поширення ударної хвилі в цьому випадку дорівнює швидкості поширення звука в рідині.

Для води  $E_P \approx 2 \cdot 10^9$  Па,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, тому  $\sqrt{\frac{E_P}{\rho}} \approx 1425$  м/с. Для різного матеріалу труб можна обчислити величину  $E_P/E_T$ :

- 1) сталеві -  $E_P/E_T = 0,01$ ;
- 2) чавунні -  $E_P/E_T = 0,02$ ;
- 3) бетонні -  $E_P/E_T = 0,1$ ;
- 4) азбестоцементні -  $E_P/E_T = 0,11$ ;
- 5) дерев'яні -  $E_P/E_T = 0,2$ ;
- 6) вінілпластові -  $E_P/E_T = 0,68 \dots 0,73$ ;
- 7) поліетиленові -  $E_P/E_T = 1,0 \dots 1,45$ .

Неважно відмітити, що за рівних умов (геометричних розмірів) швидкість поширення ударної хвилі значно вища в трубах, зроблених з матеріалів, у яких модуль пружності вище. Внаслідок цього і підвищення тиску в них теж буде значно вищим.

Формула Жуковського справедлива для прямого гідравлічного удару, коли час закриття  $t_{зак}$  крану або засувки менший за  $t_{фаз}$  - фазу гідравлічного удару, тобто за час подвійного пробігу ударної хвилі вздовж трубопроводу довжиною  $l$

$$t_{фаз} = \frac{2l}{a}. \quad (8.6)$$

При  $t_{зак} > t_{фаз}$  виникає непрямий гідравлічний удар, і тоді підвищення тиску визначається за формулою М.З.Френкеля

$$\Delta P = \rho a V \cdot \frac{t_{\text{фаз}}}{t_{\text{зак}}}. \quad (8.7)$$

З цієї формули можна зробити деякі висновки. По-перше, підвищення тиску при непрямому ударі завжди буде меншим, ніж при прямому, що зумовлено співвідношенням  $t_{\text{зак}} > t_{\text{фаз}}$ . По-друге, чим повільніше закривається кран, тим менше будуть підвищення тиску в трубі, тобто цим можна послабити негативний вплив гідравлічного удару.

Для запобігання ушкодження трубопроводів при виникненні гідравлічного удару вживають різні заходи. Найбільш ефективний метод зниження тиску – це усунення можливості прямого гідравлічного удару при збільшенні часу закриття запірної і регулюючої апаратури. На водопровідних лініях встановлюють повітряні ковпаки, що дозволяє зменшити тиск за рахунок стиснення повітря у ковпаку.

Гідравлічний удар може також зіграти корисну роль. Якщо в трубі існує пошкодження, для його знайдення необхідно розкопати значну ділянку трубопроводу. Уникнути важкої роботи та точно визначити положення течі дозволяє невеликий гідравлічний удар. Він створить хвилю, що рухається по трубопроводу, яка, відбившись від місця пошкодження, повернеться через деякий час. По цьому часу легко визначити відстань до пошкодженої ділянки.

Газ у порівнянні з рідиною має значно меншу рідину та й швидкість поширення звука в ньому у декілька разів менша, тому газ, навіть знаходячись під більшим тиском, не може створювати удар, подібний гідравлічному. Тому конструкція газового крану значно простіша – поворот важеля на чверть оберту одразу перекриває рух газу по трубі.

#### \*ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

**ЗАДАЧА № 1.** По чавунному трубопроводу  $d = 300$  мм, довжиною  $l = 3$  км подається вода зі швидкістю  $V = 1,3$  м/с. Товщина стінки труби  $\delta = 12,5$  мм. Визначити підвищення тиску  $\Delta P$  для двох випадків: 1) час закриття засувки  $t_{\text{зак}} = 4$  с; 2) час закриття засувки  $t_{\text{зак}} = 8$  с.

Розв'язання. За формулою (8.5) знаходимо швидкість поширення ударної хвилі, підставляючи лінійні розміри в міліметрах

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^9}{10^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 0,02 \cdot \frac{300}{12,5}}} = 1171 \text{ м/с.}$$

За формулою (8.6) знайдемо фазу гідравлічного удару

$$t_{\text{фаз}} = \frac{2 \cdot 3000}{1171} = 5,12 \text{ с.}$$

Тому у першому випадку

$t_{\text{зак}} < t_{\text{фаз}}$  ( $4 < 5,12$ ), отже удар прямий, для визначення  $\Delta P$  застосовуємо формулу Жуковського (8.4)  $\Delta P = 10^3 \cdot 1,3 \cdot 1171 = 1522300 \text{ Па} = 1,52 \text{ МПа}$ . У другому випадку  $t_{\text{зак}} > t_{\text{фаз}}$  ( $8 > 5,12$ ), отже удар непрямої, для визначення  $\Delta P$  застосовуємо формулу Френкеля (8.7)  $\Delta P = 10^3 \cdot 1,3 \cdot 1171 \cdot \frac{5,12}{8} = 975000 \text{ Па} = 0,975 \text{ МПа}$ .

Відповідь: підвищення тиску  $\Delta P$  при прямому ударі 1,52 МПа, при непрямої 0,975 МПа.

**ЗАДАЧА № 2.** По сталевому трубопроводу  $d = 200 \text{ мм}$ , довжиною  $l = 100 \text{ м}$  подається вода з об'ємними витратами  $Q = 200 \text{ м}^3/\text{годину}$ . Товщина стінки труби  $\delta = 10 \text{ мм}$ . Визначити підвищення тиску  $\Delta P$  для двох випадків: 1) час закриття засувки  $t_{\text{зак}} = 0,1 \text{ с}$ ; 2) час закриття засувки  $t_{\text{зак}} = 1,0 \text{ с}$ .

Розв'язання. За формулою (8.5) знаходимо швидкість поширення ударної хвилі, підставляючи лінійні розміри в міліметрах

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^9}{10^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 0,01 \cdot \frac{200}{10}}} = 1300 \text{ м/с.}$$

За формулою (8.6) знайдемо фазу гідравлічного удару

$$t_{\text{фаз}} = \frac{2 \cdot 100}{1300} = 0,154 \text{ с.}$$

Середня швидкість води в трубі, використовуючи рівняння нерозривності потоку, визначається наступним чином

$$V = \frac{Q}{3600} \cdot \frac{4}{\pi d^2} = \frac{200 \cdot 4}{3600 \cdot 3,1415 \cdot (200 \cdot 10^{-3})^2} = 1,77 \text{ м/с.}$$

У першому випадку  $t_{\text{зак}} < t_{\text{фаз}}$  ( $0,1 < 0,154$ ), отже удар прямий, для визначення  $\Delta P$  застосовуємо формулу Жуковського (8.4)

$$\Delta P = 10^3 \cdot 1,77 \cdot 1300 = 2302134 \text{ Па} \approx 2,3 \text{ МПа.}$$

У другому випадку

$t_{\text{зак}} > t_{\text{фаз}}$  ( $1 > 0,154$ ), отже удар непрямої, для визначення  $\Delta P$  застосовуємо формулу Френкеля (8.7)

$$\Delta P = 10^3 \cdot 1,77 \cdot 1300 \cdot \frac{0,154}{1} = 354000 \text{ Па} = 0,354 \text{ МПа.}$$

**Відповідь:** підвищення тиску  $\Delta P$  при прямому ударі 2,3 МПа, при непрямому 0,354 МПа.

**ЗАДАЧА № 3.** Визначити напруження, що виникають при гідравлічному ударі в чавунному трубопроводі, скориставшись рішенням задачі № 1.

**Розв'язання.** При підвищенні тиску на  $\Delta P$  в трубопроводі з діаметром  $d$  і товщиною стінок  $\delta$  виникає приріст окружних напружень  $\Delta \sigma_{\theta} = \frac{\Delta P \cdot d}{2\delta}$ . Тому при прямому ударі за умов  $d = 300$  мм,

$$\delta = 12,5 \text{ мм, } \Delta P = 1,52 \text{ МПа } \Delta \sigma_{\theta} = \frac{1,52 \cdot 300}{2 \cdot 12,5} = 18,24 \text{ МПа,}$$

при не-

$$\text{прямої ударі при } \Delta P = 0,975 \text{ МПа } \Delta \sigma_{\theta} = \frac{0,975 \cdot 300}{2 \cdot 12,5} = 11,7$$

МПа.

**Відповідь.** Додаткові напруження, що виникають при прямому ударі,  $\Delta \sigma_{\theta} = 18,24$  МПа, при непрямої ударі -  $\Delta \sigma_{\theta} = 11,7$  МПа.

ЛЕКЦІЯ № 9. ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ОТВОРІВ, НАСАДОК І ЧЕРЕЗ КОРОТКІ ТРУБОПРОВОДИ.

I. ВИТІКАННЯ РІДИНИ З КРУГЛОГО ОТВОРУ В ТОНКІЙ СТІНЦІ.

Розглянемо випадок сталого витікання рідини через круглий отвір діаметром  $d$  у вертикальній тонкій стінці резервуару при постійному напорі  $H$  (Рисунок 9.1).

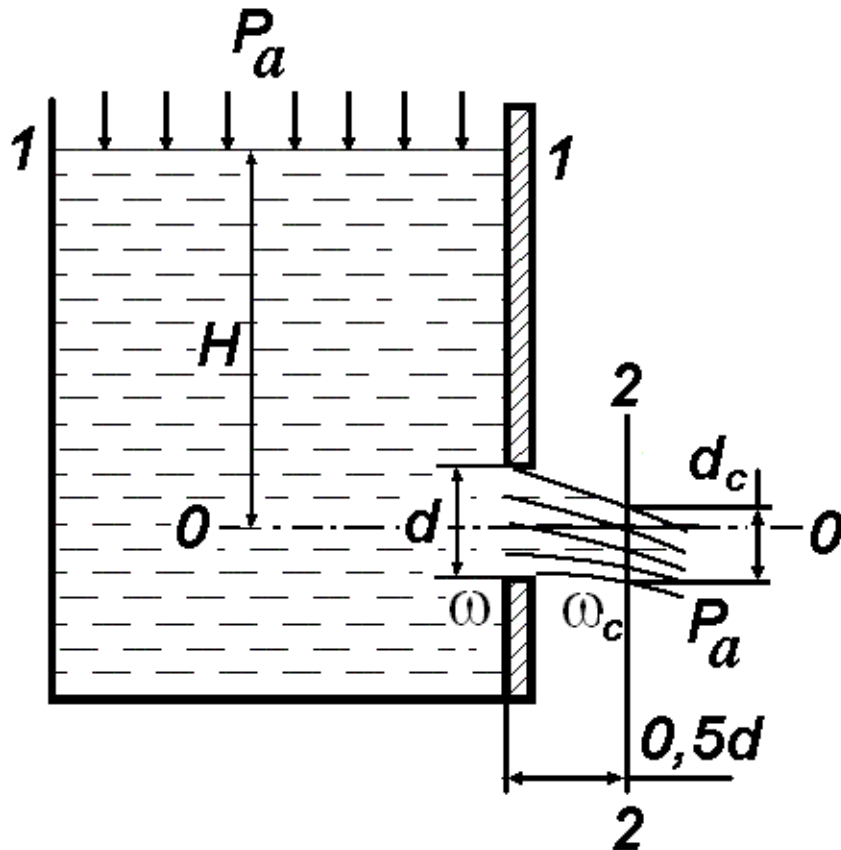


Рисунок 9.1.

На підході рідини до отвору траєкторії частин, що рухаються, мають криволінійну непаралельну форму. В струмені виникають відцентрові сили, під дією яких струмінь звужується, сягаючи найменших розмірів у перерізі 2-2 (приблизно на відстані  $0,5d$  від площини отвору). Це явище характерне для витікання рідини з отворів в тонкій стінці з гострими кромками.

Ступінь стиснення струменя визначається **коефіцієнтом стиснення**

$$\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega}, \quad (9.1)$$

де  $\omega$  - площа переріза отвору,  $\omega_c$  - площа перерізу стисненого струменя. Внаслідок непаралельності траєкторій і кривизни елементарних струминок рідини для ділянки між отвором і стисненим струменем рівняння Бернуллі в звичайній формі застосовувати неможливо. Тому при виводі формул для визначення швидкості витікання вказане рівняння складають не для перерізу в самому отворі, а для стисненого струменя на деякій відстані від нього – там, де рух рідини змінюється повільно, траєкторії струминок можна вважати паралельними, а тиск розподіляється за гідростатичними законом.

Для визначення швидкості витікання рідини з отвору запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2 відносно горизонтальної площини 0-0 (аналогічно рівнянню (4.6))

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h. \quad (9.2)$$

Втрати напору між перерізами визначаються за формулою Вейсбаха (5.10)

$$h = \zeta_0 \cdot \frac{V_2^2}{2g}, \quad (9.3)$$

де  $\zeta_0$  - коефіцієнт опору отвору. Оскільки  $z_1 = H$ ,  $z_2 = 0$ ,  $V_1 = 0$ ,  $P_1 = P_2 = P_a$ , то рівняння (9.2) з урахуванням (9.3) спрощується

$$H = \frac{V_2^2}{2g} + \zeta_0 \frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \cdot (1 + \zeta_0), \quad (9.4)$$

звідки швидкість витікання дорівнює

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}} \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}, \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}}, \quad (9.5)$$

де  $\varphi$  - **коефіцієнт швидкості**. Якщо  $\varphi = 1$ , тобто відсутній опір отвору – відверта ідеалізація реального процесу, отримуємо тео-

ретичну швидкість витікання рідини через отвір  $V_{\text{ТЕОР}} = \sqrt{2gH}$ . Водночас з (9.5) можна отримати коефіцієнт опору як функцію  $\varphi$

-  $\zeta_0 = \frac{1}{\varphi^2} - 1$ . Витрати рідини, що витікає з отвору, дорівнюють для стисненого струменя

$$Q = V_2 \omega_c = \varepsilon \varphi \omega \sqrt{2gH} = \mu \omega \sqrt{2gH}, \quad \mu = \varepsilon \cdot \varphi. \quad (9.6)$$

Добуток  $\varepsilon \cdot \varphi$  називають **коефіцієнт витрати** і позначають  $\mu$ , тоді остаточно  $Q = \mu \omega \sqrt{2gH}$ . Використовуючи останню формулу, можна визначити напір  $H$  перед отвором

$$H = \frac{Q^2}{\mu^2 \omega^2 2g}. \quad (9.7)$$

Формула для визначення витрат рідини через боковий отвір має той же вигляд, що й для донного отвору. Допущені при виводі цієї формули неточності виправляються уточненням значень коефіцієнту витрати  $\mu$ .

Слід зазначити, що знаходження отвору відносно дна та стінок резервуару істотно впливає на досконалість стиснення струменя, що призводить до певних обмежень в застосуванні отриманих формул. Стиснення називається досконалим, якщо отвір знаходиться на значній відстані від стінок, тому останні не впливають на характер витікання. Дослідами встановлено що таке стиснення має місце тоді, коли відстань  $\epsilon$  не меншою, ніж потроєний діаметр отвору. Для прямокутного отвору ця відстань дорівнює потроєним значенням розмірів прямокутника.

Часто при досконалomu стисненні для визначених вище коефіцієнтів стиснення, витрати і швидкості приймають середні значення, знайдені дослідним шляхом  $\varepsilon = 0,64$ ,  $\mu = 0,62$ ,  $\varphi = 0,97$ .

## II. ВИТІКАННЯ РІДИН З НАСАДОК.

Насадкою називається приєднана до отвору в стінці резервуару коротка трубка того ж діаметра, що й отвір. Зазвичай

довжина насадки  $l = 3 \div 4d$ . Найбільш поширеними типами насадок є (див. Рисунок 9.2):

- 1) циліндрична насадка – зовнішня (а) та внутрішня (б);
- 2) конічна насадка – збіжна (в) та розбіжна (г);
- 3) коноїдальна насадка криволінійного контуру, яка має форму стисненого струменя (д).

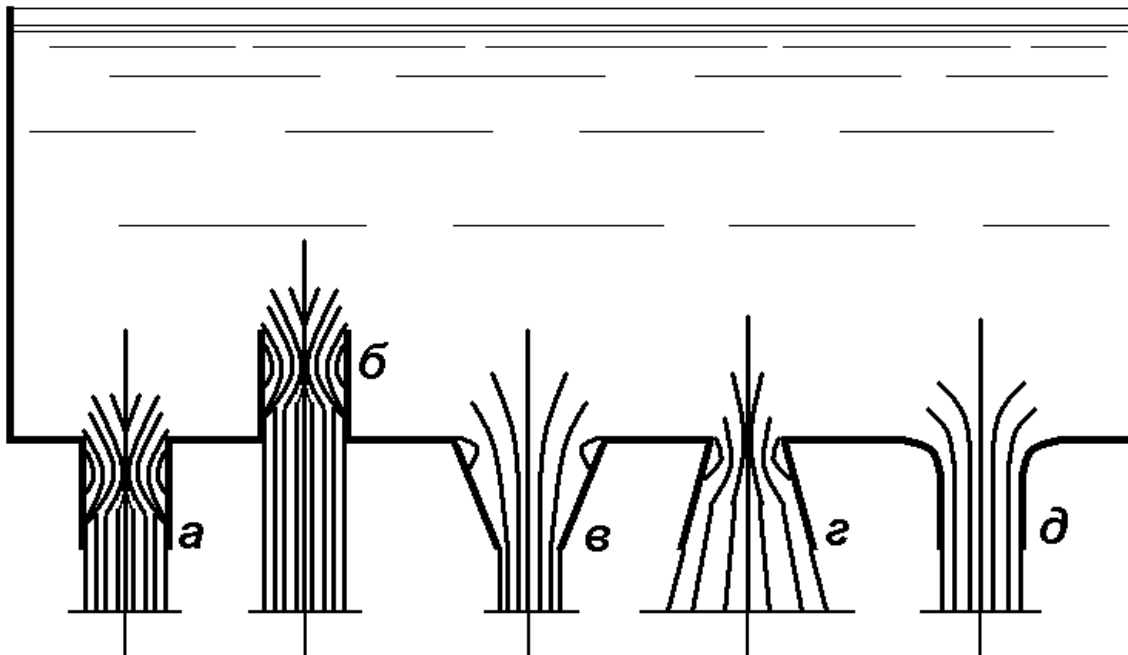


Рисунок 9.2.

На Рисунку 9.2 чітко видно, що відбувається зі струменем при вході в насадку, як деформуються окремі струминки, і в якому вигляді струмінь виходить з насадки.

Таблиця 9.1.

Тип насадки	$\varepsilon$	$\varphi$	$\mu$
Круглий отвір	0,64	0,97	0,62
Зовнішня циліндрична	1,00	0,82	0,82
Внутрішня циліндрична	1,00	0,707	0,707
Конічна розбіжна при конусності $\theta = 5-7^\circ$	1,00	0,45÷0,50	0,45÷0,50
Конічна збіжна при конусності $\theta = 13^\circ 24'$	0,98	0,96	0,94
Конідальна	1,00	0,98	0,98



Розрахункові формули для швидкості витікання та витрати рідини з насадки відрізняються від формул, які були отримані при дослідженні витікання рідини через отвір в тонкій стінці, тільки величинами коефіцієнтів  $\varepsilon$ ,  $\varphi$ , і як наслідок,  $\mu$ . Наприклад, для циліндричної зовнішньої насадки стиснення струменя відбувається тільки всередині насадки, переріз на виході працює повністю, тому коефіцієнт стиснення дорівнює  $\varepsilon=1$ . В таблиці 9.1 наведені величини коефіцієнтів  $\varepsilon$ ,  $\varphi$ ,  $\mu$  для різних насадок (рідина – вода).

Значення коефіцієнтів  $\zeta_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varphi$ ,  $\mu$  залежать від числа  $Re$  і визначаються з номограм або таблиць.

У практичних розрахунках для визначення витрат рідини з пожежних стволів використовується формула

$$Q = P\sqrt{H}, \quad P = \mu\omega\sqrt{2g}, \quad (9.8)$$

де  $P$  - провідність насадки. Напір перед насадкою  $H = SQ^2$ , де  $S$  - опір насадки

$$S = \frac{1}{\mu^2\omega^2 2g} = \frac{1}{P^2}. \quad (9.9)$$

Значення  $P$  і  $S$  знаходять з таблиць.

Насадки мають широке застосування для різних технічних цілей. Прикладами циліндричних насадок є труби для випуску води з резервуарів і водоймищ, всілякі крани тощо; конічні збіжні насадки застосовуються для отримання великих швидкостей на виході та збільшення сили та дальності польоту струменя рідини в пожежній техніці, в форсунках для подачі палива, гідромоніторах для розмиву ґрунту, фонтанних соплах, соплах активних гідравлічних турбін; конічні розбіжні насадки використовуються для уповільнення течії рідини та, як наслідок, збільшення тиску – у всмоктуючих трубах гідравлічних турбін, трубах під насіпом, для уповільнення подачі мастил тощо. Незважаючи на те, що коноїдальні насадки дають найбільші швидкості на виході та витрати, вони порівняно рідко використовуються на практиці, головним чином через великі труднощі виготовлення.

### III. ВИТІКАННЯ РІДИНИ ЧЕРЕЗ КОРОТКІ ТРУБОПРОВОДИ.

При розрахунках параметрів витікання рідини через короткі трубопроводи необхідно враховувати як місцеві втрати напорів, так і лінійні по всій довжині. Частково це питання вже було розглянуто в Розділі II Лекції № 6, тому зараз буде зроблено наголос на отриманні коефіцієнтів  $\varepsilon$ ,  $\varphi$ ,  $\mu$  для трубопроводів. Розглянемо схему короткого трубопроводу.

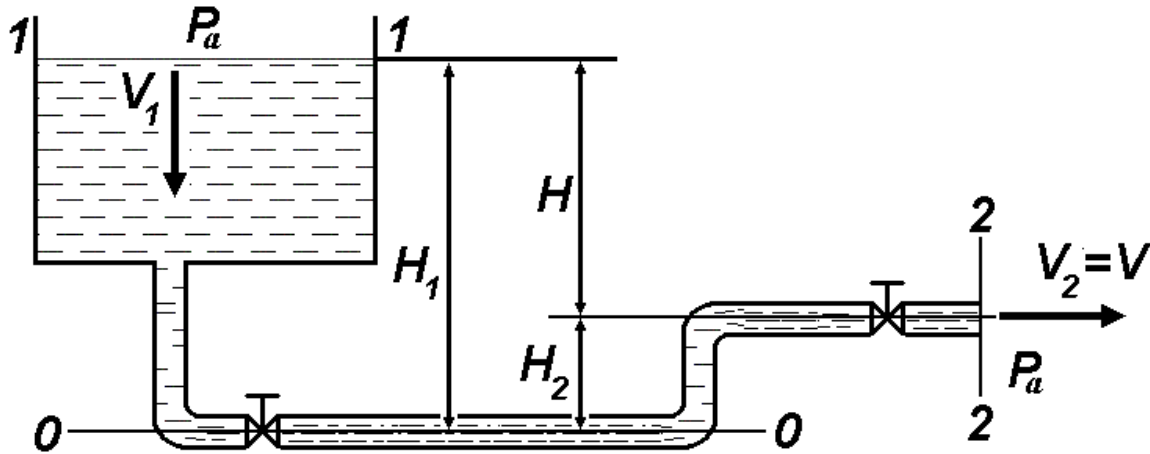


Рисунок 9.3.

Складемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 та 2-2 відносно площини порівняння 0-0

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h. \quad (9.10)$$

З огляду на те, що  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = V$ ,  $P_1 = P_2 = P_a$ ,  $H = H_1 - H_2$ , одержимо

$$H = \frac{V^2}{2g} + \sum h, \quad \sum h = \frac{V^2}{2g} \cdot \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right). \quad (9.11)$$

Тоді маємо  $H = \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \cdot \frac{V^2}{2g}$ , звідки можна знайти швидкість витікання рідини

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} \cdot \sqrt{2gH}. \quad (9.12)$$

З огляду на (9.5) перший співмножник в (9.12) є коефіцієнтом швидкості

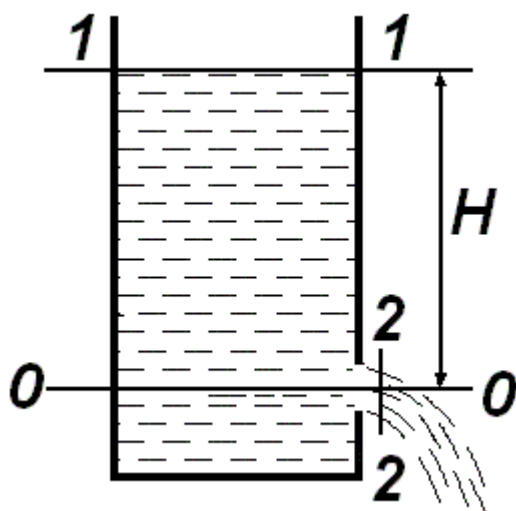
$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} \text{ або } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_c}}, \quad \zeta_c = \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta,$$

де  $\zeta_c$  - коефіцієнт опору системи. Остаточно отримаємо формулу для визначення швидкості  $V - V = \varphi \sqrt{2gH}$ , і витрат рідини  $Q = \mu \omega \sqrt{2gH}$ , де  $\mu = \varphi$  - коефіцієнт витрати.

Прикладами коротких трубопроводів служать сифони всмоктувальної лінії насосів, системи аварійного зливу рідин з резервуарів і апаратів тощо.

#### \*ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

**ЗАДАЧА № 1.** За допомогою рівняння Бернуллі визначити швидкість витікання води з круглого отвору в тонкій стінці відкритого резервуару, якщо отвір знаходиться під напором  $H = 1,8$  м, а коефіцієнт опору отвору  $\zeta_o = 0,06$ .



Розв'язання. Рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 (вільна поверхня в резервуарі) та 2-2 (стиснений переріз струменя) (див. Рисунок) з урахуванням втрат на-

пору має вигляд

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \zeta_0 \frac{V_2^2}{2g}.$$

Вода витікає в атмосферу, отже тиск на поверхні та на виході з резервуару в струмені однаковий  $P_1 = P_2 = P_a$ . Площина порівняння проходить через центр отвору, тоді  $z_1 = H$ ,  $z_2 = 0$ . Швидкість  $V_1 = 0$ , швидкість на виході з отвору позначимо  $V_2 = V$ . Остаточно запишемо

$$H = \frac{V^2}{2g} + \zeta_0 \frac{V^2}{2g} = (1 + \zeta_0) \cdot \frac{V^2}{2g}.$$

Дійсна швидкість витікання обчислюється за формулою (9.5)

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}} \sqrt{2gH} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,06}} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,8} = 5,76 \text{ м/с.}$$

Відповідь. Швидкість витікання  $V = 5,76 \text{ м/с.}$

**ЗАДАЧА № 2.** При дослідженні витікання води з круглого отвору в тонкій стінці діаметром  $d = 10 \text{ мм}$  під напором  $H = 2 \text{ м}$  вимірювали діаметр стисненого струменя  $d_c = 8 \text{ мм}$  і час заповнення десятилітрового ( $W = 10 \text{ л}$ ) мірного бачка  $t = 32,8 \text{ с}$ . Визначити чисельні значення коефіцієнтів стиснення  $\varepsilon$ , швидкості  $\varphi$ , витрати  $\mu$ , місцевого опору отвору  $\zeta_0$ .

Розв'язання. Коефіцієнт стиснення струменя визначаємо за фор-

мулою (9.1)  $\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega} = \frac{d_c^2}{d^2} = \frac{8^2}{10^2} = 0,64$ . Коефіцієнти у виразі для

площі отвору скорочуються, розмірність обох діаметрів залишаємо міліметр. Теоретична швидкість витікання

$V_{\text{ТЕОР}} = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2} = 6,25 \text{ м/с}$ . Дійсна швидкість витікання з урахуванням рівняння нерозривності

$$V = \frac{W}{t \cdot \omega_c} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{32,8} \cdot \frac{4}{3,1415 \cdot 0,008^2} = 6,05 \text{ м/с.}$$

Безумовно, в цьому виразі необхідно всі величини привести до розмірностей системи *SI*.

$$\text{Коефіцієнт швидкості } \varphi = \frac{V}{V_{\text{ТЕОР}}} = \frac{6,05}{6,25} = 0,97.$$

Коефіцієнт витрати  $\mu = \varphi \cdot \varepsilon = 0,97 \cdot 0,64 = 0,62$ . Коефіцієнт опору

$$\text{отвору } \zeta_o = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{0,97^2} - 1 = 0,06.$$

Відповідь. Коефіцієнти стиснення  $\varepsilon = 0,64$ , швидкості  $\varphi = 0,97$ , витрати  $\mu = 0,62$ , місцевого опору отвору  $\zeta_o = 0,06$ .

## ЛЕКЦІЯ № 10. СПОРОЖНЕННЯ РЕЗЕРВУАРІВ.

### I. СПОРОЖНЕННЯ РЕЗЕРВУАРІВ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРЕРІЗОМ ЗА ВИСОТОЮ.

Розглянемо загальний випадок, коли спорожнюється резервуар зі змінним перерізом за висотою, наповнений рідиною з вільною поверхнею, через донний отвір з коефіцієнтом витрати  $\mu$ .

У цьому випадку витікання рідини відбуваються при змінному напорі, який постійно зменшується, тобто рух рідини є неусталеним. Однак, якщо напір, а тим самим і швидкість витікання рідини змінюються повільно, то рух рідини безпосередньо у даний момент часу можна вважати усталеним.

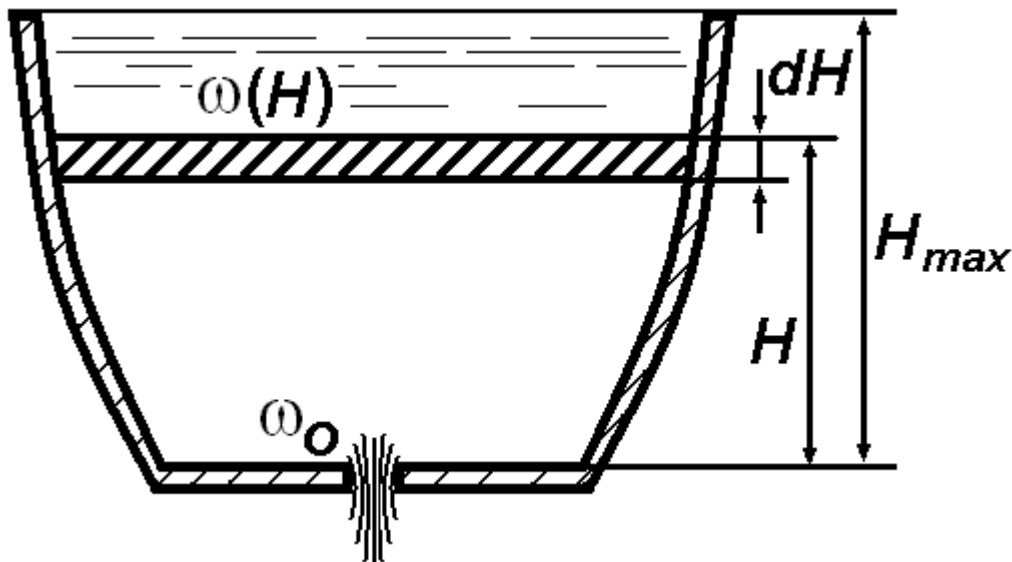


Рисунок 10.1.

Позначимо змінну висоту рідини в резервуарі (Рисунок 10.1), яка відраховується від дна, через  $H$ , площа перерізу відповідно до цього рівня  $\omega(H)$ , площа донного отвору  $\omega_o$ , коефіцієнт витрати отвору  $\mu$ . За час  $dt$  із резервуару витече кількість рідини з урахуванням рівняння нерозривності потоку

$$dW = Qdt = \omega_o V dt = \omega_o \cdot \mu \sqrt{2gH} dt.$$

Водночас рівень в резервуарі знизиться на величину

$$dH = \frac{dW}{\omega(H)}. \text{ Тому}$$

$$-\omega(H)dH = \omega_0 \cdot \mu \sqrt{2gH} dt.$$

Знак «—» взятий тому, що напір зменшується, тобто додатному приросту  $dt$  відповідає від'ємний приріст  $dH$

$$dt = -\frac{\omega(H)}{\omega_0 \mu \sqrt{2gH}} dH.$$

Звідси можна визначити час повного спорожнення резервуару висотою  $H_{max}$ , проінтегрувавши останній вираз в границях між напорами  $H = H_{max}$  і  $H = 0$

$$t = -\int_{H_{max}}^0 \frac{\omega(H)}{\omega_0 \mu \sqrt{2gH}} dH = \frac{1}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^{H_{max}} \frac{\omega(H)}{\sqrt{H}} dH. \quad (10.1)$$

Інтеграл в (10.1) можна обчислити за умов відомого закону залежності площі перерізу від висоти  $\omega(H)$ .

## II. ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕННЯ ЧАСУ СПОРОЖНЕННЯ РЕЗЕРВУАРІВ РІЗНОЇ ФОРМИ.

### 1. Спорожнення призматичного резервуару.

Для цього найпростішого випадку  $\omega(H) = \Omega = const$  і час витікання рідини визначається за формулою

$$t = \frac{\Omega}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^{H_{max}} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \frac{2\Omega}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \sqrt{H} \Big|_0^{H_{max}} = \frac{2\Omega}{\omega_0 \mu} \sqrt{\frac{H}{2g}}. \quad (10.2)$$

Ця формула може бути представлена у вигляді  $t = \frac{2\Omega H}{\omega_0 \mu \sqrt{2gH}}$ .

Чисельник в цьому виразі є подвоєним об'ємом резервуару, а

знаменник є об'ємними витратами  $Q$  при початковому напорі  $H_{max}$ , що перетворює формулу на  $t = \frac{2W}{Q}$ . Бачимо, що час пов-

ного спорожнення резервуару в 2 рази більший за час, який необхідний для витікання із резервуару такої ж кількості рідини при початковому напорі.

Для визначення часу неповного спорожнення резервуару (часу зниження рівня рідини від величини  $H_1$  до  $H_2$ ) необхідно проінтегрувати (10.2) в інших границях і отримати

$$t = \frac{2\Omega}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}). \quad (10.3)$$

## 2. Спорожнення резервуарів у формі зсіченого конусу.

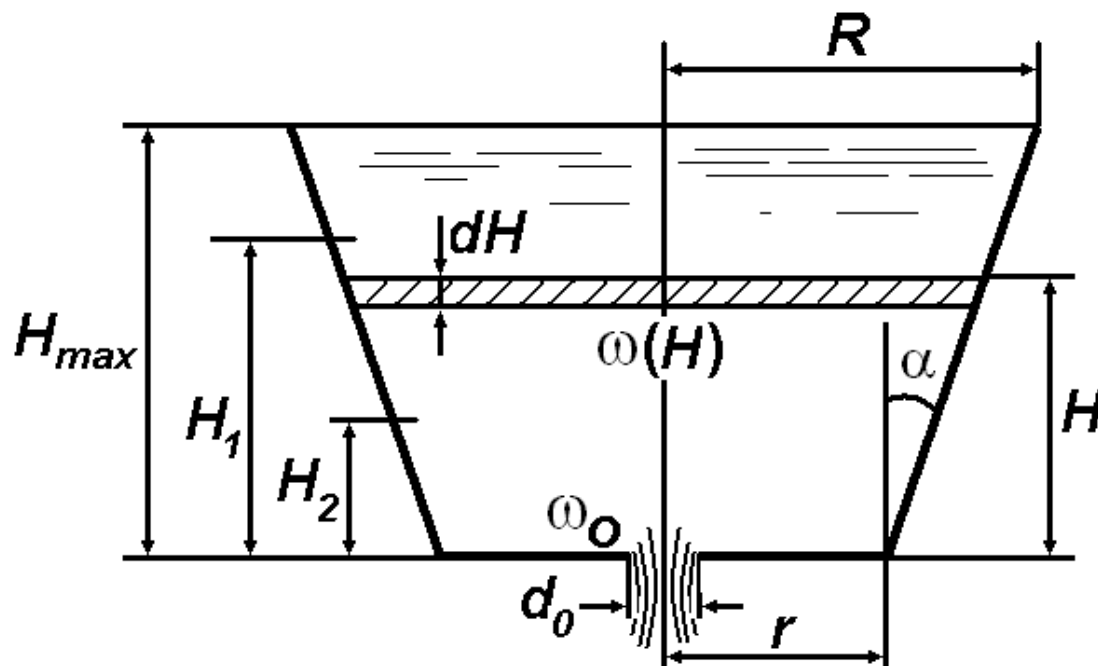


Рисунок 10.2.

Площа перерізу  $\omega(H)$  залежно від  $H$  має вигляд (Рисунок 10.2)

$$\omega = \pi(r + H \operatorname{tg} \alpha)^2, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{R - r}{H_{max}}$$



де відповідно  $R$  і  $r$  - радіуси верхньої та нижньої основи конусу,  $H_{max}$  - висота конусу, або початковий напір. Час повного спорожнення резервуару визначається за формулою (10.1)

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^{H_{max}} \frac{(r + Htg\alpha)^2}{\sqrt{H}} dH = \\
 &= \frac{\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ r^2 2\sqrt{H} + 2rtg\alpha \cdot \frac{2}{3} H\sqrt{H} + tg^2\alpha \cdot \frac{2}{5} H^2\sqrt{H} \right]_0^{H_{max}} = \\
 &= \frac{2\pi\sqrt{H_{max}}}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ r^2 + \frac{2}{3} rH_{max} \frac{R-r}{H_{max}} + \frac{1}{5} H_{max}^2 \left( \frac{R-r}{H_{max}} \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{2\pi}{\omega_0 \mu} \sqrt{\frac{H_{max}}{2g}} \left[ r^2 + \frac{2}{3} r(R-r) + \frac{1}{5} (R^2 - 2Rr + r^2) \right] = \\
 &= \frac{2\pi}{15\omega_0 \mu} \sqrt{\frac{H_{max}}{2g}} [3R^2 + 4Rr + 8r^2]. \quad (10.4)
 \end{aligned}$$

При неповному спорожненні резервуару, коли напір знижується від величини  $H_1$  до  $H_2$ , використовується формула

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ r^2 \sqrt{H} + rtg\alpha \cdot \frac{2}{3} H\sqrt{H} + tg^2\alpha \cdot \frac{2}{5} H^2\sqrt{H} \right]_{H_2}^{H_1}, \\
 t &= \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ r^2 (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) + \frac{2}{3} r \frac{R-r}{H_{max}} \cdot (H_1\sqrt{H_1} - H_2\sqrt{H_2}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{5} \left( \frac{R-r}{H_{max}} \right)^2 (H_1^2\sqrt{H_1} - H_2^2\sqrt{H_2}) \right]. \quad (10.5)
 \end{aligned}$$

Якщо у формулах (10.4) і (10.5) покласти  $r = R$ , то вони перетворяться відповідно у формули (10.2) і (10.3).

Поклавши  $r = 0$  у формулі (10.4), отримаємо формулу для визначення часу повного спорожнення конічної лійки

$$t = \frac{2\pi R^2}{5\omega_0 \mu} \sqrt{\frac{H_{max}}{2g}}. \quad (10.6)$$

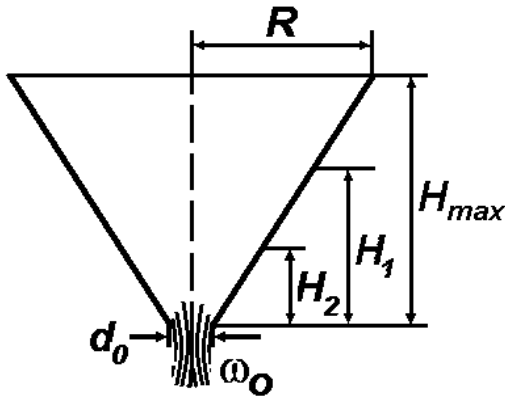


Рисунок 10.3.

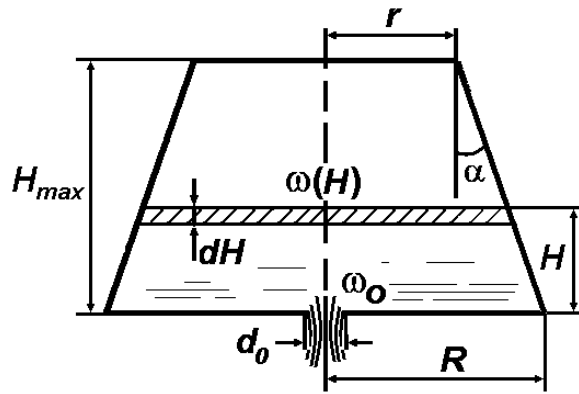


Рисунок 10.4.

При неповному спорожненні конічної лійки при зменшенні напору від величини  $H_1$  до  $H_2$  треба у формулі (10.5) покласти  $r = 0$ , що приводить до

$$t = \frac{2\pi R^2}{5\omega_0 \mu \sqrt{2g} H_{max}^2} \left[ H_1^2 \sqrt{H_1} - H_2^2 \sqrt{H_2} \right]. \quad (10.7)$$

Можливо і таке розташування зрізаного конуса у просторі (Рисунок 10.4). Площа перерізу  $\omega(H)$  залежно від  $H$  має вигляд

$$\omega = \pi(R - H \operatorname{tg} \alpha)^2, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{R - r}{H_{max}}.$$

Час повного спорожнення визначається інтегралом

$$t = \frac{\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^{H_{max}} \frac{(R - H \operatorname{tg} \alpha)^2}{\sqrt{H}} dH =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ R^2 2\sqrt{H} - 2Rtg\alpha \cdot \frac{2}{3} H\sqrt{H} + tg^2\alpha \cdot \frac{2}{5} H^2\sqrt{H} \right]_0^{H_{max}} = \\
&= \frac{2\pi\sqrt{H_{max}}}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ R^2 - \frac{2}{3} RH_{max} \frac{R-r}{H_{max}} + \frac{1}{5} H^2 \left( \frac{R-r}{H_{max}} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{2\pi}{15\omega_0 \mu} \sqrt{\frac{H_{max}}{2g}} [8R^2 + 4Rr + 3r^2]. \quad (10.8)
\end{aligned}$$

При частковому спорожненні при падінні напору від  $H_1$  до  $H_2$  маємо таку формулу для визначення часу

$$\begin{aligned}
t &= \frac{\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_{H_2}^{H_1} \frac{(R - Htg\alpha)^2}{\sqrt{H}} dH = \\
&= \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ R^2 (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) - \frac{2}{3} R \frac{R-r}{H_{max}} (H_1\sqrt{H_1} - H_2\sqrt{H_2}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{5} \left( \frac{R-r}{H_{max}} \right)^2 (H_1^2\sqrt{H_1} - H_2^2\sqrt{H_2}) \right]. \quad (10.9)
\end{aligned}$$

### 3. Спорожнення циліндричної бочки, розташованої горизонтально.

При аналізі цього питання приймаються наступні співвідношення  $H_{max} \leq 2R$ ,  $0 < H \leq H_{max}$ . Тоді площа поверхні рідини  $\omega(H)$  залежно від  $H$  при довжині бочки  $b$  має вигляд (Рисунок 10.5)

$$\omega(H) = 2b\sqrt{R^2 - (R-H)^2} = 2b\sqrt{2RH - H^2}.$$

Час спорожнення визначається інтегралом

$$t = \frac{2b}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^{H_{max}} \frac{\sqrt{2RH - H^2}}{\sqrt{H}} dH = \frac{2b}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^{H_{max}} \sqrt{2R - H} dH =$$

$$= -\frac{4b}{3\omega_0\mu\sqrt{2g}}(2R-H)^2 \Big|_0^{H_{max}} = \frac{4b}{3\omega_0\mu\sqrt{2g}} \left[ 2R\sqrt{2R} - (2R-H_{max})^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (10.10)$$

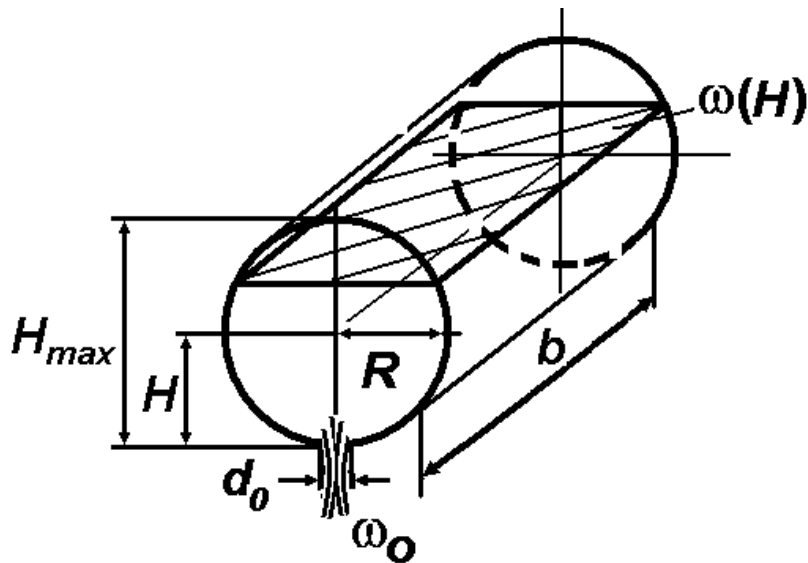


Рисунок 10.5.

При  $H_{max} = 2R$  спорожнення повної бочки дорівнює

$$t = \frac{8bR\sqrt{R}}{3\omega_0\mu\sqrt{g}} = \frac{8bR}{3\omega_0\mu} \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

#### 4. Спорожнення резервуарів, які мають форму сфери та напівсфери.

Резервуар у формі напівсфери та сфери представлені відповідно на Рисунку 10.6 і Рисунку 10.7.

Час спорожнення резервуару у формі напівсфери знаходиться за (10.1)  $t = \frac{1}{\omega_0\mu\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh$ , де  $\omega_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$ ,  $S(h)$  -

поточна площа поперечного горизонтального перерізу. Для резервуару на Рисунку 10.6 для довільної поверхні на рівні  $h$  її площа дорівнює  $S(h) = \pi(R^2 - h^2)$ . Тоді час спорожнення резервуару за умов  $h \leq H$ ,  $0 \leq H \leq R$

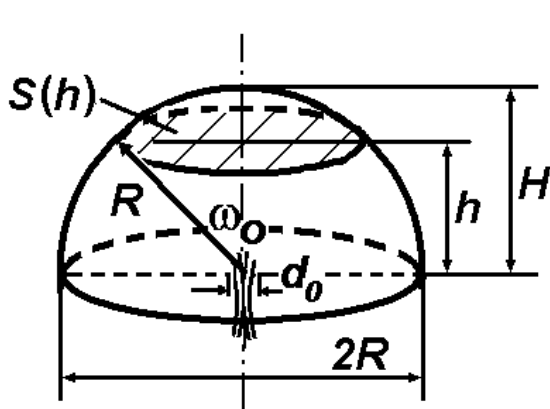


Рисунок 10.6.

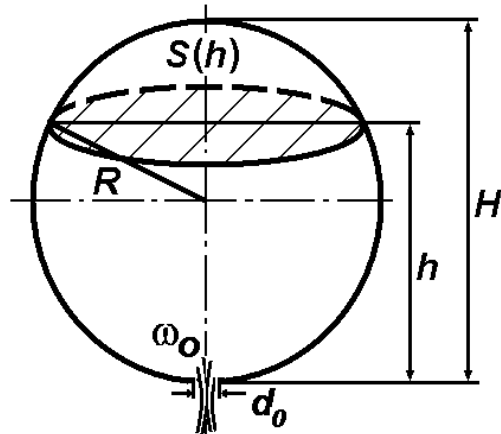


Рисунок 10.7.

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{1}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh = \frac{\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{R^2 - h^2}{\sqrt{h}} dh = \\
 &= \frac{\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ R^2 2\sqrt{h} - \frac{2}{5} h\sqrt{h} \right]_0^H = \frac{2\pi\sqrt{H}}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left( R^2 - \frac{H^2}{5} \right). \quad (10.11)
 \end{aligned}$$

При  $H = R$  маємо  $t = \frac{2\pi\sqrt{R}}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left( R^2 - \frac{R^2}{5} \right) = \frac{8\pi R^2 \sqrt{R}}{5\omega_0 \mu \sqrt{2g}}$ .

Для резервуару на Рисунку 10.7 для довільної поверхні її площа дорівнює  $S(h) = \pi[R^2 - (h - R)^2] = \pi(2Rh - h^2)$  (на рівні  $h$ ). Тоді час спорожнення резервуару визначається за формулою (10.1) за умов  $h \leq H$ ,  $0 \leq H \leq 2R$

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{1}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh = \frac{\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{2Rh - h^2}{\sqrt{h}} dh = \\
 &= \frac{\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ 2R \int_0^H h^{\frac{1}{2}} dh - \int_0^H h^{\frac{3}{2}} dh \right] = \\
 &= \frac{\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ 2R \cdot \frac{2}{3} h\sqrt{h} - \frac{2}{5} h^2 \sqrt{h} \right]_0^H = \frac{2\pi H}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left( \frac{2}{3} R\sqrt{H} - \frac{1}{5} H\sqrt{H} \right). \quad (10.12)
 \end{aligned}$$

При  $H = 2R$  (спорожнення повного резервуару)

$$t = \frac{2\pi \cdot 2R}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left( \frac{2}{3} R \sqrt{2R} - \frac{2}{5} R \sqrt{2R} \right) = \frac{8\pi R^2 \sqrt{2R}}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{16\pi R^2 \sqrt{2R}}{15\omega_0 \mu \sqrt{2g}}.$$

$$\text{При } H = R \quad t = \frac{2\pi R}{15\omega_0 \mu \sqrt{2g}} (10R\sqrt{R} - 3R\sqrt{R}) = \frac{14\pi R^2 \sqrt{R}}{15\omega_0 \mu \sqrt{2g}}.$$

При частковому спорожненні резервуару від рівня  $H_1$  до рівня  $H_2$

$$t = \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left( \frac{2}{3} R (H_1 \sqrt{H_1} - H_2 \sqrt{H_2}) - \frac{1}{5} (H_1^2 \sqrt{H_1} - H_2^2 \sqrt{H_2}) \right) \quad .(10.13)$$

Якщо  $H_1 = 2R$  та  $H_2 = R$ , тобто спорожнюється верхня напівсфера, остання формула набуває вигляду

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left( \frac{2}{3} R (2R\sqrt{2R} - R\sqrt{R}) - \frac{1}{5} (4R^2 \sqrt{2R} - R^2 \sqrt{R}) \right) = \\ &= \frac{2\pi R^2}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{R} (2\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{5} \sqrt{R} (4\sqrt{2} - 1) \right) = \frac{2\pi R^2 \sqrt{R}}{15\omega_0 \mu \sqrt{2g}} (8\sqrt{2} - 7). \end{aligned}$$

## 5. Спорожнення резервуарів у формі параболоїда обертання та у формі перегорнутого параболоїда обертання.

Резервуар у формі параболоїда обертання та у формі перегорнутого параболоїда обертання показано на Рисунку 10.8 і Рисунку 10.9.

Час спорожнення резервуарів знаходиться за (10.1)

$$t = \frac{1}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh, \text{ де } \omega_0 = \frac{\pi d_o^2}{4}, S(h) - \text{поточна площа}$$

поперечного горизонтального перерізу. Для резервуару на Рисунку 10.8

$S(h) = \frac{\pi b^2 h}{4H}$ . Підставляючи цей вираз у наведену формулу, отримаємо

$$t = \frac{\pi b^2}{4H\omega_0\mu\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{h}{\sqrt{h}} dh = \frac{\pi b^2}{6\omega_0\mu} \sqrt{\frac{H}{2g}} = \frac{2}{3\mu} \left(\frac{b}{d_0}\right)^2 \sqrt{\frac{H}{2g}}. \quad (10.14)$$

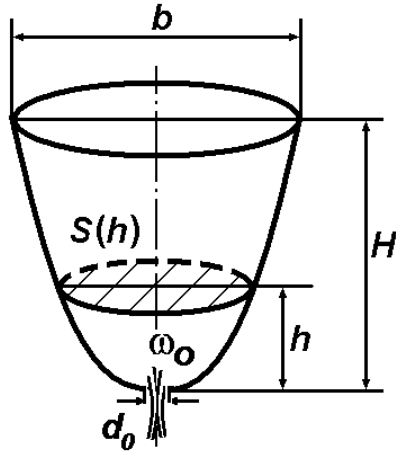


Рисунок 10.8.

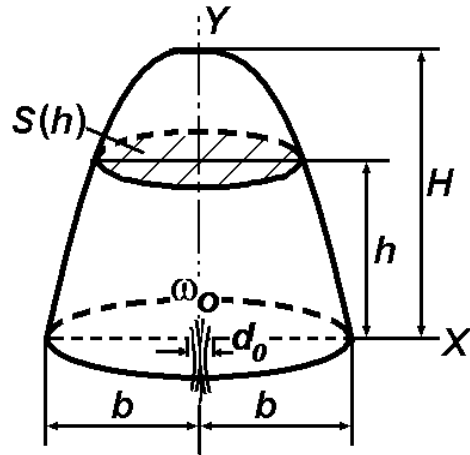


Рисунок 10.9.

Для резервуару на Рисунку 10.9 рівняння параболі

$$y = -\frac{H}{b^2}x^2 + H. \quad \text{Для } y = h \quad x = \sqrt{\frac{(H-h)}{H}}b, \quad \text{тоді}$$

$$S(h) = \pi \frac{(H-h)}{H} b^2 \text{ і остаточно}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi}{\omega_0\mu\sqrt{2g}} \cdot \frac{b^2}{H} \int_0^H \frac{(H-h)}{\sqrt{h}} dh = \frac{\pi}{\omega_0\mu\sqrt{2g}} \cdot \frac{b^2}{H} \left[ 2H\sqrt{h} - \frac{2}{3}h\sqrt{h} \right]_0^H = \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0\mu\sqrt{2g}} \cdot \frac{b^2}{H} \left[ 2H\sqrt{H} - \frac{2}{3}H\sqrt{H} \right] \\ &= \frac{4\pi}{\omega_0\mu\sqrt{2g}} \cdot \frac{b^2}{H} H\sqrt{H} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8\pi b^2 \sqrt{H}}{3\omega_0\mu\sqrt{2g}}. \quad (10.15) \end{aligned}$$

6. Спорожнення резервуарів у формі корит (трапецеїдального, напівсферичного та параболічного).

Резервуари у формі трапецеїдального корита та напівсферичного корита показані на Рисунку 10.10 і Рисунку 10.11.

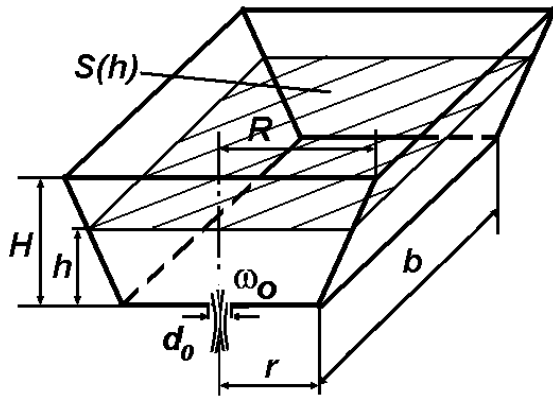


Рисунок 10.10.

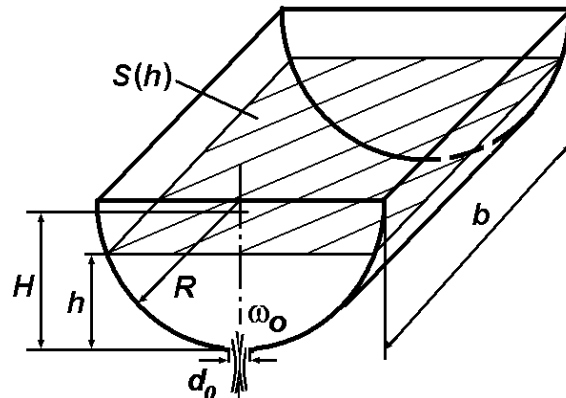


Рисунок 10.11.

Для резервуару на Рисунку 10.10 для довільної поверхні на рівні  $h$  її площа дорівнює  $S(h) = 2b(r + htg\alpha)$ , де  $tg\alpha = \frac{R-r}{H}$ . Тоді час спорожнення резервуару, як завжди, визначається за формулою (10.1)

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{1}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh = \frac{1}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{2b(r + htg\alpha)}{\sqrt{h}} dh = \\
 &= \frac{2b}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ 2r\sqrt{H} + \left( \frac{R-r}{H} \right) \cdot \frac{2}{3} H\sqrt{H} \right] = \frac{4b\sqrt{H}}{3\omega_0 \mu \sqrt{2g}} (2r + R)
 \end{aligned}
 \tag{10.16}$$

Для резервуару на Рисунку 10.11 для довільної поверхні на рівні  $h$  її площа дорівнює  $S(h) = 2b\sqrt{R^2 - (R-h)^2} = 2b\sqrt{2Rh - h^2}$ . За умов  $R \geq H \geq 0$  час спорожнення резервуару дорівнює

$$t = \frac{1}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh = \frac{2b}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^H \sqrt{2R - h} dh.$$

Розглянемо

окремо інтеграл в цій формулі

$$\begin{aligned}
 \int_0^H \sqrt{2R - h} dh &= -\int_0^H (2R - h)^{\frac{1}{2}} d(2R - h) = -\frac{2}{3} (2R - h)\sqrt{2R - h} \Big|_0^H = \\
 &= -\frac{2}{3} [(2R - H)\sqrt{2R - H} - 2R\sqrt{2R}] = \frac{2}{3} [2R\sqrt{2R} - (2R - H)\sqrt{2R - H}].
 \end{aligned}$$

Остаточно



$$t = \frac{4b}{3\omega_0\mu\sqrt{2g}} \left[ 2R\sqrt{2R} - (2R - H)\sqrt{2R - H} \right]. \quad (10.17)$$

При  $H = R$ , тобто при спорожненні повністю заповненого резервуару, маємо

$$t = \frac{4b}{3\omega_0\mu\sqrt{2g}} \left[ 2R\sqrt{2R} - R\sqrt{R} \right] = \frac{4bR\sqrt{R}}{3\omega_0\mu\sqrt{2g}} (2\sqrt{2} - 1).$$

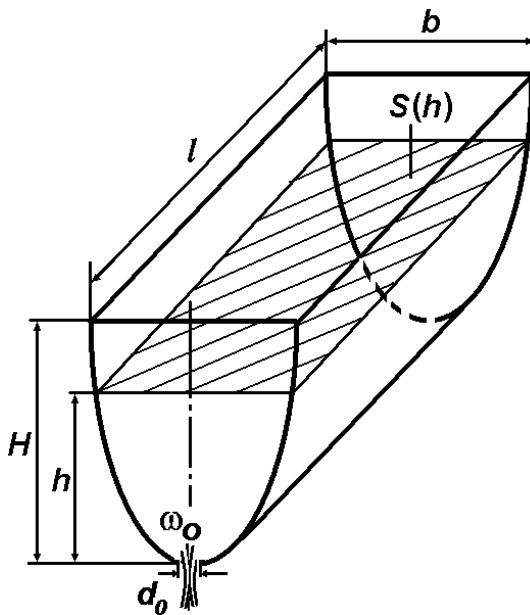


Рисунок 10.12.

Для резервуару у формі параболічного корита (Рисунок 10.12) для довільної поверхні на рівні  $h$  її площа дорівнює

$$S(h) = lb \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{H}}.$$

Тоді час спорожнення

$$t = \frac{lb}{\omega_0\mu\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{H} \cdot \sqrt{h}} dh = \frac{lb}{\omega_0\mu\sqrt{2g}} \cdot \frac{H}{\sqrt{H}} = \frac{lb}{\omega_0\mu} \sqrt{\frac{H}{2g}}. \quad (10.18)$$

## 7. СПОРОЖНЕННЯ СКЛАДЕНИХ РЕЗЕРВУАРІВ.

Всі резервуари, що розглядалися вище, мали певну геометричну форму, і зміна площі перерізу залежно від довільної висоти визначалась неперервною функцією. Однак на практиці зустрічаються так звані складені резервуари, що складаються з декількох (двох і більше) резервуарів, кожний з яких має відносно просту геометричну форму. Як приклад такого типу резервуарів можна навести різні водонапірні вежі.

В цьому випадку при визначенні часу повного або часткового спорожнення резервуару формула (10.1) буде складатися з двох і більше доданків з відповідними границями зміни висоти, для якої відлік здійснюється від загального дна.

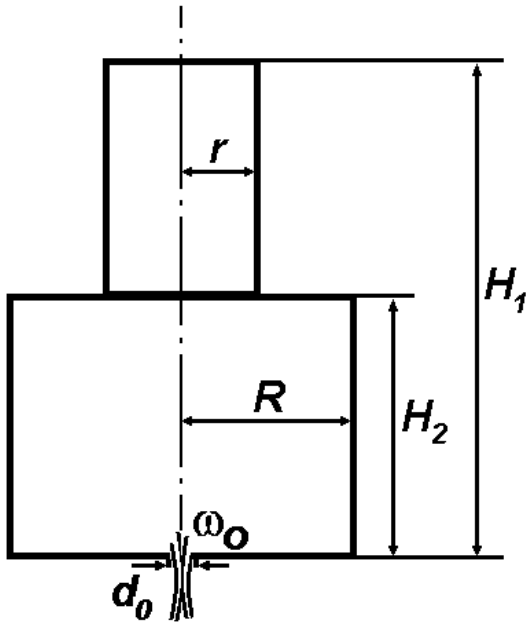


Рисунок 10.13.

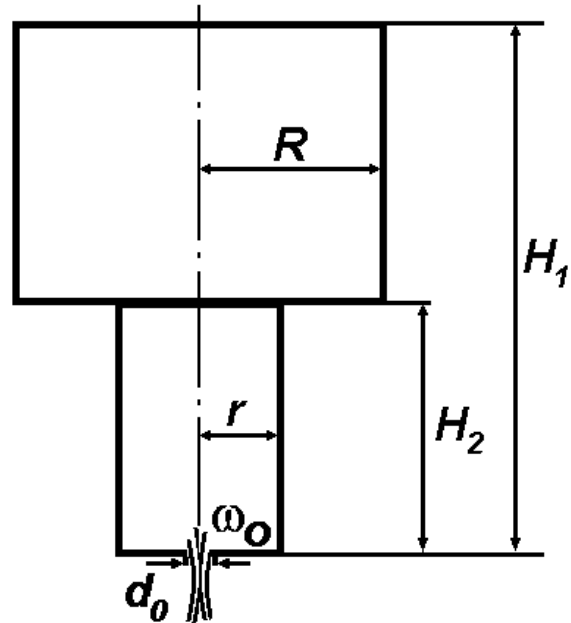


Рисунок 10.14.

В нашому курсі розглянемо деякі прості приклади.

Для резервуару, зображеного на Рисунку 10.13, площа поперечного перерізу залежно від висоти має вигляд:

$0 \leq H \leq H_2$ ,  $\omega(H) = \pi R^2$ ;  $H_2 < H \leq H_1$ ,  $\omega(H) = \pi r^2$ . Тоді час спорожнення резервуару

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{1}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ \int_0^{H_2} \frac{\pi R^2}{\sqrt{H}} dH + \int_{H_2}^{H_1} \frac{\pi r^2}{\sqrt{H}} dH \right] = \\
 &= \frac{1}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ 2\pi R^2 \sqrt{H} \Big|_0^{H_2} + 2\pi r^2 \sqrt{H} \Big|_{H_2}^{H_1} \right] = \\
 &= \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ R^2 \sqrt{H_2} + r^2 (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) \right] = \\
 &= \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ \sqrt{H_2} (R^2 - r^2) + r^2 \sqrt{H_1} \right]
 \end{aligned}$$

(10.19)

Для резервуару, зображеного на Рисунку 10.14, площа поперечного перерізу залежно від висоти має вигляд:

$0 \leq H \leq H_2$ ,  $\omega(H) = \pi r^2$ ,  $H_2 < H \leq H_1$ ,  $\omega(H) = \pi R^2$ . Тоді час спорожнення резервуару

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{1}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ \int_0^{H_2} \frac{\pi r^2}{\sqrt{H}} dH + \int_{H_2}^{H_1} \frac{\pi R^2}{\sqrt{H}} dH \right] = \\
 &= \frac{1}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ 2\pi r^2 \sqrt{H} \Big|_0^{H_2} + 2\pi R^2 \sqrt{H} \Big|_{H_2}^{H_1} \right] = \\
 &= \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ r^2 \sqrt{H_2} + R^2 (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) \right] = \\
 &= \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ \sqrt{H_2} (r^2 - R^2) + R^2 \sqrt{H_1} \right]
 \end{aligned}$$

і остаточно

$$t = \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ R^2 \sqrt{H_1} - (R^2 - r^2) \sqrt{H_2} \right]. \quad (10.20)$$

Для резервуару, зображеного на Рисунку 10.15, складовими елементами є зсічений конус (верхня частина) і циліндр (нижня). В цьому випадку його час спорожнення визначається у вигляді

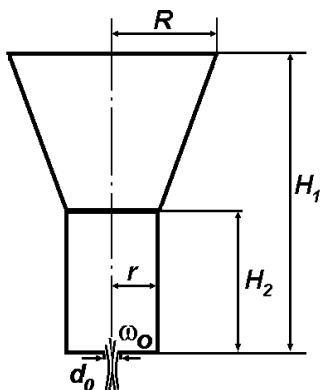


Рисунок 10.15.

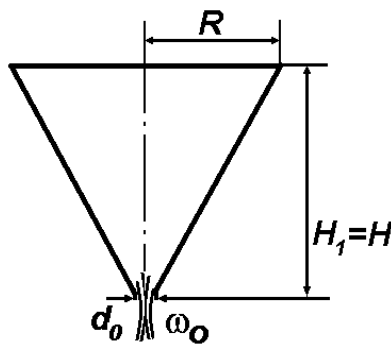


Рисунок 10.16.

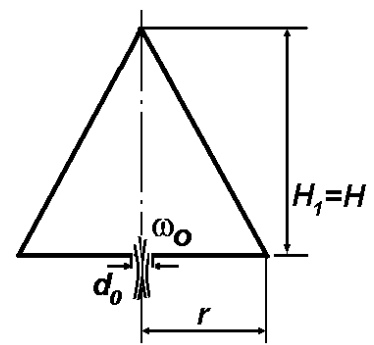


Рисунок 10.17.

$$t = \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ r^2 (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) + \frac{2}{3} r \frac{R-r}{H_1 - H_2} (H_1 \sqrt{H_1} - H_2 \sqrt{H_2}) + \frac{1}{5} \left( \frac{R-r}{H_1 - H_2} \right)^2 (H_1^2 \sqrt{H_1} - H_2^2 \sqrt{H_2}) \right] + \frac{2\pi r^2}{\omega_0 \mu} \sqrt{\frac{H_2}{2g}}. \quad (10.21)$$

При  $R = r$

$$t = \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} r^2 (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) + \frac{2\pi r^2}{\omega_0 \mu} \sqrt{\frac{H_2}{2g}} = \frac{2\pi r^2}{\omega_0 \mu} \sqrt{\frac{H_1}{2g}}.$$

Отримана формула збігається з формулою (10.2).

При  $r = 0$ ,  $H_1 = H$ ,  $H_2 = 0$  (Рисунок 10.16)

$$t = \frac{2\pi R^2}{5\omega_0 \mu} \sqrt{\frac{H}{2g}}, \text{ тобто ми отримуємо вираз (10.6) для часу спорожнення конічної лійки.}$$

При  $R = 0$ ,  $H_1 = H$ ,  $H_2 = 0$  (Рисунок 10.17)

$$t = \frac{16\pi r^2}{15\omega_0 \mu} \sqrt{\frac{H}{2g}} \text{ і отримана формула є окремим випадком формули (10.8) з точністю до позначень.}$$

Для резервуару, представленого на Рисунку 10.18, час спорожнення визначається наступним чином

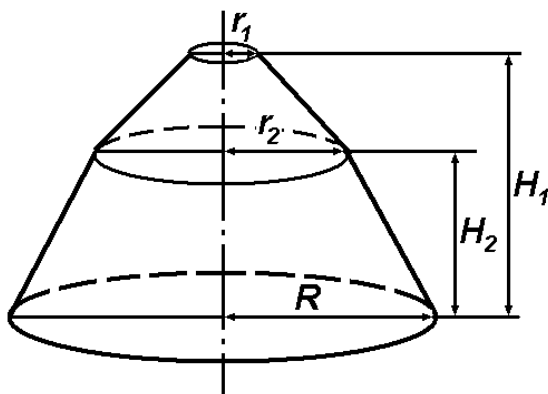


Рисунок 10.18.

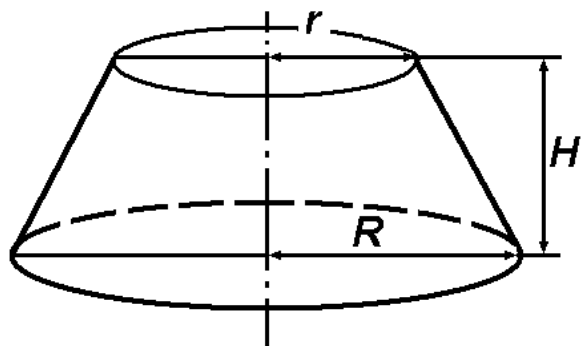


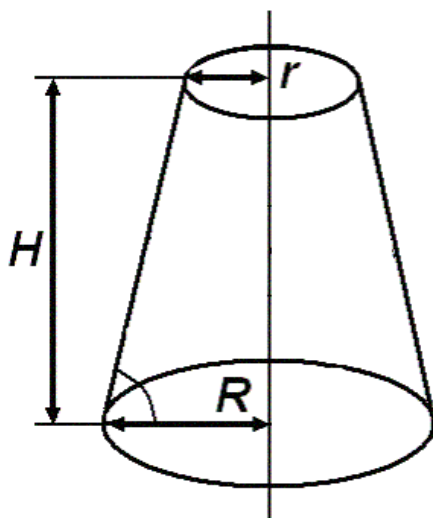
Рисунок 10.19.

$$t = \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \left[ r_2^2 (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) - \frac{2}{3} r_2 \frac{r_2 - r_1}{H_1 - H_2} (H_1 \sqrt{H_1} - H_2 \sqrt{H_2}) + \frac{1}{5} \left( \frac{r_2 - r_1}{H_1 - H_2} \right)^2 (H_1^2 \sqrt{H_1} - H_2^2 \sqrt{H_2}) \right] + \frac{2\pi}{15\omega_0 \mu} \sqrt{\frac{H_2}{2g}} (8R^2 + 4Rr_2 + 3r_2^2) \quad (10.22)$$

Як окремий випадок при  $H_2 = H_1 = H$ ,  $r_1 = r_2 = r$  маємо формулу (10.8) повного спорожнення резервуара у формі зсіченого конуса (Рисунок 10.19)

$$t = \frac{2\pi}{15\omega_0 \mu} \sqrt{\frac{H}{2g}} [8R^2 + 4Rr + 3r^2].$$

#### \*ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ



**ЗАДАЧА № 1.** Із резервуара у формі зсіченого конуса з розмірами  $R = 1$  м,  $r = 0,8$  м,  $H = 2$  м, рідину перекачали у вертикально розташований циліндричний резервуар з висотою  $H = 2$  м радіусом  $R_1 = 1,5$  м. Знайти час спорожнення рідини з циліндричного резервуару через малий донний отвір діаметром  $d_0 = 5$  см, коефіцієнт витрати отвору  $\mu = 0,6$ .

**Розв'язання.** Об'єм зсіченого конусу з рідиною дорівнює  $W_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3} \cdot 3,1415 \cdot 2 \cdot (1^2 + 1 \cdot 0,8 + 0,8^2) = 5,11$  м<sup>3</sup>, об'єм циліндру з рідиною  $W_{\text{цил}} = \pi R_1^2 H_1$ , звідси,  $W_{\text{цил}} = W_{\text{кон}}$ . Необхідно перевірити, чи вистачить запасу по висоті при перекачуванні рідини зі зсіченого конусу в циліндр, тобто має виконуватися наступне  $H_1 < H$ . Тому

$$H_1 = \frac{W_{\text{кон}}}{\pi R_1^2} = \frac{5,11}{3,1415 \cdot 1,5^2} = 0,723 \text{ м. Швидкість витікання рідини}$$

$V = \mu \sqrt{2gH_1}$  з отвору діаметром  $d_o$  і коефіцієнтом витрати отвору  $\mu$ , тоді об'ємні витрати  $Q$  при початковому напорі  $H_1$

$$Q = V\omega_o = \frac{\pi d_o^2}{4} \cdot \mu \sqrt{2gH_1} = \frac{3,1415 \cdot 0,05^2}{4} \cdot 0,6 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,723} = 4,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с.}$$

За формулою для циліндру  $t = \frac{2W}{Q}$  визначаємо  $t = \frac{2 \cdot 5,11}{4,44 \cdot 10^{-3}} =$

2303 с.

**Відповідь.** Час спорожнення рідини з циліндричного резервуару через малий донний отвір діаметром  $t = 2303$  с.

**ЗАДАЧА № 2.** Визначити час  $t$  повного спорожнення складеного резервуара (Рисунок 10.18) з розмірами  $R = 1$  м,  $r_1 = 0,5$  м,  $r_2 = 0,8$  м,  $H_1 = 1$  м,  $H_2 = 0,2$  м через малий донний отвір діаметром  $d_o = 5$  см, коефіцієнт витрати отвору  $\mu = 0,6$ .

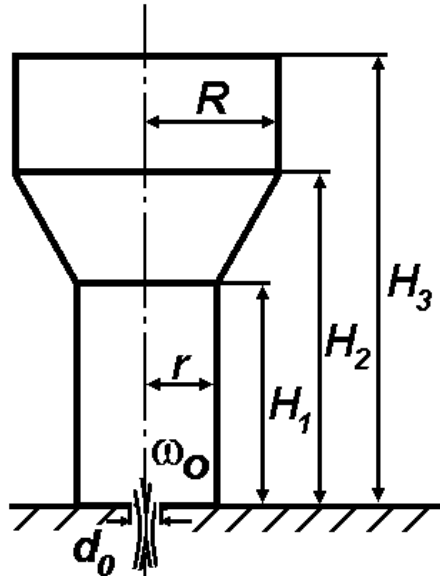
**Розв'язання.** Використовуючи формулу (10.22), безпосередньо знаходимо

$$t = \frac{2 \cdot 3,1415}{\frac{3,1415 \cdot 0,05^2}{4} \cdot 0,6 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} \cdot \left[ 0,8^2 \cdot (\sqrt{1} - \sqrt{0,2}) - \frac{2}{3} \cdot 0,8 \cdot \frac{0,8 - 0,5}{1 - 0,2} \cdot (1\sqrt{1} - 0,2\sqrt{0,2}) + \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{0,8 - 0,5}{1 - 0,2} \right) \cdot (1^2 \sqrt{1} - 0,2^2 \sqrt{0,2}) \right] + \frac{2 \cdot 3,1415}{15 \cdot \frac{3,1415 \cdot 0,05^2}{4} \cdot 0,6} \cdot \sqrt{\frac{0,2}{2 \cdot 9,81}} \cdot (8 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,2^2) =$$

= 678,5 с.

Відповідь. Час повного спорожнення складеного резервуара  $t = 678,5$  с.

**ЗАДАЧА № 3.**



Визначити час  $t$  повного спорожнення водонапірної вежі з розмірами  $R = 2$  м,  $r = 1$  м,  $H_1 = 8$  м,  $H_2 = 10$  м,  $H_3 = 13$  м через малий донний отвір діаметром  $d_0 = 5$  см, коефіцієнт витрати отвору  $\mu = 0,8$ .  
Розв'язання. Водонапірна вежа є складеним резервуаром, який містить два циліндра з діаметрами  $R$  і  $r$ , що з'єднуються зсіченим конусом. Застосовуючи формули (10.2), (10.3), (10.5) зі змінами позначень напорів і радіусів, запишемо формулу для визначення часу  $t$  повного спорожнення водонапірної вежі

$$t = \frac{2\pi}{\omega_0 \mu \sqrt{2g}} \cdot$$

$$\left\{ R^2(\sqrt{H_3} - \sqrt{H_2}) + \left[ r^2(\sqrt{H_2} - \sqrt{H_1}) + \frac{2}{3} r \frac{R-r}{H_2-H_1} (H_2\sqrt{H_2} - H_1\sqrt{H_1}) + \frac{1}{5} \left( \frac{R-r}{H_2-H_1} \right)^2 (H_2^2\sqrt{H_2} - H_1^2\sqrt{H_1}) \right] + r^2\sqrt{H_1} \right\} \cdot$$

Визначимо площу

перерізу донного отвору  $\omega_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{3,1415 \cdot 0,05^2}{4} = 0,001963$  м<sup>2</sup>.

Остаточно, підставимо чисельні дані

$$t = \frac{2 \cdot 3,1415}{1,963 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} \left\{ 2^2(\sqrt{13} - \sqrt{10}) + \left[ 1^2(\sqrt{10} - \sqrt{8}) + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2-1}{10-8} \cdot (10\sqrt{10} - 8\sqrt{8}) + \frac{1}{5} \left( \frac{2-1}{10-8} \right)^2 (10^2\sqrt{10} - 8^2\sqrt{8}) \right] + 1^2\sqrt{8} \right\} = 903,258 \cdot (1,776 + 11,876 + 2,828) = 14876 \text{ с} \approx 4 \text{ години } 8 \text{ хв.}$$

Відповідь. Час повного спорожнення водонапірної вежі  $t = 14876$  с  $\approx 4$  години 8 хв.

ЛЕКЦІЯ № 11. ГІДРАВЛІЧНІ СТРУМЕНІ. ВИВІД ФОРМУЛ ЛЮГЕРА І ФРІМАНА ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ВИСОТИ ВЕРТИКАЛЬНИХ СТРУМЕНІВ.

I. ВЕРТИКАЛЬНІ СТРУМЕНІ.

Для гасіння зовнішніх пожеж часто використовують вільні (незатоплені) гідравлічні струмені. Водяні струмені поділяються на **суцільні**, одержані від ручних і лафетних пожежних стволів з конічними та коноїдальними насадками, і **розпилені**, що утворені за допомогою спеціальних насадок – розпилювачів.

Суцільні водяні струмені відрізняються компактністю і значною дальністю польоту, але такі струмені при великому тиску в стволі одержати неможливо. У цьому випадку струмінь умовно поділяється на дві частини: **компактну** та **роздроблену**.

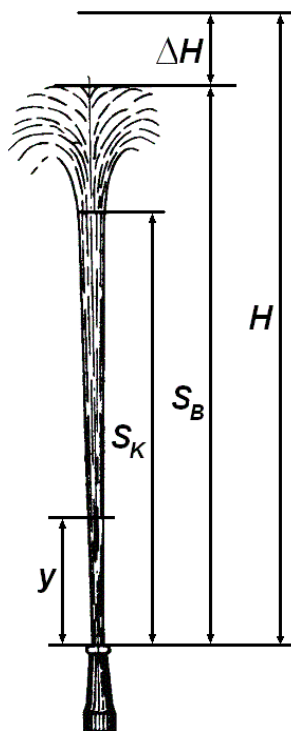


Рисунок 11.1.



Рисунок 11.2.

У вертикальному струмені роздроблена частина виникає внаслідок руйнування суцільної частини і відрізняється від неї підвищеною домішкою повітря у рідині. Висоти компактної  $S_K$  і роздробленої  $S_B$  частин струменя показано на Рисунку 11.1. Там



же зазначено напір  $H$  у сприску стовпа та втрати висоти струменя  $\Delta H$ . Між цими параметрами існує зв'язок

$$S_B = H - \Delta H. \quad (11.1)$$

На Рисунку 11.2 показано реальне руйнування суцільності струменя.

Для обчислення  $\Delta H$  використовуємо відому в гідравліці формулу Дарсі-Вейсбаха (5.3), яка побудована для обчислення лінійних втрат напору в трубах за умови сталості середньої швидкості потоку і діаметра труби. Запишемо вираз диференціала втрат висоти струменя у вигляді

$$d(\Delta H) = \frac{\lambda(y)}{2gD(y)} V^2(y) dy,$$

де  $g$  - прискорення вільного падіння;  $\lambda(y)$  - коефіцієнт лінійних втрат;  $D(y)$  - діаметр струменя;  $V(y)$  - середня швидкість потоку;  $y$  - вертикальна координата (Рисунок 11.1). При зростанні  $y$  зростають відповідно  $D(y)$  і  $\lambda(y)$ , тому далі відношення  $\lambda(y)D^{-1}(y)$  будемо вважати сталим і рівним  $\lambda_0 D_0^{-1}$ , де  $\lambda_0 = \lambda(0)$ ,  $D_0 = D(0)$  - діаметр насадки або ствола.

Розглянемо два варіанти розподілу швидкості потоку за координатою  $y$ . В першому варіанті зміна швидкості описується функцією  $V(y) = \sqrt{2gH(1 - yS_B^{-1})}$ ,  $0 \leq y \leq S_B$ . Тоді

$$\Delta H = \frac{\lambda_0 H}{D_0} \int_0^{S_B} (1 - yS_B^{-1}) dy = \frac{\lambda_0 H}{D_0} \left( y - \frac{y^2}{2S_B} \right) \Big|_0^{S_B} = \frac{\lambda_0 H}{2D_0} S_B. \quad (11.2)$$

В цьому виразі виділимо коефіцієнт  $\eta = \frac{\lambda_0}{2D_0}$ , розмірність якого [1/м], тоді з (11.1) і (11.2) одержуємо

$$S_B = H - \eta H S_B \Rightarrow S_B = \frac{H}{1 + \eta H}.$$

До аналогічної формули прийшов у 1895 р. Люгер, аналізуючи результати експериментів для фонтанних струменів. Він установив, що

$$S_B = \frac{H}{1 + \eta H}, \quad \eta = \frac{0,00025}{D_o(1 + 1000D_o^2)}. \quad (11.3)$$

Для другого варіанту розподіл швидкості потоку має вигляд

$$V(y) = \sqrt{2gH\left(1 - \frac{y}{H}\right)}, \quad 0 \leq y \leq H,$$

для обчислення втрат напору одержуємо

$$\Delta H = \frac{\lambda_o H}{D_o} \int_0^H \left(1 - \frac{y}{H}\right) dy = \frac{\lambda_o H}{D_o} \left(y - \frac{y^2}{2H}\right) \Big|_0^H = \frac{\lambda_o}{2D_o} H^2. \quad (11.4)$$

З виразів (11.1) і (11.4) знаходимо

$$S_B = H - \frac{\lambda_o}{2D_o} H^2.$$

До аналогічної залежності в 1888 р. прийшов Фріман, аналізуючи результати експериментів для пожежних струменів. Він установив, що  $\lambda_o = 0,000226$ . Тому, за Фріманом,

$$S_B = H - \frac{0,000113}{D_o} H^2 = H \left(1 - \frac{0,000113}{D_o} H\right). \quad (11.5)$$

Характеризуючи точність формул (11.3) і (11.5), наголошується, що вони дають близькі результати для тих значень  $D_o$  і  $H$ , які використовуються в пожежній справі. З цих формул видно залежність висоти вертикального струменя від величини напору і діаметра насадки. Однак висота струменя для кожної окремої насадки зі збільшенням напору не може зростати необмежено, вона досягає визначеної максимальної величини, після чого не зміню-

ється при «нескінченному» збільшенні напору. Максимальну висоту суцільного струменя можна визначити за формулою Люгера

$$S_{Bmax} = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{H}{1 + \eta H} = \frac{1}{\eta}.$$

Оскільки величина  $\eta$  залежить тільки від діаметра насадки (11.3) ( $\eta$  зменшується зі збільшенням  $D_o$ , тобто зворотна величина до  $\eta$  теж буде збільшуватися), то при великих напорах зростання висоти струменя можливо тільки при збільшенні діаметра насадки.

Граничну величину напору, при якому струмінь досягає максимальної висоти, знайдемо з формули Фрімана (11.5), прирівнюючи першу похідну від  $S_B$  по  $H$  до нуля

$$\frac{dS_B}{dH} = 1 - 0,000226 \frac{H}{D_o} = 0, \text{ звідки } H = \frac{D_o}{0,000226}.$$

Слід зазначити, що рекомендовані формули Люгера і Фрімана дають цілком задовільні результати при розрахунку струменів, одержаних з ручних стволів, і вимагають обмеженого застосування для насадок великого діаметра.

Величину компактної частини струменя для ручних стволів прийнято визначати як частину усього вертикального струменя за формулою  $S_K = fS_B$ , де  $f$  - безрозмірний коефіцієнт, що змінюється залежно від величини  $S_B$ . Дослідні дані В.Г.Лобачова наведені в Таблиці 11.1.

Таблиця 11.1.

$S_B, \text{ м}$	7	10	15	20	25	30
$f$	0,84	0,83	0,81	0,76	0,67	0,54

З наведеної таблиці видно, що зі збільшенням напору перед насадкою частка компактної частини струменя відносно всього струменя зменшується.

## II. РОЗРАХУНОК ВИСОТИ ВЕРТИКАЛЬНИХ СТРУМЕНІВ З УРАХУВАННЯМ СИЛИ ОПОРУ ПОВІТРЯ ЗА ДОПОМОГОЮ СПРОЩЕНОГО РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ.

У гідравліці за допомогою рівняння Бернуллі описують одновимірні рухи рідин в трубах. Покажемо, що у спрощеному вигляді його можна використовувати і для розрахунку вертикальних струминних потоків з урахуванням сили опору повітря, коли сила опору  $F_{\text{оп}}$  є деякою неперервною функцією швидкості  $V$ , тобто  $F_{\text{оп}} = F_{\text{оп}}(V)$ , причому  $F_{\text{оп}}(0) = 0$ .

Щоб скласти диференціальне рівняння руху, звернемося до Рисунку 11.3, на якому зображено довільний виділений елемент струменя, та розглянемо динамічну рівновагу елемента струменя довжиною  $dy$  у напрямку вертикальної осі  $OY$ . Вона виражається рівнянням

$$\left( P + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \omega + F_{\text{оп}} + F_{\text{ін}} + G - P\omega = 0, \quad (11.6)$$

у якому

$$G = \rho g \omega dy, \quad F_{\text{оп}} = K_c \pi D_c f(V) dy, \quad F_{\text{ін}} = \rho \omega \left( \frac{\partial V}{\partial y} V + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dy. \quad (11.7)$$

В наведених формулах  $D_c$  і  $\omega$  - діаметр і площа поперечного перерізу струменя,  $P$  - тиск,  $V$  - вертикальна швидкість руху центра виділеного елемента,  $\rho$  - густина рідини,  $g$  - прискорення вільного падіння,  $G$  - сила ваги,  $F_{\text{ін}}$  - сила інерції,  $F_{\text{оп}}$  - сила опору повітря, що діє на виділений елемент;  $K_c = K_c(y)$  - коефіцієнт тертя струменя об повітря;  $f(V)$  - деяка неперервна функція швидкості.

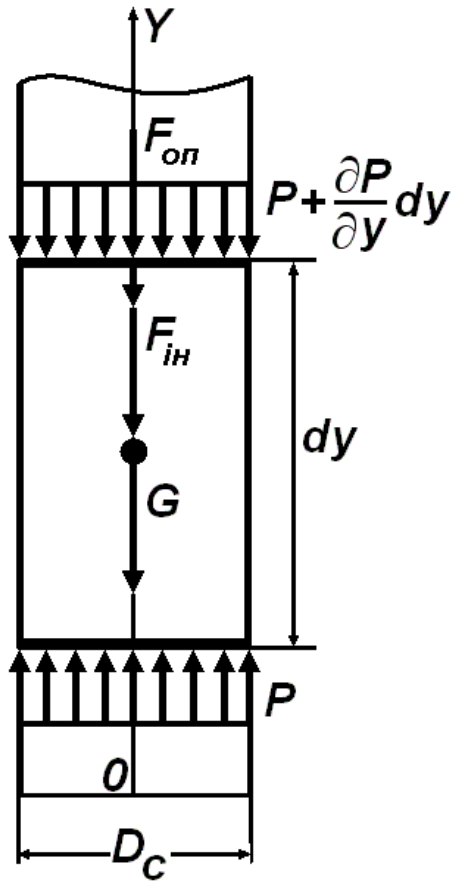


Рисунок 11.3.

Крім того, приймаємо  $K_o = K_c(0)$ ,  $K_c D_c^{-1} = K_o D_o^{-1} = const$ . У результаті, замість (11.8), одержуємо

$$V \frac{dV}{dy} + \frac{4K_o}{\rho D_o} f(V) = -g. \quad (11.9)$$

Покажемо, що це спрощене рівняння Бернуллі за суттю є рівнянням руху кинутого вертикально вгору абсолютно твердого тіла масою  $m$ . Дійсно, якщо сила опору представлена виразом  $F_{оп} = K_c \cdot f(\dot{y})$ , то рух тіла визначається рівнянням, яке розглядається в курсі «Теоретична механіка»

$$m\ddot{y} + K_c \cdot f(\dot{y}) = -mg, \quad (11.10)$$

де точка означає похідну за часом  $t$ .

Оскільки далі буде розглядатися тільки стаціонарний рух струменя, то для нього  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , а частинні похідні по  $y$  переходять у звичайні. Підставивши вираз (11.7) у (11.6), приходимо до рівняння Бернуллі в диференціальній формі

$$\frac{dP}{dy} + \frac{4K_c}{D_c} f(V) + \rho g + \rho V \frac{dV}{dy} = 0 \quad (11.8)$$

Щоб спростити цей вираз, тиск  $P$  у струмені вважаємо сталим, у силу чого  $\frac{dP}{dy} = 0$ .

Увівши позначення  $\dot{y} = V$ ,  $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = V \frac{dV}{dy}$ ,

отримуємо

$$V \frac{dV}{dy} + \alpha \cdot f(V) = -g, \quad (11.11)$$

де  $\alpha = \frac{K_c}{m}$ . Вираз (11.11) збігається з (11.9), коли  $\alpha = 4K_o(\rho D_o)^{-1}$ , що і потрібно було довести. Після відокремлення змінних у (11.11), маємо

$$dy = -\frac{VdV}{g + \alpha \cdot f(V)}. \quad (11.12)$$

Після інтегрування диференційного рівняння (11.12) отримуємо загальну формулу для отримання висоти вертикального струменя

$$\int_0^{S_B} dy = S_B = \int_0^{V_o} \frac{V \cdot dV}{g + \alpha \cdot f(V)}. \quad (11.13)$$

Вона дозволяє за умов – відомих залежності  $f(V)$  і величини коефіцієнта  $K_c$  (чи  $\alpha$ ) – за допомогою інтегрування знаходити  $S_B$ .

Як окремий випадок, розглянемо лінійну залежність сили опору від швидкості потоку, коли функція  $f(V) = V_o \cdot V$ . Підставимо цю функцію в (11.13), позначимо  $\alpha V_o = \beta$  і виконаємо інтегрування

$$S_B = \int_0^{V_o} \frac{VdV}{g + \beta V} = \frac{1}{g} \int_0^{V_o} \frac{VdV}{1 + \frac{\beta}{g} V} = \frac{1}{\beta} \int_0^{V_o} \frac{\frac{\beta}{g} + 1 - 1}{1 + \frac{\beta}{g} V} dV = \frac{1}{\beta} \left[ V - \frac{g}{\beta} \ln \left( 1 + \frac{\beta}{g} V \right) \right] \Big|_0^{V_o} =$$

$$= \frac{V_0}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} \ln \left( 1 + \frac{\beta V_0}{g} \right). \quad (11.14)$$

Відомо також, що висота підйому струменя без урахування сили опору повітря  $S_B = \frac{V_0^2}{2g}$ . Покажемо, що це співвідношення можна отримати з (11.14), розкриваючи невизначеність цього виразу при  $\beta \rightarrow 0$ . Дійсно,

$$S_B = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \frac{V_0}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} \ln \left( 1 + \frac{\beta V_0}{g} \right) \right] = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{V_0 \beta - g \ln \left( 1 + \frac{\beta V_0}{g} \right)}{\beta^2} =$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$ роз- криваємо за правилом Лопітала	$= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\frac{V_0}{1 + \frac{\beta V_0}{g}} - g \frac{1}{1 + \frac{\beta V_0}{g}}}{2\beta} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\frac{V_0^2 \beta}{\left(1 + \frac{V_0}{g} \beta\right)^2}}{2\beta} = \frac{V_0^2}{2g}$
---	---

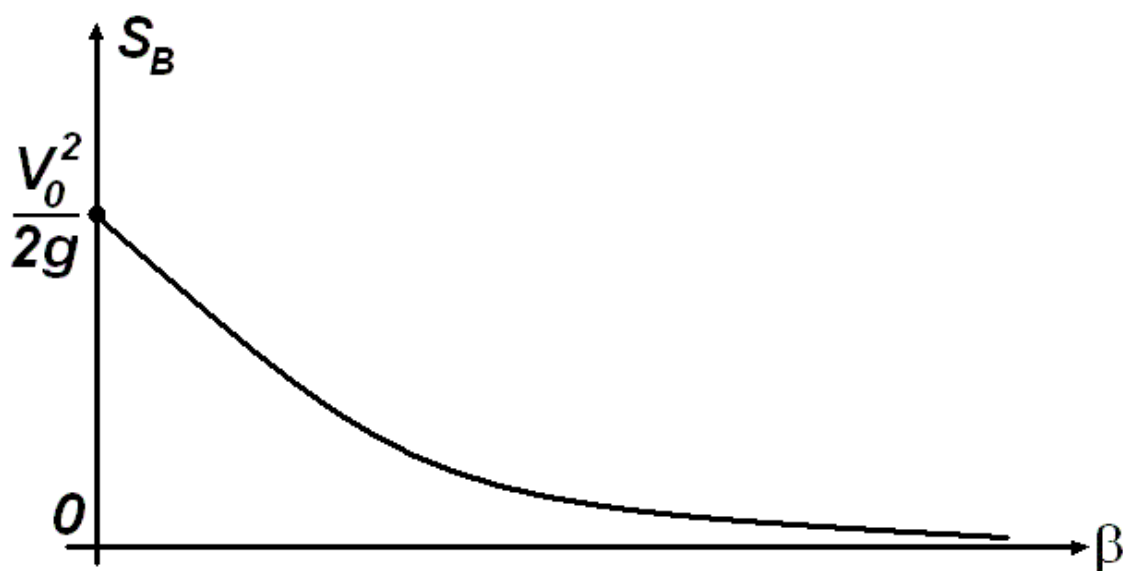


Рисунок 11.4.

На Рисунку 11.4 показано характер залежності висоти підйому вертикального струменя залежно від параметра  $\beta$

$$\beta = 4K_o(\rho D_o)^{-1}V_o, \quad (11.15)$$

де  $K_o$  [кг/м<sup>3</sup>] - коефіцієнт опору повітря, який визначається експериментально,  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] - густина води,  $D_o$  [м] - діаметр насадки ствола,  $V_o$  [м/с] - початкова швидкість витікання струменя.

\*ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

**ЗАДАЧА № 1.** Визначити висоту вертикального струменя  $S_B$  при напорі  $H = 30$  м вод.ст. і діаметрі насадки  $D_o = 19$  мм.

Розв'язання. Визначимо висоту вертикального струменя за формулою Люгера (11.3), де

$$\eta = \frac{0,00025}{D_o(1+1000D_o^2)} = \frac{0,00025}{0,019 \cdot (1+1000 \cdot 0,019^2)} \approx 0,00967. \text{ Остаточню}$$

$$S_B = \frac{H}{1+\eta H} = \frac{30}{1+0,00967 \cdot 30} = 23,26 \text{ м. Для порівняння об-}$$

числимо висоту вертикального струменя за формулою Фрімана (11.5)

$$S_B = H \left( 1 - \frac{0,000113}{D_o} H \right) = 30 \cdot \left( 1 - \frac{0,000113}{0,019} \cdot 30 \right) = 24,65 \text{ м.}$$

Відповідь. Висота вертикального струменя, обчислена за формулою Люгера  $S_B = 23,26$  м, а за формулою Фрімана  $S_B = 24,65$  м.

**ЗАДАЧА № 2.** Визначити напір  $H$ , необхідний для одержання вертикального струменя висотою  $S_B = 20$  м при діаметрі насадки  $D_o = 16$  мм.

Розв'язання. Скористаємось формулою Люгера (11.3), звідки



$$H = \frac{S_B}{1 - \eta S_B},$$

$$\text{де } \eta = \frac{0,00025}{D_o(1 + 1000D_o^2)} = \frac{0,00025}{0,016 \cdot (1 + 1000 \cdot 0,016^2)} \approx 0,01244.$$

$$\text{Тому потрібний напір } H = \frac{20}{1 - 0,01244 \cdot 20} = 26,63 \text{ м.}$$

Відповідь. Потрібний напір  $H = 26,63$  м.

**ЗАДАЧА № 3.** Визначити висоту підйому гідравлічного струменя  $S_B$ , що витікає з насадки з початковою швидкістю  $V_o = 20$  м/с, якщо діаметр насадки  $D_o = 19$  мм, коефіцієнт опору повітря  $K_o = 0,02375$  кг/м<sup>3</sup>.

Розв'язання. За формулою (11.15) визначаємо коефіцієнт  $\beta = 4K_o(\rho D_o)^{-1}V_o = 4 \cdot 0,02375 \cdot (1000 \cdot 0,019)^{-1} \cdot 20 = 0,1$  1/с. Використовуючи формулу (11.14), маємо

$$S_B = \frac{V_o}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} \ln \left( 1 + \frac{\beta V_o}{g} \right) = \frac{20}{0,1} - \frac{9,81}{0,1^2} \ln \left( 1 + \frac{0,1 \cdot 20}{9,81} \right) = 17,98 \text{ м.}$$

Висота підйому струменя без урахування сили опору повітря  $S_B = \frac{V_o^2}{2g} = \frac{20^2}{2 \cdot 9,81} = 20,39$  м.

Відповідь. Висота підйому гідравлічного струменя  $S_B$  з урахуванням сили опору повітря  $S_B = 17,98$  м, а з урахуванням - 20,39 м.

**ЗАДАЧА № 4.** Визначити висоту підйому гідравлічного струменя  $S_B$ , що витікає з насадки з початковою швидкістю  $V_o = 20$  м/с, якщо діаметр насадки  $D_o = 19$  мм, при квадратичній залежності опору повітря, тобто,  $f(V) = V_o \cdot V^2$ , коефіцієнт опору повітря  $K_o = 0,02375$  кг·с/м<sup>4</sup>.

Розв'язання. За формулою (11.15) визначаємо коефіцієнт  $\beta = 4K_0(\rho D_0)^{-1}V_0 = 4 \cdot 0,02375 \cdot (1000 \cdot 0,019)^{-1} \cdot 20 = 0,01 \text{ 1/м}$ .  
За формулою (11.13) висота підйому гідравлічного струменя

$$S_B = \frac{1}{g} \int_0^{V_0} \frac{V \cdot dV}{1 + \frac{\beta}{g} V^2} = \frac{1}{g} \int_0^{V_0} \frac{\frac{2\beta}{g} V}{1 + \frac{\beta}{g} V^2} dV = \frac{1}{2\beta} \ln \left( 1 + \frac{\beta}{g} V_0^2 \right).$$

Остаточно маємо  $S_B = \frac{1}{2 \cdot 0,01} \ln \left( 1 + \frac{0,01}{9,81} \cdot 20^2 \right) = 17,09 \text{ м}$ . Легко також довести, що при  $\beta \rightarrow 0$ , розкриваючи невизначеність  $\frac{0}{0}$  за правилом Лопіталя, отримуємо вже відому формулу для висоти підйому струменя без урахування опору повітря

$$S_B = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 + \frac{\beta}{g} V_0^2 \right)}{2\beta} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 + \frac{\beta}{g} V_0^2} \cdot \frac{V_0^2}{g}}{2} = \frac{V_0^2}{2g}.$$

Відповідь. Висота підйому гідравлічного струменя при квадратичній залежності сили опору повітря  $S_B = 17,09 \text{ м}$ .

## ЛЕКЦІЯ № 12. РОЗРАХУНОК ТРАЄКТОРІЙ ПОЖЕЖНИХ ГІДРАВЛІЧНИХ СТРУМЕНІВ.

### I. ОБЧИСЛЕННЯ РАДІУСІВ ДІЇ КОМПАКТНОЇ І РОЗДРОБЛЕНОЇ ЧАСТИН НАХИЛЕНОГО СТРУМЕНЯ.

У практиці пожежегасіння звичайно використовують похилі струмені. Їх характеризують двома радіусами дії. Розглянемо ці поняття. Радіусом дії компактної частини струменя називається відстань  $R_K$  від торця спрisky ствола до кривої компактних частин, що обгинає струмінь (Рисунок 12.1).

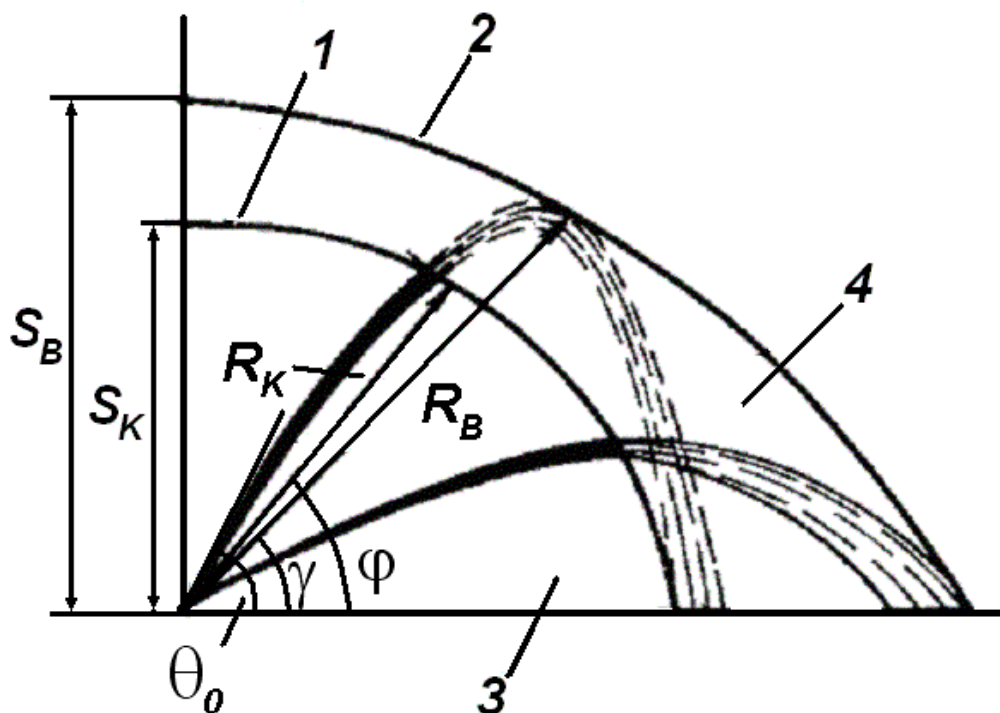


Рисунок 12.1. Области зрошення роздробленою і компактною частинами струменя:

1 – крива, що обгинає компактну частину  $R_K$  струменя; 2 - крива, що обгинає роздроблені частини польоту струменя; 3 - область, що поливається компактним струменем; 4 - область, що поливається роздробленим струменем

Радіусом дії роздробленої частини називається відстань  $R_B$  від торця спрisky ствола до кривої роздроблених струменів, яка обгинає їх. Положення  $R_K$  і  $R_B$  визначаються їхніми кутами нахилу до горизонту, що на Рисунку 12.1 позначені кутами  $\varphi$  і  $\gamma$ .

Не слід плутати  $\varphi$  і  $\gamma$  з кутом нахилу осі ствола до горизонту  $\theta_0$ . Між ними виконуються нерівності  $\theta_0 > \varphi > \gamma$ .

Способи обчислення  $R_K$  і  $R_B$  залежать від величини діаметра сприску ствола. Для ручних пожежних стволів, у яких  $D_0 \leq 25$  мм, приймають  $R_K \approx S_K$ ;  $R_B = f_2 \cdot S_B$ . Множник  $f_2$  залежить від кута  $\gamma$ . Його значення наведені в таблиці 12.1.

Таблиця 12.1.

$\gamma, ^\circ$	0	15	30	45	60	75	90
$f_2(\gamma)$	1,40	1,30	1,20	1,12	1,07	1,03	1,00

Із таблиці 12.1 випливає, що  $\max R_B = 1,4S_B$ . Ця максимальна далекобійність похилого струменя досягається при  $\gamma = 0^\circ$ , коли  $\theta_0 \approx 30 \div 32^\circ$ .

Складніше обчислювати  $R_K$  і  $R_B$  для лафетних стволів, у яких  $D_0 \geq 28$  мм. У цьому випадку  $R_K$  залежить від кута  $\varphi$  і визначається добутком

$$R_K = f \cdot R_K^* \quad (12.1)$$

У ньому  $R_K^*$  - радіус дії компактної частини, що відповідає куту  $\varphi = 30^\circ$ . Множник  $f$  беруть з таблиці 12.2. Як бачимо, визначення  $R_K$  і  $R_B$  зв'язане з обчисленням  $S_B$  по формулі (11.3) чи (11.5). У зв'язку з цим звернемо увагу на те, що зазначені формули дають цілком задовільні величини  $S_B$  тільки для ручних пожежних стволів і обмежено застосовні у випадку насадок великого діаметра, характерних для лафетних стволів.

Таблиця 12.2

$\varphi, ^\circ$	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$f(\varphi)$	1,18	1,10	1,05	1,0	0,95	0,92	0,90	0,88	0,86	0,85

Таблица 12.3

$R_K,$ м	$S_B,$ м	$D_0 =$ 0,013 м		$D_0 =$ 0,016 м		$D_0 =$ 0,019 м		$D_0 =$ 0,022 м		$D_0 =$ 0,025 м	
		$H,$ м	$Q,$ л/с	$H,$ м	$Q,$ л/с	$H,$ м	$Q,$ л/с	$H,$ м	$Q,$ л/с	$H,$ м	$Q,$ л/с
6	7,1	8,1	1,7	7,8	2,5	7,7	3,5	7,6	4,6	7,5	5,9
7	8,3	9,7	1,8	9,3	2,7	9,1	3,8	8,9	5,0	8,8	6,5
8	9,5	11,3	2,0	10,8	2,9	10,5	4,1	10,3	5,4	10,1	6,9
9	10,8	13,1	2,1	12,4	3,1	12,0	4,4	11,7	5,8	11,5	7,4
10	12,0	14,9	2,3	14,1	3,3	13,5	4,6	13,2	6,1	12,9	7,8
11	13,2	16,9	2,4	15,8	3,5	15,2	4,9	14,7	6,5	14,4	8,2
12	14,5	19,0	2,6	17,7	3,7	16,8	5,2	16,3	6,8	15,9	8,7
13	15,8	21,3	2,7	19,6	3,9	18,6	5,4	17,9	7,1	17,5	9,1
14	17,1	23,8	2,9	21,7	4,1	20,5	5,7	19,7	7,5	19,1	9,5
15	18,5	26,5	3,0	24,0	4,4	22,5	6,0	21,5	7,8	20,8	9,9
16	19,9	29,5	3,2	26,4	4,6	24,6	6,2	23,4	8,2	22,7	10,3
17	21,4	32,9	3,4	29,1	4,8	26,9	6,5	25,5	8,5	24,6	10,8
18	22,9	36,8	3,6	32,1	5,0	29,5	6,8	27,8	8,9	26,7	11,2
19	24,6	41,3	3,8	35,4	5,3	32,3	7,1	30,3	9,3	29,0	11,7
20	26,4	46,5	4,0	39,2	5,6	35,4	7,5	33,0	9,7	31,5	12,2
21	28,3	52,8	4,3	43,6	5,9	38,9	7,8	36,1	10,1	34,2	12,7
22	30,3	60,4	4,6	48,6	6,2	42,9	8,2	39,4	10,6	37,2	13,3
23	32,5	69,9	4,9	54,6	6,6	47,4	8,6	43,3	11,1	40,7	13,9
24	34,9	82,1	5,3	61,8	7,0	52,7	9,1	47,7	11,6	44,5	14,5
25	37,6	98,3	5,8	70,5	7,5	59,0	9,6	52,7	12,2	48,9	15,2
26	40,4	-	-	81,4	8,0	66,4	10,2	58,6	12,9	53,8	16,0
27	43,6	-	-	95,3	8,7	75,4	10,9	65,5	13,6	59,6	16,8
28	47,1	-	-	-	-	86,4	11,7	73,6	14,5	66,3	17,7
29	50,9	-	-	-	-	-	-	83,5	15,4	74,2	18,7
30	55,1	-	-	-	-	-	-	95,4	16,5	83,5	19,9

З метою спрощення розрахунків параметрів пожежних струменів складені таблиці (Таблиця 12.3), в яких наведені залежності  $S_B$ ,  $H$  і  $Q$  від  $D_O$  і  $R_K$  для ручних пожежних стволів з виправленням помилок і неточностей округлень, допущених у їхніх попередніх виданнях [5, 11].

**Задача № 1.** Визначити  $H$  і  $D_O$ , при яких  $R_K \geq 18$  м, а  $Q \geq 5$  л/с.

Розв'язання. Звертаючись до Таблиці 12.3, знаходимо, що зазначені обмеження будуть виконані при  $H \geq 32,1$  м;  $D_O \geq 16$  мм.

**Задача № 2.** Знайти, якими будуть  $R_K$ ,  $S_B$  і  $Q$ , якщо  $D_O = 22$  мм;  $H \geq 39$  м.

Розв'язання. З Таблиці 12.3 одержуємо, що для зазначених вихідних параметрів струменя:  $R_K > 22$  м,  $S_B > 30$  м і  $Q > 10,6$  л/с.

## II. НАБЛИЖЕНИЙ СПОСІБ РОЗРАХУНКУ ТРАЄКТОРІЇ ГІДРАВЛІЧНОГО СТРУМЕНЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПОХИБОК ПОЧАТКОВИХ ШВИДКОСТІ ТА КУТА НАХИЛУ СТВОЛА НА ДОВЖИНУ ПОЛЬОТУ СТРУМЕНЯ.

Найпростіший спосіб розрахунку траєкторії гідравлічного струменя базується на інтегруванні рівнянь вільного руху матеріальної точки під дією сили ваги без урахування опору середовища. В цьому випадку, як відомо, траєкторією струменя є дуга параболи. Вона описується рішенням задачі Коші для двох диференціальних рівнянь

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g,$$

з початковими умовами

$$x(0) = 0, \quad y(0) = h_0, \quad \dot{x}(0) = V_0 \cos \theta_0, \quad \dot{y}(0) = V_0 \sin \theta_0.$$

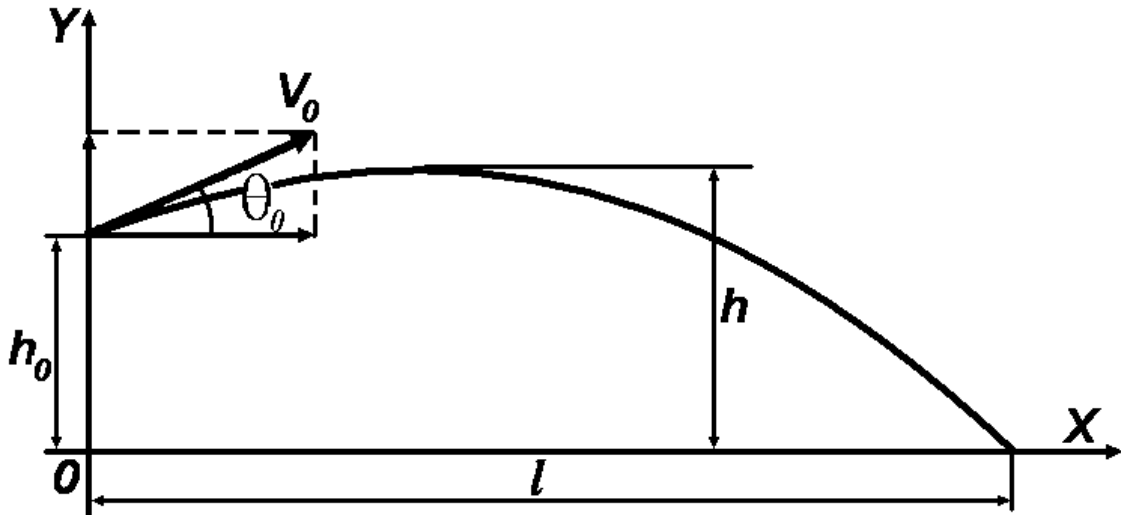


Рисунок 12.2.

Тут  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  - поточні координати частинки рідини на траєкторії,  $V_0$  - швидкість витікання струменя з насадки ствола,  $\theta_0$  - кут нахилу осі ствола до горизонту,  $g$  - прискорення вільного падіння,  $h_0$  - початкова висота ствола відносно горизонтальної осі, точка означає похідну за часом  $t$ .

Рішення задачі Коші має простий вигляд

$$x = V_0 \cos \theta_0 t, \quad y = V_0 \sin \theta_0 t - \frac{gt^2}{2} + h_0, \quad (12.2)$$

що дозволяє представити  $y$  як функцію  $x$

$$y = xtg\theta_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta_0} + h_0. \quad (12.3)$$

Траєкторія струменя має довжину польоту  $l$  і найбільшу висоту підйому  $h$ , які визначаються за формулами

$$l = \frac{V_0^2 \cos \theta_0}{g} \left( \sin \theta_0 + \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \frac{2gh_0}{V_0^2}} \right), \quad (12.4)$$

$$h = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} + h_0. \quad (12.5)$$

Для визначення максимальної довжини польоту струменя залежно від кута  $\theta_0$  дослідимо функцію  $l$  на екстремум

$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\theta_0} &= -\frac{V_0^2 \sin \theta_0}{g} \left( \sin \theta_0 + \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \frac{2gh_0}{V_0^2}} \right) + \frac{V_0^2 \cos \theta_0}{g} \left( \cos \theta_0 + \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 + \frac{2gh_0}{V_0^2}}} \right) = \\ &= \frac{V_0^2}{g} \left\{ \cos^2 \theta_0 \left[ 1 + \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 + \frac{2gh_0}{V_0^2}}} \right] - \sin^2 \theta_0 \left[ 1 + \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 + \frac{2gh_0}{V_0^2}}}{\sin \theta_0} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Дорівнюючи цей вираз нулю, приходимо до тригонометричного рівняння

$$\operatorname{tg}^2 \theta_0 = \left\{ \left[ 1 + \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 + \frac{2gh_0}{V_0^2}}} \right] / \left[ 1 + \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 + \frac{2gh_0}{V_0^2}}}{\sin \theta_0} \right] \right\} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 + \frac{2gh_0}{V_0^2}}},$$

звідки  $\cos^2 \theta_0 = \sin \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \frac{2gh_0}{V_0^2}}$ , або

$$1 - \sin^2 \theta_0 = \sin \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \frac{2gh_0}{V_0^2}}.$$

За допомогою заміни  $\sin \theta_0 = z$  останнє рівняння набуває ви-

гляду  $1 - z^2 = z \sqrt{z^2 + \frac{2gh_0}{V_0^2}}$ . Після зведення обох частин рів-

няння в квадрат і спрощення, воно набуває вигляду

$\left( \frac{2gh_0}{V_0^2} + 2 \right) z^2 = 1$ . Рішення цього рівняння дає два корні, один з



яких є від'ємним, тобто не має фізичного смислу, а другий додатним і дорівнює  $z = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{2gh_0}{V_0^2}}}$ . Таким чином, остаточно маємо

$$\theta_0 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{2gh_0}{V_0^2}}}. \quad (12.6)$$

Довжина польоту струменя  $l$ , що визначається за формулою (12.4), при постійній величині  $h_0$  є функцією двох незалежних змінних - початкової швидкості  $V_0$  і кута  $\theta_0$  нахилу осі ствола до горизонту. Оскільки задати точні значення будь-яких фізичних величин неможливо, проведемо дослідження впливу похибок  $\Delta V_0$  і  $\Delta \theta_0$  на величину дальності польоту струменя  $l$ . Для цього, замінюючи повний приріст функції  $l(V_0 + \Delta V_0, \theta_0 + \Delta \theta_0)$  її першим диференціалом  $\Delta l$ , маємо

$$\Delta l \approx \frac{\partial l}{\partial V_0} \Delta V_0 + \frac{\partial l}{\partial \theta_0} \Delta \theta_0, \quad (12.7)$$

де частинні похідні  $\frac{\partial l}{\partial V_0}$  і  $\frac{\partial l}{\partial \theta_0}$  визначаються наступним чином

$$\frac{\partial l}{\partial V_0} = \frac{1}{g} \left( \sin 2\theta_0 \cdot V_0 + 2 \cos \theta_0 \frac{V_0^2 \sin^2 \theta_0 + gh_0}{\sqrt{V_0^2 \sin^2 \theta_0 + 2gh_0}} \right), \quad (12.8)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_0} = \frac{1}{g} \left( \cos 2\theta_0 \cdot V_0 + \sin \theta_0 \frac{V_0^2 \cos 2\theta_0 - 2gh_0}{\sqrt{V_0^2 \sin^2 \theta_0 + 2gh_0}} \right). \quad (12.9)$$

**Задача № 3.** Обчислити найбільше відхилення  $\Delta l$  від теоретичної дальності польоту  $l_T$  гідравлічного струменя при  $h_0 = 3$  м,

якщо  $V_o = 20$  м/с,  $\theta_o = 30^\circ$ , похибка визначення швидкості витікання  $\Delta V_o = \pm 1$  м/с, кута нахилу осі ствола до горизонту  $\Delta \theta_o = \pm 1^\circ$ .

Розв'язання. Знаходимо за формулами (12.8) і (12.9) величини частинних похідних

$$\frac{\partial l}{\partial V_o} = \frac{1}{9,81} \left( \sin 60^\circ \cdot 20 + 2 \cos 60^\circ \frac{20^2 \cdot \sin^2 30^\circ + 9,81 \cdot 3}{\sqrt{20^2 \cdot \sin^2 30^\circ + 2 \cdot 9,81 \cdot 3}} \right) =$$

$$= 0,1019 \left( 17,32 + \frac{400 \cdot 0,25 + 9,81 \cdot 3}{\sqrt{400 \cdot 0,25 + 2 \cdot 9,81 \cdot 3}} \right) = 2,81 \text{ с},$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_o} = \frac{1}{9,81} \left( \cos 60^\circ \cdot 20 + \sin 30^\circ \frac{20^2 \cdot \cos 60^\circ - 2 \cdot 9,81 \cdot 3}{\sqrt{20^2 \cdot \sin^2 30^\circ + 2 \cdot 9,81 \cdot 3}} \right) =$$

$$= 0,1019 \left( 10 + 0,5 \frac{400 \cdot 0,5 - 2 \cdot 9,81 \cdot 3}{\sqrt{400 \cdot 0,25 + 2 \cdot 9,81 \cdot 3}} \right) = 29,32 \text{ м/}^\circ.$$

Для визначення граничної абсолютної похибки  $\Delta l$  формула (12.7) записується у вигляді

$$\Delta l \approx \left| \frac{\partial l}{\partial V_o} \right| \cdot |\Delta V_o| + \left| \frac{\partial l}{\partial \theta_o} \right| \cdot |\Delta \theta_o| = 2,81 \cdot 1 + 29,32 \cdot \left( \frac{3,1415}{180} \right) = 3,32 \text{ м.}$$

Сама теоретична дальність  $l_T$  визначається за формулою (12.4)

$$l_T = \frac{V_o^2 \cos \theta_o}{g} \left( \sin \theta_o + \sqrt{\sin^2 \theta_o + \frac{2gh_o}{V_o^2}} \right) = \frac{20^2 \cdot 0,866}{9,81} \left( 0,5 + \sqrt{0,25 + \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 3}{20^2}} \right)$$

$= 39,89$  м. Остаточну запишемо відповідь у вигляді

$l = (39,89 \pm 3,32)$  м, тобто при вказаних умовах і похибках  $\Delta V_o$

і  $\Delta \theta_o$  дійсна величина дальності польоту  $l$  гідравлічного стру-

меня знаходиться в діапазоні  $36,57 \leq l \leq 43,21$  м.

Розрахункові залежності параметрів траєкторії гідравлічного струменя істотно спрощуються при  $h_0 = 0$ . Рівняння (12.3)

$$\text{траєкторії має вигляд } y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta_0}.$$

Дальність польоту  $l$  струменя та найбільша висота  $h$  її підйому визначаються за формулами

$$l = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g}, \quad h = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}.$$

Максимум  $l$  досягається при  $\theta_0 = 45^\circ$ , для цього кута

$$l_{\max} = \frac{V_0^2}{g} = 2H, \quad h = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{H}{2}, \quad \text{де } H = \frac{V_0^2}{2g} - \text{напір у сприску}$$

ствола. До речі, із формули (12.6) при  $h_0 = 0$   $\theta_0$  також складає кут  $45^\circ$ .

Теоретичні значення  $l$  і  $h$  виявляються значно завищеними у порівнянні з експериментальними дослідженнями. Це пов'язано з тим, що отримані розрахункові залежності не враховують вплив сили опору навколишнього середовища гідравлічному струменю, що рухається в повітряному просторі (силу тертя струменя об повітря).

### III. КОРИГУВАННЯ РОЗРАХУНКОВИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ПАРАМЕТРІВ ГІДРАВЛІЧНОГО СТРУМЕНЯ З УРАХУВАННЯМ ВТРАТИ НАПОРУ.

Найпростішим методом урахування сили тертя, який приводить до коригування виразів (12.2) і, відповідно, усіх розрахункових залежностей, оснований на застосуванні формули Дарсі-Вейсбаха (5.3) для втрат напору, що дозволяє вказаний вираз записати у вигляді

$$x = V_0 \cos \theta_0 t - \frac{kx}{D_0} \frac{V_0^2}{2g}, \quad y = V_0 \sin \theta_0 t - \frac{gt^2}{2} - \frac{ky}{D_0} \frac{V_0^2}{2g} + h_0, \quad (12.10)$$

де  $k$  - безрозмірний коефіцієнт опору, що визначається за допомогою експерименту,  $D_o$  - внутрішній діаметр сприску насадки. Виключаючи у виразі (12.10) час  $t$ , одержимо рівняння траєкторії гідравлічного струменя у явному вигляді

$$y = \operatorname{tg}\theta_o x - \frac{gx^2}{2V_o^2 \cos^2 \theta_o} \left( 1 + \frac{k V_o^2}{D_o 2g} \right) + \frac{h_o}{1 + \frac{k V_o^2}{D_o 2g}}. \quad (12.11)$$

В результаті проведеного коригування вигляд траєкторії гідравлічного струменя (дуга параболи) у формі (12.11) не змінився, хоча її параметри – дальність польоту  $l$  і висота підйому  $h$  зменшились.

Для отримання формули дальності польоту струменя залишається в (12.11) покласти  $y = 0$  і знайти додатний корінь відповідного квадратного рівняння. Введемо позначення

$$a = \frac{g}{2V_o^2 \cos^2 \theta_o} \left( 1 + \frac{k V_o^2}{D_o 2g} \right), \quad b = \frac{h_o}{1 + \frac{k V_o^2}{D_o 2g}}, \quad (12.12)$$

тоді необхідне квадратне рівняння набуває вигляду

$$ax^2 - \operatorname{tg}\theta_o x - b = 0, \quad (12.13)$$

звідки отримуємо формулу для визначення дальності польоту струменя

$$l = \frac{\operatorname{tg}\theta_o + \sqrt{\operatorname{tg}^2\theta_o + 4ab}}{2a}. \quad (12.14)$$

Формула для обчислення висоти  $h$  підйому струменя записується так

$$h = \frac{\operatorname{tg}^2\theta_o}{4a} + b. \quad (12.15)$$

**Задача № 4.** Обчислити дальність польоту  $l$  і висоту підйому  $h$  гідралічного струменя, який витікає з початковою швидкістю  $V_0 = 20$  м/с під кутом  $\theta_0 = 30^\circ$ . Діаметр насадки ствола  $D_0 = 19$  мм,  $h_0 = 3$  м, коефіцієнт опору повітря  $k = 10^{-4}$ .

Розв'язання. За формулами (12.12) обчислюємо коефіцієнти

$$a = \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta_0} \left( 1 + \frac{k V_0^2}{D_0 2g} \right) = \frac{9,81}{2 \cdot 20^2 \cdot 0,866^2} \left( 1 + \frac{10^{-4} \cdot 20^2}{0,019 \cdot 2 \cdot 9,81} \right) = 0,0181,$$

$$b = \frac{h_0}{1 + \frac{k V_0^2}{D_0 2g}} = \frac{3}{1 + \frac{10^{-4} \cdot 20^2}{0,019 \cdot 2 \cdot 9,81}} = 2,71, \quad \operatorname{tg} \theta_0 = \operatorname{tg} 30^\circ = 0,577.$$

Квадратне рівняння (12.13) з урахуванням цих значень запишемо у вигляді  $0,0181x^2 - 0,577x - 2,71 = 0$ . Його додатний корінь і є величиною дальності польоту струменя (12.14)

$$l = \frac{0,577 + \sqrt{0,577^2 + 4 \cdot 0,0181 \cdot 2,71}}{2 \cdot 0,0181} = 36,03 \text{ м.}$$

Необхідно відмітити, що в Задачі № 3 теоретична дальність польоту при тих же вихідних даних, але без урахування опору повітря, склала  $l_T = 39,89$  м, тобто на 3,86 м більше у порівнянні з величиною  $l$ .

Висота підйому  $h$  струменя за формулою (12.15) складає

$$h = \frac{\operatorname{tg}^2 \theta_0}{4a} + b = \frac{0,577^2}{4 \cdot 0,0181} + 2,71 = 7,31 \text{ м.}$$

Якщо не враховува-

ти опір повітря, відповідна формула для висоти  $h$  має вигляд

$$h = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} + h_0 = \frac{20^2 \cdot 0,5^2}{2 \cdot 9,81} + 3 = 8,1 \text{ м.}$$

Із цих розрахунків

безпосередньо випливає, що урахування сили опору повітря призводить до зменшення розрахункових величин дальності польоту та висоти підйому гідралічного струменя.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке фізична величина ? Навести приклади.
2. Поясніть, як утворюються похідні одиниці системи  $SI$ .
3. Яке фізичне тіло називається рідиною ? Які існують види рідини?
4. Назвіть основні фізичні властивості рідини.
5. Як визначаються коефіцієнти стисливості, температурного розширення та модуль об'ємної пружності ?
6. Поняття в'язкості, зв'язок між динамічною та кінематичною в'язкістю.
7. Який закон показує зв'язок між густиною газу та тиском ?
8. Напишіть рівняння Клапейрона для ідеального газу.
9. Визначення гідростатичного тиску у точці. Властивості гідростатичного тиску.
10. Основне рівняння гідростатики.
11. Як будуються епюри гідростатичного тиску на вертикальну та похилу стінки ?
12. Обчислення сили тиску на дно посудини та плоскі поверхні.
13. Поясніть принцип роботи гідравлічного преса та накреслити його схему.
14. Запишіть барометричну формулу. Поясніть, яке припущення покладено в основу її виводу.
15. Що таке сила тиску рідини на криволінійну поверхню ?
16. Запишіть формулу для горизонтальної складової сили тиску на циліндричну поверхню.
17. Дати визначення «тіла тиску» і записати формулу для вертикальної складової сили тиску на циліндричну поверхню.
18. Сформулювати закон Архімеда та навести його математичний запис.
19. Що характеризує остійність плаваючого тіла ?
20. Що таке метацентрична висота ? Наведіть формулу для її визначення.
21. Дайте визначення потоку рідини. Назвіть параметри, які його характеризують.
22. Рівняння нерозривності потоку (перший закон гідродинаміки).
23. Які існують режими руху рідини ? Число Рейнольдса.
24. В якому режимі рухається рідина в системах протипожежного

- водопостачання ?
25. Записати рівняння Бернуллі для потоку ідеальної рідини. Наведіть форму запису другого закону гідродинаміки.
  26. Дайте геометричне тлумачення кожного з членів рівняння Бернуллі.
  27. Що вимірюють за допомогою п'єзометра та трубки Піто ?
  28. Записати рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини. Поясніть відмінності від рівняння Бернуллі для ідеальної рідини.
  29. Накреслити схему витратоміра Вентурі та поясніть принцип його дії.
  30. Класифікація втрат напору.
  31. За якою формулою визначаються втрати напору за довжиною трубопроводу ?
  32. Від яких параметрів в загальному випадку залежить коефіцієнт гідравлічного тертя ? За якими формулами він визначається ?
  33. Записати формулу для визначення втрат напору на місцевих опорах.
  34. Накреслити схеми деяких характерних місцевих опорів.
  35. Навести формули для визначення втрат напору в пожежному рукаві та рукавній лінії.
  36. Назвіть рівняння, які використовуються для гідравлічного розрахунку трубопроводів.
  37. Наведіть приклади складних трубопроводів.
  38. Що характеризує систему з послідовно з'єднаних труб і систему з паралельно з'єднаних труб ?
  39. При яких процесах може відбуватися рух газу в газопроводах ?
  40. Запишіть рівняння газостатики при ізотермічному процесі.
  41. Який вигляд має рівняння Бернуллі для нестационарного руху рідини ?
  42. Дайте фізичне тлумачення явища гідравлічного удару.
  43. Записати формулу Жуковського. Для якого гідравлічного удару вона застосовується ?
  44. Записати формулу Френкеля. Для якого гідравлічного удару вона застосовується ?
  45. Що є коефіцієнтами стиснення струменя, швидкості та витрати при витіканні рідини через малий отвір в малій стінці ?
  46. Дати визначити насадки та навести приклади найбільш поширених типів насадок.

47. Для яких технічних цілей використовують насадки ? Навести приклади.
48. Навести загальну формулу для часу повного спорожнення резервуару зі змінним перерізом за висотою через донний отвір з певним коефіцієнтом витрати.
49. Записати формули для часу часткового та повного спорожнення призматичного резервуару.
50. Вивести формулу для часу повного спорожнення резервуару у формі зсіченого конуса.
51. Вивести формулу для часу часткового спорожнення циліндричної бочки, розташованої горизонтально.
52. Вивести формулу для часу повного спорожнення резервуару у формі трапецеїдального корита.
53. Навести формулу для часу повного спорожнення складеного резервуару із двох циліндрів.
54. Записати формули Люгера та Фрімана для висоти підйому роздробленої частини вертикального струменя.
55. Як визначається гранична величина напору, при якому вертикальний струмінь досягає максимальної висоти ?
56. Який вигляд має спрощене рівняння Бернуллі для визначення висоти вертикального струменя з урахуванням сили опору повітря ?
57. Навести загальну формулу для визначення висоти вертикального струменя з урахуванням сили опору повітря.
58. Записати формулу для визначення висоти вертикального струменя при лінійній залежності сили опору від швидкості потоку.
59. Від чого залежать радіуси дії компактної і роздробленої частин нахилоного струменя ?
60. Поясніть сутність методу врахування сил тертя, на основі якого базується коригування формул для визначення дальності та висоти польоту гідравлічного струменя, що нахилений до горизонту.



Додаток 1. Найменування приставок для кратних та часткових одиниць вимірювань

Найменування приставки (позначення)					Множник	Найменування множника
Українське		Російське		Лат		
йотта	-	йотта	І	Y	$10^{24} = 1000000000000000000000000$	септильйон
зетта	-	зетта	З	Z	$10^{21} = 100000000000000000000000$	секстильйон
екса	Е	экса	Э	E	$10^{18} = 100000000000000000000000$	квінтильйон
пета	П	пета	П	P	$10^{15} = 100000000000000000000000$	квадрильйон
тера	Т	тера	Т	T	$10^{12} = 100000000000000000000000$	трильйон
гіга	Г	гига	Г	G	$10^9 = 1000000000$	мільярд
мега	М	мега	М	M	$10^6 = 1000000$	мільйон
мірія	ма	мириа	ма	ma	$10^4 = 10000$	міріад
кіло	к	кило	к	k	$10^3 = 1000$	тисяча
гекто	г	гекто	г	h	$10^2 = 100$	сто
дека	да	дека	да	da	$10^1 = 10$	десять
					$10^0 = 1$	одиниця
деци	д	деци	д	d	$10^{-1} = 0,1$	одна десята
санти	с	санти	с	c	$10^{-2} = 0,01$	одна сота
мілі	м	милли	м	m	$10^{-3} = 0,001$	одна тисячна
міріо	мо	мирио	мо	mo	$10^{-4} = 0,0001$	одна міріадна
мікро	мк	микро	мк	μ	$10^{-6} = 0,000001$	одна мільйонна
нано	н	нано	н	n	$10^{-9} = 0,000000001$	одна мільярдна
піко	п	пико	п	p	$10^{-12} = 0,000000000001$	одна трильйонна
фемто	ф	фемто	ф	f	$10^{-15} = 0,000000000000001$	одна квадрильйонна
атто	а	атто	а	a	$10^{-18} = 0,000000000000000001$	одна квінтильйонна
цепто, зепто	-	цепто, зепто	з	z	$10^{-21} = 0,000000000000000000001$	одна секстильйонна
йокто	-	йокто	і	y	$10^{-24} = 0,000000000000000000000001$	одна септильйонна

Додаток 2. Розмірності та одиниці вимірювання фізичних величин, які використовуються в технічній механіці рідини і газу

Найменування величини, її позначення	Одиниця вимірювання	Скорочене позначення одиниць вимірювання	Розмірність похідних одиниць
Площа, $\Omega$	Квадратний метр	м <sup>2</sup>	$[L^2]$ , (1 м) <sup>2</sup>
Об'єм, $W$	Кубічний метр	м <sup>3</sup>	$[L^3]$ , (1 м) <sup>3</sup>
Густина, $\rho$	Кілограм на кубічний метр	кг/м <sup>3</sup>	$[M] \cdot [L^{-3}]$ , (1 кг):(1 м) <sup>3</sup>
Швидкість, $V$	Метр за секунду	м/с	$[L] \cdot [T^{-1}]$ , (1 м):(1 с)
Прискорення, $a$	Метр на секунду в квадраті	м/с <sup>2</sup>	$[L] \cdot [T^{-2}]$ , (1 м):(1 с) <sup>2</sup>
Сила, $F$ Вага, $G$	Ньютон	Н	$[M] \cdot [L] \cdot [T^{-2}]$ (1 кг)·(1 м):(1 с) <sup>2</sup>
Питома вага, $\gamma$	Ньютон на кубічний метр	Н/м <sup>3</sup>	$[M] \cdot [L^{-2}] \cdot [T^{-2}]$ (1 кг):(1 м) <sup>2</sup> :(1 с) <sup>2</sup>
Тиск, $P$	Паскаль (Ньютон на квадратний метр)	Па (Н/м <sup>2</sup> )	$[M] \cdot [L^{-1}] \cdot [T^{-2}]$ (1 кг):(1 м):(1 с) <sup>2</sup>
Динамічна в'язкість, $\mu$	Ньютон-секунда на квадратний метр	Па·с (Н·с/м <sup>2</sup> )	$[M] \cdot [L^{-1}] \cdot [T^{-1}]$ , (1 кг):(1 м):(1 с)
Кінематична в'язкість, $\nu$	Квадратний метр на секунду	м <sup>2</sup> /с	$[L^2] \cdot [T^{-1}]$ , (1 м) <sup>2</sup> :(1 с)
Напір, $H$	Метр	м	$[L]$ , (1 м)
Об'ємні витрати, $Q$	Кубічний метр за секунду	м <sup>3</sup> /с	$[L^3] \cdot [T^{-1}]$ , (1 м) <sup>3</sup> :(1 с)
Робота, енергія	Джоуль	Дж (Н·м)	$[M] \cdot [L^2] \cdot [T^{-2}]$ , (1 кг)·(1 м) <sup>2</sup> :(1 с) <sup>2</sup>
Коефіцієнт стисливості, $\beta_w$	Квадратний метр на ньютон	м <sup>2</sup> /Н (1/Па)	$[M^{-1}] \cdot [L] \cdot [T^2]$ , (1 м)·(1 с) <sup>2</sup> :(1 кг)
Модуль пружності, $E$	Паскаль (Ньютон на квадратний метр)	Па (Н/м <sup>2</sup> )	$[M] \cdot [L^{-1}] \cdot [T^{-2}]$ , (1 кг):(1 м):(1 с) <sup>2</sup>
Коефіцієнт температурного розширення, $\beta_t$	Одиниця на градус	1/С°	$[K^{-1}]$ , 1:(1 К)

Додаток 3. Густина рідин  $\rho$  при  $20^\circ\text{C}$ .

Назва рідини	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Назва рідини	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Вода (при $4^\circ\text{C}$ )	1000	Нафта (легка)	650÷870
Ацетон	800	Нафта (середня)	870÷910
Бензин (легкий)	700	Нафта (важка)	910÷1050
Бензол	880	Ртуть	13520
Гліцерин	1260	Спирт (ректифікат)	830
Дизпаливо	1000		
Керосин	800	Сірчана кислота	1920
Молоко	1030	Етиловий спирт	790
Морська вода	1020	Ефір	720

Додаток 4. Динамічна в'язкість.

Рідина (при $20^\circ\text{C}$ )	$\mu$ , Па·с	Гази (при $20^\circ\text{C}$ і $1,013 \cdot 10^5$ Па)	$\mu$ , Па·с
Ацетон	0,000322	Азот	$0,0175 \cdot 10^{-3}$
Бензин	0,00060 – 0,00065	Аміак	$0,00995 \cdot 10^{-3}$
Вода	0,001008	Водень	$0,0088 \cdot 10^{-3}$
Гліцерин / Гліцерин безводний	1,480 / 0,512	Повітря	$0,0182 \cdot 10^{-3}$
Ртуть	0,001554	Гелій	$0,0196 \cdot 10^{-3}$
Смола	$3 \cdot 10^7$	Двоокис вуглецю	$0,0147 \cdot 10^{-3}$
Мастила	0,03÷5	Кисень	$0,0202 \cdot 10^{-3}$
Нафта	0,007÷0,008	Метан	$0,0108 \cdot 10^{-3}$
Етиловий спирт	0,00119	Окис вуглецю	$0,0177 \cdot 10^{-3}$

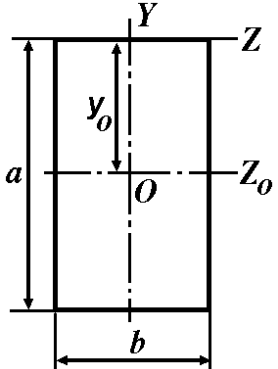
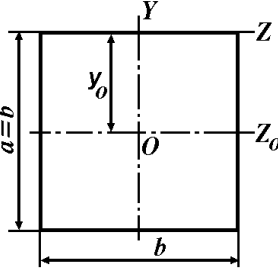
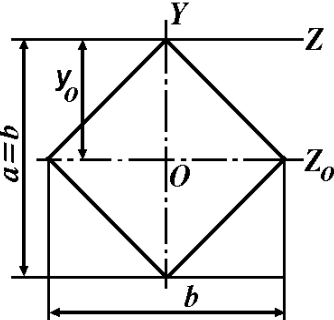
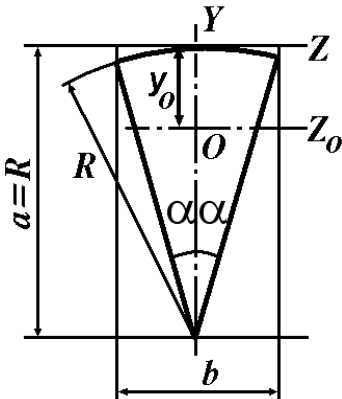
Додаток 5. Залежність густини та кінематичної в'язкості води від температури

Температура, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\nu$ , м <sup>2</sup> /с
0	999,87	$1,79 \cdot 10^{-6}$
4	1000,00	$1,52 \cdot 10^{-6}$
10	999,73	$1,31 \cdot 10^{-6}$
20	998,23	$1,01 \cdot 10^{-6}$
30	995,67	$0,81 \cdot 10^{-6}$
40	992,24	$0,66 \cdot 10^{-6}$
50	988,07	$0,55 \cdot 10^{-6}$
60	983,24	$0,48 \cdot 10^{-6}$
70	977,81	$0,41 \cdot 10^{-6}$
80	971,83	$0,37 \cdot 10^{-6}$
90	965,34	$0,33 \cdot 10^{-6}$
100	958,38	$0,28 \cdot 10^{-6}$

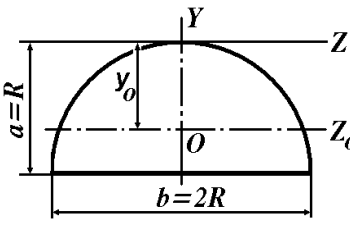
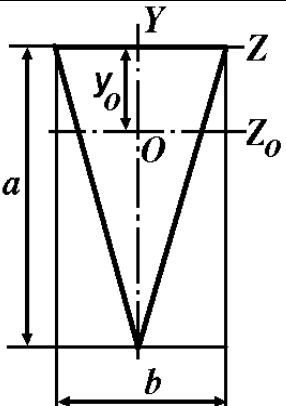
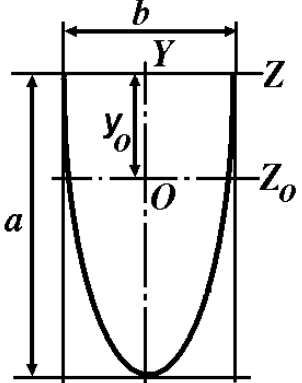
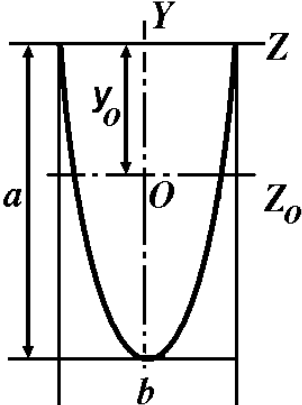
Додаток 6. Грецький алфавіт.

Малі букви	Великі букви	Назва букв	Малі букви	Великі букви	Назва букв
$\alpha$	Α	альфа	$\nu$	Ν	ню
$\beta$	Β	бета	$\xi$	Ξ	ксі
$\gamma$	Γ	гамма	$\omicron$	Ο	омікрон
$\delta$	Δ	дельта	$\pi$	Π	пі
$\epsilon$	Ε	епсилон	$\rho$	Ρ	ро
$\zeta$	Ζ	дзета	$\sigma$	Σ	сігма
$\eta$	Η	ета	$\tau$	Τ	тау
$\theta$	Θ	тета	$\upsilon$	Υ	іпсилон
$\iota$	Ι	йота	$\phi$	Φ	фі
$\kappa$	Κ	каппа	$\chi$	Χ	хі
$\lambda$	Λ	лямбда	$\psi$	Ψ	псі
$\mu$	Μ	мю	$\omega$	Ω	омега

Додаток 7. Площа, координата центру ваги, осьовий момент інерції для деяких плоских перерізів.

ФОРМА ПЕРЕРІЗУ	ПЛОЩА ПЕРЕРІЗУ $\omega$ , КООРДИНАТА ЦЕНТРУ ВАГИ $y_o$ , МОМЕНТ ІНЕРЦІЇ $I_{z_o}$		
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">ПРЯМОКУТНИК</p> 	$\omega = ab$	$y_o = \frac{a}{2}$	$I_{z_o} = \frac{ba^3}{12}$
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">КВАДРАТ</p> 	$\omega = ab = b^2$	$y_o = \frac{b}{2}$	$I_{z_o} = \frac{b^4}{12}$
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">КВАДРАТ НА РЕБРІ</p> 	$\omega = \frac{ab}{2} = \frac{b^2}{2}$	$y_o = \frac{b}{2}$	$I_{z_o} = \frac{b^4}{48}$
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">КРУГОВИЙ СЕКТОР</p> 	$\omega = \alpha R^2, \quad \alpha = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ},$ $y_o = R \left( 1 - \frac{2 \sin \alpha}{3\alpha} \right),$ $I_{z_o} = \frac{R^4}{8} \left( 2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32 \sin^3 \alpha}{9\alpha} \right)$		

ФОРМА ПЕРЕРІЗУ		ПЛОЩА ПЕРЕРІЗУ $\omega$ , КООРДИНАТА ЦЕНТРУ ВАГИ $y_o$ , МОМЕНТ ІНЕРЦІЇ $I_{z_o}$		
РОМБ		$\omega = \frac{ab}{2}$	$y_o = \frac{a}{2}$	$I_{z_o} = \frac{ba^3}{48}$
ТРАПЕЦІЯ		$\omega = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)a, \quad y_o = \frac{a}{3} \cdot \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2},$ $I_{z_o} = \frac{a^3}{36} \cdot \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}$		
ЕЛІПС		$\omega = \pi \frac{ab}{4}$	$y_o = \frac{a}{2}$	$I_{z_o} = \pi \frac{a^3b}{64}$
КОЛО		$\omega = \pi \frac{d^2}{4}$	$y_o = \frac{d}{2}$	$I_{z_o} = \pi \frac{d^4}{64}$

ФОРМА ПЕРЕРІЗУ	ПЛОЩА ПЕРЕРІЗУ $\omega$ , КООРДИНАТА ЦЕНТРУ ВАГИ $y_o$ , МОМЕНТ ІНЕРЦІЇ $I_{z_o}$		
<p>НАПІВКОЛО</p> 	$\omega = \pi \frac{R^2}{2}, \quad y_o = R \left( 1 - \frac{4}{3\pi} \right),$ $I_{z_o} = \frac{R^4}{256} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$		
<p>ТРИКУТНИК</p> 	$\omega = \frac{1}{2} ab$	$y_o = \frac{a}{3}$	$I_{z_o} = \frac{ba^3}{36}$
<p>НАПІВЕЛІПС</p> 	$\omega = \pi \frac{ab}{4}, \quad y_o = \frac{4}{3\pi} a,$ $I_{z_o} = \frac{ba^3}{2} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$		
<p>ПАРАБОЛІЧНИЙ СЕГМЕНТ</p> 	$\omega = \frac{2}{3} ab, \quad y_o = \frac{2}{5} a$ $I_{z_o} = \frac{8}{175} ba^3$		

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Агроскин И.И., Дмитриев Г.Т., Пикалов Ф.И. Гидравлика.-М.-Л.: Энергия, 1964.
2. Альтшуль А.Д., Киселев П.Т. Гидравлика и аэродинамика.-М.: Стройиздат, 1965.-274 с.
3. Єременко С.А., Ольшанський В.П., Халипа В.М., Дубовик О.О. Розрахунок пожежних гідравлічних струменів. Навчальний посібник.-К.: 2005.-124 с.
4. Лаврівський З.В., Мандрус В.І. Технічна механіка рідин та газів. Навчальний посібник.-Львів: Видавництво „СПОЛОМ”, 2004.-198 с.
5. Латышенков А.М., Лобачев В.Г. Гидравлика.-М.: Гос. издательство по строительству и архитектуре, 1956.-408 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.-М.: Наука, 1970.
7. Ольшанский В.П., Халыпа В.М., Дубовик О.А. Приближенные методы расчета гидравлических пожарных струй.-Харьков: Митець, 2004.-115 с.
8. Рабинович Е.З. Гидравлика.-М.: Физматгиз, 1963.-408 с.
9. Смыслов В.В. Гідравліка і аеродинаміка.-К.: Вища школа, 1971.-348 с.
10. Стрелков С.П. Механика.-М.: Наука, 1975.-559 с.
11. Тарасов-Агалаков Н.А. Практическая гидравлика в пожарном деле.-М.: Изд-во Министерства коммунального хозяйства РСФСР, 1959.- 262 с.
12. Угинчус А.А. Гидравлика и гидравлические машины.-Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1960.-360 с.
13. Федоров Н.Ф., Курганов А.М. Справочник по гидравлическим расчетам систем водоснабжения и канализации.-М.-Л.: Стройиздат, 1973.
14. Ходаков В.Ф. Гидравлика в пожарном деле.-М.: Высшая школа МООП РСФСР, 1965.-204 с.
15. Чугаев Р.Р. Гидравлика.-М.-Л.: Энергия, 1975.



## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
ВСТУП.....	4
<b>ЛЕКЦІЯ № 1</b> ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИН І ГАЗІВ. ОСНОВНІ СИСТЕМИ ТА ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ГУСТИНОЮ ГАЗУ ТА ТИСКОМ.....	7
I. ОСНОВНІ СИСТЕМИ ТА ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ.....	7
II. ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИН І ГАЗІВ.....	9
III. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ГУСТИНОЮ ГАЗУ ТА ТИСКОМ.....	14
<b>ЛЕКЦІЯ № 2</b> ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ГІДРОСТАТИКИ. ТИСК РІДИНИ НА ПЛОСКІ ПОВЕРХНІ, ЕПЮРИ ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ.....	19
I. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ГІДРОСТАТИКИ.....	19
II. ТИСК РІДИНИ НА ПЛОСКІ ПОВЕРХНІ. ЕПЮРИ ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ.....	21
III. ГІДРАВЛІЧНИЙ ПРЕС І ЙОГО СХЕМА.....	23
IV. РОЗПОДІЛ АТМОСФЕРНОГО ТИСКУ.....	24
<b>ЛЕКЦІЯ № 3</b> СИЛА ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ НА КРИВОЛІНІЙНІ ПОВЕРХНІ. ЗАКОН АРХІМЕДА. ПЛАННЯ ТІЛ, ОСТІЙНІСТЬ.....	34
I. СИЛА ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ НА КРИВОЛІНІЙНІ ПОВЕРХНІ.	34
II. ЗАКОН АРХІМЕДА, ПЛАННЯ ТІЛ, ОСТІЙНІСТЬ ТІЛ, ЯКІ ПЛАННЯЮТЬ НА ПОВЕРХНІ РІДИНИ.....	37
<b>ЛЕКЦІЯ № 4</b> ГІДРАВЛІЧНІ ЕЛЕМЕНТИ ПОТОКУ РІДИНИ. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ ПОТОКУ. РЕЖИМИ РУХУ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ПОТОКУ ІДЕАЛЬНОЇ ТА РЕАЛЬНОЇ РІДИНИ. ВИЗНАЧЕННЯ ОБ'ЄМНИХ ВИТРАТ РІДИНИ У ТРУБОПРОВОДІ..	49
I. ГІДРАВЛІЧНІ ЕЛЕМЕНТИ ПОТОКУ РІДИНИ.....	49
II. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ ПОТОКУ (ПЕРШИЙ ЗАКОН ГІДРОДИНАМІКИ).....	50
III. ЛАМІНАРНИЙ І ТУРБУЛЕНТНИЙ РЕЖИМИ РУХУ РІДИНИ.....	51
IV. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ І ДЛЯ ПОТОКУ РЕАЛЬНОЇ РІДИНИ.....	53
V. ВИЗНАЧЕННЯ ВИТРАТ РІДИНИ У ТРУБОПРОВОДІ.....	57
<b>ЛЕКЦІЯ № 5</b> ВИДИ ВТРАТ НАПОРУ. ФОРМУЛИ ВТРАТ НАПОРУ. КОЕФІЦІЄНТ ГІДРАВЛІЧНОГО ТЕРТЯ.....	63
I. ВИДИ ВТРАТ НАПОРУ.....	63
II. ВТРАТИ НАПОРУ ПО ДОВЖИНІ ТРУБОПРОВОДУ.....	64
III. ВТРАТИ НАПОРУ НА МІСЦЕВИХ ОПОРАХ.....	67
IV. ВТРАТИ НАПОРУ В ПОЖЕЖНИХ РУКАВАХ.....	72
<b>ЛЕКЦІЯ № 6</b> ГІДРАВЛІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ТРУБОПРОВОДІВ.	77

I. ТРУБОПРОВОДИ ТА ТРУБОПРОВІДНІ МЕРЕЖІ.....	77
II. РОЗРАХУНОК І ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТОГО ТРУБОПРОВІДУ..	77
III. РОЗРАХУНОК І ХАРАКТЕРИСТИКИ СКЛАДНОГО ТРУБОПРОВІДУ.....	82
<b>ЛЕКЦІЯ № 7</b> РІВНЯННЯ ГАЗОСТАТИКИ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ПОТОКУ ГАЗУ. РОЗРАХУНОК ГАЗОПРОВІДІВ.....	87
I. РІВНЯННЯ СТАНУ ТА НЕРОЗРИВНОСТІ ДЛЯ ГАЗУ.....	87
II. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ГАЗУ.....	88
III. РІВНЯННЯ ГАЗОСТАТИКИ.....	89
IV. РОЗРАХУНОК ГАЗОПРОВІДІВ.....	89
<b>ЛЕКЦІЯ № 8</b> РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ НЕУСТАЛЕНОГО РУХУ РІДИНИ. ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР В ТРУБОПРОВІДІ.....	94
I. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ НЕУСТАЛЕНОГО РУХУ РІДИНИ.....	94
II. ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР В ТРУБАХ.....	94
<b>ЛЕКЦІЯ № 9</b> ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ОТВОРІВ, НАСАДОК І ЧЕРЕЗ КОРОТКІ ТРУБОПРОВІДИ.....	101
I. ВИТІКАННЯ РІДИНИ З КРУГЛОГО ОТВОРУ В ТОНКІЙ СТІНЦІ.....	101
II. ВИТІКАННЯ РІДИНИ З НАСАДОК.....	103
III. ВИТІКАННЯ РІДИНИ ЧЕРЕЗ КОРОТКІ ТРУБОПРОВІДИ.....	106
<b>ЛЕКЦІЯ № 10</b> СПОРОЖНЕННЯ РЕЗЕРВУАРІВ.....	110
I. СПОРОЖНЕННЯ РЕЗЕРВУАРІВ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРЕРІЗОМ ЗА ВИСОТОЮ.....	110
II. ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕННЯ ЧАСУ СПОРОЖНЕННЯ РЕЗЕРВУАРІВ РІЗНОЇ ФОРМИ.....	111
1. Спорожнення призматичного резервуару.....	111
2. Спорожнення резервуарів у формі зсіченого конусу.....	112
3. Спорожнення циліндричної бочки, розташованої горизонтально.....	115
4. Спорожнення резервуарів, які мають форму сфери та напівсфери.....	116
5. Спорожнення резервуарів у формі параболоїда обертання та у формі перегорнутого параболоїда обертання...	118
6. Спорожнення резервуарів у формі корит (трапецеїдального, напівсферичного та параболічного).....	119
7. Спорожнення складених резервуарів.....	121
<b>ЛЕКЦІЯ № 11</b> ГІДРАВЛІЧНІ СТРУМЕНІ. ВИВІД ФОРМУЛ ЛЮГЕРА І ФРІМАНА ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ВИСОТИ ВЕРТИКАЛЬНИХ СТРУМЕНІВ.....	128
I. ВЕРТИКАЛЬНІ СТРУМЕНІ.....	128
II. РОЗРАХУНОК ВИСОТИ ВЕРТИКАЛЬНИХ СТРУМЕНІВ З УРАХУ-	

ВАННЯМ СИЛИ ОПОРУ ПОВІТРЯ ЗА ДОПОМОГОЮ СПРОЩЕНОГО РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ.....	132
<b>ЛЕКЦІЯ № 12</b> РОЗРАХУНОК ТРАЄКТОРІЙ ПОЖЕЖНИХ ГІДРАВЛІЧНИХ СТРУМЕНІВ.....	139
I. ОБЧИСЛЕННЯ РАДІУСІВ ДІЇ КОМПАКТНОЇ І РОЗДРОБЛЕНОЇ ЧАСТИН НАХИЛЕНОГО СТРУМЕНЯ.....	139
II. НАБЛИЖЕНИЙ СПОСІБ РОЗРАХУНКУ ТРАЄКТОРІЇ ГІДРАВЛІЧНОГО СТРУМЕНЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПОХИБОК ПОЧАТКОВИХ ШВИДКОСТІ ТА КУТА НАХИЛУ СТВОЛА НА ДОВЖИНУ ПОЛЬОТУ СТРУМЕНЯ.....	142
III. КОРИГУВАННЯ РОЗРАХУНКОВИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ПАРАМЕТРІВ ГІДРАВЛІЧНОГО СТРУМЕНЯ З УРАХУВАННЯМ ВТРАТИ НАПОРУ.....	147
ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.....	150
Додаток 1. Найменування приставок для кратних та часткових одиниць вимірювань.....	153
Додаток 2. Розмірності та одиниці вимірювання фізичних величин, які використовуються в технічній механіці рідини і газу.....	154
Додаток 3. Густина рідин $\rho$ при $20^\circ\text{C}$ .....	155
Додаток 4. Динамічна в'язкість.....	155
Додаток 5. Залежність густини та кінематичної в'язкості води від температури.....	156
Додаток 6. Грецький алфавіт.....	156
Додаток 7. Площа, координата центру ваги, осьовий момент інерції для деяких плоских перерізів.....	157
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	160

## **Навчальне видання**

Укладачі: **Халипа** Віктор Маркович  
**Вамболь** Сергій Олександрович  
**Міщенко** Ігор Вікторович

## **Технічна механіка рідини і газу.** Конспект лекцій.

Відповідальний за випуск І.В.Міщенко

Підп. до друку 10.04.2007 р. Формат 60x84 1/16  
Папір 80 г/см<sup>2</sup>. Друк ризограф. Умовн.-друк. арк. 10,25  
Тираж 250 прим. Вид № 66/07 Зам №

**Відділення редакційно-видавничої діяльності  
Університету цивільного захисту України  
61023, Харків, вул. Чернишевська, 94**