Національний університет цивільного захисту України

Кафедра прикладної механіки факультету техногенно-екологічної безпеки

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА РІДИНИ І ГАЗУ

КУРС ЛЕКЦІЙ

Харків 2012

Друкується за рішенням методичної ради НУЦЗУ
Протокол № 9 від 19.05.2011 р.

Укладачі: В.М.Халипа, С.О.Вамболь, І.В.Міщенко, О.В.Прокопов

Рецензенти: В.П.Ольшанський - професор кафедри теоретичної механіки та деталей машин Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. П.Василенка, доктор фіз.-мат. наук, професор;

В.К.Мунтян - завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін Національного університету цивільного захисту України, кандидат технічних наук, доцент.

Технічна механіка рідини і газу. Курс лекцій. Друге видання, виправлене та доповнене / Уклад. В.М.Халипа, С.О.Вамболь, І.В.Міщенко, О.В.Прокопов.-Х.: НУЦЗУ, 2012.-224 с.

Курс складається з 18 лекцій, додатка і питань для самоконтролю.

Викладено питання технічної механіки рідини і газу. Наведено теоретичний матеріал і приклади вирішення задач, які мають практичне значення. В курсі лекцій розглянуто такі розділи дисципліни: основи гідростатики, газостатики, гідромеханіки, розрахунок трубопровідних систем, спорожнення простих і складених резервуарів, методи розрахунку параметрів гідравлічних пожежних струменів.

Для курсантів, студентів і слухачів відповідно до програми вищої освіти у напрямах «Пожежна безпека», «Охорона праці». Може бути корисним під час аудиторних занять та для самостійної роботи.

Відповідальний за випуск І.В.Міщенко

ПЕРЕДМОВА

Курс лекцій з технічної механіки рідини і газу (видання друге, виправлене і доповнене) складено відповідно до навчальних програм для підготовки фахівців у галузі знань «Цивільна безпека» за напрямами «Пожежна безпека», «Охорона праці» Національного університету цивільного захисту України. Його мета – надати допомогу курсантам, студентам і, особливо, слухачам заочної форми навчання при оволодінні теоретичними положеннями курсу та розв’язанні типових прикладних задач. Окремі розділи лекційного курсу можна використовувати також при вивченні деяких спеціальних дисциплін пожежно-технічного профілю: «Спеціальне водопостачання», «Протипожежна та аварійно-рятувальна техніка», «Пожежна профілактика в населених пунктах», «Пожежна профілактика технологічних процесів», «Пожежна тактика», «Пожежна та виробнича автоматика».

Курс складається з «Вступу» з коротким історичним оглядом розвитку гідромеханіки як науки, 18 лекцій з викладенням усіх тем і питань, які передбачені навчальною програмою та тематичним планом дисципліни, та «Додатка». Назва кожної лекції, як правило, містить вичерпну назву теми або розгорнутий перелік питань, що вивчаються в ній. Теоретичне викладення супроводжується розгляданням та розв’язанням 49-ти типових задач, більшість з яких мають безпосереднє практичне застосування. Під час розв’язання цих задач використовуються також знання, набуті при вивченні близьких до даної дисципліни курсів «Фізика», «Теоретична механіка» і, безумовно, методи математичного аналізу з курсу «Вища математика». В кінці «Курсу лекцій» наведено перелік теоретичних питань для самоконтролю в процесі вивчення матеріалу дисципліни «Технічна механіка рідини і газу».

У порівняні з першим виданням додані: лекція №13, присвячена аналізу реакцій струменя, а також спеціально помічені зірочкою лекції №№14*-18*, які не є обов’язковими для ознайомлення при вивченні за стандартною програмою. Матеріал, викладений в них, потребує спеціальної математичної підготовки і передбачений для груп з поглибленим рівнем викладання фундаментальних дисциплін. В зазначених лекціях частково дається більш строге і докладне виведення гідравлічних законів із залученням апарату векторного аналізу та механіки суцільних середовищ, механіки деформівного твердого тіла, але в значній мірі наведений матеріал є самостійним і не перетинається з питаннями основної частини курсу.

Після виходу з друку першого видання були розроблені та видані «Технічна механіка рідини і газу. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи», в яких докладно розглянуті задачі за темами всього курсу і які разом з «Курсом лекцій» складають фактичний комплект необхідних навчально-методичних видань з технічної механіки рідини і газу. З метою позбутися певного дублювання укладачами було прийнято рішення виключити з цього «Курсу лекцій» ті задачі, що увійшли до згаданих методичних вказівок, до яких відсилаємо усіх зацікавлених. Разом з цим, під час роботи над другим виданням курсу лекцій було переглянуто подані в ньому задачі, а щодо перших трьох лекцій відбулося їхнє істотне оновлення.

Розширено список літератури, який, безумовно, не є вичерпним, але, принаймні, більш повно відображає викладення питань технічної механіки рідини і газу в цьому виданні.

Укладачі за можливістю під час роботи над новою редакцією видання намагалися максимально виправити окремі недоліки як технічного, так і методичного плану. Ми висловлюємо щиру подяку всім, хто в будь-який спосіб сприяв поліпшенню цього курсу лекцій, тому і в подальшому розраховуємо на пропозиції і зауваження, що спрямовані на удосконалення запропонованого навчального видання.

Укладачі висловлюють щиру подяку рецензентам: професору кафедри теоретичної механіки та деталей машин Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. П.Василенка, доктору фіз.-мат. наук, професору В.П.Ольшанському, завідувачу кафедри фізико-математичних дисциплін Національного університету цивільного захисту України, кандидату технічних наук, доценту В.К.Мунтяну.

ВСТУП

Короткий історичний огляд гідромеханіки

Гідравлікою (від грец. $hyd\bar{o}r$ - вода і $aulos$- трубка), називається прикладна наука, що займається вивченням законів спокою і руху рідких тіл і що розглядає додатки цих законів до розв’язання конкретних технічних задач. Практичне значення гідравліки дуже велике, оскільки вона є основою для інженерних розрахунків у багатьох галузях техніки і є базою для ряду спеціальних дисциплін: гідротехніки, гідравлічних машин (насоси і турбіни), водопостачання і каналізації, осушення і зрошування, водного транспорту, нафтової справи і т.д.

Гідравліка - одна з найдавніших наук у світі. Ще у далеку давнину, задовго до нашої ери, з перших кроків свого історичного розвитку людина була вимушена практично займатися вирішенням різних гідравлічних питань. Про це говорять результати археологічних досліджень і спостережень, які показують, що ще за 5000 років до нашої ери в Китаї, а потім і в деяких інших країнах стародавнього світу вже існували зрошувальні канали і були відомі деякі прості пристрої для підйому води. У багатьох місцях збереглися також залишки водонапірних і гідротехнічних споруд (водоводи, дамби, акведуки), що свідчать про досить високий рівень будівельного мистецтва в стародавньому світі.

Перші вказівки про науковий підхід до вирішення гідравлічних питань відносяться до 250 року до нашої ери, коли Архімедом був відкритий закон про рівновагу тіла, зануреного в рідину. Надалі, проте, впродовж подальших більш ніж півтора тисячоліття гідравліка не одержала скільки-небудь помітного розвитку. У цю епоху, що характеризувалася загальним застоєм в науці і культурі, були не тільки загублені перші елементи знання, але і в значній мірі забуті практичні навики інженерного мистецтва. І лише в XVI-XVII століттях, в епоху Відродження, коли з'явилися роботи Стевіна, Леонардо да Вінчі, Галілея, Паскаля, Ньютона, що дослідили, зокрема, низку важливих гідравлічних явищ, було закладено основи подальшому розвитку гідравліки як науки. Крім гідравліки, вивченням спокою і руху рідин займається також і інша наука - теоретична гідромеханіка, що розвинулася як самостійний розділ теоретичної механіки.

В XVII-XVIII століттях працями ряду найбільш відомих учених - математиків і механіків (Ейлер, Бернуллі, Лагранж) були встановлені основні закони і одержані початкові рівняння гідромеханіки. Ці дослідження носили в основному теоретичний характер, включаючи ряд допущень відносно фізичних властивостей рідини, давали більше якісну, а не кількісну оцінку явищ, значно розходившись іноді з даними досвіду, який до недавнього часу не грав у гідромеханіці значної ролі. Природно тому, що гідромеханіка не могла задовольнити численних запитів практики, особливо сильно збільшених в XIX столітті у зв'язку з бурхливим зростанням техніки, що вимагала негайного, конкретного вирішення різних чисто інженерних завдань. Це і стало причиною розвитку особливої прикладної науки, створеної в XVIII-XIX століттях працями Шезі, Дарсі, Буссинеска, Вейсбаха, М.Є.Жуковського і багатьох інших учених і інженерів, яку прийнято в даний час називати гідравлікою у власному сенсі цього слова. На відміну від гідромеханіки гідравліка будує свої висновки на основі розгляду спрощених схем гідравлічних явищ, вводячи в той же час в теоретичні рівняння емпіричні коефіцієнти, які одержуються в результаті обробки даних досвіду, що має в гідравліці дуже велике значення. Так, наприклад, при дослідженні руху потоку рідини гідравліка звичайно задовольняється визначенням середніх швидкостей руху і середнього тиску в потоці, тоді як гідромеханіка в більшості випадків розглядає зміну цих величин в потоці при переході від однієї точки до іншої.

Протягом довгого часу розвиток гідравліки і гідромеханіки йшов відособленими шляхами. Проте, якщо спочатку методи дослідження, використані в гідравліці і гідромеханіці, сильно відрізнялися один від одного, то з часом ця різниця поступово стиралася. Зближення між цими двома напрямами в науці, що намітилося на початку XX століття і пов'язане з ім'ям видатного вченого Л.Прандтля, значною мірою усунуло істотні недоліки, властиві як гідравліці минулого, що була суто емпіричною наукою - наукою досвідчених формул і коефіцієнтів, так і класичній гідромеханіці, що мала переважно теоретичний характер. Сучасна гідравліка - це комплекс знань, об'єднуючий теорію і досвід, наука, в якій досвід узагальнюється теорією, а теорія виправляється і доповнюється досвідом, що одержав в даний час широке застосування і в гідромеханіці. Гідравліка широко використовує методи і результати гідромеханіки і, очевидно, з часом відмінність в поняттях «гідромеханіка» і «гідравліка» зникне і збереже хіба лише історичний інтерес.

Велику роль в розвитку гідравліки і гідромеханіки зіграли наші вітчизняні учені. Основоположники гідромеханіки Даниїл Бернуллі і Леонард Ейлер жили і працювали в Росії і були членами Петербурзької Академії наук. Широко відомі роботи Н.П.Петрова, який створив гідродинамічну теорію мастила; М.Є.Жуковського, що провів низку важливих досліджень в різних галузях гідромеханіки; В.Г.Шухова, що розробив методи розрахунку нафтопроводів.

Працями А.Н.Крилова створена сучасна теорія корабля; важливе практичне значення мають дослідження Н.Н.Павловського з теорії нерівномірного руху і фільтрації рідини; Л.С.Лейбензона, що поклав початок підземній гідромеханіці, і інших радянських учених.

ЛЕКЦІЯ № 1. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИН І ГАЗІВ

І. ОСНОВНІ СИСТЕМИ ТА ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ

Вибір одиниць, необхідних для вимірювань усіх фізичних величин, можна зробити двома шляхами. По-перше, можна скласти набір одиниць, установлюючи кожну одиницю незалежно від усіх інших. По-друге, можна утворити систему одиниць, установлюючи незалежно тільки одиниці невеликого числа величин — так звані основні одиниці, відносячи всі інші до розряду похідних, розмір яких закономірно зв'язаний з розмірами основних одиниць. При сучасному рівні розвитку науки і техніки другий спосіб є єдиноприйнятним. Історично в хронологічному порядку лише найбільш відомими системами були Система Гаусса, Система Британської Асоціації, Система МКГСС, Природна система одиниць Планка, Система МТС, Міжнародна система одиниць — ***Le Systeme International d'Unites***, скорочено SI .

Введемо поняття фізичної величини та одиниці фізичної величини.

Фізична величина – властивість, загальна в якісному відношенні для багатьох фізичних об'єктів (фізичних систем, їхніх станів і процесів, що відбуваються в них), але в кількісному відношенні індивідуальна для кожного об'єкта.

Одиниця фізичної величини – фізична величина, якій за визначенням надано значення, що дорівнює одиниці.

На даний час SI містить у своїй основі сім основних (еталонних) одиниць і дві додаткові.

1.Фізична величина – довжина (***length***), позначення L, одиниця фізичної величини – метр (***meter***), скорочені позначення м і m.

2. Фізична величина – маса (***mass***), позначення M, одиниця фізичної величини – кілограм (***kilogram***), скорочені позначення кг і kg.

3. Фізична величина – час (***time***), позначення T, одиниця фізичної величини – секунда (***second***), скорочені позначення с і s.

4.Фізична величина – сила електричного струму (***electric current***), позначення I, одиниця фізичної величини – ампер (***ampere***), скорочені позначення А і A.

5.Фізична величина – термодинамічна температура (***temperature***), позначення Θ, одиниця фізичної величини – кельвін (***kelvin***), скорочені позначення К і K.

6.Фізична величина – сила світла (***luminous intensity***), позначення J, одиниця фізичної величини – кандела (***candela***), скорочені позначення кд і cd.

7.Фізична величина – кількість речовини (***amount of substance***), позначення N, одиниця фізичної величини – моль (***mole***), скорочені позначення моль і mol.

Поряд із сьома основними одиницями SI прийнято ще користуватися двома додатковими одиницями, досить корисними для вирішення фізичних задач, але приналежними скоріше до геометрії. Мова йде про радіан і стерадіан.

Фізична величина – плоский кут (***plane angle***), позначення Ω, одиниця фізичної величини – радіан (***radian***), скорочені позначення рад і rad.

Фізична величина – тілесний кут (***solid angle***), позначення Ω, одиниця фізичної величини – стерадіан (***steradian***), скорочені позначення ср і sr.

Похідні одиниці SI утворюються на підставі законів, що встановлюють зв'язок між фізичними величинами, або на підставі прийнятих визначень відповідних величин. У загальному випадку для кожної фізичної величини її розмірність може бути записана з використанням величин, одиниці яких попередньо встановлені, тобто використовуючи довжину (L), масу (M), час (T), температуру (Θ), силу електричного струму (I), силу світла (J), кількість речовини (N). Вираз, складений з добутків символів основних фізичних величин в різних ступенях, що відображає зв'язок даної похідної фізичної величини з фізичними величинами, прийнятими за основні, у якому коефіцієнт пропорційності прийнятий рівним одиниці, називається ***розмірністю*** фізичної величини. Таким чином, цей вираз показує, у скільки разів збільшується або зменшується значення похідної величини при зміні значень основних величин. Для розмірності величин уведене позначення ***dim*** (скорочено від англ. ***dimension*** – розмірність, розмір). Таким чином, формула розмірності похідної одиниці має вигляд:

$$[z] = dim z = L^{\alpha} \; M^{\beta} \; T^{\gamma} \; \Theta^{\varepsilon} \; I^{\eta} \; J^{\lambda} \; N^{\zeta},$$

де α, β, γ, ε, η, λ, ζ – показники ступеня, що називаються розмірностями похідних величин щодо відповідних основних одиниць. Якщо фізична величина не залежить від жодної з основних величин, то вона називається безрозмірною величиною. Для того, щоб одержати формулу розмірності якої-небудь похідної одиниці, треба у визначальне рівняння підставити розмірності всіх одиниць фізичних величин, що входять у нього, і зробити необхідні математичні операції.

Кратні та часткові одиниці вимірювань утворюються від вихідної одиниці множенням або діленням на ступінь числа 10. У додатку 1 наведені найменування приставок для кратних та часткових одиниць вимірювань.

II. ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИН І ГАЗІВ

Технічною механікою рідини і газу (ТМРГ) називається дисципліна, що вивчає закони рівноваги та руху рідин і газів, та розробляє методи застосування цих законів при вирішенні прикладних задач.

Рідиною називають фізичне тіло, якому властива плинність, внаслідок чого рідина не має власної форми і набуває форми того резервуара, який вона заповнює.

Рідини поділяються на два види: ***краплинні*** та ***газоподібні***. Перші є рідинами в звичайному, загальноприйнятому розумінні цього слова; до них відносять різні рідини, що зустрічаються в природі та застосовуються в техніці: вода, нафта, керосин тощо. Краплинні рідини характеризуються великим опором стиску (майже повністю нестисливі) і малим опором дотичним і розтягальним зусиллям. У посудині вони утворюють вільну поверхню. Газоподібні, на відміну від краплинних, майже не мають опору стиску, не утворюють граничну вільну поверхню, а заповнюють увесь вільний об’єм.

Стан і поведінка рідин, що зустрічаються в природі та застосовуються в техніці, при різних гідравлічних явищах знаходяться в безпосередній залежності від таких фізичних властивостей рідин, як густина, питома вага, в’язкість тощо. Тому, передусім, необхідно визначити ці фізичні властивості, виявити фактори, що впливають на них, встановити їхні одиниці вимірювання (в додатку 2 наведені розмірності та одиниці вимірювання основних фізичних величин, які використовуються в технічній механіці рідини і газу).

Густина рідини, або питома маса, ρ - це маса одиниці об'єму, яка визначається за формулою:

$$\rho = \frac{m}{W}, \text{ [кг/м}^3\text{]}, \tag{1.1}$$

де m - маса, в системі SI має розмірність «кілограм» [кг], W - об'єм, в системі SI має розмірність «кубічний метр» [м^3]. В Додатку 3 наведені густини деяких рідин ρ при 20$^{\circ}C$.

Питома вага рідини γ - це вага її одиниці об'єму, що визначається за формулою:

$$\gamma = \frac{G}{W}, \text{ [Н/м}^3\text{]}, \tag{1.2}$$

де G - вага, в системі SI має розмірність «ньютон» [Н], тобто має розмірність сили.

Стисливість – це властивість рідин і газів змінювати свій об'єм при зміні тиску. Вона характеризується ***коефіцієнтом стисливості (коефіцієнтом об'ємного стиснення)***:

$$\beta_W = -\frac{\Delta W}{\Delta P \cdot W}, \text{ [1/Па]}, \tag{1.3}$$

де W - початковий об'єм рідини, ΔW - зміна об'єму W при збільшенні тиску на величину ΔP, яка в системі SI, як і тиск P, має розмірність «паскаль» [Па]. Знак «–» показує, що збільшення тиску супроводжується зменшенням об'єму та навпаки. Коефіцієнт стисливості краплинних рідин мало змінюється при зміні температури та тиску. В середньому, для води його можна прийняти як β_W = 5,097·10^{-10} 1/Па. Таким чином, при підвищенні тиску на 1 ат об'єм води зменшується на 1/20000 частину початкової величини. Коефіцієнт об'ємного стиснення для інших краплинних рідин приблизно того ж порядку, тому стисливістю води можна нехтувати, вважаючи її густину такою, що не залежить від тиску.

Модуль об'ємної пружності є величиною, зворотною до коефіцієнта стисливості, тому:

$$E = \frac{1}{\beta_W}, \text{ [Па]}. \tag{1.4}$$

Температурне розширення рідини при зміні температури характеризується ***коефіцієнтом температурного розширення***:

$$\beta_t = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot W}, \text{ [}1/K\text{]}, \tag{1.5}$$

де Δt - зміна температури, яка, як і температура, має розмірність $^{\circ}C$ - градус за Цельсієм (хоча в системі SI температура має розмірність K - кельвін). Вказаний коефіцієнт для нестисливих рідин дуже малий (наприклад, для води при температурі від 0$^{\circ}C$ до 10$^{\circ}C$ і тиску 1 ат β_t = 0,00015).

В'язкістю називається властивість рідини чинити опір відносному руху (зсуву) її частинок. В'язкість має місце тільки при русі реальної рідини. Всі реальні рідини мають певну в'язкість, яка проявляється у вигляді внутрішнього тертя при відносному переміщенні суміжних частинок рідини. Поряд з легкорухомими рідинами (наприклад, водою) існують дуже в'язкі рідини, опір яких зсуву досить значний (гліцерин, важкі мастила тощо). Таким чином, в'язкість характеризує ступінь текучості її частинок. На рисунку 1.1 показано дослід І.Ньютона по визначенню коефіцієнта динамічної в'язкості μ, під час проведення якого вчений встановив, що сила тертя $F_{\text{ТР}}$, котра припадає на деяку площу контакту елементів рідини ω, прямо пропорційна зміні швидкості рідини ΔV в напрямі, перпендикулярному до руху, і зворотно пропорційна відносному зсуву ΔY :

$$F_{\text{ТР}} = \mu \cdot \frac{\Delta V}{\Delta Y} \cdot \omega, \text{ [Н]}, \tag{1.6}$$

де μ в системі SI має розмірність «ньютон-секунда на квадратний метр» або «паскаль-секунда», а скорочені позначення Н•с/м^2, або Па•с. Слід зауважити, що для коефіцієнту динамічної в'язкості використовують також позначення η. Одиницею для вимірювання вказаного коейіцієнту в системі СГС є «пуаз» - скорочене позначення П: 1 П = 0,1 Н•с/м^2 = 0,1 Па•с. Також застосовувався «сантипуаз» - скорочене позначення сП: 1 сП = 1 мН•с/м^2 = 1 мПа•с. У формулі (1.6) співвідношення $\frac{\Delta V}{\Delta Y}$ називається градієнтом швидкості. У випадку, коли воно не є постійним, його слід замінити на похідну $\frac{dV}{dY}$.

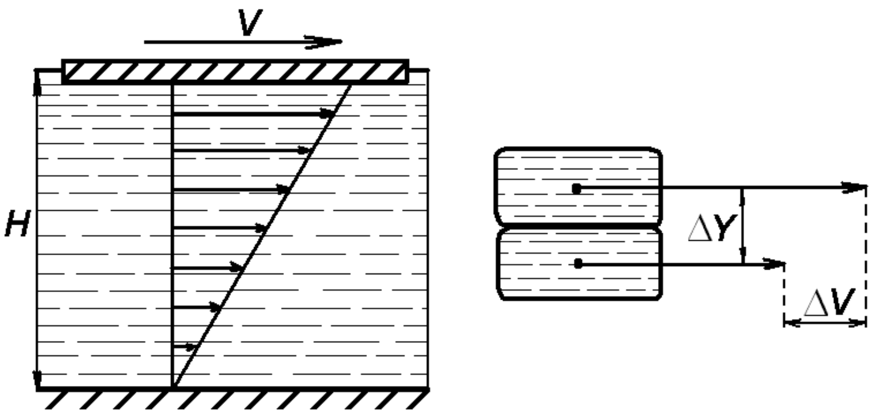


Рисунок 1.1.

У гідромеханіці під час розрахунків також використовується так званий кінематичний коефіцієнт в'язкості:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \text{ [м}^2\text{/с]}. \quad (1.7)$$

Походження назви кінематичного коефіцієнту в'язкості пояснюється тим, що в розмірності цієї величини відсутня одиниця сили. Одиницею для вимірювання кінематичного коефіцієнту в'язкості в системі СГС є «квадратний сантиметр на секунду» (або «стокс»), скорочені позначення см^2/с (або Ст): 1 Ст = 1 см^2/с = 0,0001 м^2/с. Частіше застосовується в 100 разів менша одиниця - сантистокс (сСт): 1 сСт = 1•10^{-6} м^2/с.

В'язкість рідин багато залежить від температури, причому в'язкість рідин при підвищенні температури зменшується, а в'язкість газів зростає. Для чистої прісної води залежність динамічного коефіцієнту в'язкості відображає формула Пуазейля:

$$\mu = \frac{0{,}0179}{1 + 0{,}0368t + 0{,}000221t^2},$$

де розмірність μ є «пуаз», t - температура в $^\circ C$. Кінематичний коефіцієнт в'язкості рідин при тиску до 200 ат мало залежить від тиску. Тому при звичайних гідравлічних розрахунках ця залежність не враховується.

Таблиця 1.1.

Одиниця тиску	Па	бар	атм	ат	psi	м вод. ст.	мм рт. ст.
Па	1	10^{-5}	$9{,}869 \cdot 10^{-6}$	$1{,}0197 \cdot 10^{-5}$	$1{,}45038 \cdot 10^{-4}$	$1{,}0197 \cdot 10^{-4}$	$7{,}50062 \cdot 10^{-3}$
бар	10^{5}	1	0,9869	1,0197	14,5038	10,1972	750,062
атм	101325	1,0133	1	1,0333	14,6959	10,3323	760
ат	98066,5	0,9807	0,9678	1	14,2233	10,0	735,559
psi	6894,77	0,0689	0,06805	0,0703	1	0,7031	51,7152
м вод. ст.	9806,65	0,0981	0,09678	0,1	1,42233	1	73,5559
мм рт. ст.	133,323	$133{,}323 \cdot 10^{-5}$	$1{,}3158 \cdot 10^{-6}$	$1{,}3595 \cdot 10^{-3}$	0,01934	0,0136	1

Кінематичний коефіцієнт в’язкості газів залежить як від температури, так і від тиску, збільшуючись з підвищенням температури та зменшуючись з підвищенням тиску. В додатку 4 наведені значення динамічного коефіцієнту в’язкості для деяких рідин і газів, а в додатку 5 показана залежність густини та кінематичного коефіцієнту в’язкості води від температури.

За одиницю тиску в системі SI прийнято рівномірно розподілений тиск, при якому на площу 1 м^2 діє сила 1 Н, і ця одиниця називається Паскаль: Па=Н/м^2. Водночас в техніці використовуються позасистемні величини для визначення тиску, співвідношення між деякими з них наведені в таблиці 1.1. (***бар***, ***атм*** – атмосфера, ***ат*** – технічна атмосфера, ***psi*** – тиск на квадратний дюйм (від англ. фунт-сила на квадратний дюйм), ***м вод. ст.*** – метр водного стовпа, ***мм рт. ст.*** – міліметр ртутного стовпа.

У гідромеханіці та аеродинаміці малих швидкостей широко застосовується поняття ідеальної рідини – рідини, в’язкістю та стисливістю якої у розглянутих задачах можна нехтувати.

III. ЗВ’ЯЗОК МІЖ ГУСТИНОЮ ГАЗУ ТА ТИСКОМ

Густина рідини мало залежить від тиску. Наприклад, при збільшенні тиску на воду в 1000 ат її об’єм зменшиться тільки на

5%, тому в тих розрахунках, де величина тиску змінюється не більш ніж на десятки атмосфер, можна нехтувати зміною об’єму.

Натомість густина газу істотно залежить від тиску. При постійній температурі густина (або питома маса) пропорційна тиску (закон Бойля-Маріотта):

$$\frac{\gamma_{\Pi}}{\gamma} = \frac{P_{\Pi}}{P},$$

де P_{Π} - початковий тиск, γ_{Π} - питома вага, що відповідає тиску P_{Π}, P - деякий тиск, що відрізняється від початкового, γ - питома вага, що відповідає цьому тиску. Відомо також, що при зміні температури тиск і питома маса так званих ідеальних газів задовольняють рівнянню Клапейрона, яке для технічних розрахунків має вигляд:

$$P \cdot W = m \cdot R_m \cdot T, \tag{1.8}$$

де P - тиск, W - об’єм, m - маса, R_m - питома газова стала, яка в системі SI має розмірність [Дж/(кг·К)], T - температура, яка в наведеній формулі має розмірність [К] (формула переводу градусів за Цельсієм у градуси Кельвіна має лінійний характер $K = {}^{\circ}C + 273{,}15$). Нагадуємо, що ідеальний газ - це газ, силами взаємодії між молекулам якого у розглянутих задачах можна нехтувати. Реальні гази близькі за своїми властивостями до ідеального газу, якщо вони достатньо сильно розріджені (наприклад, повітря при атмосферному тиску і звичайній температурі). Водень, гелій, кисень, азот також вважаються ідеальними газами при густині, яка відповідає нормальним умовам. У формі (1.8) рівняння, що встановлює зв’язок між тиском, об’ємом і температурою газів, вперше застосував російський вчений Менделєєв, тому остаточно рівняння стану газу має назву рівняння Менделєєва-Клапейрона. Питома газова стала R_m пов’язана з молярною газовою сталою $R = 8{,}314414$ Дж/(моль·К) співвідношенням

$$R_m = \frac{R}{M},$$

де M - молярна маса певного газу. Для деяких газів у таблиці 1.2 наведені величини M та відповідні до них R_m.

Таблиця 1.2.

Речовина	Хімічна формула	Молярна маса M, кг	Питома газова стала R_m, Дж/(кг·К)
Повітря	Суміш газів	≈0,029	286,7
Водень	H_2	≈0,002	4157,2
Кисень	O_2	≈0,032	259,8
Азот	N_2	≈0,028	296,9
Гелій	He	≈0,004	2078,6
Вуглекислий газ	CO_2	≈0,044	188,9
Метан	CH_4	≈0,016	519,6
Етан	C_2H_6	≈0,030	277,2
Етилен	C_2H_4	≈0,028	296,9

В загальному випадку можна ввести для рідини і газу поняття баротропності, яка визначає функціональну залежність між тиском і густиною речовини. Якщо рідина (газ) нестислива, тобто має всюди однакову густину, то $\rho = const$. Для ізотермічного $(T = const = T_O)$ процесу $P = C\rho = \dfrac{P_O}{\rho_O}\rho$. Для адіабатичного процесу $P = C\rho^k = P_O\left(\dfrac{\rho}{\rho_O}\right)^k$ - (C у наведених виразах відповідні константи). Значення величин P_O, ρ_O, T_O відносяться до будь-якої характерної точки рідини (газу) у стані спокою. Ці рівняння, які називаються рівняннями стану, використовуються при вирішенні задач динаміки рідини і газу. Безвідносно до того, буде рівновага чи рух - тільки має виконуватися умова баротропності, вводиться функція тиску $\int\limits_{P_O}^{P} \dfrac{dP}{\rho(P)}$. Нескладні обчислення дозволяють отримати вирази для: нестисливої рідини $\frac{P-P_O}{\rho}$, ізотермічного процесу $\frac{P_O}{\rho_O} ln \frac{P}{P_O}$, адіабатичного процесу $-\frac{k}{k-1}\frac{P_O}{\rho_O}\left(1-\left(\frac{P}{P_O}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА № 1. 8 літрів антифризу (густина ρ_A =800 кг/м^3) змішали з 4-ма літрами води (густина ρ_B =1000 кг/м^3). Визначити густину отриманої суміші ρ_C.

Розв'язання. Для суміші (масою m_C й об'ємом W_C) двох рідин – антифризу та води, що розчиняються одна в одній, формула (1.1) набуває вигляду $\rho_C = \frac{m_C}{W_C} = \frac{m_A + m_B}{W_A + W_B} = \frac{\rho_A \cdot W_A + \rho_B \cdot W_B}{W_A + W_B}$.

Таким чином, $\rho_C = \frac{800 \cdot 8 + 1000 \cdot 4}{8+4} = 866{,}7$ кг/м^3. Під час розв'язування цієї задачі необхідно зробити певні зауваження:

- розмірність об'єму можна залишати позасистемною (у літрах) - це не впливає на відповідь; в остаточній формулі в чисельнику стоїть сума добутків густини на об'єм певної речовини, а у знаменнику – сума об'ємів речовин, тому розмірність відповіді визначається тільки розмірністю густини.
- отримана відповідь завжди знаходиться в межах між величинами густин рідин, які змішують; вона не може бути меншою за густину більш легкої рідини, і більшою за густину більш важкої рідини.

Відповідь. Густина суміші $\rho_C = 866{,}7$ кг/м^3.

ЗАДАЧА № 2. Пожежний водопровід діаметром d=300 мм та довжиною l=50 м під час випробувань на міцність заповнюється водою при атмосферному тиску P_O=1 атм≈101,3 кПа. Який додатковий об'єм води необхідно закачати у водопровід для отримання в ньому надлишкового тиску P_1=5 МПа? Модуль об'ємної пружності води $E_B \approx 2{\cdot}10^9$ Па. Деформацією водопроводу можна знехтувати.

Розв'язання. З формули (1.4) знаходимо β_W - коефіцієнт стисливості для води $\beta_W = \dfrac{1}{E_B} = \dfrac{1}{2\cdot10^9}$=0,5·10^{-9} 1/Па. Початковий об'єм води, який закачується у водопровід, складає $W = \dfrac{\pi d^2}{4}\cdot l = \dfrac{3{,}1415\cdot0{,}3^2\cdot50}{4}$≈3,53 м^3. Використовуючи формулу (1.3), знаходимо залежність зміни об'єму ΔW від зміни тиску ΔP в рідині $\Delta W = \beta_W \cdot \Delta P \cdot W$. Оскільки за умов задачі $\Delta P = P_1$, остаточно маємо $\Delta W = \beta_W \cdot P_1 \cdot W$=0,5·10^{-9}·5·10^6·3,53= 8,825·10^{-3} м^3= 8,825 л. Як бачимо, під час вирішення задачі необхідно привести розмірності всіх величин відповідно до системи SI.

Відповідь. Додатковий об'єм води ΔW=8,825 л.

ЗАДАЧА № 3. Густина нафти ρ=850 кг/м^3, кінематичний коефіцієнт в'язкості нафти ν=0,614·10^{-4} м^2/с, визначити динамічний коефіцієнт в'язкості μ.

Розв'язання. З формули (1.7) безпосередньо отримуємо $\mu = \nu \cdot \rho$=0,614·10^{-4}·850=5,22·10^{-2} Па·с.

Відповідь. Динамічний коефіцієнт в'язкості μ=5,22·10^{-2} Па·с.

ЗАДАЧА № 4. Обчислити мінімальний об'єм балона W для зберігання кисню масою m=6,4 кг при температурі t=20$^\circ C$, якщо балон здатний витримати тиск P=15,7 МПа.

Розв'язання. З рівняння (1.8) отримуємо $W = \frac{m \cdot R_m \cdot T}{P}$, де $T = t + 273{,}15$=293,15 К, R_m для кисню дорівнює 259,8 Дж/(кг·К) (див. таблицю 1.2). Тому $W = \frac{6{,}4 \cdot 259{,}8 \cdot 293{,}15}{15{,}7 \cdot 10^6}$ = 3104610^{-6} м^3≈31,05 л.

Відповідь. Мінімальний об'єм балона $W \approx$ 31,05 л.

ЗАДАЧА № 5. Газ під тиском P_1=745 мм рт. ст. і при температурі t_1=20°С має об'єм W_1=164 см^3. Яким буде об'єм тієї ж маси газу за наступних умов (P_2=760 мм рт. ст., t_2=0°С) ?

Розв'язання. З рівняння (1.8) отримуємо:

$$\left.\begin{array}{l} P_1W_1 = mR_mT_1 \\ P_2W_2 = mR_mT_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_1W_1}{P_2W_2} = \frac{T_1}{T_2}, \text{ і } W_2 = \frac{P_1W_1T_2}{P_2T_1} = \frac{745 \cdot 164 \cdot 273}{760 \cdot 293} =$$

150 см^3.

Відповідь. Об'єм газу за нових умов W_2=150 см^3.

ЗАДАЧА № 6. Манометр на балоні зі стиснутим газом за температури t_1=18°С показує тиск P_1=84 кГ/см^2. Який тиск P_2 буде показувати манометр, якщо температура знизиться до t_2=-23°С ?

Розв'язання. З рівняння (1.8) отримуємо:

$$\left.\begin{array}{l} P_1W = mR_mT_1 \\ P_2W = mR_mT_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow P_2 = \frac{P_1T_2}{T_1} = \frac{84(-23+273)}{18+273} =$$

=72,165 кГ/см^2.

Відповідь. Тиск P_2=72,165 кГ/см^2.

ЗАДАЧА № 7. Три балони ємністю 3л, 7л, 5л наповнені відповідно киснем під тиском 2 ат, азотом під тиском 3 ат і вуглекислим газом під тиском 0,6 ат при однаковій температурі. Балони з'єднують між собою, утворюючи суміш тієї ж температури. Визначити тиск в суміші газів.

Розв'язання. Позначимо відповідні тиски та об'єми P_1=2 ат, P_2=3 ат, P_3=0,6 ат, W_1=3 л, W_2=7 л, W_3=5 л. Для суміші

$PW = P_1W_1 + P_2W_2 + P_3W_3$, $W = W_1 + W_2 + W_3$, тоді $P = \frac{P_1W_1 + P_2W_2 + P_3W_3}{W_1 + W_2 + W_3} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 0{,}6 \cdot 5}{3 + 7 + 5}$=2 ат.

<u>Відповідь</u>. Тиск в суміші газів P=2 ат.

<u>ЗАДАЧА № 8.</u> По газопровідній трубі проходить вуглекислий газ CO_2 під тиском P=3,9·10^5 Па і при температурі t=27°С. Яка швидкість руху газу в трубі, якщо за проміжок часу Δt=10 хв протікає m=2 кг газу при площі перерізу каналу труби ω=5 см^2 (питома газова стала R_m=188,3 Дж/(кг·К)).

<u>Розв'язання</u>. Нехай V - шукана швидкість, тоді об'єм газу W, що протікає за вказаний проміжок часу, дорівнює $W = \omega V \Delta t$. З рівняння Менделєєва-Клапейрона $PW = mR_mT$ знаходимо: $V = \frac{mR_mT}{P\omega\Delta t} = \frac{2 \cdot 188{,}3 \cdot 300}{3{,}9 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 600}$=0,96 м/с.

<u>Відповідь</u>. Швидкість руху газу в трубі V=0,96 м/с.

<u>ЗАДАЧА № 9.</u> Визначити густину суміші 4 г водню і 32 г кисню при температурі t=7°С і тиску P=700 мм рт. ст.

<u>Розв'язання</u>. Густина суміші газів $\rho = \frac{m_1 + m_2}{W_1 + W_2}$. Для визначення об'єму суміші скористаємось рівнянням Менделєєва-Клапейрона. У системі SI тиск у Па P=700·133,3≈0,933·10^5 Па. Для кожної з компонент суміші питома газова стала відповідно дорівнює R_{m1}=4157,2 Дж/(кг·К) і R_{m2}=259,8 Дж/(кг·К). Тоді $P(W_1 + W_2) = T(m_1R_{m1} + m_2R_{m2})$, звідки загальний об'єм $W_1 + W_2 = \frac{T(m_1R_{m1} + m_2R_{m2})}{P} = \frac{280(3 \cdot 4157{,}2 + 32 \cdot 259{,}8)10^{-3}}{0{,}933 \cdot 10^5} =$ =0,062 м^3. Остаточно $\rho = \frac{36 \cdot 10^{-3}}{0{,}062}$=0,58 кг/м^3.

<u>Відповідь</u>. Густина суміші газів ρ=0,58 кг/м^3.

ЛЕКЦІЯ № 2. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ГІДРОСТАТИКИ. ТИСК РІДИНИ НА ПЛОСКІ ПОВЕРХНІ. ПІДПІРНІ СТІНКИ

Гідростатика – розділ гідромеханіки, що вивчає закони рівноваги рідини, яка перебуває в стані спокою.

Рідина, що знаходиться в стані спокою, зазнає дії зовнішніх сил двох категорій – масових і поверхневих. Прикладом масових сил є вага та сила інерції. До поверхневих відносяться сили, що діють на поверхні виділеного об’єму рідини (тиск поршня, атмосферний тиск на вільну поверхню рідини).

Гідростатичний тиск у точці – це границя відношення сили тиску F, що діє на елементарну площину ω при зменшенні цієї площини до нуля:

$$P = \lim_{\omega \to 0} \frac{F}{\omega}. \tag{2.1}$$

Як вже було зазначено, в системі SI одиницею тиску є «паскаль», скорочене позначення Па=Н/м^2. Зв’язок з позасистемними величинами наведено у лекції №1, лаблиця 1.1.

Гідростатичний тиск має три важливі властивості:

1. Гідростатичний тиск завжди діє по внутрішній нормалі до площини прикладення.
2. Гідростатичний тиск у будь-якій точці рідини діє однаково в усіх напрямах (закон Паскаля).
3. Гідростатичний тиск у точці залежить від її координат у просторі (від глибини занурення точки під рівень рідини).

I. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ГІДРОСТАТИКИ

Розглянемо основний випадок рівноваги рідини, коли на неї діє лише одна масова сила – вага, а на вільну поверхню – тиск P_o (рисунок 2.1). Виділимо у деякій точці елементарну горизонтальну площину ω і побудуємо на ній вертикальний циліндричний об’єм довільної висоти h. Маса рідини в циліндрі $m = \rho h \omega$. Сили, що діють на об’єм, дорівнюють відповідно: вага $mg = \rho h \omega g$, сила тиску на верхню поверхню $P_o \omega$, на нижню - $P\omega$.

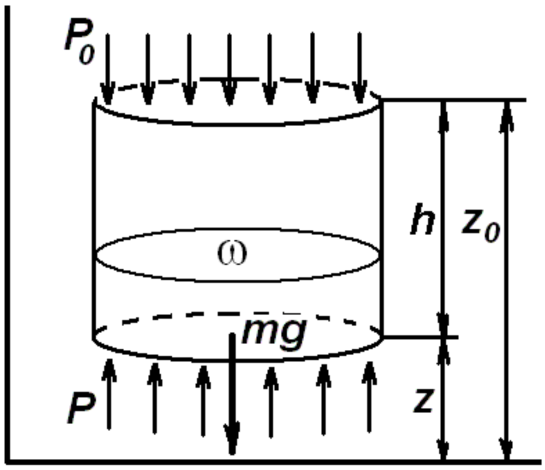


Рисунок 2.1.

Запишемо рівняння рівноваги сил, діючих на зазначений об'єм у вертикальному напрямі $P\omega - P_o\omega - \rho g h\omega = 0$, або

$$P = P_o + \rho g h. \qquad (2.2)$$

Отримане рівняння має назву ***основного рівняння гідростатики***, за яким залежність абсолютного тиску P від глибини h занурення точки має лінійний характер.

Введемо довільну систему координат і замінимо h на $z_o - z$, тоді рівняння (2.2) отримує вигляд:

$$z + \frac{P}{\rho g} = z_o + \frac{P_o}{\rho g}. \qquad (2.3)$$

Оскільки точка, в якій була виділена елементарна горизонтальна площина, взята довільно, тому $z + \frac{P}{\rho g} = const$ для всього нерухомого об'єму рідини. Ця сума називається ***гідростатичним напором***, а координата z має назву ***нівелірної висоти***.

II. ТИСК РІДИНИ НА ПЛОСКІ ПОВЕРХНІ. ЕПЮРИ ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ

Візьмемо плоску прямокутну стінку $ABCD$ резервуара у вигляді куба або паралелепіпеда шириною b, нахилену до горизонту під кутом α, висота стінки a. Поверхневий тиск враховувати не будемо. Епюри тиску графічно відображають закон зміни гідростатичного тиску в рідині. На рисунку 2.2 показано схему визначення сили тиску рідини на плоску стінку. Епюра тиску в нашому випадку має вигляд прямокутної трапеції $ABEN$.

Сила гідростатичного тиску F рідини спрямована перпендикулярно до стінки $ABCD$, а її величина дорівнює

$$F = b\omega,$$

де ω - площа епюри гідростатичного тиску - прямокутної трапеції $ABEN$.

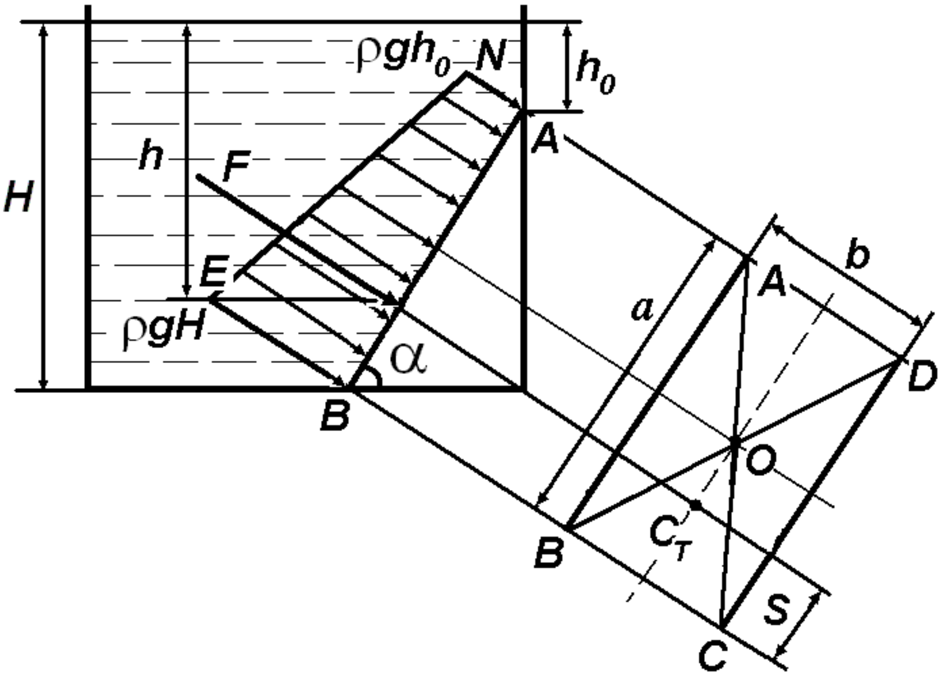


Рисунок 2.2.

З урахуванням $h_O = H - a\,sin\alpha$ отримуємо остаточну формулу для визначення сили гідростатичного тиску:

$$F = b \cdot \frac{1}{2}\left(\rho gH + \rho gh_O\right) \cdot a = \frac{\rho gba}{2}\left(2H - a\,sin\alpha\right) = \rho gba\left(H - \frac{a}{2}sin\alpha\right) \qquad (2.4)$$

Точку дії сили тиску F називають ***центром тиску***. Слід зауважити, що сила F як рівнодійна елементарних паралельних сил має проходити через центр ваги епюри тиску – точку C_T. Її положення визначається за формулою:

$$S = \frac{2h_O + H}{3\left(h_O + H\right)}a. \qquad (2.5)$$

Для вертикально розташованої прямокутної стінки треба покласти α=90°. Якщо потрібно врахувати поверхневий (надлишковий) тиск P_O, формула (2.4) набуває вигляду:

$$F = b \cdot \frac{1}{2}\left(P_{O} + \rho g H + P_{O} + \rho g h_{O}\right) \cdot a = ba\left[P_{O} + \rho g\left(H - \frac{a}{2} sin\,\alpha\right)\right]$$

(2.6)

При розв’язанні практичних задач зручніше застосовувати наступну формулу для сили тиску на плоску поверхню:

$$F = \left(P_{O} + \rho g H_{O}\right) \cdot \omega_{П}, \qquad (2.7)$$

де H_{O} - глибина занурення центру ваги змоченої частини площі плоскої поверхні, $\omega_{П}$ - площа змоченої частини плоскої поверхні, яка частіше під час вирішення задач позначається просто ω.

Для затворів отворів довільної форми розв’язання подібної задачі ускладнюється через змінnність епюри тиску по лініях, паралельних лінії AB. При цьому вигляд епюри гідростатичного тиску – трапеція - залишається незмінним, змінюються тільки її розміри. Розглянемо: 1) визначення сили тиску води F (без урахування поверхневого тиску) на пластину певної форми (затвор отвору, на Рисунку 2.3 показана як простий приклад прямокутна пластинка з розмірами a і b), яка нахилена до горизонту під кутом α, напір води H; 2) глибину занурення $H_{Т}$ та координату центру тиску $y'_{Т}$.

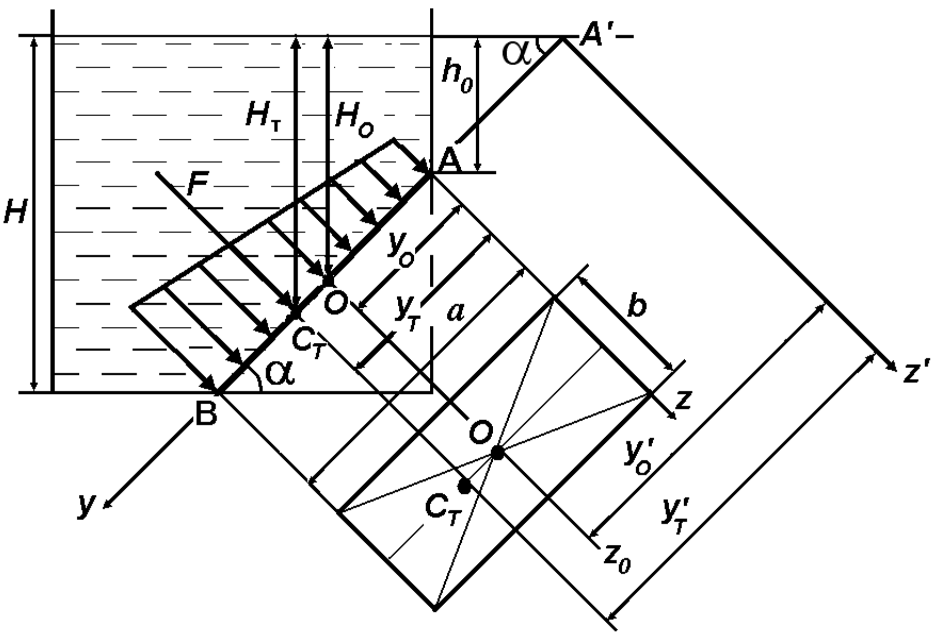


Рисунок 2.3.

Для визначеності введемо дві системи координат: так звану місцеву zAy, яка пов'язана з площиною пластинки, і $z'A'y$, яка пов'язана з рівнем вільної поверхні. Вісь y проходить крізь площину пластини, осі z і z' є паралельними одна одній, а взагалі є перпендикулярними до площини рисунку, на якому показано розташування пластинки в указаних системах координат. Для довільної пластинки існують верхній (визначається точкою A на глибині h_O) та нижній (визначається точкою B на глибині H) край з відомими глибинами занурення. Для використання формули 2.7 за відомими даними необхідно визначити глибину $H_O = y_O \cdot sin\alpha + h_O = y'_O \cdot sin\alpha$, де y_O - координата центру ваги певної фігури в місцевій системі координат zAy, y'_O - координата центру ваги певної фігури в системі координат $z'A'y$. Сила гідростатичного тиску $F = \rho g H_O \omega$ проходить через центр тиску C_T, координата якого $y'_T = y'_O + \dfrac{I_{Z_O}}{\omega \cdot y'_O}$, де I_{Z_O} - момент інерції фігури відносно осі z_O, яка проходить через центр ваги фігури. Центр надлишкового тиску знаходиться нижче центру ваги фігури на величину $\dfrac{I_{Z_O}}{\omega \cdot y'_O}$, тобто розташований на більшій глибині, ніж центр ваги. Глибина занурення центру тиску фігури $H_T = y'_T \cdot sin\alpha$. Положення точки центра ваги плоскої фігури відносно прийнятої системи координат і моментів інерції відносно осей, які проходять через точку центра ваги паралельно координатним осям (головні моменти інерції I_{OX}, I_{OY}), розглядається окремо в курсах «Вища математика» і «Теоретична механіка». У додатку 7 наведені площа ω, координата y_O центру ваги, осьовий момент інерції для деяких плоских перерізів для місцевої системи координат.

З огляду на другу властивість гідростатичного тиску можна сформулювати закон Паскаля: тиск, який прикладений до вільної поверхні рідини, передається в усі точки рідини без зміни. На законі Паскаля заснована побудова найпростіших гідравлічних машин – пресів, домкратів, підйомників тощо.

III. ГІДРАВЛІЧНИЙ ПРЕС І ЙОГО СХЕМА

Гідравлічний прес (Рисунок 2.4) складається з двох сполучених між собою силових циліндрів різного діаметра – меншого d_1 і більшого d_2. Якщо на поршень площею $\omega_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$ малого циліндра діє сила F_1, то силу тиску F_2 на інший поршень площею $\omega_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$ визначають з умови рівності тиску P в пресі:

$$P = \frac{F_1}{\omega_1} = \frac{F_2}{\omega_2},$$

звідки $F_2 = P \cdot \omega_2$. Співвідношення $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = n$ визначається як передавальне число преса.

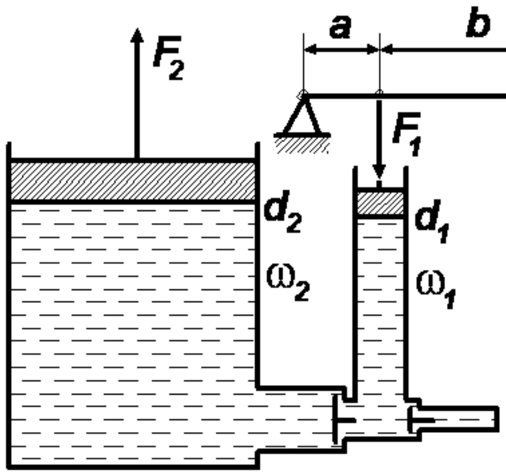


Рисунок 2.4.

Внаслідок тертя в поршнях і важелі сила F_2, що передається піднімальному механізму, менша за $F_1 \cdot n$ Це зменшення враховується коефіцієнтом корисної дії η

$$F_2 = \eta P \omega_2 = \eta F_1 \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \qquad (2.8)$$

IV. РОЗПОДІЛ АТМОСФЕРНОГО ТИСКУ

Тиск у газі в стані рівноваги буде збільшуватися до низу завдяки тяжінню вищерозташованих шарів. Очевидно, що тиск буде однаковим у довільній горизонтальній площині. При визначенні закону розподілу тиску вздовж вертикалі необхідно враховувати зміну питомої маси (або питомої ваги) залежно від тиску.

Запишемо умову рівноваги для циліндра з площею перерізу 1 м^2 (Рисунок 2.5) і дуже малої висоти dh у такому вигляді: $P + dP + \gamma dh - P = 0$, або

$$dP = -\gamma dh, \tag{2.9}$$

де dP - різниця тисків на верхній і нижній основі циліндра, γ - питома вага газу.

Будемо вважати, що газ має постійну температуру, тоді питома вага γ і тиск P зв'язані законом Бойля-Маріотта:

$$P = \gamma \frac{P_O}{\gamma_O}. \tag{2.10}$$

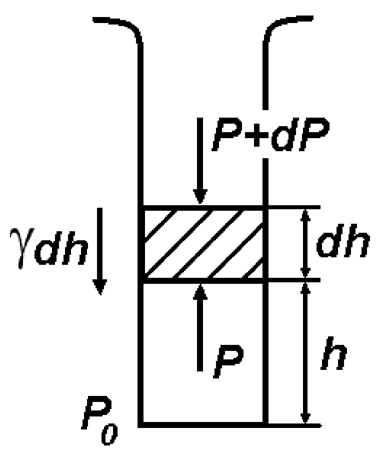


Рисунок 2.5.

Підставляємо (2.10) в (2.9):

$$dP = -P\frac{\gamma_O}{P_O}dh \text{ або } \frac{dP}{P} = -\frac{\gamma_O}{P_O}dh.$$

Інтегруємо цей вираз в границях від 0 до h:

$$\int_{P_0}^{P_h}\frac{dP}{P} = -\frac{\gamma_O}{P_O}\int_0^h dh, \text{ або } ln\frac{P_h}{P_O} = -\frac{\gamma_O}{P_O}h.$$

Перетворивши останній вираз, маємо:

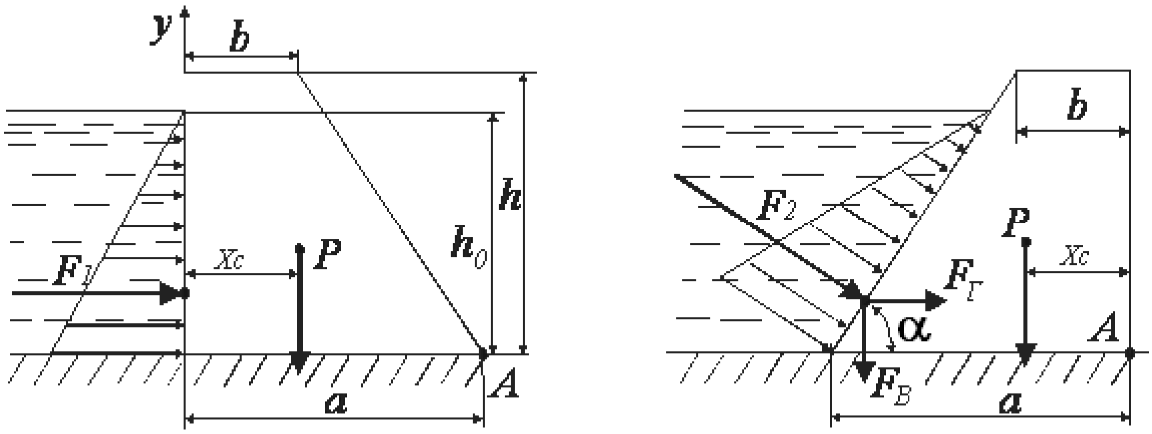
$$P_h = P_O\, exp\left(-\frac{\gamma_O}{P_O}h\right). \tag{2.11}$$

Це так звана барометрична формула, яка свідчить, що тиск зменшується з висотою за експоненціальним законом. Для повітря при температурі 15$^\circ C$ і при нормальному атмосферному тиску на рівні моря P_O=1,01325·10^5 Па питома вага повітря γ_O= 12 Н/м^3. Таким чином, з формули (2.9) можна, наприклад, обчислити висоту h, на якій тиск $P_h = 0{,}5P_O$. Скорочуючи обидві частини рівняння на P_O, маємо

$0{,}5 = exp\left(-\dfrac{12 \cdot h}{1{,}01325 \cdot 10^5}\right) \approx exp\left(-12 \cdot 10^{-5} \cdot h\right)$. Беремо натуральний логарифм від обох частин рівняння $-0{,}693 = -12 \cdot 10^{-5} \cdot h$, звідки h = 5775 м.

Слід нагадати, що формула (2.11) справедлива, якщо вважати температуру повітря постійною вздовж вертикалі. У дійсності це припущення не є справедливим. Приблизно до висоти 11 км температура зменшується лінійно, а далі залишається постійною на рівні -55$^\circ C$. Вимірювання, зроблені за допомогою реактивних снарядів, показали такі температурні зміни: від 25 км до 45 км температура збільшується до 0$^\circ C$, з 55 км температура знову зменшується до -90$^\circ C$ на висоті 80-95 км. Потім вона знову збільшується і досягає 1000$^\circ C$ на висоті 230 км.

V. ПІДПІРНІ СТІНКИ. СТІЙКІСТЬ ПІДПІРНИХ СТІНОК ПІД ДІЄЮ ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ



а) б)

Рисунок 2.6. Розрахункові схеми підпірної стінки на стійкість при перекиданні

Підпірні стінки застосовуються як тимчасові гідротехнічні споруди, за допомогою яких захищають від повеней житлові будови, транспортні комунікації тощо. Звичайно, стінки мають поперечний переріз у вигляді прямокутної трапеції, при цьому їх можна встановлювати так, що гідростатичний тиск буде діяти або на її вертикальну, або на похилу до обрію площину з розрахунком на один метр її довжини. Конструкція повинна бути стійкою при дії гідростатичного тиску, що прагне її перекинути. Методика розрахунку коефіцієнта стійкості й вибір варіанта розташування стінки викладений далі.

Схема розрахунку підпірної стінки на її стійкість при перекиданні як твердого тіла навколо точки A для двох способів розташування по відношенню до води представлена на рисунку 2.6.

За визначенням коефіцієнтом стійкості k при перекиданні стінки називається відношення утримуючого моменту M_{Y}, що створює сила ваги самої стінки щодо точки A, до перекидаючого моменту M_{O} сили гідростатичного тиску щодо тієї ж точки.

Позначивши відповідно F_1 й F_2 сили гідростатичного тиску на 1 м довжини вертикальної й похилої підпірної стінки (Рисунок 2.6,а і Рисунок 2.6,б), запишемо їхні значення:

$$F_1 = \frac{1}{2}\rho_B g h_{\mathrm{O}}^2,\ F_2 = \frac{1}{2}\rho_B g h_{\mathrm{O}}^2 \frac{1}{sin\alpha},$$

де ρ_{B} - густина води, $\alpha = arctg\dfrac{h}{a-b}$ - кут нахилу стінки до обрію. Силу F_2 розкладемо на $F_{2\Gamma}$ - горизонтальну й $F_{2\mathrm{B}}$ - вертикальну складові, які дорівнюють:

$$F_{2\Gamma} = F_2\, sin\alpha = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{B}} g h_{\mathrm{O}}^2;\ F_{2\mathrm{B}} = F_2\, cos\alpha = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{B}} g h_{\mathrm{O}}^2 ctg\alpha.$$

Перекидаючі моменти становлять:

$$M_{\mathrm{O1}} = \frac{1}{3}F_1 h_{\mathrm{O}} = \frac{1}{6}\rho_{\mathrm{B}} g h_{\mathrm{O}}^3;\ M_{\mathrm{O2}} = \frac{1}{3}F_{2\Gamma} h_{\mathrm{O}} = \frac{1}{6}\rho_{\mathrm{B}} g h_{\mathrm{O}}^3.$$

Утримуючий момент для вертикальної підпірної стінки:

$$M_{\mathrm{Y1}} = P(a - x_C),$$

де $P=\frac{1}{2}\rho g(a+b)h$ - вага погонного метра стінки, ρ - густина матеріалу стінки, $x_C=\frac{(a-b)^2+3b^2}{3(a+b)}$ відстань від точки A до лінії дії сили P. З урахуванням цього остаточно знаходимо

$$M_{\text{У}1}=\frac{1}{2}\rho g(a+b)h\frac{2a^2+5ab-4b^2}{3(a+b)}=\rho gh\frac{2a^2+5ab-4b^2}{6}.$$

Утримуючий момент для похилої підпірної стінки:

$$M_{\text{У}2}=Px_C+F_{2\text{В}}\left(a-\frac{1}{3}h_{\text{О}}ctg\alpha\right)=$$

$$=\rho gh\frac{(a-b)^2+3b^2}{6}+\frac{1}{2}\rho_{\text{В}}gh_{\text{О}}^2ctg\alpha\left(a-\frac{1}{3}h_{\text{О}}ctg\alpha\right)$$

Запишемо формули для коефіцієнтів стійкості:

$$k_1=\frac{M_{\text{У}1}}{M_{\text{О}1}}=\frac{\rho h}{\rho_{\text{В}}h_{\text{О}}^3}\left(2a^2+5ab-4b^2\right), \qquad (2.12)$$

$$k_2=\frac{M_{\text{У}2}}{M_{\text{О}2}}=\frac{\rho h}{\rho_{\text{В}}h_{\text{О}}^3}\left((a-b)^2+3b^2\right)+\frac{3}{h_{\text{О}}}ctg\alpha\left(a-\frac{1}{3}h_{\text{О}}ctg\alpha\right). \qquad (2.13)$$

З формул (2.12) і (2.13) можна одержати коефіцієнти стійкості для поперечного перерізу підпірної стінки у вигляді прямокутника й прямокутного трикутника.

Особливо цікавий випадок у вигляді рівнобедреного прямокутного трикутника, коли $h=h_{\text{О}}$. Підставивши у формули (2.12) і (2.13) $b=0$, $a=h=h_{\text{О}}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, одержимо:

$$k_1=2\frac{\rho}{\rho_{\text{В}}}, \quad k_2=2+\frac{\rho}{\rho_{\text{В}}}.$$

Виявляється, що для такого конкретного перетину стінки коефіцієнти стійкості залежать тільки від співвідношення $\dfrac{\rho}{\rho_{\text{B}}}$.

При цьому, якщо $\dfrac{\rho}{\rho_{\text{B}}}<1$, то $k_2>k_1$; якщо $\dfrac{\rho}{\rho_{\text{B}}}=1$, то $k_2=k_1$ і, нарешті, якщо $\dfrac{\rho}{\rho_B}>1$, то $k_2<k_1$, що вирішує питання про перевагу обох варіантів розташування підпірної стінки.

У розрахункових схемах (Рисунок 2.6), поза всяким сумнівом, більш стійкою є схема, звернена похилою площиною до води. У цьому випадку завжди можна підібрати розміри поперечного перерізу, при яких перекидаючий момент стане рівним нулю. Для цього потрібно, щоб лінія дії сили F гідростатичного тиску (рисунок 2.7) проходила через точку перекидання A. Таким чином, при відомих параметрах b і h $\text{AB}=a$; $\text{B}C=d$; $\text{BK}=\dfrac{1}{3}d$ невідомі a і d визначаються вирішенням системи рівнянь:

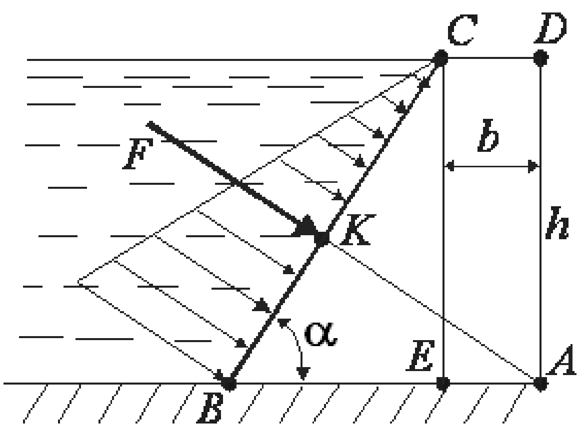


Рисунок 2.7. Підпірна стінка без перекидаючого моменту

$$\begin{cases} d^2=(a-b)^2+h^2 \\ \dfrac{a}{d}=\dfrac{d}{3(a-b)} \end{cases}. \quad (2.14)$$

Виключаючи з (2.14) d, приходимо до квадратного рівняння відносно a - довжини нижньої основи:

$$2a^2-ba-b^2-h^2=0$$

Відкидаючи від'ємний корінь цього рівняння, що суперечить фізичному змісту задачі, знаходимо значення a:

$$a=\frac{b+\sqrt{9b^2+8h^2}}{4}.$$

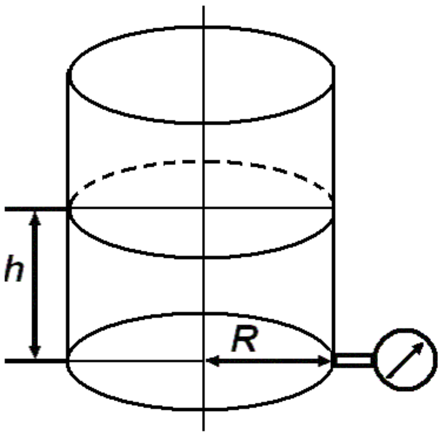
Приведемо також формулу для кута α нахилу площини до обрію, що сприймає гідростатичний тиск:

$$\alpha = arctg\frac{h}{a-b} = arctg\frac{4h}{3b\left(\sqrt{1+\frac{8}{9}\left(\frac{h}{b}\right)^2}-1\right)}.$$

Необхідно також відзначити, що, крім перекидаючого моменту, сила гідростатичного тиску прагне також зрушити стінку в горизонтальному напрямку. Це може відбутися тільки в тому випадку, якщо горизонтальна складова сили гідростатичного тиску перевершить силу тертя ковзання між нижньою підставою стінки й опорною поверхнею. Похила стінка створює вертикальну складову сили гідростатичного тиску, спрямовану вниз. Ця складова збільшує силу тертя й тим самим дозволяє витримувати більший гідростатичний тиск у порівнянні з вертикальною стінкою.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

<u>ЗАДАЧА № 1.</u> Визначити масу нафти m, що міститься у циліндричному резервуарі радіусом R =6 м, якщо манометр показує тиск на дно 50 кПа, густина нафти $\rho_н$ =840 кг/м^3.



<u>Розв’язання</u>. Тиск, що показує манометр $P = \rho_н gh$, маса нафти $m = W_н\rho_н$, об’єм нафти $W_н = \pi R^2 h$.

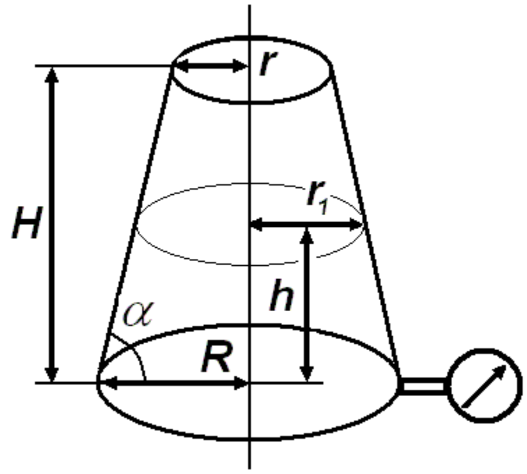
Остаточно: $m = \pi R^2 \cdot \dfrac{P}{\rho_н g}\cdot\rho_н$ або

$$m = \pi R^2 \cdot \frac{P}{g} = 3{,}1414\cdot 6^2\cdot\frac{50\cdot 10^3}{9{,}81}$$

=576439 кг ≈576 т.

Слід зазначити цікавий, на перший погляд, парадоксальний факт, що при вирішенні цієї задачі густина рідини, яка міститься у циліндричному резервуарі, є зайвим параметром і остаточна відповідь від нього не залежить. Натомість, при обчисленні об’єму рідини, безперечно, густина рідини є необхідним параметром.

Відповідь. Маса нафти m≈576 т.

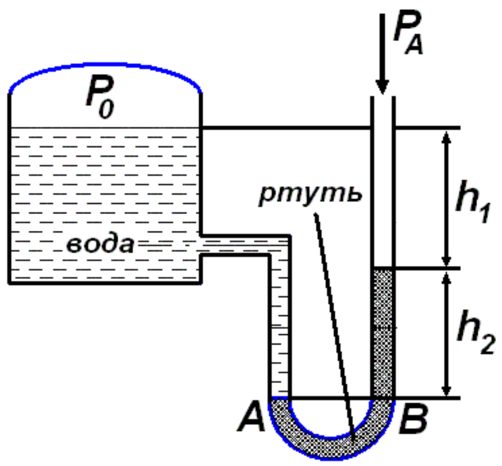


ЗАДАЧА № 2 . Визначити об′єм нафти W у відкритому резервуарі у формі зсіченого конуса з розмірами R= 2 м, r= 1 м, H= 6 м, якщо манометр, вмонтований на дні, показує тиск $P_М$= 0,4 ат, густина нафти $\rho_Н$= 850 кг/м^3.

Розв′язання. Визначаємо висоту $h = \dfrac{P_М}{\rho_Н g} = \dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}981 \cdot 10^5}{850 \cdot 9{,}81}$=4,71 м вільної поверхні та знаходимо її радіус r_1, використовуючи геметричні співвідношення для даної геометричної фігури $tg\alpha = \dfrac{H}{R-r} = \dfrac{h}{R-r_1}$, $\dfrac{R-r}{H} = \dfrac{R-r_1}{h}$, звідки $r_1 = R - \dfrac{h}{H}(R-r) = 2 - \dfrac{4{,}71}{6}(2-1)$=1,216 м. Визначимо об′єм нафти, скориставшись формулою для зсіченого конуса, $W = \dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr_1 + r_1^2\right) = \dfrac{3{,}1415 \cdot 4{,}71}{3}\left(2^2 + 2 \cdot 1{,}216 + 1{,}216^2\right)$= 39,02 м^3.

Відповідь. Об′єм нафти W = 39,02 м^3.

ЗАДАЧА № 3. Ртутний манометр з′єднаний з резервуаром, заповненим водою. Визначити тиск $P_О$ на поверхні води в резервуарі, якщо h_1= 150 мм, h_2= 250 мм, атмосферний тиск $P_А$= 98,1 кПа, густина води $\rho_В$= 1000 кг/м^3, ртуті $\rho_Р$= 13,6·10^3 кг/м^3.

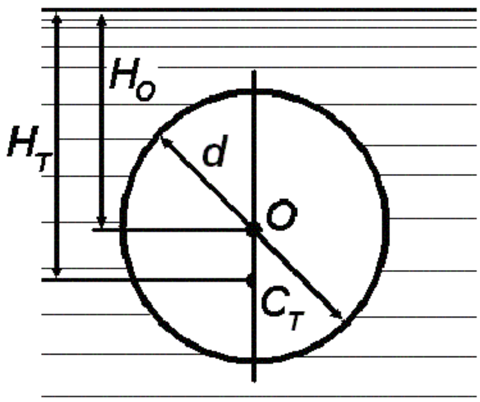


Розв′язання. Тиск у точках A і B однаковий, тому що вони лежать в одній горизонтальній площині, яка проходить через ту ж саму рідину, – в даному випадку це ртуть. Складаємо рівняння гідростатики:

$$P_O + \rho_B g(h_1 + h_2) = P_A + \rho_P g h_2 .$$

Після перетворень одержуємо:
$P_O = P_A + g[\rho_P h_2 - \rho_B(h_1 + h_2)]$= 98,1⋅10^3+9,81⋅(13600⋅0,25-1000⋅(0,15+0,25))= 127,53 кПа.

Відповідь. Тиск P_O=127,53 кПа.



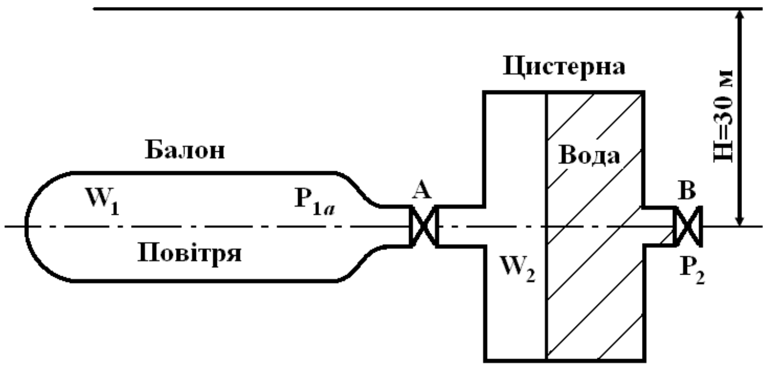
ЗАДАЧА № 4. Отвір у формі кола діаметром d=40 см у вертикальній плоскій стінці резервуара з водою перекрито плоским клапаном. Знайти величину і точку прикладення сили гідростатичного тиску F на клапан, якщо центр отвору розташований нижче рівня вільної поверхні рідини на 0,5 м.

Розв’язання. Сила гідростатичного тиску води на клапан дорівнює $F = \rho g H_O \omega$, де ρ = 1000 кг/м^3 – густина води, H_O=0,5 м, $\omega = \frac{\pi d^2}{4} = 3{,}1415 \cdot \frac{0{,}4^2}{4}$=0,126 м^2 – площа клапана (отвору). Таким чином, $F = 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}126$= 616 Н. Сила F прикладена до точки C_T, відстань якої від вільної поверхні H_T визначається за формулою $H_T = H_O + \frac{I_O}{\omega H_O}$, де $I_O = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3{,}1415 \cdot 0{,}4^4}{64}$=0,126⋅10^{-2} м^4 – момент інерції клапана відносно осі, що проходить через центр ваги перерізу – точки O.

Остаточно $H_T = 0{,}5 + \frac{0{,}126 \cdot 10^{-2}}{0{,}126 \cdot 0{,}5}$ = 0,52 м.

Відповідь. Сила гідростатичного тиску на клапан F = 616 Н і точка її прикладення $H_{\text{Т}}$ = 0,52 м.

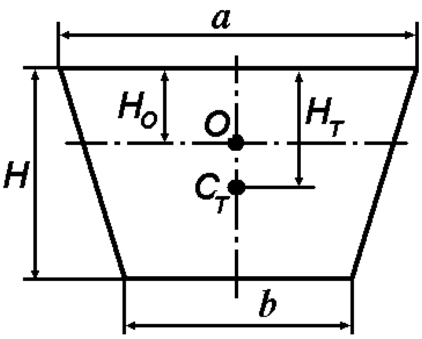
ЗАДАЧА № 5. Балон ємністю 20 л заповнений стиснутим повітрям. Манометр показує тиск 120 кГ/см^2. Який об'єм води можна витиснути з цистерни підводного човна повітрям цього балону, якщо витискання здійснюється на глибині H =30 м при: 1) однаковій температурі повітря в балоні та води в цистерні; 2) температура повітря в балоні t_1 =20°C, температура води в цистерні t_2 =5°C?



Розв'язання. 1-й випадок. Нехай W_1 =20 л об'єм балона, W_2 - об'єм витиснутої води, $P_{1\text{М}}$ =120 кГ/см^2 =117,72·10^5 Па – тиск повітря в балоні при закритому крані A, $P_{1a} = P_{1\text{М}} + P_a$ =118,73·10^5 Па – абсолютний тиск повітря в балоні. Абсолютний тиск води в цистерні при відкритому крані B $P_2 = \rho g H + P_a$ =10^3·9,81·30+1,013·10^5= 3,956·10^5 Па. З рівності $P_{1a}W_1 = P_2(W_1 + W_2)$ отримуємо шуканий об'єм у вигляді $W_2 = \dfrac{P_{1a} - P_2}{P_2} W_1 = \dfrac{(118{,}73 - 3{,}956)10^5}{3{,}956 \cdot 10^5} 20$ = 580,25 л.

2-й випадок. При різних температурах повітря і води будемо припускати, що повітря в об'ємі W_2 охолоджується в процесі витиснення води до її температури. Нехай $m_{1\text{В}}$ і m_{13} відповідно маси повітря при відкритому та закритому крані A. Запишемо рівняння Менделєєва-Клапейрона для цих варіантів: $P_{1a}W_1 = m_{1\text{В}} R_m T_1$ і $P_2 W_1 = m_{13} R_m T_1$, тоді різниця мас визначиться $m_{1\text{В}} - m_{13} = \dfrac{P_{1a} - P_2}{R_m T_1} W_1$. Рівняння Менделєєва-Клапейрона для повітря в об'ємі W_2 цистерни $P_2 W_2 = (m_{1\text{В}} - m_{13}) R_m T_2$. Підставляючи замість різниці мас отриманий вище вираз, знаходимо $W_2 = \frac{P_{1a} - P_2}{R_m} \cdot \frac{T_2}{T_1} W_1$=$\frac{(118{,}73 - 3{,}956)10^5}{3{,}956 \cdot 10^5} \cdot \frac{278}{293} 20$ =549,25 л.

<u>Відповідь.</u> Об′єми для заданих випадків відповідно W_2 =580,25 л і W_2 =549,25 л.



<u>ЗАДАЧА № 6.</u> Канал в поперечному перерізі має форму рівнобічної трапеції з верхньою основою a=4 м, з нижньою - b=3 м, висотою H =2,5 м, який перекривається щитом такої ж форми. Знайти силу гідростатичного тиску на щит і точку її прикладення.

<u>Розв′язання.</u> Точка O - центр ваги трапеції, для якої відстань $H_{\mathrm{O}} = \frac{H}{3}\left(1 + \frac{b}{a+b}\right) = \frac{2{,}5}{3} \cdot \left(1 + \frac{3}{3+4}\right)$=1,19 м. Момент інерції відносно горизонтальної осі, яка проходить через точку O (головний момент інерції) $I_{\mathrm{O}} = \frac{H^3\left(a^2 + 4ab + b^2\right)}{36(a+b)}$ = =$\frac{2{,}5^3\left(4^2 + 4 \cdot 3 \cdot 4 + 3^2\right)}{36(4+3)}$=4,53 м^4. Площа поперечного перерізу (трапеції) $\omega = \frac{(a+b)}{2} H = \frac{4+3}{2} \cdot 2{,}5$=8,75 м^2. Сила гідростатичного тиску на поверхню щита $F = \rho g H_{\mathrm{O}} \omega = \rho g H_{\mathrm{O}} \cdot \frac{a+b}{2} H$ = =$10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}19 \cdot \frac{4+3}{2} \cdot 2{,}5$=102,15 кН. Сила прикладена у центрі тиску – точці C_{T}, координата якої через вертикальне розташування щита визначається за формулою: $H_{\mathrm{T}} = H_{\mathrm{O}} + \frac{I_{\mathrm{O}}}{\omega H_{\mathrm{O}}} = 1{,}19 + \frac{4{,}53}{8{,}75 \cdot 1{,}19}$= 1,625 м.

Відповідь. Сила гідростатичного тиску на щит F =102,15 кН і точка її прикладення $H_{\text{Т}}$ =1,625 м.

ЗАДАЧА № 7. Який вантаж F_2 можна підняти за допомогою гідравлічного домкрата (рисунок 2.3), якщо до рукоятки прикладена сила $F_{\text{О}}$ =196 Н, співвідношення діаметрів d_2 / d_1 =10. Розміри рукоятки такі, що $\frac{a}{b} = \frac{1}{9}$.

Розв'язання. Сила тиску F_1 на малий поршень, згідно із законами теоретичної механіки, визначається зі співвідношення $\frac{F_1}{F_{\text{О}}} = \frac{a+b}{a}$ або $F_1 = F_{\text{О}} \cdot \frac{a+b}{a} = F_{\text{О}} \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) = 196 \cdot (1+9)$= 1960 Н. Манометричний тиск від цієї сили $P_{\text{М}} = \frac{F_1}{\pi d_1^2 / 4}$. Сила тиску на великий поршень $F_2 = P_{\text{М}} \cdot \frac{\pi d_2^2}{4}$, або з урахуванням попереднього виразу, $F_2 = F_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 1960 \cdot 10^2$ = 19600 Н = 196 кН.

Якщо враховувати коефіцієнт корисної дії η, то, звичайно, дійсна сила (або вантаж) визначається $F_{2\partial} = \eta \cdot F_2$.

Відповідь. За допомогою гідравлічного домкрата можна підняти вантаж F_2 = 196 кН.

ЛЕКЦІЯ № 3. СИЛА ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ НА КРИВОЛІНІЙНІ ПОВЕРХНІ. ЗАКОН АРХІМЕДА

I. СИЛА ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ НА КРИВОЛІНІЙНІ ПОВЕРХНІ

Сила тиску рідини на криволінійну поверхню становить рівнодійну всіх елементарних сил гідростатичного тиску на задану криволінійну стінку. Визначення цієї сили ускладнюється тим, що треба знаходити суму сил, що мають різний напрям. На практиці з криволінійних поверхонь різного виду найчастіше використовують циліндричні.

Розглянемо криволінійну поверхню AB циліндричної форми (рисунок 3.1), ширина якої в напрямі, перпендикулярному до площини рисунка, дорівнює b.

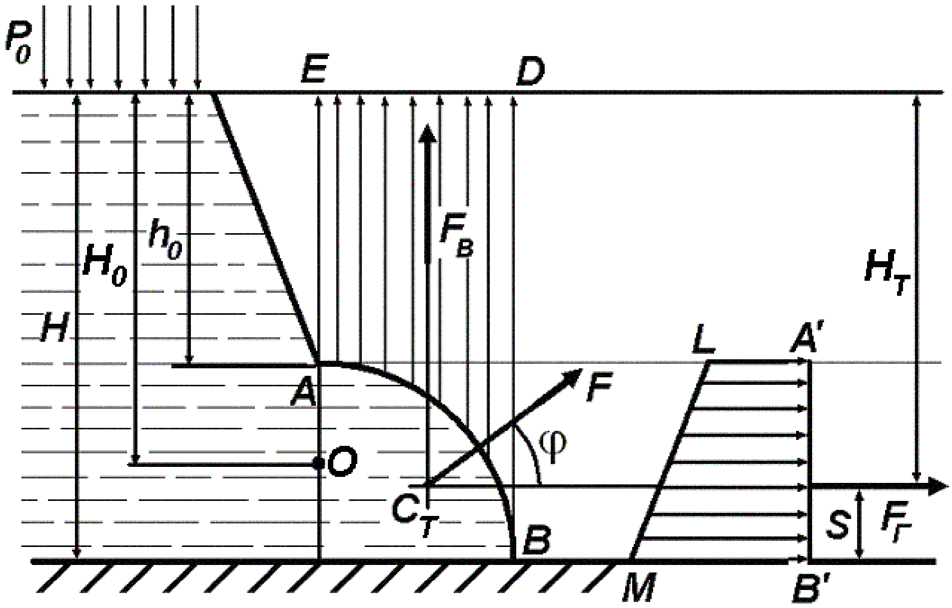


Рисунок 3.1.

У гідростатиці силу тиску розкладають на горизонтальну F_{Γ} і вертикальну $F_{\text{В}}$ проекції на відповідні координатні вісі.

Горизонтальна складова дорівнює силі тиску на вертикальну проекцію $A'B'$ криволінійної поверхні AB (віднявши силу атмосферного тиску $P_{\text{А}}$, що діє з протилежного боку цієї поверхні усередину

$$F_{\Gamma} = \left(P_{\text{О}} - P_{\text{А}} + \rho g H_{\text{О}}\right)\omega_{\text{В}}, \tag{3.1}$$

де $P_О$ - зовнішній тиск на вільну поверхню рідини, $H_О$- глибина занурення центра ваги вертикальної проекції криволінійної поверхні; для проекцій у вигляді прямокутника, кола, еліпса (тобто геометричних фігур, які мають, принаймні, дві перпендикулярні осі симетрії) центр ваги розташований на середині проекції, тому

$$H_О = h_О + \frac{H - h_О}{2} = \frac{H + h_О}{2}, \qquad (3.2)$$

$\omega_В$ - площа вертикальної проекції криволінійної поверхні

$$\omega_В = (H - h_О)b. \qquad (3.3)$$

Якщо зовнішній тиск на вільній поверхні рідини дорівнює атмосферному, тобто $P_О = P_А$, то

$$F_Г = \rho g H_О \omega_В. \qquad (3.4)$$

Горизонтальна складова сили проходить через центр ваги епюри тиску (на рисунку 3.1 – прямокутна трапеція $LA'B'M$). Від вільної поверхні рідини лінія дії горизонтальної складової знаходиться на відстані

$$H_Т = H - S, \qquad (3.5)$$

де S підраховується за формулою (2.5), в якій замість a треба підставити $H - h_О$, тобто

$$H_Т = H - \frac{2h_О + H}{3(h_О + H)}(H - h_О). \qquad (3.6)$$

Вертикальна складова дорівнює сумі ваги рідини в об’ємі «тіла тиску» і добутку зовнішнього тиску (на поверхню рідини) на площу горизонтальної проекції $\omega_Г$ криволінійної поверхні.

«Тіло тиску» розташовано між вертикальними площинами, які проходять через крайні утворюючі циліндричної поверхні (AE - крайня ліва, BD - крайня права), самою циліндричною поверхнею AB і вільною поверхнею рідини ED, або її продовженням. На рисунку 3.1 фігура $ABDE$ є вертикальним перерізом «тіла тиску», об’єм якого позначаємо через W, тоді

$$F_{\text{В}} = \rho g W + (P_{\text{О}} - P_{\text{А}})\omega_{\text{Г}}. \quad (3.7)$$

Якщо $P_{\text{О}} = P_{\text{А}}$, то $F_{\text{В}} = \rho g W$.

Вертикальна складова проходить через центр ваги «тіла тиску». Напрям дії сили $F_{\text{В}}$ (вгору чи вниз) визначається взаємним розташуванням рідини та поверхні. Якщо рідина діє знизу на криволінійну поверхню, тобто розташована ***під*** нею (як на рисунку 3.1), то вертикальна складова сили тиску спрямована вертикально вгору. Якщо рідина діє зверху на криволінійну поверхню, тобто розташована ***над*** нею, то вертикальна складова сили тиску спрямована вертикально вниз.

Сама сила тиску F визначається як рівнодійна горизонтальної і вертикальної складової. Її модуль

$$F = \sqrt{F_{\text{Г}}^2 + F_{\text{В}}^2}. \quad (3.8)$$

Напрям дії сили F визначається кутом φ її нахилу до горизонту

$$tg\varphi = \frac{F_{\text{В}}}{F_{\text{Г}}}, \quad \varphi = arctg\frac{F_{\text{В}}}{F_{\text{Г}}}. \quad (3.9)$$

Вектор сили тиску повинен пройти через точку перетину її складових $F_{\text{Г}}$ і $F_{\text{В}}$, на рисунку 3.1 це точка $C_{\text{Т}}$. Точка перетину вектора сили $\vec{F}$ з криволінійною поверхнею AB і буде шуканою точкою центру тиску рідини на криволінійну поверхню AB.

В тому випадку, коли криволінійна поверхня є частиною циліндра, всі елементарні сили тиску спрямовані за нормаллю до поверхні тиску, а для цих поверхонь нормалі збігаються з радіусами. Отже, в будь-якій точці цієї поверхні елементарна сила тиску має проходити через центр окружності, що утворює циліндр. Очевидно, що й рівнодійна цих сил теж має пройти через цю точку.

II. ЗАКОН АРХІМЕДА, ПЛАВАННЯ ТІЛ, ОСТІЙНІСТЬ ТІЛ, ЯКІ ПЛАВАЮТЬ НА ПОВЕРХНІ РІДИНИ

Тверде тіло, об'єм якого у відомих границях не залежить від тиску, буде плавати на поверхні рідини або спуститься на дно. Якщо вага тіла точно дорівнює вазі витисненої тілом рідини, то воно перебуває на тій глибині, де його розташують (завислий стан).

На тіло, яке занурене повністю або частково в рідину (чи газ) діє виштовхувальна (архімедова) сила. Ця ***сила***, яку позначимо $F_\text{А}$, згідно з законом Архімеда ***дорівнює вазі рідини (чи газу)***, ***витисненої тілом***, вона спрямована вертикально вгору та прикладена до центра ваги витисненої рідини. Таким чином

$$F_\text{А} = \rho_\text{Р} g W , \qquad (3.10)$$

де W - об’єм зануреної в рідину частини тіла. Формула (3.10) є математичним записом закону Архімеда.

На законі Архімеда заснована теорія плавання тіл. Усяке занурене в рідину тіло у стані спокою знаходиться під дією двох сил: сили ваги тіла G і виштовхувальної сили $F_\text{А}$. Ці сили діють уздовж однієї вертикальної прямої.

Зіставляючи вагу тіла G в повітрі та виштовхувальну силу $F_\text{А}$, виділяють три випадки:

- якщо $G > F_\text{А}$, тіло тоне;
- якщо $G = F_\text{А}$, тіло перебуває у завислому стані;
- якщо $G < F_\text{А}$, тіло буде випливати доти, доки вага G не зрівняється з силою $F_\text{А}$.

Оскільки на тіло діє виштовхувальна сила, вага його в рідині $G_\text{Р}$ буде меншою, ніж у повітрі G:

$$G_\text{Р} = G\left(1 - \frac{\rho_\text{Р}}{\rho_\text{Т}}\right), \qquad (3.11)$$

де $\rho_\text{Р}$ і $\rho_\text{Т}$ - відповідно густина рідини та тіла.

Для однорідного тіла з питомою вагою $\gamma_\text{Т}$ і об’ємом $W_\text{Т}$, яке плаває на поверхні рідини з питомою вагою $\gamma_\text{Р}$, маємо таку умову його рівноваги ($F_\text{А} = G$, де $F_\text{А} = \gamma_\text{Р} W'_\text{Т}$, $G = \gamma_\text{Т} W_\text{Т}$):

$$\gamma_\text{Р} W'_\text{Т} = \gamma_\text{Т} W_\text{Т}, \text{ або } \frac{W'_\text{Т}}{W_\text{Т}} = \frac{\gamma_\text{Т}}{\gamma_\text{Р}}, \qquad (3.12)$$

де $W'_{\text{т}}$ - об'єм зануреної частини тіла (витисненої рідини). Останнє співвідношення є початковим для визначення глибини занурення (осадки) однорідного плаваючого тіла. Властивість плаваючого тіла (судна) відновлювати порушену при крені рівновагу характеризується в теорії плавання тіл терміном «остійність».

Розглянемо плаваюче тіло – судно з віссю симетрії під час плавання у нормальному стані в вертикальному положенні (рисунок 3.2).

Центр ваги судна позначимо точкою C. Центр ваги D витисненого об'єму води має назву центра водотонажу, або центру тиску. Лінія, яка проходить через точки C і D у положенні рівноваги перпендикулярно до вільної поверхні води називається віссю плавання. В положенні рівноваги вісь плавання вертикальна, при крені вона нахилена до вертикалі під кутом φ. Ватерлінія – лінія дотику поверхні води з корпусом плаваючого судна. Вантажна ватерлінія збігається із спокійною поверхнею при навантаженні судна і відповідає найбільш можливій глибині занурення судна в експлуатації. Ватерлінія огинає площу площини плавання.

Остійність вважається одною з основних мореплавних якостей судна. Розглядають остійність поперечну та поздовжню (при крені судна у поперечній або поздовжній площині), а за характером дії зовнішніх сил – статичну та динамічну. Кількісною мірою остійності є метацентрична висота (метацентричний радіус).

Метацентр – центр кривизни кривої лінії, по якій переміщується центр ваги зануреної частини плаваючого тіла, якщо його вивести зі стану рівноваги. У симетричному тілі (рисунок 3.2) метацентр – точка M - збігається з точкою перетину напряму виштовхувальної сили з віссю симетрії. Рівновага плаваючого тіла стійка, якщо його центр ваги – точка C - розташована нижче найнижчого положення точки M. Відстань між центром ваги тіла – точкою C - і метацентром M позначається через $h_{\text{М}}$ і називається «метацентрична висота», або «радіус».

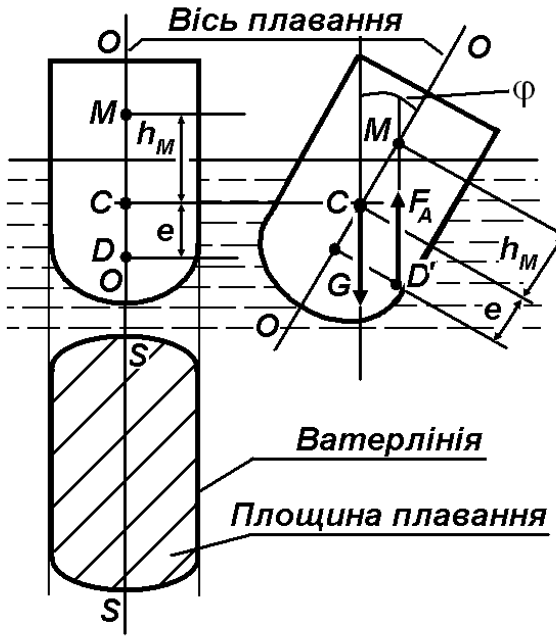


Рисунок 3.2.

Метацентрична висота визначається за формулою:

$$h_{\text{М}} = \frac{I_{\text{О}}}{W} - e \qquad (3.13)$$

$I_{\text{О}}$ - момент інерції площі площини плавання відносно поздовжньої осі $S-S$, W - водотоннаж (об′єм зануреної частини судна), e - відстань між центром ваги та центром тиску. Якщо $h_{\text{М}} > 0$, то судно остійне, $h_{\text{М}} = 0$ - завислий стан, $h_{\text{М}} < 0$ - судно неостійне.

III. ВАНТАЖОПІДЙОМНІСТЬ І ОСТІЙНІСТЬ ПОНТОННОГО ПОРОМА

Понтонні пороми при повені застосовуються як рятувальні плаваючі засоби для евакуації потерпілих і перевезення різних вантажів і устаткування. У зв'язку із цим при конструюванні й будівлі таких поромів необхідно розраховувати вантажопідйомність і остійність - відновлення рівноважного стану при крені. Крім цього, пором повинен мати відносно невелику осадку, щоб плавати на мілководді. Для цього як несучий елемент конструкції використовуються тонкостінні циліндричні оболонки труби із закритими днищами.

Перевага понтонних поромів і наплавних мостів такого типу полягає в тому, що вони мають значно більш високий коефіцієнт вантажопідйомності (відношення ваги вантажу до ваги самого порома) у порівнянні з поромами інших конструкцій.

Припустимо, що пором складається з однакових труб, які з однією й тією ж самою осадкою h плавають у воді під дією сил G – власної ваги й ваги $G_{\text{П}}$ – палубного устаткування, що доводиться на одну трубу (рисунок 3.3):

$$G = \pi\rho g\left(\left(2R\delta - \delta^2\right)L + 2\pi R^2\delta\right), \qquad (3.14)$$

де R - радіус труби, L - її довжина, δ - товщина стінки, ρ - густина матеріалу труби.

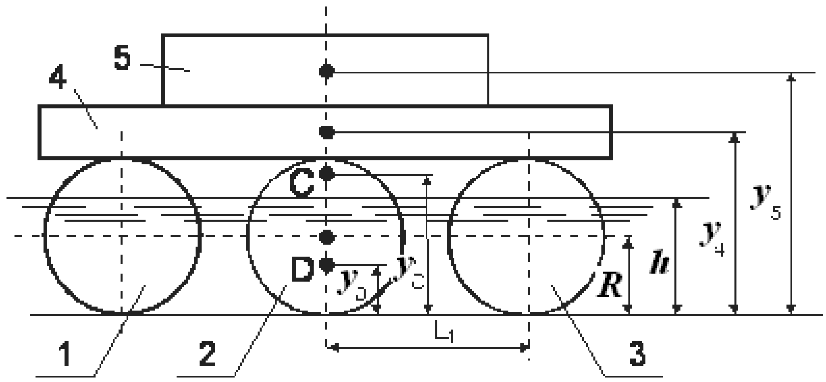


Рисунок 3.3. Розрахункова схема остійності понтонного порома.
1, 2, 3 -циліндричні труби, 4 – палуба, 5 – вантаж

Ввиштовхувальна сила

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{В}} g \frac{1}{2} R^2 L(a - sin\alpha), \tag{3.15}$$

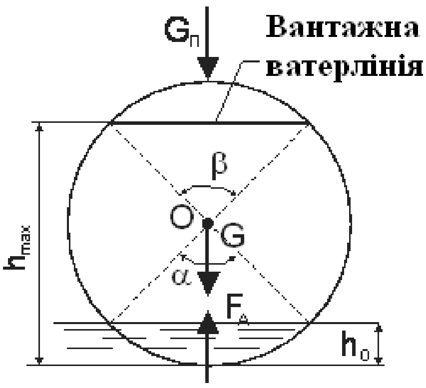


Рисунок 3.4.

де $\rho_{\text{В}}$ - густина води, α - центральний кут, що відповідає затопленому сегменту кола при осадці h.

На рисунку 3.4 наведена розрахункова схема визначення осадки порома від власної ваги.

Умова рівноваги плаваючої труби $F_{\text{А}} = G + G_{\text{П}}$ приводить до рівняння відносно кута α:

$$a = \alpha - sin\alpha, \tag{3.16}$$

де $\alpha = \dfrac{2\pi\rho g\delta\left((2R - \delta)L + 2R^2\right) + 2G_{\text{П}}}{\rho_{\text{В}} g R^2 L}$.

Рівняння (3.16) є трансцендентним. Визначити його єдиний додатний корінь α_1 можна графічно або чисельними методами, наприклад, методом Ньютона або ітерацій у принципі з довільним ступенем точності. Після обчислення α_1 знаходимо величину $h_{\text{О}}$ осадки порома під дією власної ваги:

$$h_{\text{O}} = R\left(1 - cos\frac{\alpha_1}{\alpha}\right), \qquad (3.17)$$

Гранично припустима осадка h_{max}, що визначає вантажну ватерлінію (рисунок 3.4) (зазвичай величина відома), дозволяє знайти P – вантажопідйомність порома, що дорівнює силі, яка виштовхує, при зануренні порома на величину $h_{max} - h_{\text{O}}$:

$$P = n\rho_{\text{B}} gL\left[\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2(\alpha - sin\alpha) - \frac{1}{2}R^2(\beta - sin\beta)\right] = \qquad (3.18)$$
$$= \frac{n}{2}\rho_{\text{B}} gLR^2(2\pi - a - \beta + sin\beta),$$

де n – кількість труб, $\beta = 2\,arccos\frac{h_{max} - h_{\text{O}}}{R}$.

Найважливішою характеристикою морехідних якостей будь-якого надводного плаваючого засобу є остійність. Випадок остійності рівноваги порома характеризується дотриманням рівності

$$\rho_{\text{M}} = \frac{J}{W} > e, \qquad (3.19)$$

де ρ_{M} - метацентрична висота або радіус, e – ексцентриситет, відстань між центром ваги (точка C) порома й центром тиску (точка D), у якій прикладена сила Архімеда, що виштовхує, (рисунок 3.3). У виразі (3.19) J – момент інерції всієї площі площини плавання порома відносно його поздовжньої осі; W - звичайна водотоннажність (об'єм затоплених частин труб).

Ексцентриситет $e = y_C + y_D$ (рисунок 3.3), вертикальні координати точок C і D визначаються відомими методами теоретичної механіки, за відомими вертикальними координатами центрів ваги вантажу y_5, палуби y_4, R – труб і y_D - центра тиску, які відлічуються від горизонтальної осі OX, що знаходиться від вільної поверхні води на глибині осадки h порома.

Під час перевезення вантажів зі зміщеним положенням центра ваги в горизонтальному напрямку для вирівнювання крену пропонується переміщати в тому ж напрямку центральну трубу за допомогою спеціального механізму. Для визначення величини зсуву центра ваги вантажу, при якому ще можна усунути крен, зробимо наступне. Відповідно до розмірів, зазначених на рисунку 3.3, трубу 2 можна перемістити впритул до труби 3 на відстань $L_1 - 2R$. При цьому центр тиску (точка D) також переміститься праворуч на величину $x_D = \left(L_1 - 2R\right)/3$. Припустимо, що центр ваги вантажу вагою G_{Γ} зміщений вправо на величину b. У такому випадку центр ваги порома з вантажем (точка C) переміститься на величину $x_C = \dfrac{G_{\Gamma} b}{G_{\Gamma} + G_{\Pi} + 3G}$.

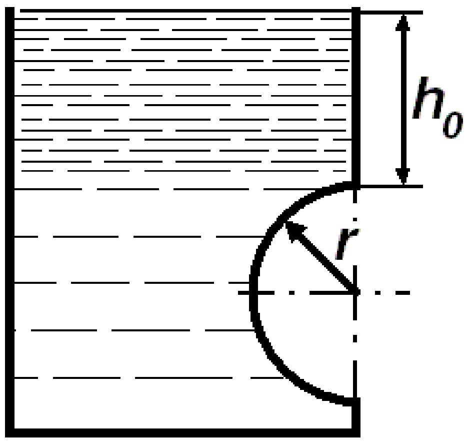
Крен праворуч буде ліквідований тільки в тому випадку, якщо точки D і C будуть лежати на одній і тій же вертикальній прямій, тоді перекидаючий момент, викликаний зсувом центра ваги вантажу, урівноважиться моментом, що відновлює, сили Архімеда. Порівнюючи x_D і x_C, визначаємо величину b

$$b = \frac{\left(G_{\Gamma} + G_{\Pi} + 3G\right)\left(L_1 - 2R\right)}{3G_{\Gamma}}$$

найбільшого зсуву центра ваги вантажу, який можна перевозити на понтонному поромі даної конструкції.

Відзначимо так само, що в новому рівноважному положенні розрахунок остійності нічим принципово не відрізняється від розглянутого вище.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ



ЗАДАЧА № 1. Знайти вертикальну та горизонтальну проекції сили тиску води на засувку у вигляді половини сфери. Радіус засувки r = 4 м, відстань від поверхні до засувки $h_{о}$ = 2 м, поверхневий тиск $P_{о}$ = 0.

Розв'язання. Горизонтальна складова сили тиску на будь-яку поверхню дорівнює добутку площі проекції поверхні $\omega_{В}$ на вертикальну площину на тиск в центрі ваги цієї проекції $P_{\text{В}}$. Тому $F_{\Gamma} = \omega_{\text{В}} P_{\text{В}}$, для сфери $\omega_{\text{В}} = \pi r^2$, а за умов задачі $h_{\text{O}} + r$ - положення центру ваги проекції сфери (проекція – звичайне коло радіусом r). Тому остаточно

$$F_{\Gamma} = \omega_{\text{В}} P_{\text{В}} = \pi r^2 \cdot \rho g \left(h_{\text{O}} + r\right) = 3{,}1415 \cdot 0{,}4^2 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(2 + 0{,}4\right)$$

= 11835 Н= 11,835 кН.

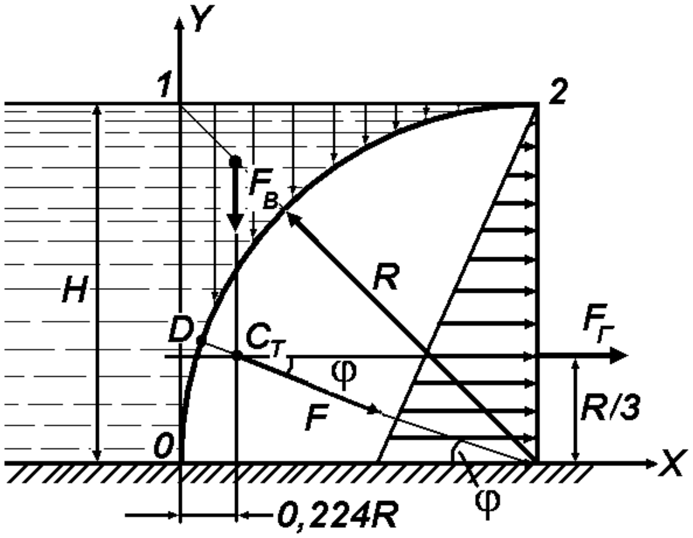
Вертикальна складова сили тиску на будь-яку поверхню дорівнює вазі рідини в об'ємі тіла тиску $F_{\text{В}} = \rho g W$, де $W = \frac{2}{3}\pi r^3$ - об'єм півсфери. На нижню частину сфери діє сила тиску, спрямована догори, на верхню частину – спрямована донизу. В першому випадку об'єм тіла занурення більший, ніж у другому, саме на об'єм півсфери, і рівнодіюча обох сил спрямована догори. Остаточно

$F_{\text{В}} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3{,}1415 \cdot 0{,}4^3$= 1314 Н= 1,134 кН. Сила тиску за формулою (3.8) $F = \sqrt{F_{\Gamma}^2 + F_{\text{В}}^2} = \sqrt{11{,}835^2 + 1{,}134^2}$ = 11,889 кН.

Відповідь. Горизонтальна складова сили тиску F_{Γ}= 11,835 кН, вертикальна складова сили тиску $F_{\text{В}}$= 1,134 кН.

ЗАДАЧА № 2. Визначити величину, напрям і точку прикладення сили тиску води на 1 м ширини затвора, який становить чверть круглого циліндра радіуса R= 1,5 м, густина води ρ= 1000 кг/м^3.

Розв'язання. 1. Горизонтальна складова сили тиску дорівнює силі тиску на вертикальну проекцію чверті круглого циліндра. Для її визначення скористуємось формулою (3.4), в якій замість H_{O} треба підставити $\frac{R}{2}$, а замість $\omega_{\text{В}}$ взяти Rb, де b=1м. Тоді маємо $F_{\Gamma} = \rho g \frac{R}{2} R b = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{1{,}5}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 1$= 11·10^3 Н. Сила тиску проходить через центр ваги епюри гідростатичного тиску – прямокутного трикутника, для якого вказаний центр C_{T} розташований на відстані $2R/3$ від вільної поверхні, або $R/3$ від осі OX. Останнє значення дорівнює 0,5 м.



2. Вертикальна складова $F_{\text{В}}$ дорівнює вазі рідини в об’ємі «тіла тиску» (3.7). Позначимо площину фігури 0-1-2 через ω_{Φ}, яка є різницею між площею квадрата зі стороною R і площею чверті кола з радіусом R, тоді:

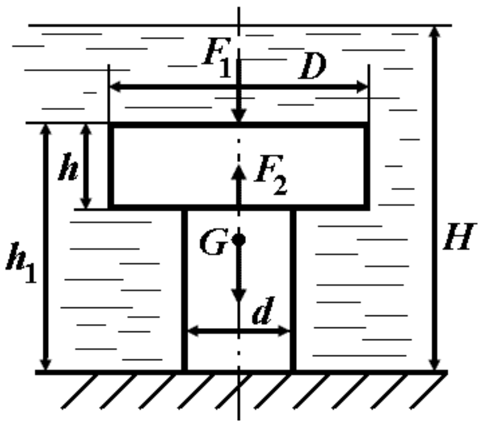
$$F_{\text{В}} = \rho g \omega_{\Phi} b = \rho g b \left[R^2 - \frac{\pi R^2}{4} \right] \approx 0{,}215 \rho g b R^2 = 0{,}215 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot 1{,}5^2$$

= $4{,}745 \cdot 10^3$ Н. Ця складова спрямована вертикально вниз і проходить через центр ваги фігури 0-1-2 на відстані $0{,}224R$ = 0,336 м від осі OY.

Сила тиску F проходить через точку C перетину ліній дії горизонтальної і вертикальної складової. Сама сила тиску F визначається як рівнодійна горизонтальної і вертикальної складової (3.8) $F = \sqrt{F_{\text{Г}}^2 + F_{\text{В}}^2}$ = $\sqrt{\left(11 \cdot 10^3\right)^2 + \left(4{,}745 \cdot 10^3\right)^2}$ = $12 \cdot 10^3$ Н. Напрям дії сили F визначається кутом φ (3.9) її нахилу до горизонту $\varphi = arctg \dfrac{F_{\text{В}}}{F_{\text{Г}}} = arctg \dfrac{4{,}745 \cdot 10^3}{11 \cdot 10^3}$ $=$23°30′. Точка D перетину лінії дії сили F з циліндричною поверхнею є точкою прикладення сили гідростатичного тиску до самої поверхні. Сама сила спрямована за нормаллю до поверхні.

<u>Відповідь.</u> Сила тиску F = $12 \cdot 10^3$ Н.

ЗАДАЧА № 3. На дні водоймища встановлена бетонна конструкція. З якою силою конструкція тисне на дно водоймища, якщо густина бетону ρ, води ρ_B.

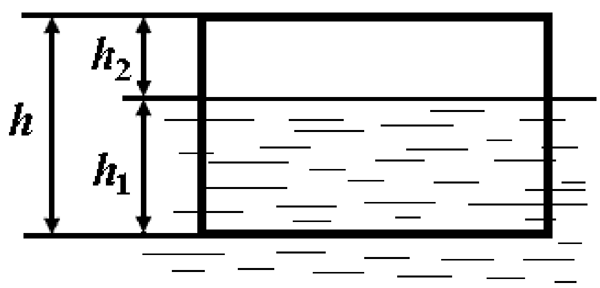


Розв’язання. Сила тиску F конструкції складається з сили F_1 - тиску води на верхню поверхню (коло діаметра D) конструкції, спрямованої вниз; сили F_2 - тиску води на нижню поверхню (кільце із зовнішнім діаметром D і внутрішнім діаметром d), спрямовану вгору; сили G - ваги конструкції, спрямованої вниз.

Загальна сила $F = F_1 - F_2 + G$, кожна з яких $F_1 = \rho_B g(H - h_1)\dfrac{\pi D^2}{4}$, $F_2 = \rho_B g(H - h_1 + h)\dfrac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$, $G = \rho g\left[\dfrac{\pi D^2}{4}h + \dfrac{\pi d^2}{4}(h_1 - h)\right]$. Сума всіх сил остаточно дає

$$F = g\frac{\pi}{4}\left[h(D^2 - d^2)(\rho - \rho_B) + h_1 d^2(\rho - \rho_B) + \rho_B H D^2\right],$$

що є відповіддю при визначенні сили тиску F.

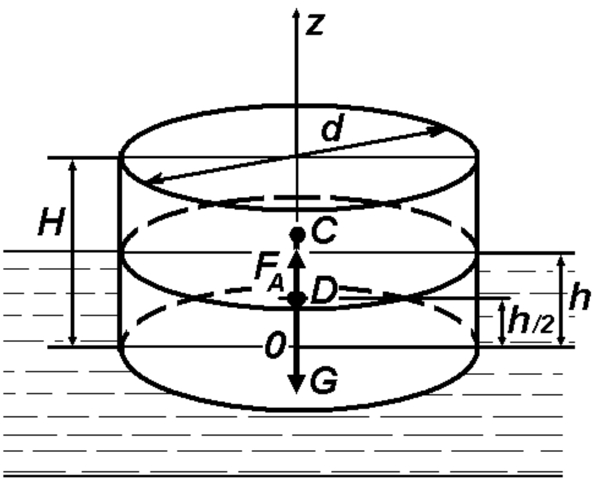


ЗАДАЧА № 4. Крижина заввишки h=0,4 м і з площею поперечного перерізу ω=1 м^2 плаває у воді. Знайти висоту h_2 надводної частини і масу m розташованого на крижині вантажу, при якому вона ще знаходиться на плаву.

Розв’язання. Густина криги ρ_K =0,917 г/см^3, води ρ_B=1000 кг/м^3. Сила ваги $G = m_K g = \rho_K W g = \rho_K \omega h g$. Сила, що виштовхує,

$F_A = \rho_B W_1 g = \rho_B \omega h_1 g$. З рівняння $G = F_A$ знаходимо $h_1 = \frac{\rho_K}{\rho_B} h$. Тоді $h_2 = h - h_1 = h\left(1 - \frac{\rho_K}{\rho_B}\right) = 0{,}4\left(1 - \frac{917}{1000}\right)$=0,0332 м. Масу вантажу, розташованого на кризі, визначимо з рівняння $(m + m_K)g = \rho_B W g$, звідки $m = \omega h(\rho_B - \rho_K)$=1·0,4(1000-917)=33,2 кг.

<u>ЗАДАЧА № 5.</u> Дерев'яний (густина $\rho_{дер}$ = 800 кг/м³) циліндр діаметром d= 50 см і висотою H= 20 см плаває вертикально у воді; густина ρ_B= 1000 кг/м³. Необхідно: 1) перевірити остійність циліндра; 2) знайти висоту H_1, при якій його остійність втрачається.



<u>Розв'язання.</u> 1) C - центр ваги G циліндра, тому координата точки C для цієї об'ємної фігури $z_C = \frac{H}{2}$ = 0,1 м (для довільної фігури, звичайно, цю координату необхідно визначати з урахуванням її форми та геометричних розмірів); h - глибина зануреної у воду частини циліндра, яку визначаємо за умов плавання циліндра - рівняння $G = F_A$, або $\rho_{дер}\, g \frac{\pi d^2}{4} H = \rho_B g \frac{\pi d^2}{4} h$, звідки $h = \frac{\rho_{дер}}{\rho} H = \frac{800}{1000} H = 0{,}8H$= 0,16 м. Позначимо точкою D центр водотонажу (центр ваги витисненого об'єму води) з координатою $z_D = \frac{h}{2}$= 0,08 м. Тоді відстань між точками C і D дорівнює $e = z_C - z_D = 0{,}1 - 0{,}08$= 0,02 м. За формулою (3.13) визначаємо метацентричну висоту

$$h_{\text{М}} = \frac{I_{\text{О}}}{W} - e = \left(\frac{\pi d^4}{64} \bigg/ \frac{\pi d^2 h}{4} \right) - e = \frac{d^2}{16h} - e = \frac{0{,}5^2}{16 \cdot 0{,}16} - 0{,}02 =$$

0,0776 м, або ≈ 7,8 см. Оскільки $h_{\text{М}} > 0$, циліндр остійний.

2) Знаходимо висоту H_1, при якій циліндр втрачає остійність, тобто має виконуватися умова $h_{\text{М}} = 0$. Тому за умов:

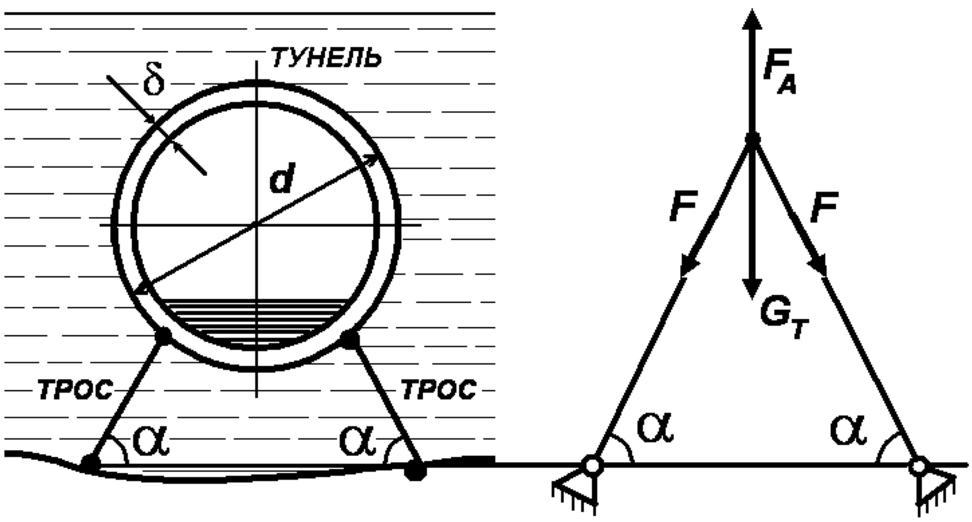
$h = 0{,}8H_1$, $\quad z_D = \dfrac{h}{2} = 0{,}4H_1$, $\quad z_C = \dfrac{H_1}{2} = 0{,}5H_1$ запишемо

$\dfrac{d^2}{16 \cdot 0{,}8H_1} = 0{,}5H_1 - 0{,}4H_1$, звідки остаточно

$H_1 = \dfrac{d}{\sqrt{0{,}1 \cdot 16 \cdot 0{,}8}} = \dfrac{0{,}5}{1{,}13}$ = 0,443 м.

Відповідь. За умов задачі циліндр є остійним. Втрата остійності відбудеться при висоті циліндра H_1 = 0,443 м.

ЗАДАЧА № 6.



Плавучий залізобетонний тунель із зовнішнім діаметром d = 10 м і товщиною стінок δ = 0,4 м утримується в зануреному стані у воді тросами, розташованими попарно через кожні 25 м довжини тунелю. Визначити силу натягу F троса, якщо вага погонного метра додаткового навантаження (так зване розподілене навантаження) по довжині складає q = 9,81 кН/м, густина залізобетону $\rho_{зб}$ = 2450 кг/м^3, кут α = 60°.

Розв’язання. Силу натягу троса знайдемо із умови рівноваги однієї секції тунелю довжиною $l=$ 25 м під дією сили ваги тунелю $G_{\text{Т}}$, сили Архімеда $F_{\text{А}}$ і сили натягу троса F

$$F_{\text{А}} - G_{\text{Т}} - 2F \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0, \qquad \text{де} \qquad F_{\text{А}} = \rho_{\text{В}} g \frac{\pi d^2}{4} l,$$

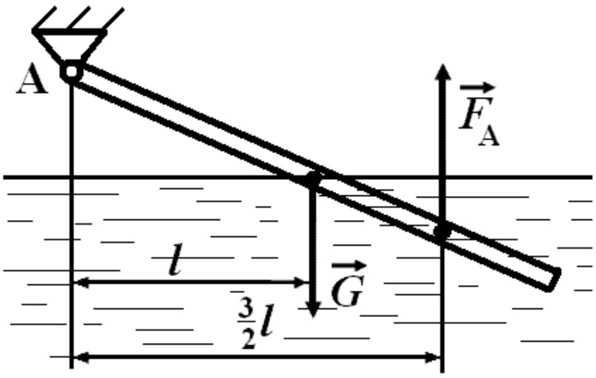
$G_{\text{Т}} = \rho_{зб} g l \pi \left[R^2 - (R-\delta)^2\right] + ql$, $\quad R = \dfrac{d}{2}$. Тому з урахуванням формул приведення для тригонометричних функцій $cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = sin\alpha$ запишемо:

$$F = \frac{\rho_{\text{В}} g \dfrac{\pi d^2}{4} l - l\left[\pi\left(2R\delta - \delta^2\right)\rho_{зб}\, g + q\right]}{2\, sin\alpha} =$$

$$= \frac{10^3 \cdot 9{,}81 \cdot \dfrac{3{,}1415 \cdot 10^2}{4} - 25\left[3{,}1415 \cdot \left(2 \cdot 5 \cdot 0{,}4 - 0{,}4^2\right) \cdot 2450 \cdot 9{,}81 + 9810\right]}{2 \cdot 0{,}866} =$$

$=6{,}35 \cdot 10^6$ Н= 6,35 МН.

Відповідь. Сила натягу троса F = 6,35 МН.



ЗАДАЧА № 7. Тонка однорідна палиця шарнірно закріплена за верхній кінець, а її нижня частина занурена в воду. Стан рівноваги досягається, коли палиця нахилена до поверхні води й у воді знаходиться половина її довжини.

Знайти густину ρ матеріалу палиці, якщо густина води $\rho_{\text{В}}$.

Розв’язання. Оскільки палиця тонка, то можна вважати, що сила $F_{\text{А}}$, яка її виштовхує, прикладена в середині частини палиці, що знаходиться у воді. Через рівновагу палиці моменти сил $G = mg$ і $F_{\text{А}}$ відносно точки А рівні, тобто $mgl = F_{\text{А}} \dfrac{3}{2} l$, звідки

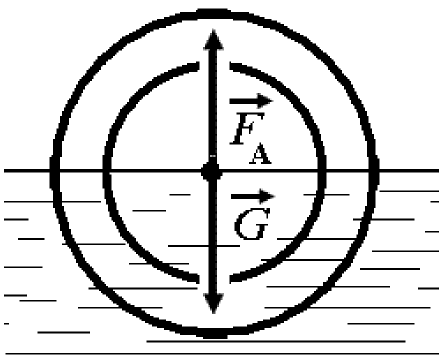
$F_{\text{А}} = \frac{2}{3}mg$. Маса палиці $m = \rho W$, де W - її об’єм. За умов $F_{\text{А}} = \frac{1}{2}\rho_{\text{В}}Wg$, тоді після підстановки $\frac{1}{2}\rho_{\text{В}}Wg = \frac{2}{3}\rho W$ і остаточно $\rho = \frac{3}{4}\rho_{\text{В}}$.

<u>Відповідь.</u> Густина матеріалу палиці $\rho = \frac{3}{4}\rho_{\text{В}}$

<u>ЗАДАЧА № 8.</u> Металевий (залізний) брусок важить у воді G=1,67 Н. Знайти його об’єм W, якщо $\rho_{\text{М}}$=7,8 г/см^3, $\rho_{\text{В}}$=1 г/см^3.

<u>Розв’язання.</u> Сила ваги бруска з урахуванням його знаходження у воді $G = mg - \rho_{\text{В}}Wg = Wg(\rho_{\text{М}} - \rho_{\text{В}})$, звідки $W = \frac{G}{g(\rho_{\text{М}} - \rho_{\text{В}})} = \frac{1{,}67}{9{,}81(7{,}8-1)10^3}$ = 25$\cdot$10^{-6} м^3=25 см^3.

<u>Відповідь.</u> Об’єм бруска W=25 см^3.



<u>ЗАДАЧА № 9.</u> Порожня чавунна кулька плаває, занурена у воду на половину свого об’єму. Знайти об’єм внутрішньої порожнини кульки, якщо її маса m=5000 г, $\rho_{\text{М}}$=7800 кг/м^3, $\rho_{\text{В}}$=1000 кг/м^3.

<u>Розв’язання.</u> Нехай W - об’єм внутрішньої порожнини, W_1 - об’єм сферичної оболонки, тоді з рівняння $G = F_{\text{А}}$ маємо $mg = \frac{1}{2}\rho_{\text{В}}\left(\frac{m}{\rho_{\text{М}}} + W\right)g$ і $W = m\left(\frac{2}{\rho_{\text{В}}} - \frac{1}{\rho_{\text{М}}}\right) = 5\left(\frac{2}{1000} - \frac{1}{7800}\right)$=9,36$\cdot$10^{-3} м^3=9360 см^3.

<u>Відповідь.</u> Об’єм внутрішньої порожнини кульки W=9360 см^3.

ЛЕКЦІЯ № 4. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ ПОТОКУ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ПОТОКУ ІДЕАЛЬНОЇ ТА РЕАЛЬНОЇ РІДИНИ

I. ГІДРАВЛІЧНІ ЕЛЕМЕНТИ ПОТОКУ РІДИНИ

В технічній механіці рідини та газу ***потоком*** рідини називають сукупність елементарних струминок, які, частіше за все, рухаються з різними швидкостями, внаслідок чого ковзають одна по одній.

Площиною живого перерізу потоку називають поперечний переріз потоку, перпендикулярний до його напряму руху.

Витратою називається кількість рідини, яка протікає через площину живого перерізу за одиницю часу. Витрати вимірюються в одиницях об'єму, в одиницях маси, або вагових одиницях, віднесених до одиниці часу, у зв'язку з чим витрата поділяється на об'ємну Q, масову M і вагову G

$$Q = \frac{W}{t}, [\text{м}^3/\text{с}], \tag{4.1}$$

де W - об'єм рідини, [м^3], t - час, [с];

$$M = \frac{m}{t}, [\text{кг/с}], \tag{4.2}$$

де m - маса рідини, [кг];

$$G = \frac{mg}{t}, [\text{Н/с}], \tag{4.3}$$

де g = 9,81 м/с^2 – прискорення сили ваги, або прискорення вільного падіння.

Змоченим периметром Π називається довжина лінії, по якій живий переріз потоку стикається з твердими стінками, які його обмежують. У водопровідній трубі діаметром d він дорівнює

$$\Pi = \pi d. \tag{4.4}$$

Відношення площі живого перерізу ω до змоченого периметра Π називається гідравлічним радіусом $R_\text{г}$

$$R_\Gamma = \frac{\omega}{\Pi}. \qquad (4.5)$$

Не слід плутати гідравлічний радіус R_Γ, який має зміст для будь-якого потоку, обмеженого стінками, з геометричним радіусом, який існує тільки при течії рідини по круглій трубі. Дійсно, для круглої труби геометричний радіус $R = d/2$, а гідравлічний $R_\Gamma = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4} \neq R$. Середня швидкість V [м/с] визначається об'ємною витратою через одиницю площини живого перерізу

$$V = \frac{Q}{\omega}. \qquad (4.6)$$

II. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ ПОТОКУ (ПЕРШИЙ ЗАКОН ГІДРОДИНАМІКИ)

Розглянемо усталений рух рідини у твердому руслі перемінного перерізу між двома довільно обраними перерізами 1-1 і 2-2, проведеними нормально до середньої лінії потоку.

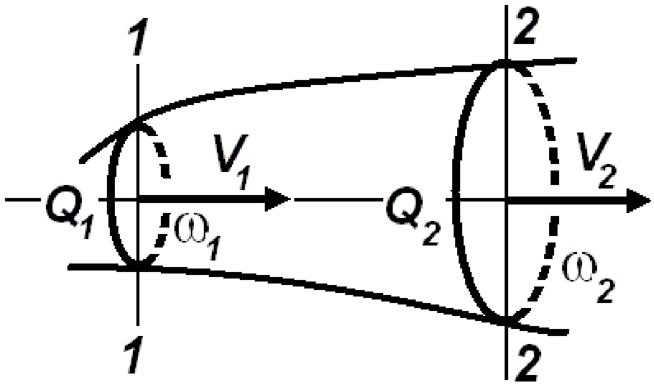


Рисунок 4.1.

На рисунку 4.1 зображена елементарна струминка з відповідними параметрами руху, що дозволяє довести рівняння нерозривності потоку. Через переріз 1-1 за одиницю часу надійде об'єм рідини Q_1, а через переріз 2-2 – відповідно Q_2.

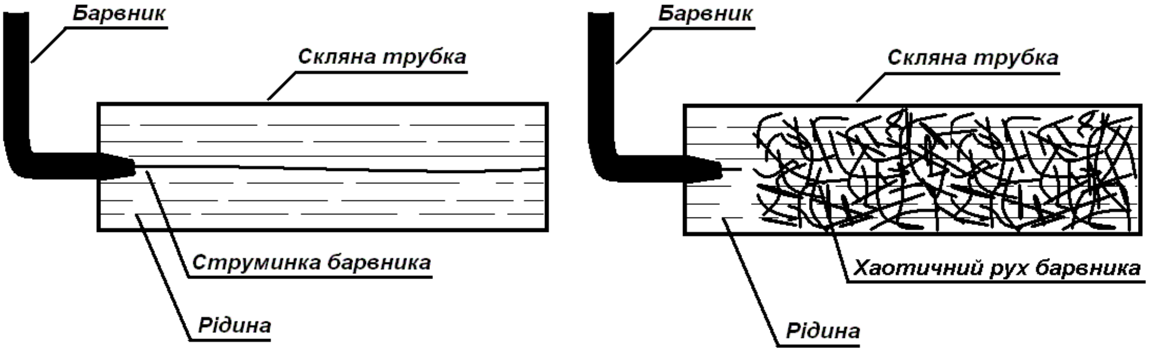
Оскільки рідина нестислива, стінки русла тверді, рух суцільного потоку без розривів, тому $Q_1 = Q_2$. Але $Q_1 = V_1\omega_1$ та $Q_2 = V_2\omega_2$, тому для довільних перерізів отримаємо рівняння

$$V_1\omega_1 = V_2\omega_2 = const, \qquad (4.7)$$

яке має назву ***рівняння нерозривності потоку*** або ***постійності витрати***.

III. ЛАМІНАРНИЙ І ТУРБУЛЕНТНИЙ РЕЖИМИ РУХУ РІДИНИ

Припущення про існування двох принципово різних режимів руху рідини було висловлено Д.І.Менделєєвим і найбільш повно досліджено англійським фізиком О.Рейнольдсом. Він в 1883 р. експериментально встановив, що при швидкості руху рідини у трубі V меншою за деяку критичну $V_{\text{КР}}$ підфарбований струмінь не перемішується з рідиною та чітко видний по всій довжині скляної трубки (рисунок 4.2, а), тому ***ламінарною*** (від лат. **Lamina** – пластинка, стрічка) називається шарувата течія без перемішування часток рідини та без пульсацій швидкості та тиску. При швидкості $V > V_{\text{КР}}$ підфарбований струмінь спочатку набуває хвильової форми, втрачає суцільність. При деякому значенні швидкості струмінь взагалі повністю розривається, окремі частинки барвника розходяться по всьому об’єму скляної трубки та перемішуються з усією масою рідини, рівномірно її підфарбовуючи. Переміщення окремих частинок барвника здійснюється за складними криволінійними траєкторіями, що дає можливість говорити про їхній хаотичний рух (рисунок 4.2, б), тому ***турбулентною*** (від лат. **Turbulentus** – бурхливий, безладний) називається течія, що супроводжується інтенсивним перемішуванням рідини з пульсаціями швидкостей і тиску.



а) б)

Рисунок 4.2.

О.Рейнольдс встановив, що критерієм режиму руху є безрозмірний параметр – число Re (число Рейнольдса)

$$Re = \frac{Vd}{\nu}, \tag{4.8}$$

де V - середня швидкість руху рідини по трубі, d - внутрішній діаметр труби, ν - коефіцієнт кінематичної в'язкості рідини. Також можна стверджувати, що число Рейнольдса характеризує відносну роль сил в'язкості – чим менше число Рейнольдса, тим більшу роль відіграють сили в'язкості в русі рідини, натомість, чим більше число Рейнольдса, тим більший вплив сил інерції в потоку у порівнянні з силами в'язкості.

Експериментально встановлено, що критичне число Re, при якому відбувається зміна режиму руху для круглих труб постійного діаметра, приблизно дорівнює $Re_{КР} \approx 2320$. Достатньо розвинута турбулентна течія в трубах встановлюється лише при $Re \approx 4000$, а при $Re \approx 2320...4000$ має місце перехідна, критична область. Величина критичного числа Рейнольдса залежить від низки обставин: умов входу в трубу, шорсткості стінок труби, відсутності або наявності початкових зворушень в рідині, конвекційних токів тощо. За критичним значенням числа Рейнольдса легко знайти критичну швидкість, тобто швидкість, нижче якої завжди буде мати місце ламінарний рух рідини $V_{КР} = \frac{Re_{КР}\,\nu}{d}$.

В трубопроводах систем опалення, вентиляції, газопостачання, теплопостачання, водопостачання та інших рух, як правило, завжди є турбулентним внаслідок того, що вода, повітря, газ, пара є малов'язкими. Наприклад, в газопроводах мережі побутового споживання числа Рейнольдса зазвичай бувають не нижче 3000, в мережах міста – не нижче 200000, у вентиляційних мережах – не нижче 150000, мережах стисненого повітря – не нижче 400000, в паропроводах центрального опалення – не нижче 30000. Ламінарний рух води та повітря можливий лише при русі в трубах дуже малого діаметра. Більш в'язкі рідини, наприклад, мастила, можуть рухатися ламінарно навіть в трубах значного діаметра.

Досліди показують, що з переходом ламінарного руху в турбулентний змінюється характер залежності сил тертя від швидкості руху та картина розподілу швидкостей по перерізу труби.

У системах протипожежного водопостачання рідина рухається у турбулентному режимі.

Окремої уваги потребує ще один ефект, який в багатьох випадках має істотний вплив на механічні якості рідини під час її руху. Йдеться про кавітацію – місцеве порушення суцільності течії з утворенням парових і газових бульбашок (каверн), що зумовлено місцевим падінням тиску в потоці. Розчинне повітря, що зазвичай присутнє у воді, починає виділятися з елементарних об'ємів води. Явище кавітації абсолютно однакове і для потоку, котрий обтікає нерухоме тіло, і для середовища, в якому рухається тіло. В обох випадках важливі лише відносна швидкість і абсолютний тиск. Співвідношення між тиском і швидкістю, за яких відбувається кавітація, може бути визначено з рівняння Бернуллі (про це в наступному розділі) і представлено у вигляді безрозмірного параметра χ, який називається кавітаційним коефіцієнтом, або числом кавітації:

$$\chi = \frac{2\left(P - P_{\text{Н}}\right)}{\rho V_{\text{О}}^{2}},$$

де P, ρ - відповідно тиск і густина рідини, $V_{\text{О}}$ - її швидкість, $P_{\text{Н}}$ - тиск насиченої пари рідини за даної температури. Умови, сприятливі для кавітації, утворюються, коли тиск P в рідині падає, прямуючи до тиску $P_{\text{Н}}$, а швидкість $V_{\text{О}}$ зростає згідно з рівнянням Бернуллі (коефіцієнт χ при цьому набуває значення в широкому діапазоні, який залежить від властивостей рідини та тіла, що взаємодіють).

За зникнення умов, сприятливих для кавітації (тиск стає вищим за тиск насиченої пари), утворені бульбашки одразу зникають з визволенням значної кількості енергії. Це супроводжується сильними ударами, котрі сприяють руйнуванню поверхонь твердих стінок, які обмежують потік. Вказане руйнування називається кавітаційною ерозією, прояви якої достатньо різні. Це може бути, зокрема, пошкодження і в подальшому повне руйнування поверхонь підводних конструкцій, гребних гвинтів, турбін, насосів і, навіть, вузлів ядерних реакторів. Кавітація може істотно збільшувати гідродинамічний опір, внаслідок чого знижується коефіцієнт корисної дії гідравлічного обладнання. Надмірна кавітація на гребному гвинті може зменшувати його тягу й обмежувати максимальну швидкість судна. Кавітація може також бути причиною зниження продуктивності турбіни або насосу і навіть зриву його роботи.

Як правило, кавітація є небажаною (зокрема, в морській і турбонасосній техніці), але в деяких випадках її викликають навмисно. Прикладом може бути кавітаційний гідромонітор. Велика енергія, що визволяється під час зникнення кавітаційних бульбашок у водному середовищі , використовується для свердління (за рахунок ерозії) гірської породи та для обробки поверхонь.

IV. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ І ДЛЯ ПОТОКУ РЕАЛЬНОЇ РІДИНИ

Рівняння Бернуллі вказує на взаємозв’язок між координатою частинки z, тиском P і швидкістю V в різних перерізах струменя рідини. Воно використовується при розрахунках трубопровідних систем і спочатку було отримано для руху ідеальної рідини. В потоці ідеальної рідини потенційна енергія повністю витрачається на зміну кінетичної енергії потоку та зміну положення елементів рідини в полі сили ваги.

Питома потенційна робота потоку нестисливої рідини, яка віднесена до 1 кг маси рідини на деякій ділянці труби, дорівнює добутку питомого об’єму w рідини на різницю тисків в перерізах 1-1 і 2-2 ділянки трубопроводу (рисунок 4.3)

$$w\left(P_1 - P_2\right). \tag{4.9}$$

Зміна питомої кінетичної енергії потоку на ділянці, що розглядається, дорівнює

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2}, \tag{4.10}$$

де V_1 і V_2 - відповідно середні лінійні швидкості рідини в перерізах 1-1 і 2-2.

Зміна питомої енергії положення при підйомі рідини на висоту від z_1 до z_2 дорівнює

$$g\left(z_2 - z_1\right), \tag{4.11}$$

де z_1 і z_2 - вертикальні координати осі трубопроводу відповідно в перерізах 1-1 і 2-2 відносно довільної горизонтальної площини $O - O$, g - прискорення вільного падіння. Розподіл потенційної роботи виражається рівнянням

$$w\left(P_1 - P_2\right) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g\left(z_2 - z_1\right). \qquad (4.12)$$

Оскільки питомий об’єм рідини w - це об’єм, який займає одиниця маси, тобто

$$w = \frac{W}{m} = \frac{1}{\rho}, \text{ [м}^3\text{/кг]},$$

то з урахуванням цього вираз (4.12) можна записати так

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g\left(z_2 - z_1\right).$$

Останнє рівняння можна представити у вигляді

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}. \qquad (4.13)$$

Отримане рівняння носить назву рівняння Бернуллі для ідеальної рідини на честь видатного швейцарського математика і механіка Даниїла Бернуллі, який вивів його в 1738 р.

Оскільки перерізи 1-1 і 2-2 були узяті довільно, то уздовж цієї довжини струменя для будь-яких поперечних перерізів рівняння можна узагальнити на весь струмінь і подати у вигляді

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = const. \qquad (4.14)$$

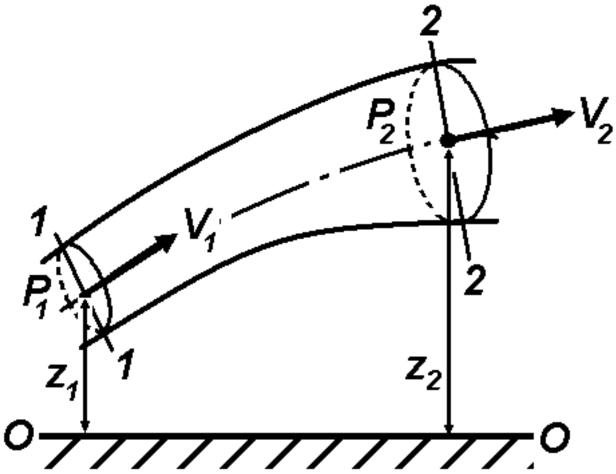


Рисунок 4.3.

У цьому вигляді рівняння називають рівнянням Бернуллі для елементарного струменя нестисливої рідини (або ***другим законом гідродинаміки***).

Порівнюючи отримане рівняння з формулою (2.3), основним рівнянням гідростатики, можна побачити,що сума перших двох доданків є гідростатичним напором, а формула (2.3) є окремим випадком формули (4.14), якщо рідина є нерухомою.

Розглянемо детальніше рівняння (4.14). Перший член z називається геометричною висотою положення, або ***геометричним напором***. Другий член $\frac{P}{\rho g}$ називається п'єзометричною висотою або ***п'єзометричним напором***. Третій член рівняння $\frac{V^2}{2g}$ - це висота, на яку піднялася б за відсутності будь-якого опору рідина, що почала рухатись з вертикально спрямованою швидкістю V. Тому цей вираз називається швидкісною висотою, або ***швидкісним напором***.

Слід зазначити, що за суттю виводу рівняння Бернуллі для ідеальної рідини являє собою закон збереження механічної енергії. Звідси стає очевидним, що оскільки член рівняння $\frac{V^2}{2g}$ є мірилом кінетичної енергії одиниці ваги рідини, що рухається, то сума членів $z+\frac{P}{\rho g}$ буде мірилом її потенційної енергії. Для ідеальної рідини повна питома енергія незмінна по всій довжині струменя.

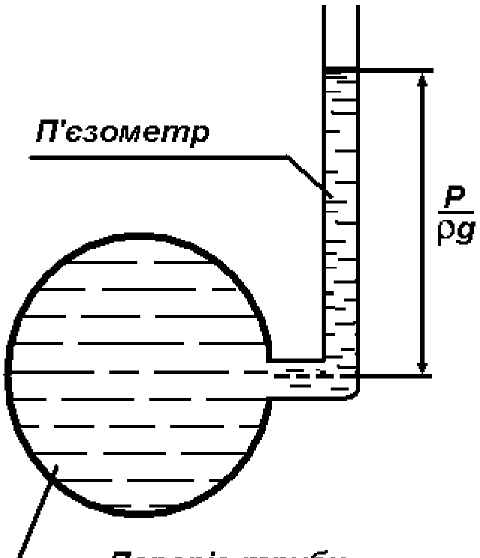


Рисунок 4.4.

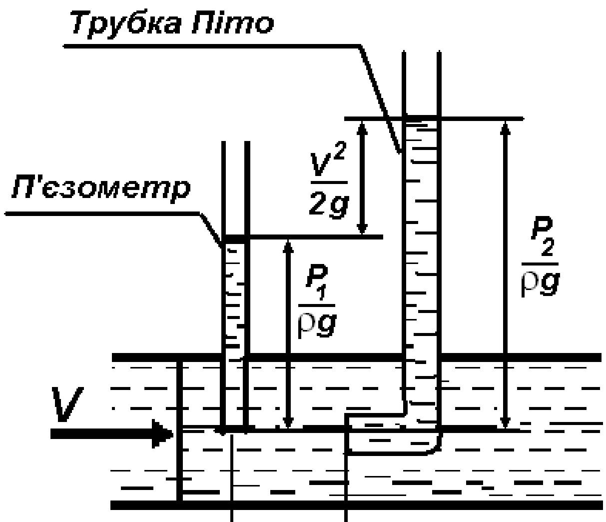


Рисунок 4.5.

Прилад, яким вимірюють п’єзометричну висоту, називається ***п’єзометром*** (див. рисунок 4.4). Швидкісний напір вимірюють за допомогою ***трубки Піто*** (рисунок 4.5). Розглянемо перерізи 1 і 2, розташовані близько один до одного. В першому встановлений п’єзометр, а в другому – трубка Піто. В результаті дії тиску рідина в п’єзометричній трубці підніметься на висоту $\frac{P_1}{\rho g}$, а в трубці Піто під дією повного напору – на висоту $\frac{P_2}{\rho g}$. Запишемо рівняння Бернуллі для вказаних перерізів, для яких $z_1 = z_2$, а швидкість руху рідини в точці занурення нижнього краю трубки Піто дорівнює нулю, то

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g}, \text{ або } \frac{V^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} - \frac{P_1}{\rho g}. \qquad (4.15)$$

Різниця висот, які вимірюються за допомогою двох зазначених трубок, звичайним чином суміщених в одному приладі, носить назву ***висоти швидкісного напору***.

Рівняння Бернуллі для двох перерізів потоку реальної рідини записується так:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{1-2}. \qquad (4.16)$$

Воно відрізняється від рівняння для ідеальної рідини появою в правій частині члена h_{1-2}, який є втратою напору на подолання опору руху рідини, та коефіцієнтами α_1 та α_2 (коефіцієнти Коріоліса, або коефіцієнти кінетичної енергії потоку), які враховують нерівномірність розподіла швидкостей в поперечному перерізі потоку і завжди більші за одиницю. Для ламінарного режиму в циліндричній трубі α=2, а для турбулентного α=1,045÷1,10. При практичних розрахунках коефіцієнтом α часто нехтують і приймають $\alpha_1 = \alpha_2$=1.

V. ВИЗНАЧЕННЯ ВИТРАТИ РІДИНИ У ТРУБОПРОВОДІ

На практиці частіше за все для вимірювання витрати рідини користуються спеціальними приладами, одним з яких є витратомір Вентурі, схема якого подана на рисунку 4.6. Основною перевагою цього приладу перед іншими є простота конструкції і відсутність рухомих частин. На рисунку 4.6 зображено трубопровід діаметром D з місцевим звуженням діаметром d. У перерізах 1-1 і 2-2 вмонтовано два п’єзометри.

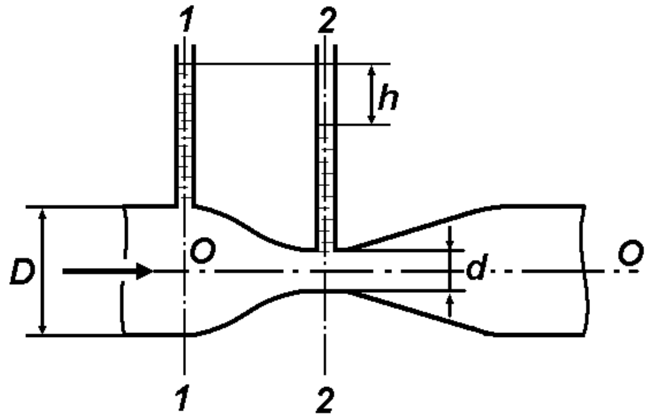


Рисунок 4.6.

Нехтуючи падінням напору між перерізами, а також нерівномірністю розподілу швидкості руху рідини по перерізу труби, запишемо для даного випадку рівняння Бернуллі, припустивши, що довільна площина проходить через вісь трубопроводу $O-O$ $(z_1 = z_2)$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}. \tag{4.17}$$

З цього рівняння витікає, що при збільшенні швидкості тиск повинен зменшуватися та навпаки. Ця закономірність і використовується у водомірі Вентурі. За різницею h рівнів п’єзометрів і величинами діаметрів D і d трубопроводу можна підрахувати витрати Q. Використовуючи рівняння нерозривності потоку, маємо $Q = V_1\omega_1 = V_2\omega_2$, з урахуванням $\omega_1 = \frac{\pi D^2}{4}$, $\omega_2 = \frac{\pi d^2}{4}$, маємо $V_1 \frac{\pi D^2}{4} = V_2 \frac{\pi d^2}{4}$. Звідси $V_2 = V_1 \frac{D^2}{d^2}$, а $V_2^2 = V_1^2 \frac{D^4}{d^4}$. Отриманий вираз підставимо в (4.17) $\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + V_1^2 \frac{D^4}{2gd^4}$, звідки витікає, що $\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} = h = V_1^2 \frac{D^4}{2gd^4} - \frac{V_1^2}{2g}$, і остаточно

$V_1 = \sqrt{\dfrac{2gh}{\dfrac{D^4}{d^4} - 1}}$. Формула для визначення об’ємної витрати рідини Q у розглянутому трубопроводі має такий вигляд:

$$Q = \omega_1 V_1 = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{1}{\dfrac{D^4}{d^4} - 1}}. \tag{4.18}$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА № 1. По трубопроводу діаметром d = 150 мм перекачується нафта з густиною $\rho_{\text{Н}}$ = 800 кг/м^3 в кількості m = 1200 т за добу. Визначити об’ємну витрату нафти Q і середню швидкість V її течії.

Розв’язання. Знаходимо спочатку об’єм нафти W, який перекачується за добу $W = \dfrac{m}{\rho_{\text{Н}}} = \dfrac{1200 \cdot 10^3}{800}$ = 1500 м^3. Об’ємна витрата нафти $Q = \dfrac{W}{t} = \dfrac{1500}{24 \cdot 3600}$ = 0,01736 м^3/с= 17,36 л/с. З рівняння нерозривності (4.7) $V = \dfrac{Q}{\omega} = \dfrac{4Q}{\pi d^2} = \dfrac{4 \cdot 0{,}01736}{3{,}1415 \cdot 0{,}150^2}$ = 0,983 м/с.

Відповідь. Об’ємна витрата нафти Q = 0,01736 м^3/с= 17,36 л/с і середня швидкість її течії V = 0,983 м/с.

ЗАДАЧА № 2. Нафта з кінематичним коефіцієнтом в’язкості ν = 8,3·10^{-6} м^2/с рухається по трубопроводу. Знайти мінімальний діаметр d_{min} трубопроводу, при якому нафта буде рухатися у ламінарному режимі з об’ємною витратою Q = 8,14 л/с.

Розв’язання. З формули (4.6) виразимо $V = \dfrac{Q}{\omega} = \dfrac{4Q}{\pi d^2}$ і підставимо в (4.8) $Re = \dfrac{Vd}{\nu} = \dfrac{4Q}{\pi d \nu}$, звідки зрозуміло, що величина

d_{min} відповідає максимально можливому числу Рейнольдса, при якому ще зберігається ламінарність руху рідини, числу $Re_{\text{КР}}$ =2320, тому остаточно $d_{min} = \dfrac{4Q}{\pi\nu\, Re_{кр}} = \dfrac{4 \cdot 8{,}14 \cdot 10^{-3}}{3{,}1415 \cdot 8{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 2320}$ = 0,538 м. Звичайно, для отримання вірної відповіді необхідно застосовувати величини Q (м^3/с) і ν (м^2/с) у вказаних розмірностях системи SI .

Відповідь. Діаметр трубопроводу d_{min} = 0,538 м.

ЗАДАЧА № 3. Визначити теоретичну витрату Q води, якщо різниця напорів у перерізах водоміра Вентурі $h_{\text{РТ}}$ = 500 мм рт. ст. Діаметр трубопроводу D = 0,3 м, діаметр звуженої частини водоміра d = 0,1 м.

Розв’язання. Різниця пєзометричних напорів визначається за формулою $\dfrac{P_1}{\rho_{\text{РТ}} g} - \dfrac{P_2}{\rho_{\text{РТ}} g} = h_{\text{РТ}}$, де індекс 1 відповідає розширеній, а 2 – звуженій частині трубопроводу. Для води попередній вираз в рівнянні Бернуллі переписується у вигляді $\dfrac{P_1}{\rho_{\text{В}} g} - \dfrac{P_2}{\rho_{\text{В}} g} = h_{\text{В}}$. З порівняння обох виразів отримуємо різницю напорів у перерізах у метрах вод. ст. $h_{\text{В}} = h_{\text{РТ}} \dfrac{\rho_{\text{РТ}}}{\rho_{\text{В}}}$ і маємо: $h_{\text{В}} = 500 \cdot 13{,}6$= 6,8 м вод. ст.. Теоретична витрата

$$Q = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{2gh_{\text{В}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{D^4}{d^4} - 1}} = \frac{3{,}1415 \cdot 0{,}3^2}{4}\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}8} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{0{,}3}{0{,}1}\right)^4 - 1}}$$

=0,09 м^3/с.

Відповідь. Теоретична витрата води Q = 0,09 м^3/с= 90 л/с.

ЛЕКЦІЯ № 5. ЛІНІЙНІ ТА МІСЦЕВІ ВТРАТИ НАПОРУ

I. ВИДИ ВТРАТ НАПОРУ

Вирішення багатьох практичних задач гідромеханіки зводиться до визначення втрат напору під час руху рідини по трубах або пожежних рукавах.

Втрати напору потоку рідини, що рухається, обумовлені опорами двох основних видів:

- опори, які проявляють себе по всій довжині потоку, обумовлені силами тертя частинок рідини одна об одну та об стінки, що обмежують потік; відповідно, втрати напору цього виду називаються лінійними і позначаються h_{Λ};
- так звані місцеві опори, які обумовлені різного роду перешкодами, що встановлюються в потоці (звуження або розширення перерізу трубопроводу, засувка, вентиль, коліно тощо) та призводять до змін в величині або напрямку швидкості течії рідини; відповідно, втрати напору цього виду називаються місцевими і позначаються $h_{\text{М}}$.

В рівнянні (4.16) величина доданка h_{1-2} дорівнює повній втраті напору між двома перерізами потоку при наявності опорів обох видів $h_{1-2} = h_{\Lambda} + h_{\text{М}}$. В енергетичному сенсі h_{1-2} - це кількість питомої механічної енергії, яка витрачається на подолання сил тертя, що виникають в реальній рідині під час її руху. Ця частина енергії перетворюється в теплову. Загальні втрати напору h_{1-2} для ділянки трубопроводу, прокладеного між двома перерізами, визначаємо за допомогою рівняння Бернуллі:

$$h_{1-2} = z_1 - z_2 + \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}. \qquad (5.1)$$

Отже, для визначення h_{1-2} потрібно знайти різниці геометричних висот $z_1 - z_2$, показів п’єзометрів $\frac{P_1 - P_2}{\rho g}$ і швидкісних напорів

$\dfrac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$ у зазначених перерізах. При усталеному русі в горизонтальній трубі ($z = const$, $V = const$) втрати напору визначаються за формулою

$$h_{1-2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{\Delta P}{\rho g}. \qquad (5.2)$$

Для нев'язкої рідини втрата напору дорівнює нулю.

II. ВТРАТИ НАПОРУ ПО ДОВЖИНІ ТРУБОПРОВОДУ

При ламінарній течії рідини в круглій трубі максимальна швидкість потоку припадає на її вісь. У стінок труби швидкість дорівнює нулю через покриття частками рідини поверхні трубопроводу тонким нерухомим шаром. Від стінок до осі труби швидкості зростають плавно, графік їхнього розподілу за поперечним перерізом потоку є параболоїдом обертання, а переріз параболоїда осьовою площиною є квадратичною параболою.

При турбулентній течії епюра розподілу швидкостей відрізняється від попередньої, а саме наявністю ламінарного режиму течії в тонкому пристінному шарі завтовшки $\delta_{\Pi\Lambda}$ на відміну від решти шарів, де течія відбувається в турбулентному режимі та має назву турбулентного ядра. В останньому розподіл швидкостей по перерізу можна вважати майже рівномірним.

При усталеному русі рідини втрати напору залежать від фізичних властивостей рідини, швидкості руху, розмірів трубопроводу та шорсткості стінок труби. Незважаючи на різний розподіл швидкостей для обох режимів руху, вказана залежність виражається формулою Дарсі-Вейсбаха як при ламінарному, так і при турбулентному режимах

$$h_\Lambda = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g}, \qquad (5.3)$$

де h_Λ - втрати напору по довжині труби, λ - коефіцієнт гідравлічного тертя (коефіцієнт Дарсі), l - довжина труби, d - її внутрішній діаметр, V - середня швидкість руху рідини. Різниця між режимами руху рідини полягає лише у значеннях коефіцієнту λ.

З цієї формули випливає, що втрати напору на тертя по довжині труби прямо пропорційні квадрату швидкості руху і довжині труби й зворотно пропорційні діаметру труби. Слід зазначити, що втрати напору мають таку ж саму розмірність, що й напір, тобто визначаються розмірністю величини $\frac{V^2}{2g}$. Тому, зважаючи на розмірності l та d, коефіцієнт λ має бути безрозмірним.

Коефіцієнт гідравлічного тертя λ в загальному випадку залежить від двох параметрів – числа Рейнольдса Re та відносної шорсткості труби Δ/d, де Δ - абсолютна шорсткість, середній розмір виступів (можна використовувати також еквівалентну абсолютну шорсткість). Ця величина коливається від 0,01 мм для чистих суцільнотягнутих труб з латуні, міді, свинцю до 2,0 мм для старих сталевих труб, тобто залежить від матеріалу, з якого виготовлені труби, та віку й умов їхнього зберігання або експлуатації. Обидва зазначені параметри є величинами безрозмірними.

Встановлено, що при ламінарному русі рідини λ залежить тільки від числа Re і визначається за формулою Пуазейля-Стокса

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \tag{5.4}$$

При турбулентному режимі λ розраховують за емпіричними формулами, що враховують в тому чи іншому ступені вплив на рух рідини шорсткості труб. Якщо розмір виступів шорсткості Δ буде меншим за товщину ламінарної плівки $\delta_{\text{пл}}$, нерівності стінки будуть повністю занурені в цьому шарі, турбулентна частина потоку не буде входити в безпосередній контакт зі стінками. Внаслідок цього втрати енергії не будуть залежати від шорсткості стінок, а будуть зумовлені лише властивостями рідини. У цьому випадку поверхня труби називається гідравлічно гладкою.

Якщо величина виступів така, що вона перевищує товщину ламінарної плівки, нерівності стінок будуть виступати в турбулентну область, збільшувати безлад руху та істотним чином впливати на величину втрат. У цьому випадку поверхня труби називається шорсткою.

Поняття гладкої чи шорсткої поверхні є відносним, тому що товщина ламінарної плівки залежить від числа Re, зменшуючись з його збільшенням. Взагалі, приймається наступне співвідношення $\delta_{\text{ПЛ}} = \dfrac{30d}{Re\sqrt{\lambda}}$, яке встановлює залежність між товщиною ламінарної плівки та числом Рейнольдса.

Весь загальний діапазон чисел Рейнольдса на графіку Нікурадзе, досліди якого були присвячені вивченню гідравлічних опорів у шорстких трубах і які (досліди) були узагальнені в залежності $lg(100\lambda) - lg\,Re$, можна поділити на п'ять таких зон:

1-а зона – ламінарний режим, коли $\lambda = f(Re)$ (формула (5.4));

2-а зона – перехідна з ламінарного режиму в турбулентний;

3-зона – область «гладких труб» при турбулентному режимі, коли $\lambda = f(Re)$;

4-зона – область шорстких труб (доквадратична область) при турбулентному режимі, коли $\lambda = f(Re, \Delta/d)$;

5-зона – область «цілком шорстких труб» (квадратична область, де втрати енергії пропорційні квадрату швидкості рідини) при турбулентному режимі, коли $\lambda = f(\Delta/d)$.

Приблизні границі окремих зон турбулентного режиму визначаються наступними співвідношеннями.

Для <u>3-ої зони</u>: $4000 \le Re \le 40 \, d/\Delta$ (іноді нижню границю приймають рівною $Re_{\text{КР}}$=2320). В цій зоні застосовується формула Блазіуса, яка встановлює залежність коефіцієнта λ тільки від числа Re, і має вигляд:

$$\lambda = \frac{0{,}3165}{Re^{0{,}25}}. \tag{5.5}$$

Значення λ, обчислені за формулою (5.5), добре відповідають дійсності при невеликій відносній шорсткості труб і малих значеннях числа Re (до 70000). При збільшенні Re формула Блазіуса є невірною і дає применшені значення λ.

Для <u>4-ої зони</u>: $40 \, d/\Delta \le Re \le 500 \, d/\Delta$. В цій зоні коефіцієнт λ залежить як від числа Re, так і від шорсткості труб, і застосовується формула А.Д.Альтшуля

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{68}{Re}+\frac{\Delta}{d}\right)^{0,25}. \qquad (5.6)$$

Формула (5.5) може бути отримана як окремий випадок формули (5.6) при Δ/d=0.

Для <u>5-ої зони</u>: 500$d/\Delta \le Re$. В цій зоні коефіцієнт λ залежить від шорсткості труб, і застосовується формула Б.Л.Шифрінсона

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0,25}. \qquad (5.7)$$

В діапазоні 2320$\le Re \le$ 4000 (перехідному режимі) взагалі не рекомендується проектувати трубопроводи, що пояснює відсутність формули для λ для 2-ої зони.

Для полегшення розрахунків λ можна використовувати номограму Колбрука-Уайта, за допомогою якою за відомими Re і Δ/d дуже просто визначається коефіцієнт λ.

Слід зазначити, що поряд з наведеними формулами (5.4)-(5.7) існують інші, які використовуються під час розрахунків коефіцієнту λ для певних зон.

При швидкості руху води $V \ge$1,2 м/с для водогінних мереж зі сталевих і чавунних труб, що були в експлуатації, λ можна визначати за формулою Ф.А.Шевельова

$$\lambda = \frac{0{,}021}{d^{0,3}}, \qquad (5.8)$$

де d - діаметр труби (визначається в метрах).

Розглянемо сумісно рівняння (5.3) і рівняння нерозривності потоку (4.6). Виразимо середню швидкість руху рідини через об'ємну витрату $V = \frac{Q}{\omega}$, з урахуванням для круглих труб $\omega = \frac{\pi d^2}{4}$ формула (5.3) набуває вигляду

$$h_{\Lambda} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{Q^2}{\omega^2 2g} = \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} l Q^2 = AlQ^2 , \quad A = \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} . \quad (5.9)$$

Величину A (розмірність с^2/м^6) називають питомим опором труби; дані про A зведені до таблиць.

З урахуванням (5.9) опір по всій довжині труби $S_{\Lambda} = Al$ і втрати напору складають $h_{\Lambda} = S_{\Lambda} Q^2$.

III. ВТРАТИ НАПОРУ НА МІСЦЕВИХ ОПОРАХ

Місцеві опори викликані фасонними частинами, арматурою та іншим обладнанням трубопровідних мереж. У водопровідних мережах втрати напору на місцеві опори зазвичай не дуже великі – на рівні 10-20% від втрат на тертя. В повітропроводах вентиляційних і пневматичних установок втрати на подолання місцевих опорів часто значно перевищують втрати напору на терті. Місцеві втрати також є значними при розрахунку паропроводів.

Місцеві втрати напору залежать від швидкості руху рідини, геометричних розмірів і форми місцевих опорів, і визначаються за формулою Вейсбаха

$$h_{\text{м}} = \zeta \cdot \frac{V^2}{2g} , \qquad (5.10)$$

де ζ - безрозмірний коефіцієнт, який називається коефіцієнтом місцевого опору. Його величина визначається дослідним шляхом і залежить від вигляду місцевого опору. При турбулентному режимі ζ є сталою величиною. А.Д.Альтшуль запропонував визначати коефіцієнти місцевого опору за узагальненою формулою, яка використовується при ламінарному та турбулентному режимах:

$$\zeta = \frac{C}{Re} + \zeta_{\text{т}} , \qquad (5.11)$$

де C - коефіцієнт, який залежить від вигляду місцевого опору, $\zeta_{\text{т}}$ - коефіцієнт місцевого опору при турбулентному режимі (в квадратичній області). Для C і $\zeta_{\text{т}}$ існують складені таблиці.

Розглянемо сумісно рівняння (5.10) і рівняння нерозривності потоку (4.6). За аналогією (див. розділ II) формула (5.10) набуває вигляду:

$$h_{\text{м}} = \zeta \cdot \frac{Q^2}{\omega^2 2g} = \frac{8\zeta}{\pi^2 g d^4} Q^2 = S_{\text{м}} Q^2\,, \quad S_{\text{м}} = \frac{8\zeta}{\pi^2 g d^4}\,. \qquad (5.12)$$

Величину $S_{\text{м}}$ (розмірність $с^2/м^5$) визначають для певного місцевого опору.

Місцеві опори викликають зміну швидкості руху рідини за величиною (раптові або поступові звуження та розширення потоку), напряму (коліно, кутники, відводи) або водночас за величиною та напрямом (трійник), і за цими ознаками умовно поділяються на певні групи. Окремою групою виділяють втрати, що пов’язані з протіканням рідини через арматуру різного типу (вентилі, крани, зворотні клапани, сітки, відбори). Слід зауважити, що для випадку раптового розширення коефіцієнт місцевих втрат можна отримати теоретичним шляхом; решта коефіцієнтів для раптового звуження, поворотів, діафрагм тощо не може бути визначена теоретично, а встановлюється виключно дослідним шляхом.

Розглянемо схеми деяких характерних місцевих опорів. На рисунку 5.1 показано раптове розширення трубопроводу, коли поперечний переріз різко збільшується з величини ω_1 до ω_2. Втрата напору витрачається на вихроутворення, яке пов’язано з відривом потоку від стінок, тобто на підтримку обертального неперервного руху рідких мас з постійним їхнім оновленням. Потік зривається з кута і розширюється не раптово, а поступово, причому в кільцевому просторі між потоком і стінкою утворюються вказані вище вихори. В цьому випадку коефіцієнт, віднесений до швидкостей: V_2 - $\varsigma = \left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2$, V_1 - $\varsigma = \left(1 - \dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2$. Ці вирази є наслідком теореми Борда́, яка говорить, що втрата напору при раптовому розширенні русла дорівнює швидкісному напору, визначеному за різницею швидкостей. Віднесення до різних швидкостей означає можливість визначення втрат напору саме через відповідні швидкості. При раптовому звуженні (рисунок 5.2) трубопроводу коефіцієнт ζ залежить також від співвідношення $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ і визначається дослідним шляхом. Втрата напору в цьому випадку зумовлена тертям потоку при вході в більш вузьку трубу і втратами на вихроутворення, які утворюються в кільцевому просторі навколо звуженої частини потоку. Подібні вихори утворюються на початку вузької частини труби за рахунок того, що при вході в цю частину рідина продовжує деякий час рухатися за інерцією у напрямі центру труби, внаслідок чого русло потоку ще деякий час продовжує звужуватися. Тому загалом при раптовому звуженні потоку виникає два поспіль місцевих опору – за рахунок звуження та одразу за ним розширення основного русла. Для практичних розрахунків частіш за все користуються напівемпіричною формулою

$$\varsigma = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

де n - ступінь звуження труби. При виході труби з резервуара великих поперечних розмірів, коли $\omega_1 / \omega_2 >> 1$, а також за відсутності закруглення вхідного кута ζ=0,5.

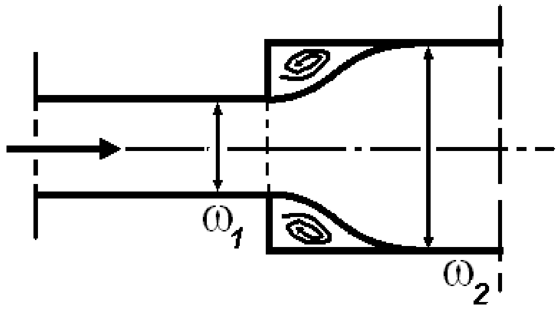


Рисунок 5.1.

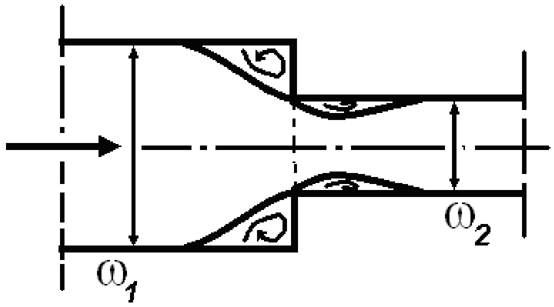


Рисунок 5.2.

При поступовому розширенні (перехідні конуси, що розширюються, або дифузори – рисунок 5.3) швидкість потоку зменшується, тиск збільшується. Як і для раптового розширення русла, відбувається відрив основного потоку від стінки та вихроутворення, інтенсивність яких зростає зі збільшенням кута розширення (конусності) φ. Водночас мають місце і звичайні втрати на тертя, подібні до тих, які виникають в трубах постійного перерізу. Таким чином, втрати енергії у дифузорі складаються зі втрат на тертя по довжині та втрат на вихроутвореня за рахунок розширення. При віднесенні до швидкості V_2 коефіцієнт $\zeta = k\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2$,

де k залежить від кута конусності φ і може бути взятий з табличних даних. Однак ζ можна визначити за такою формулою

$$\zeta = \frac{\lambda}{8\,sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 sin\varphi,$$

де λ - коефіцієнт, що враховує втрати напору за довжиною, $n = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ - ступінь розширення дифузора.

При поступовому звуженні (перехідні конуси, що звужуються, або конфузори – рисунок 5.4) течія рідини супроводжується одночасним збільшенням швидкості та падінням тиску. Через це умови для вихроутворення на конічній поверхні відсутні. Вихроутворення можливо тільки у вузькій частині труби, але величина втрат напору в цьому випадку настільки незначна порівняно з втратами на тертя в конічній частині конфузора, що цим можна нехтувати. Приймають, що в конфузорі мають місце лише втрати на тертя і коефіцієнт ζ можна визначити за такою формулою ($n = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ - ступінь звуження)

$$\zeta = \frac{\lambda}{8\,sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

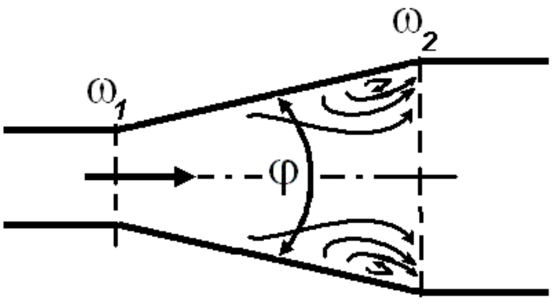


Рисунок 5.3.

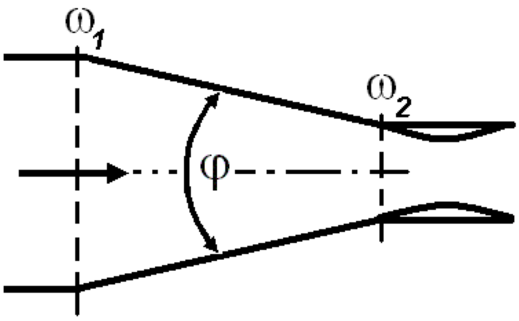


Рисунок 5.4.

Діафрагмою (рисунок 5.5) називається пластинка з отвором в центрі, яка встановлюється в трубопроводі для вимірювання витрати рідини. В цьому випадку коефіцієнт ζ залежить від відношення площі перерізу отвору діафрагми ω_O до площі перерізу труби ω і може бути визначений за формулою:

$$\zeta = \left(1 + \frac{0{,}707}{\sqrt{1 - \frac{\omega_O}{\omega}}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_O} - 1\right)^2 .$$

Втрати в діафрагмі зумовлені головним чином розширенням потоку після стиснутого перерізу. Якщо діафрагма встановлена в трубі змінного перерізу (рисунок 5.6), слід розрізняти так зване «досконале стиснення» при $\omega_1 > 20\omega_O$ і «недосконале стиснення» при $\omega_1 < 20\omega_O$. Коефіцієнт ζ в цих випадках представлений у вигляді табличних даних.

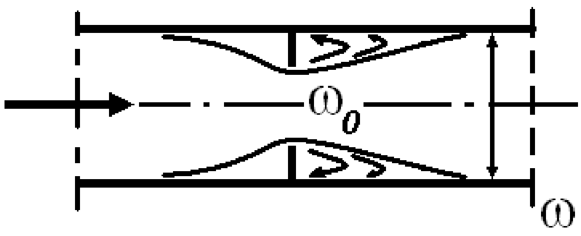


Рисунок 5.5.

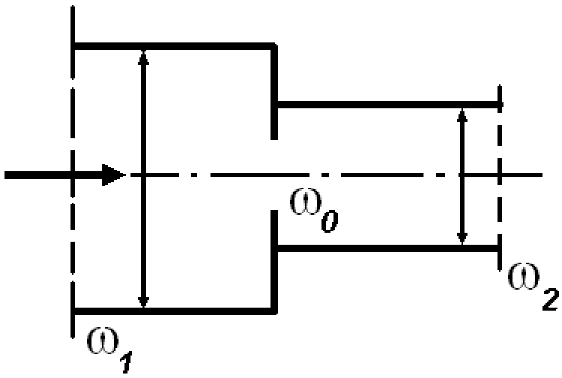


Рисунок 5.6.

В тому випадку, коли труба приєднана до ємності під прямим кутом і має гострі вхідні кромки (рисунок 5.7, а), можна приймати ζ=0,5. При плавному вході ζ=0,04÷0,10 залежно від плавності входу (в середньому можна прийняти ζ=0,08. Більш докладно характер втрат в таких трубках буде розглянуто при аналізі насадок.

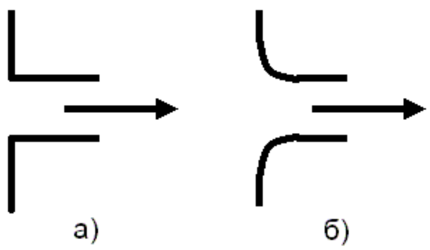


Рисунок 5.7.

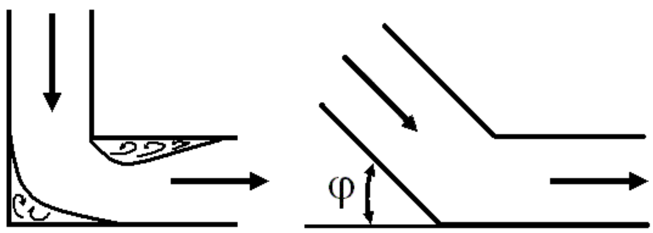


Рисунок 5.8.

Для коліна без закруглення (Рисунок 5.8) при невеликих діаметрах труби ζ можна визначити за такою формулою

$$\zeta = 0{,}946 sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2{,}047 sin^4 \frac{\varphi}{2},$$

причому для труб з діаметром d>30 мм ζ істотно зменшується. Такий місцевий опір суттєво впливає на втрати напору. В ньому відбувається відрив потоку від стінки труби та утворюються дві вихрові зони, в яких інтенсивно втрачається енергія. При збільшенні кута φ втрати енергії значно зростають, сягаючи максимального значення при φ =90°. В гідросистемах рекомендується уникати подібних місцевих опорів. Плавність повороту значно зменшує інтенсивність вихроутворення і, як наслідок, опір відводу у порівнянні з коліном. Це зменшення тим більше, чим більший відносний радіус кривизни відводу.

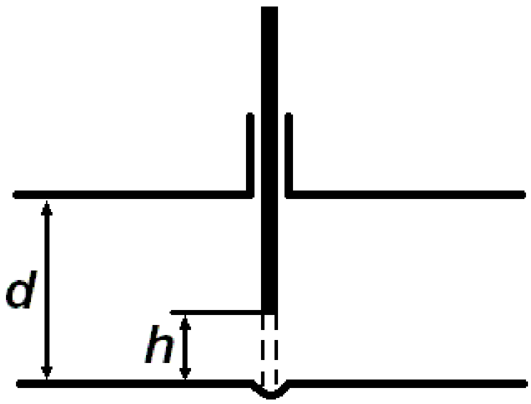


Рисунок 5.9.

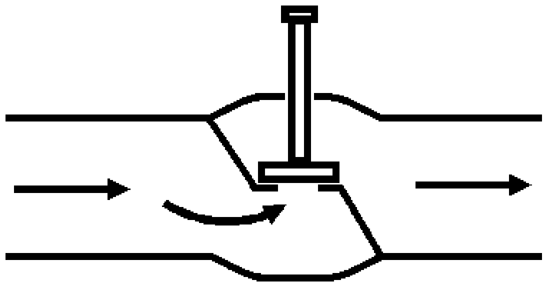


Рисунок 5.10.

Для засувки (рисунок 5.9) коефіцієнт ζ змінюється залежно від ступеня відкриття, що визначається співвідношенням h/d. Для вентиля (рисунок 5.10) коефіцієнт $\zeta \approx$ 7÷16, для крану прохідного $\zeta \approx$ 2÷4.

Все вищесказане стосовно визначення коефіцієнтів місцевих опорів відноситься до турбулентного режиму руху рідини. При ламінарному русі місцеві опори відіграють малу роль при визначенні загального опору трубопроводу. Крім того, закон опору при ламінарному режимі є більш складним і досліджений в меншій мірі.

При визначенні коефіцієнтів опору для трійників слід розрізняти два випадки – улиття в магістраль з відведення (рисунок 5.11) і відтік з магістралі у відведення (рисунок 5.12).

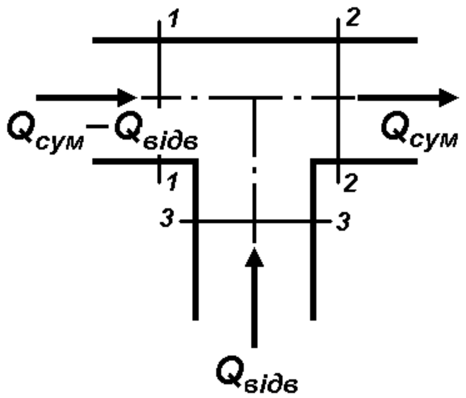


Рисунок 5.11.

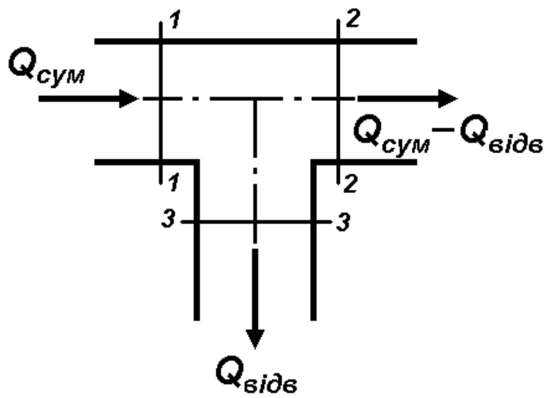


Рисунок 5.12.

На рисунках позначено $Q_{сум}$ - сумарна витрата, $Q_{відв}$ - витрата відведення. Для схеми на Рисунку 5.11 при визначенні втрат напору необхідно враховувати площі живих перерізів потоку до улиття в прямому проході та боковому відведенні після улиття, а також середні швидкості у вказаних живих перерізах. Аналогічні параметри з точністю до позначень (замість улиття потоку – його розділення) враховують для схеми на Рисунку 5.12. Для відповідних величин складені таблиці по визначенню коефіцієнту ζ. Додаткові втрати, зумовлені конструкцією трійників (зварювальними напливами у зварних трубах, утисненням перерізів кінцями труб в стандартних трійниках тощо), враховуються введенням додаткових коефіцієнтів.

Втрати напору h, м, в насадках визначають за формулою

$$h = SQ^2, \tag{5.13}$$

де Q, л/с - об′ємна витрата рідини.

Для байпасів, пожежних гідрантів, клапанів протипожежних систем необхідні дані беруть з відповідних таблиць.

При русі рідини з малими числами Рейнольдса коефіцієнти місцевих опорів залежить не тільки від геометричних характеристик кожного місцевого опору, але й від значення цих чисел. Формула для урахування цього носить емпіричний характер. Також необхідно враховувати взаємний вплив розташування місцевих опорів. Принцип накладення втрат, тобто незалежного сумування величин окремих місцевих опорів, працює тоді, коли опори розташовані на відстанях, які переважають довжину їхнього впливу. Останнє визначається відносною довжиною прямої ділянки l/d. В протилежному випадку необхідно вводити поправочні коефіцієнти

IV. ВТРАТИ НАПОРУ В ПОЖЕЖНИХ РУКАВАХ

Для спрощення розрахунків рукавних систем експериментально встановлена величина опору одного рукава довжиною 20 м при робочих напорах, які використовуються у практиці пожежогасіння

$$h = S'_P Q^2, \quad S'_P = A \cdot 20, \tag{5.14}$$

де Q, л/с - об′ємна витрата рідини, A, с^2/л^2 - питомий опір пожежного рукава, S'_P, м·с^2/л^2 - опір стандартного (20 м) пожежного рукава. В таблиці 5.1. наведені величини A і S'_P залежно від діаметра та типу рукава.

Таблиця 5.1.

Діаметр рукава d, мм	Прогумовані рукава		Непрогумовані рукава	
	S'_P	A	S'_P	A
51	0,13	0,0065	0,24	0,012
66	0,034	0,0017	0,077	0,00385
77	0,015	0,00075	0,030	0,0015
89	0,007	0,00035	—	—
110	0,0022	0,00011	—	—
150	0,0004	0,00002	—	—

Втрати напору в рукавній лінії, що складається з послідовно з′єднаних n рукавів:

$$h_n = nh, \text{ або } h = nS'_P Q^2. \tag{5.15}$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ′ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА № 1. Визначити втрати напору на ділянці трубопроводу довжиною l = 400 м, яка складається з чавунних труб діаметра d = 150 мм, під час руху води з об′ємною витратою Q = 35 л/с.

Розв’язання. Визначимо середню швидкість руху води

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 35 \cdot 10^{-3}}{3{,}1415 \cdot 0{,}15^2} = 1{,}98 \text{ м/с.}$$

Оскільки $V >$1,2 м/с втрати напору визначаємо за формулою (5.9). Питомий опір чавунної труби визначаємо з таблиці: A= 39,54 $с^2/м^6$. Тоді

$$h_\Lambda = 39{,}54 \cdot 400 \cdot 0{,}035^2 \approx 19{,}37 \text{ м.}$$

Як бачимо, під час вирішення задачі необхідно привести розмірності всіх величин відповідно до розмірностей системи SI .

Відповідь. Втрати напору $h_\Lambda \approx 19{,}37$ м.

ЗАДАЧА № 2. По трубі діаметром d =100 мм і довжиною l =150 м з об’ємною витратою Q=20 л/с рухається нафта. Обчислити величину втрат напору h_Λ, якщо абсолютна шорсткість труби Δ =0,1 мм, а кінематичний коефіцієнт в’язкості ν =$3 \cdot 10^{-5}$ $м^2/с$.

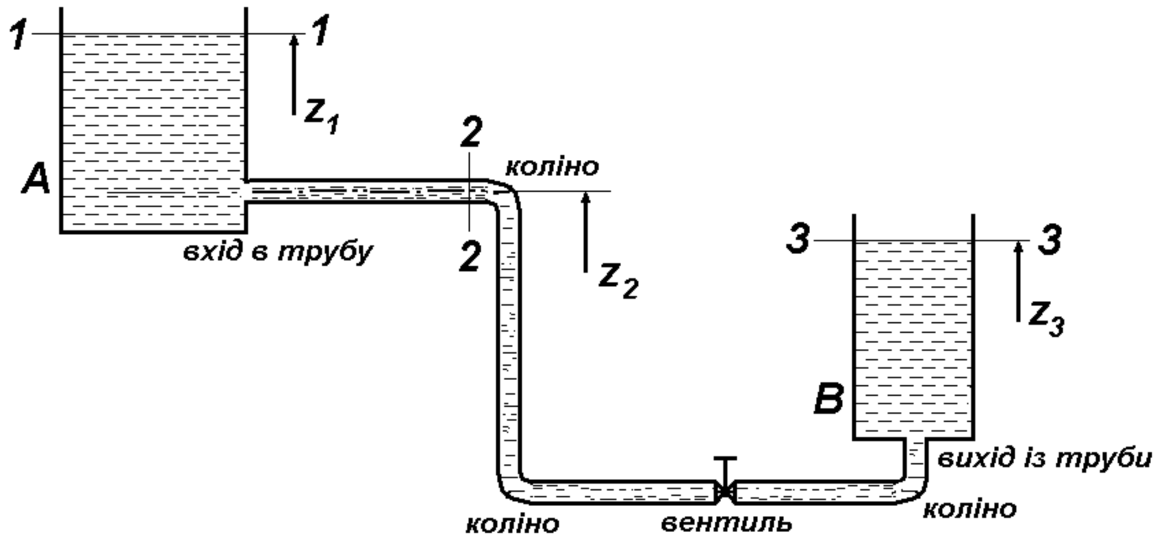
Розв’язання. Для визначення формули, за якою необхідно розрахувати коефіцієнт λ у формулі (5.3) для обчислення лінійних втрат напору, необхідно знати число Рейнольдса для нафти за умов задачі. Тому

$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi \nu d} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{3{,}1415 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}100}$=8488. При співвідношенні $\frac{d}{\Delta} = \frac{100}{0{,}1}$=1000 будемо користуватися формулою Блазіуса (5.5), за якою $\lambda = \frac{0{,}3165}{Re^{0{,}25}} = \frac{0{,}3165}{8488^{0{,}25}}$=0,038. Швидкість руху нафти обчислюємо з використанням рівняння нерозривності (4.1), тому $V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{3{,}1415 \cdot 0{,}1^2}$=2,547 м/с. Остаточно втрати напору обчислюємо за формулою (5.3)

$$h_\Lambda = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} = 0{,}038 \cdot \frac{150}{0{,}100} \cdot \frac{2{,}547^2}{2 \cdot 9{,}81} = 18{,}847 \text{ м.}$$

Відповідь. Втрати напору h_Λ =18,847 м.

ЗАДАЧА № 3. Вода із відкритого резервуара A перетікає в резервуар B по трубі діаметром d= 100 мм загальною довжиною l= 100 м. Визначити об'ємну витрату Q і тиск в перерізі 2-2, що знаходиться на відстані l_1= 90 м від початку труби. Коефіцієнти місцевих опорів: на вході та виході із труби відповідно $\zeta_{\text{ВХ}}$= 0,5 при гострих кромках вхідного отвору та $\zeta_{ВИХ}$ = 1, для коліна з закругленням $\zeta_{\text{КОЛ}}$ =0,4, для вентиля $\zeta_{\text{ВЕНТ}}$=4. Геодезичні відмітки відповідних перерізів z_1= 102,5 м, z_2= 100 м, z_3= 99 м. Для розрахунку лінійних втрат прийняти коефіцієнт λ = 0,028.



Розв'язання. Повні втрати напору в трубі з урахуванням лінійних та місцевих опорів дорівнюють різниці геодезичних рівнів вільних поверхонь у резервуарах:

$z_1 - z_3 = \left(\lambda \dfrac{l}{d} + \zeta_{\text{ВХ}} + 3\zeta_{\text{КОЛ}} + \zeta_{\text{ВЕНТ}} + \zeta_{ВИХ} \right) \cdot \dfrac{V^2}{2g}$, де V - швидкість руху води по трубі

$$V = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_3)}{\lambda \dfrac{l}{d} + \zeta_{\text{ВХ}} + 3\zeta_{\text{КОЛ}} + \zeta_{\text{ВЕНТ}} + \zeta_{ВИХ}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot (102{,}5 - 99)}{0{,}028 \cdot \dfrac{100}{0{,}1} + 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 + 1}} \approx$$

$\approx$ 1,41 м/с. Витрата води з рівняння нерозривності потоку (4.6)

$Q = V \cdot \dfrac{\pi d^2}{4} = 1{,}41 \cdot \dfrac{3{,}1415 \cdot 0{,}1^2}{4}$ =0,011 м^3/с=11 л/с. Для визначення тиску в перерізі 2-2 запишемо рівняння Бернуллі для вільної поверхні 1-1, на яку діє атмосферний тиск, та перерізу 2-2 $z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{2-2}$, де $\sum h_{2-2}$ - сума лінійних та місцевих втрат напору на ділянці від входу в трубу до перерізу 2-2. Враховуючи, що $P_1 = P_\text{А}$ та V_1=0, а $\sum h_{2-2} = \left(\lambda \frac{l_1}{d} + \zeta_\text{ВХ}\right) \cdot \frac{V_2^2}{2g}$, запишемо

$$\frac{P_2}{\rho g} = z_1 - z_2 - \left(1 + \lambda \frac{l_1}{d} + \zeta_\text{ВХ}\right) \cdot \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_\text{АТ}}{\rho g}$$

або $P_2 - P_\text{А} = \left[z_1 - z_2 - \left(1 + \lambda \frac{l_1}{d} + \zeta_\text{ВХ}\right) \cdot \frac{V_2^2}{2g}\right] \cdot \rho g =$

$= \left[102{,}5 - 100 - \left(1 + 0{,}028 \cdot \frac{90}{0{,}1} + 0{,}5\right) \cdot \frac{1{,}41^2}{2 \cdot 9{,}81}\right] \cdot 1000 \cdot 9{,}81 =$ –2016,14 Н/м^2. Отже, знак «–» свідчить, що в перерізі 2-2 встановився невеликий вакуум, який відповідає приблизно 0,206 м вод. ст.

<u>Відповідь.</u> Об'ємна витрата Q = 11 л/с, тиск $P_2 - P_\text{А}$ = –2016,14 Н/м^2.

<u>ЗАДАЧА № 4.</u> Визначити втрати напору в рукавній лінії довжиною l = 160 м (прогумовані рукава), діаметром d = 66 мм під час руху води з об'ємною витратою Q = 12 л/с.

<u>Розв'язання</u>. З таблиці 5.1. знаходимо опір вказаного рукава S'_P = 0,034 м·с^2/л^2. Кількість рукавів $n = \frac{l}{20}$ = 8. Остаточно за формулою (5.14) $h = 8 \cdot 0{,}034 \cdot 12^2$ = 39,17 м.

<u>Відповідь</u>. Втрати напору h = 39,17 м.

ЛЕКЦІЯ № 6. ГІДРАВЛІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ТРУБОПРОВОДІВ

І. ТРУБОПРОВОДИ ТА ТРУБОПРОВІДНІ МЕРЕЖІ

Залежно від з'єднання окремих ділянок трубопроводи поділяють на прості та складні. ***Простий*** – це трубопровід, що складається з однієї нитки труб постійного діаметра або послідовних ділянок різного діаметра без бокових відгалужень. Прості трубопроводи можуть бути з'єднані послідовно, паралельно або розгалужено. Основними завданнями, які розглядаються для простого трубопроводу, є:

1) визначення напору H, необхідного для пропускання заданої витрати Q, якщо відомі геометричні параметри трубопроводу;
2) визначення витрати Q, якщо відомі напір H і геометричні параметри трубопроводу;
3) визначення діаметра трубопроводу, якщо відомі решта його геометричних параметрів, а також H і Q.

Складний трубопровід, або трубопровідна мережа, містить в собі декілька ділянок, в яких прості трубопроводи з'єднані послідовно, паралельно або розгалужено в різних комбінаціях.

Трубопровідні мережі поділяються на тупикові (незамкнені) і кільцеві (замкнені). Залежно від кількості місцевих опорів виділяють трубопроводи ***короткі*** та ***довгі***. В короткому трубопроводі втрати напору на місцевих опорах складають більше 8% від поздовжніх втрат, в довгому – менше 8%.

Для гідравлічного розрахунку трубопроводів і мереж використовуються рівняння нерозривності потоку, Бернуллі, формули для визначення числа Рейнольдса, гідравлічного коефіцієнта тертя, втрат напору по довжині та місцевих втрат.

ІІ. РОЗРАХУНОК І ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТОГО ТРУБОПРОВОДУ

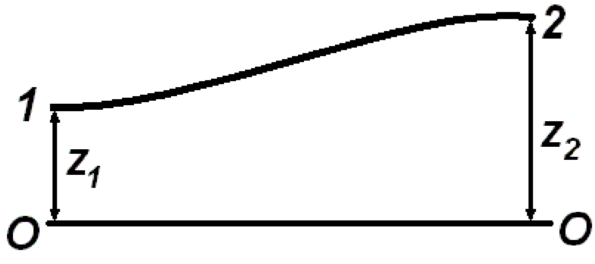


Рисунок 6.1.

Схема трубопроводу з постійним діаметром показана на рисунку 6.1, для якого необхідно вирішити першу з вищезазначених задач.

При його розрахунку необхідно визначити 1-й і 2-й перерізи, в яких починається та закінчується рух рідини, позначити умовну горизонтальну площину. Для зазначених перерізів записують рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини (за формулою (4.16))

$$z_1+\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}=z_2+\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+\sum h_{1-2} \tag{6.1}$$

й аналізують всі величини, що входять до нього. В даному випадку швидкість руху рідини за умов постійного діаметра трубопроводу $V_1=V_2$. Після перетворень з урахуванням виконаного аналізу одержують вираз для потрібного напору H_Π, тобто напору на початку трубопроводу, необхідного для руху рідини:

$$H_\Pi=\frac{P_1}{\rho g}=z_2-z_1+\frac{P_2}{\rho g}+\sum h_{1-2}=H_{CT}+\sum h_{1-2}, \tag{6.2}$$

де $H_{CT}=z_2-z_1+\dfrac{P_2}{\rho g}$ - статичний напір, величина якого не залежить від витрати рідини, а загальні втрати напору визначаються у вигляді

$$\sum h_{1-2}=h_\Lambda+h_M=\lambda\frac{l}{d}\cdot\frac{V^2}{2g}+\sum\zeta\cdot\frac{V^2}{2g}=\left(\lambda\frac{l}{d}+\sum\zeta\right)\cdot\frac{8Q^2}{\pi^2 g d^4}, \tag{6.3}$$

де вираз в дужках називається також коефіцієнтом опору трубопроводу $\varsigma_{сист}$. Графічна залежність потрібного напору від витрати рідини називається гідравлічною характеристикою трубопроводу (рисунок 6.2). При ламінарному режимі коефіцієнт гідравлічного тертя λ визначається за формулою (5.4), що з урахуванням (4.6) і (4.8) для труб круглого перерізу з діаметром d дає:

$$\lambda=\frac{16\pi d\nu}{Q}.$$

Підстановка в (6.3) визначає лінійну залежність $H_\Pi=f(Q)$ або $h_\Lambda=f(Q)$. Для перехідного режиму залежність стає нелінійною, перетворюючись для великих значень числа Рейнольдса в квадратичну $H_{\Pi} = f\left(Q^2\right)$ або $h_{\Lambda} = f\left(Q^2\right)$. Користуючись цією характеристикою, для будь-якої об'ємної витрати можна визначити потрібний напір і навпаки.

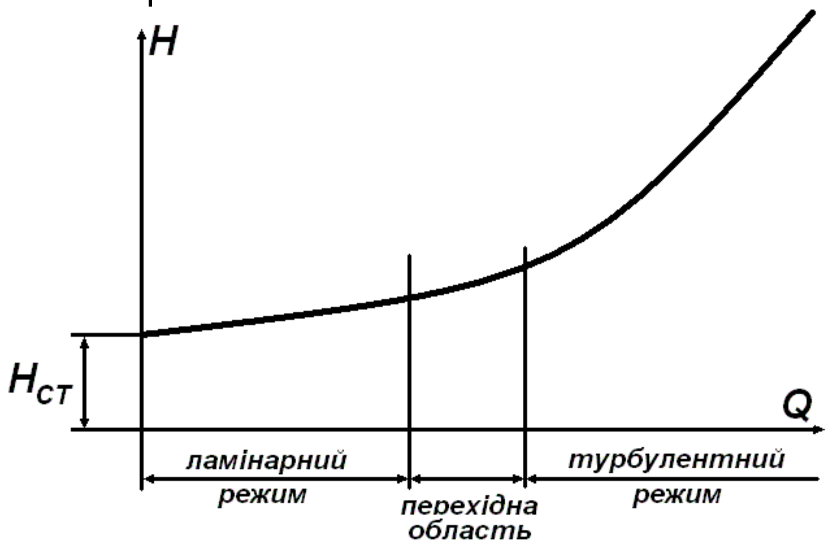


Рисунок 6.2.

III. РОЗРАХУНОК І ХАРАКТЕРИСТИКИ СКЛАДНОГО ТРУБОПРОВОДУ

На рисунку 6.3 показано приклад складного розгалуженого, а на рисунку 6.4 – складеного з декількох ліній трубопроводів.

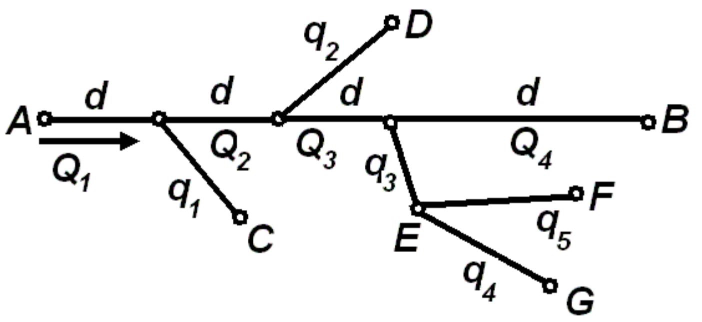


Рисунок 6.3.

Розрахунок складних трубопроводів виходить за межі змісту нашого курсу і зазвичай вивчається в спеціальних курсах водопостачання або трубопроводів. Тому розглянемо лише найпростіші приклади розрахунків трубопроводів, беручи до уваги лише лінійні втрати напору $h_{\Lambda} = SQ^2$. Вважаємо, що опір $S = Al$ (A - питомий опір трубопроводу) (5.9) будь-якої труби та об'ємна витрата Q в ній є відомими.

Система з послідовно з'єднаних труб. Якщо трубопровід складається з низки окремих ділянок різної довжини та діаметра, послідовно з’єднаних між собою, то об’ємна витрата в кожній ділянці є величиною постійною. Для n труб запишемо:

$$Q = Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n, \tag{6.4}$$

а повна втрата напору на всій довжині від початкової точки A до кінцевої B знаходиться як сума втрат на окремих ділянках:

$$h_{\mathrm{A-B}} = h_{\Lambda_1} + h_{\Lambda_2} + \ldots + h_{\Lambda_n} + h_{\mathrm{M}_1} + h_{\mathrm{M}_2} + \ldots + h_{\mathrm{M}_n}. \tag{6.5}$$

Не враховуючи місцеві втрати напору, при квадратичному законі опору:

$$h_{\mathrm{A-B}} = \left(A_1 l_1 + A_2 l_2 + \ldots + A_n l_n\right) Q^2 = \left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) Q^2, \tag{6.6}$$

звідки очевидно сумарний опір системи дорівнює сумі опорів окремих ділянок

$$S_{сист} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n. \tag{6.7}$$

Система з паралельно з’єднаних труб (рисунок 6.4). При паралельному з’єднанні трубопроводів магістральний трубопровід в певній точці a розгалужується на декілька паралельних ліній труб, які потім сходяться знову разом в одній загальній точці магістралі b (для визначеності на рисунку показано три лінії). В цьому випадку загальна об’ємна витрата Q дорівнює сумі витрат в кожній ділянці. Для n труб запишемо

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n. \tag{6.8}$$

Величини напору в точках розгалуження є загальними для всіх паралельно включених в систему гілок, що означає однаковість втрат напору в них:

$$h_{\Lambda_1} = h_{\Lambda_2} = \ldots = h_{\Lambda_n}, \tag{6.9}$$

або

$$A_1 l_1 Q_1^2 = A_2 l_2 Q_2^2 = \ldots = A_n l_n Q_n^2. \tag{6.10}$$

Розв’язуючи сумісно рівняння (6.8), (6.10), знаходять шукані витрати, а опір системи визначається наступним чином:

$$S_{сист} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)^2}. \qquad (6.11)$$

Якщо опори кожної ділянки однакові $S = S_1 = S_2 = ... = S_n$, то $S_{сист} = \frac{S}{n^2}$.

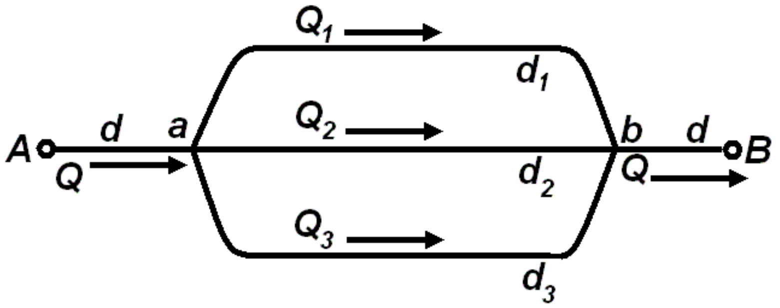


Рисунок 6.4.

Неважко відмітити аналогію з законами Кірхгофа, що застосовуються при розрахунках паралельного та послідовного з'єднання провідників.

В цьому випадку з точністю до позначень об'ємній витраті Q відповідає електричний струм I, втратам напору h - електрична напруга U, а опору трубопроводу S - опір провідника R.

При гідравлічному розрахунку трубопроводів достатньо широко застосовуються також графічні методи розрахунку. Використання останніх значно полегшує та спрощує розв'язання деяких складних задач, а в окремих випадках це є єдиним можливим способом отримати вірне рішення.

Як було сказано та показано вище, втрата напору є функцією тільки витрати рідини. Для довільного трубопроводу задаючись значеннями Q, обчислимо відповідні втрати напору h і відкладемо в деякому масштабі ці значення на осях абсцис та ординат. Поєднуючи послідовно отримані точки, будуємо параболічну криву, аналогічну кривій на рисунку 6.2 для турбулентного режиму та без урахування напору $H_П$.

Для послідовно з'єднаних трубопроводів попередньо будують характеристики окремих ділянок h_i (рисунок 6.5). З урахуванням (6.4) і (6.6) необхідно скласти криві по вертикалі. Для цього для певної витрати Q^* проводять пряму, паралельну осі ординат, яка перетинає зазначені криві. Сума цих величин

$h_1(Q^*)$, $h_2(Q^*)$, $h_3(Q^*)$ є «сумарною характеристикою» всього трубопроводу. Проводячи ці дії для інших величин Q, отримують криву Σh_i.

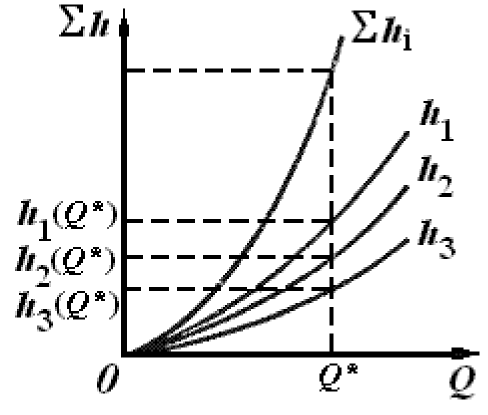


Рисунок 6.5.

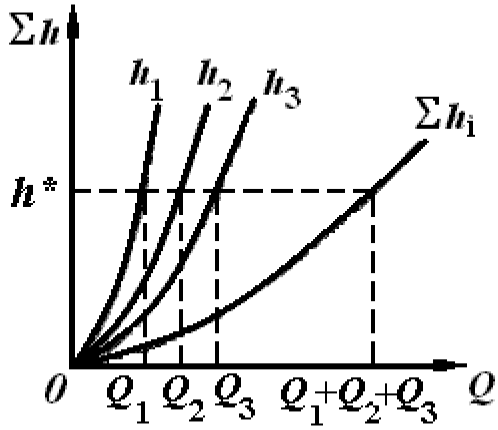


Рисунок 6.6.

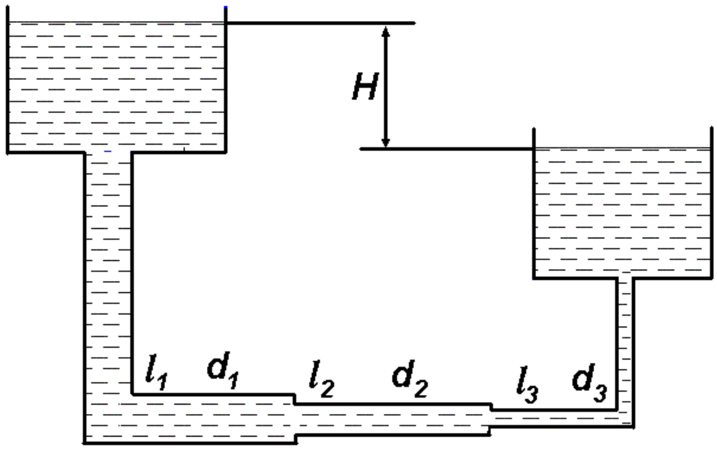
При паралельному з’єднанні необхідно також побудувати характеристики окремих паралельно включених ділянок h_i (рисунок 6.6). З урахуванням (6.8)-(6.10) необхідно скласти криві по горизонталі. Для цього для певної втрати h^* проводять пряму, паралельну осі абсцис, яка перетинає всі криві в точках відповідних об’ємних витрат $Q_i(h^*)$. Додаючи ці величини, отримують «сумарну характеристику» трубопроводу при цьому з’єднанні. Проводячи ці дії для інших величин h, отримують криву Σh_i.

Таким чином, можна зазначити, що для побудови «сумарної характеристики» складного трубопроводу необхідно скласти характеристики окремих ділянок при послідовному з’єднанні по вертикалі, а паралельному – по горизонталі.

Викладений метод побудови характеристик справедливий і для ламінарного режиму, для якого залежність $h_\Lambda = f(Q)$ є лінійною, що потребує внесення коректив у графіки характеристик. Однак практично в трубопроводах робоча ділянка характеристик знаходиться в області турбулентного режиму, що і зумовлює побудову лише параболічних кривих характеристик.

ЗАДАЧА № 1. Визначити втрати напору на кожній ділянці трубопроводу, якщо різниця напорів у вежах H = 12 м, а діаметри та довжини окремих ділянок відповідно дорівнюють: d_1 = 200 мм,

l_1 = 900 м, d_2 = 175 мм, l_2 = 650 м, d_3 = 150 мм, l_3 = 750 м. Місцевими опорами знехтувати, абсолютну шорсткість труб прийняти Δ = 1 мм.



Розв’язання. Напір H повністю витрачається на подолання опорів трубопроводу, тому для послідовно з’єднаних труб:

$$H = \left(l_1 \cdot A_1 + l_2 \cdot A_2 + l_3 \cdot A_3\right) \cdot Q^2.$$

З табличних даних, залежно від діаметра і шорсткості трубопроводу, визначаємо питомі опори кожної ділянки: A_1 = 7,87 с^2/м^6, A_2 = 16,1 с^2/м^6, A_3 = 36,2 с^2/м^6. Звідси можна визначити витрати води через трубопровід:

$$Q = \sqrt{\frac{H}{\sum_{i=1}^{3} l_i A_i}} = \sqrt{\frac{12}{900 \cdot 7{,}87 + 650 \cdot 16{,}1 + 750 \cdot 36{,}2}} = 0{,}0164 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Втрати напору на першій ділянці:

$$h_1 = l_1 \cdot A_1 \cdot Q^2 = 900 \cdot 7{,}87 \cdot 0{,}0164^2 = 1{,}9 \text{м}.$$

Втрати напору на другій ділянці:

$$h_2 = l_2 \cdot A_2 \cdot Q^2 = 650 \cdot 16{,}1 \cdot 0{,}0164^2 = 2{,}8 \text{м}.$$

Втрати напору на третій ділянці:

$$h_3 = l_3 \cdot A_3 \cdot Q^2 = 750 \cdot 36{,}2 \cdot 0{,}0164^2 = 7{,}3 \text{м}.$$

Відповідь. Втрати напору на кожній ділянці h_1 = 1,9 м, h_2 = 2,8 м, h_3 = 7,3 м.

ЛЕКЦІЯ № 7. РІВНЯННЯ ГАЗОСТАТИКИ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ПОТОКУ ГАЗУ

І. РІВНЯННЯ СТАНУ ТА НЕРОЗРИВНОСТІ ДЛЯ ГАЗУ

Параметри газу, які при стисканні та розширенні змінюються, пов'язані між собою рівнянням Менделєєва-Клапейрона для ідеального газу, тобто для будь-якого газу при тиску до 10 МПа:

$$PW = \frac{m}{\mu} RT \text{, або } P = \frac{m}{W} \cdot \frac{R}{\mu} T = \rho R_m T \text{,} \qquad (7.1)$$

де P - абсолютний тиск, W - об'єм газу, T - абсолютна температура, ρ - густина газу, μ - молярна маса газу, R - молярна газова стала $R = 8{,}31441$ Дж/(моль·К), R_m - газова стала певного газу. Для повітря (див. таблицю 1.2) R_m = 286,7 Дж/(кг·К), для природного газу R_m = 519,6 Дж/(кг·К).

Рух газу в газопроводах може відбуватися при таких процесах:

- політропному $PW^n = const$ - враховується теплообмін між газом, газопроводом і навколишнім середовищем, процес характеризується постійною теплоємністю;
- адіабатичному $PW^k = const$ - без теплообміну з навколишнім середовищем;
- ізотермічному $PW = const$ - при постійній температурі.

Показник політропи змінюється в межах $n = 1{,}15 \div 1{,}8$ залежно від умов теплообміну між газом, газопроводом і навколишнім середовищем. При інтенсивному теплообміні показник політропи має менше значення. Показник адіабати $k = \frac{C_P}{C_V}$ (C_P - теплоємність газу при постійному тиску, C_V - теплоємність при постійному об'ємі), для повітря k =1,41, для природного газу k =1,31, для інертних газів k =1,67, для багатоатомних газів k =1,33.

При русі газу зі зміною тиску змінюється його густина, але масова витрата вздовж потоку залишається постійною, що призводить до запису рівняння нерозривності у вигляді

$$M = \rho V \omega,$$

або

$$\rho_1 V_1 \omega_1 = \rho_2 V_2 \omega_2 = \rho \omega V = const. \qquad (7.2)$$

II. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ГАЗУ

Для газів (подібно до стисливих рідин) рівняння Бернуллі у диференціальній формі має вигляд:

$$dz + \frac{dP}{\rho g} + \frac{VdV}{g} + dh_{1-2} = 0. \qquad (7.3)$$

Інтегрування його за довжиною l від першого до другого перерізів дає рівняння

$$z_2 - z_1 + \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho g} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \sum h_{1-2} = 0. \qquad (7.4)$$

Інтеграл $\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho g}$ можна визначити, якщо відома залежність $\rho = f(P)$. Для ізотермічного процесу, коли $\rho = \frac{P}{R_m T}$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{R_m T dP}{Pg} = \frac{R_m T}{g} ln P \Big|_{P_1}^{P_2} = \frac{R_m T}{g} ln \frac{P_2}{P_1},$$

і рівняння Бернуллі набуває вигляду

$$z_1 + \frac{R_m T}{g} ln P_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{R_m T}{g} ln P_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}. \qquad (7.5)$$

При політропному процесі $\frac{P_1}{\rho_1^n} = \frac{P_2}{\rho_2^n}$, $\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{n}}$, тому

$$\int_{P_1}^{P_2}\frac{dP}{\rho g}=\frac{n}{n-1}\left(\frac{P_2}{\rho_2 g}-\frac{P_1}{\rho_1 g}\right).$$

Після перетворень отримуємо рівняння Бернуллі

$$z_1+\frac{n}{n-1}\cdot\frac{P_1}{\rho_1 g}+\frac{V_1^2}{2g}=z_2+\frac{n}{n-1}\cdot\frac{P_2}{\rho_2 g}+\frac{V_2^2}{2g}+\sum h_{1-2}. \quad (7.6)$$

При адіабатному процесі показник політропи n замінюється показником адіабати k, але загальний вигляд рівняння (7.6) залишається незмінним.

III. РІВНЯННЯ ГАЗОСТАТИКИ

При рівновазі газу його швидкість V, тому основне рівняння газостатики можна отримати з рівнянь Бернуллі для газів. При ізотермічному процесі рівняння (7.5) перетворюється на

$$z_1+\frac{R_m T}{g}\ln P_1=z_2+\frac{R_m T}{g}\ln P_2, \quad (7.7)$$

або $z_2-z_1=R_m T\,ln\frac{P_1}{P_2}$ (це рівняння визначає розподіл тиску по висоті при рівновазі газу в ізотермічних умовах), а при політропному процесі рівняння (7.6) перетворюється на

$$z_1+\frac{n}{n-1}\cdot\frac{P_1}{\rho_1 g}=z_2+\frac{n}{n-1}\cdot\frac{P_2}{\rho_2 g}. \quad (7.8)$$

IV. РОЗРАХУНОК ГАЗОПРОВОДІВ

Перекачування по трубах газів (природний і штучний гази, повітря, пара) має досить широке застосування для різних цілей (побутових і технічних). У порівнянні з рухом рідини рух газів характеризується низкою особливостей, що зумовлено різницею фізичних властивостей крапельних рідин і газоподібних рідин. З точки зору гідравлічних розрахунків слід розрізняти два випадки:

течія при малих відносних перепадах тиску і течія при великих перепадах (мається на увазі перепад ΔP між початковим і кінцевим перерізами труб, віднесений до середнього тиску). Також треба пам’ятати: при розрахунках течії в трубах газів зазвичай розглядаються втрати не напору, а <u>тиску</u>.

При малих перепадах тиску, коли значення $\dfrac{\Delta P}{P_C}\cdot 100 < 5\%$, де $\Delta P = P_1 - P_2$, $P_C = \dfrac{P_1 + P_2}{2}$ стисненням газу можна нехтувати і прийняти, що густина газу вздовж газопроводу не змінюється. Прикладами таких газопроводів можуть бути вентиляційні системи. У цьому випадку розрахунок проводиться за рівнянням Бернуллі у формі тиску

$$\rho g\left(z_1 - z_2\right) + P_1 - P_2 + \rho\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \Delta P\,. \qquad (7.9)$$

Оскільки густина газу ρ невелика, то $\rho g\left(z_1 - z_2\right) = 0$, а якщо діаметр постійний ($V_1 = V_2$), то рівняння Бернуллі спрощується до

$$P_1 - P_2 = \Delta P\,, \qquad (7.10)$$

де сума втрат тиску $\Delta P = \Delta P_{\Lambda} + \sum \Delta P_{\text{М}} = \left(\lambda\dfrac{l}{d} + \sum\zeta\right)\cdot\dfrac{\rho V^2}{2}$,

тобто до суми втрат на тертя та місцеві втрати. Величина $\rho\dfrac{V^2}{2}$ називається динамічним тиском. Коефіцієнт λ визначається за відомими формулами для нестисливих рідин.

Вентиляційні труби часто мають не круглий переріз, тому замість діаметра в наведене рівняння для ΔP вводять еквівалентний діаметр. До того ж, при розрахунках вентиляції втрати на місцеві опори мають, як правило, більшу величину у порівнянні з втратами на тертя. В довгих газопроводах, навпаки, втрати тиску на місцеві опори невеликі, тому одним з видів опорів, зважаючи на об’єкт, який розраховується, можна нехтувати.

При розрахунках довгих газопроводів, а також трубопроводів стисненого повітря мають місце значні перепади тиску між початковою і кінцевою точками трубопроводу. При цьому, при великих перепадах тиску, коли $\frac{\Delta P}{P_C}\cdot 100$>5%, густина газу суттєво зменшується і збільшуються об’ємні витрати та швидкість. Масові витрати не змінюються. Рух газу навіть при збереженні постійності діаметра по довжині трубопроводу є нерівномірним. Дійсно, згідно з рівнянням нерозривності (7.2), при $\omega = const$ і $\rho V = const$, але тиск газу по довжині трубопроводу зменшується, тобто зменшується його густина, водночас зростає швидкість течії газу, яка в кінцевій точці газопроводу завжди вища, ніж у початковій точці.

Вважається, що у більшості промислових газопроводів проходить ізотермічний процес, при якому T є сталою величиною. За наявності теплообміну між газом та навколишнім середовищем температура газу T може зберігатися постійною по всій довжині газопроводу (ізотермічна течія), що дорівнює температурі навколишнього середовища. Це зазвичай має місце для довгих трубопроводів без теплової ізоляції, тому більшість промислових газопроводів працює в умовах ізотермічної течії.

Для елементарно малої дільниці газу, на якій зміною геометричної висоти можна нехтувати, об’ємну вагу газу та швидкість його течії можна вважати незмінними, диференційне рівняння Бернуллі має вигляд:

$$\frac{dP}{\rho g} + \frac{VdV}{g} = -\lambda \frac{dl}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}. \qquad (7.11)$$

Для інтегрування цього рівняння необхідно знати характер зміни швидкості, об’ємної ваги та коефіцієнта гідравлічного тертя вздовж газопроводу, тобто $V = f_1(l)$, $\rho g = f_2(l)$, $\lambda = f_3(l)$. Після інтегрування цього рівняння з урахуванням (7.1) та (7.2) маємо:

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{2} = \left(\lambda \frac{L}{D} + 2ln\frac{P_1}{P_2}\right) \cdot \frac{M^2}{2\omega^2} R_m T. \qquad (7.12)$$

Величиною $2ln\frac{P_1}{P_2}$ можна знехтувати у порівнянні з $\lambda \frac{L}{D}$, тому

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{2} = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{M^2}{2\omega^2} R_m T, \qquad (7.13)$$

звідки масові витрати $M = \sqrt{\frac{\left(P_1^2 - P_2^2\right) D\omega^2}{\lambda L R_m T}}$.

Коефіцієнт гідравлічного тертя λ визначається за формулами, що використовуються для нестисливих рідин. У випадку турбулентної течії, застосовуючи формулу А.Д.Альтшуля (5.6) з приведенням до нормальних умов (поняття, яке визначається в метрології, має певні відмінності у значеннях) – температура 0°C, тиск 760 мм рт. ст., отримаємо формулу:

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{L} = 1{,}45 \left(\frac{K_{\text{E}}}{D} + 1922 \frac{D\nu}{Q} \right)^{0,25} \cdot \frac{Q^2}{D^5} \rho g,$$

де P_1 і P_2 - абсолютний тиск газу на початку та в кінці газопроводу, ат; L - його довжина, км; D - діаметр трубопроводу, см; K_{E} - еквівалентна шорсткість стінок трубопроводу, см; ρ - густина газу, кг/м^3; Q - об’ємна витрата газу, м^3/година; ν - кінематичний коефіцієнт в’язкості, м^2/с, приведений до нормальних умов.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА № 1. Визначити тиск повітря на висоті 200 м над рівнем моря, якщо при температурі t=27°C тиск на рівні моря атмосферний.

Розв’язання. За формулою (7.1) визначаємо густину повітря з урахуванням, що для нього P_1=101325 Па, R_m=286,7 Дж/(кг·К).

Тоді $\rho = \frac{P}{R_m T} = \frac{101325}{286{,}7 \cdot \left(273{,}15 + 27\right)}$=1,18 кг/м^3. Для постійної густини розподіл тиску за висотою визначається: $P_2 = P_1 + \rho g\left(z_1 - z_2\right) = P_1 - \rho g\left(z_2 - z_1\right)$ (аналогічно до нестисливої рідини). Остаточно $P_2 = 101325 - 1{,}18 \cdot 9{,}81 \cdot 200$ =99010 Па.

Відповідь. Тиск дорівнює 99010 Па.

ЗАДАЧА № 2. Визначити висоту ізотермічної атмосфери та політропічної атмосфери.

Розв'язання. За формулою (7.7) визначаємо $H = z_2 - z_1 = R_m T \, ln \dfrac{P_1}{P_2}$. P_1 і z_1 - тиск і відмітка на рівні моря. В найвищій точці P_2 = 0. Оскільки при $P_2 \to 0$ $ln \dfrac{P_1}{P_2} \to \infty$, висота H ізотермічної атмосфери дорівнює нескінченності. Для знаходження висоти політропічної атмосфери тиск на рівні моря приймаємо P_1=101325 Па, густина ρ=1,29 кг/м^3, показник політропи n= 1,4. З рівняння (7.8) з урахуванням P_2=0 можна отримати

$$z_2 - z_1 = H = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{P_1}{\rho g} = \frac{1{,}4}{1{,}4-1} \cdot \frac{101325}{1{,}29 \cdot 9{,}81} = 28023 \text{ м.}$$

Відповідь. При ізотермічному стані висота атмосфери H дорівнює нескінченності, при політропному стані висота атмосфери H дорівнює приблизно 28 км.

ЛЕКЦІЯ № 8. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ НЕУСТАЛЕНОГО РУХУ РІДИНИ. ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР В ТРУБОПРОВОДІ

І. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ НЕУСТАЛЕНОГО РУХУ РІДИНИ

Неусталеним (нестаціонарним) називають такий рух рідини, при якому швидкість, витрати, тиск в окремих точках потоку з часом змінюються. Неусталений рух рідини відбувається при швидкому вмиканні та вимиканні подачі рідини в установках пожежогасіння, при різкому відкритті та закритті кранів у водопровідній мережі, при пуску та зупинці насосів.

Під час нестаціонарного руху рідини в трубопроводі, тобто під час руху з прискоренням, в ньому діє інерційний напір h_i, який для труби постійного діаметра обчислюється за формулою $h_i = \dfrac{a_{\text{P}} l}{g}$, де a_{P} - прискорення рідини, l - довжина трубопроводу.

Рівняння Бернуллі в цьому випадку має вигляд:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{1-2} \pm h_i. \qquad (8.1)$$

Члени цього рівняння представляють суму п'єзометричного $z + \dfrac{P}{\rho g}$, швидкісного $\dfrac{\alpha V^2}{2g}$ та інерційного h_i напорів. При розгоні потоку напір h_i є додатним (h_i>0), при гальмуванні напір h_i є від'ємним (h_i<0).

ІІ. ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР В ТРУБАХ

Гідравлічний удар – це різке збільшення тиску в рідині, що виникає в трубопроводі при миттєвій зміні швидкості руху.

Процес характеризується чергуванням різких підвищень і знижень тиску, що відбуваються за досить малий проміжок часу. Наприклад, при раптовій зупинці насоса, що має привід від електродвигуна, потік води в напірному трубопроводі спочатку зупиняється, а потім під дією гідростатичного тиску і сили ваги змінює напрямок і спрямовується до насоса, зустрічаючи на своєму шляху зворотний клапан. При закритті клапана відбудеться гідравлічний удар, що миттєво підвищить тиск у трубопроводі. Зміна швидкості руху рідини як за напрямом, так і за величиною, а тиску – у бік збільшення та зменшення у порівнянні з початковим характеризує цей процес як коливальний.

Вперше гідравлічний удар в трубах описаний М.Є.Жуковським, який у 1898 році дав теоретичне обґрунтування цього явища і запропонував метод його розрахунку. Розглянемо явища, що відбуваються в рідині, яка рухається під тиском $P_{\rm O}$ з постійною швидкістю V при раптовому закритті крана (на рисунку 8.1 цифрами позначені: 1 – напірний резервуар, 2 - трубопровід, 3 – кран, ω - площа отвору, через який вода поступає з резервуара до труби, l - довжина трубопроводу).

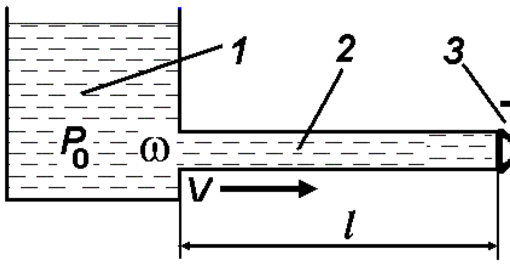


Рисунок 8.1.

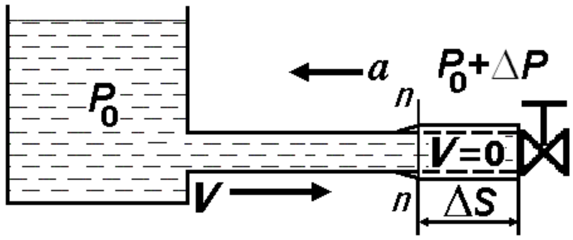


Рисунок 8.2.

Якби рідина була абсолютно нестислива, а труба абсолютно тверда і нездатна до деформацій, то рідина зупинилася б по всій трубі одночасно. У дійсності, внаслідок деякого стискання рідини і деформації стінок труби, рідина зупиняється поступово; спочатку зупиняється шар ΔS, розташований безпосередньо в крані, потім наступний і так далі (Рисунок 8.2). Під час зупинки шарів рідини її кінетична енергія переходить в деформацію стінок труби (труба навколо крану розшириться) і деформацію самої рідини (тиск біля крану підвищується на величину ΔP, сягаючи $P_{\rm O}+\Delta P$). На зупинені шари рідини будуть набігати наступні, викликаючи стиск рідини та зростання тиску, який буде з деякою швидкістю поширюватися у бік, протилежний напряму швидкості руху рідини. Перехідна область в перерізі $n-n$ називається ударною хвилею, а швидкість переміщення цього перерізу (швидкість поширення пружних деформацій труби) називається швидкістю поширення ударної хвилі і позначається a. Такий процес відбувається за проміжок часу $0 < t < \frac{l}{a}$.

В момент $t = \frac{l}{a}$ вся труба стає розширеною, рідина стиснутою і нерухомою (рисунок 8.3). Такий стан нерівноважний. Оскільки в резервуарі тиск P_O, а в трубі $P_O + \Delta P$, то рідина почне рухатися у бік меншого тиску, тобто з труби в резервуар (рисунок 8.4). Цей процес починається від початку труби, рідина почне перетікати з труби в резервуар з деякою швидкістю V, а переріз $n - n$ (ударна хвиля) почне переміщуватися у напрямі крана зі швидкістю a. При цьому тиск в трубі буде вирівнюватися з тиском у резервуарі, знижуючись до P_O. Цей процес відбувається за проміжок часу $\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$ (рисунок 8.5), завершуючи першу фазу гідравлічного удару – фазу підвищеного тиску в трубі.

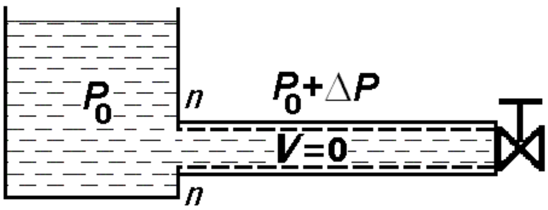


Рисунок 8.3.

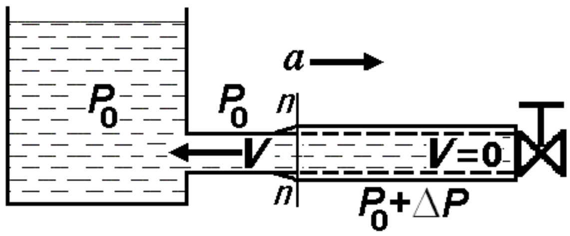


Рисунок 8.4.

Енергія деформації рідини переходить у кінетичну енергію, і рідина набуває деякої швидкості V, але спрямованою у зворотний бік у порівнянні з початковим напрямом руху. В усій трубі встановлюється тиск P_O. За інерцією рідина продовжує рухатися до початку труби, зазнаючи деформації розтягання, що призводить до зменшення тиску навколо крана до $P_O - \Delta P$ (рисунок 8.6).

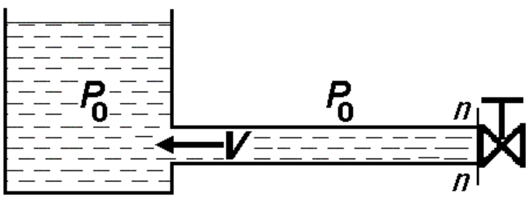


Рисунок 8.5.

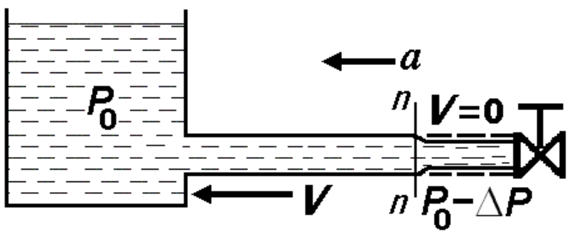


Рисунок 8.6.

В інтервалі $\frac{2l}{a} < t < \frac{3l}{a}$ виникає зворотна ударна хвиля, яка рухається від крана до початку труби зі швидкістю a, за фронтом хвилі залишається стиснута труба. Кінетична енергія знову перетворюється в енергію деформації, але тепер стискання. В момент часу $t = \frac{3l}{a}$ вся труба стає стиснутою, ударна хвиля досягає початку труби. Тиск в резервуарі вищий у порівнянні з фронтом (рисунок 8.7). Через це шари рідини під дією перепаду тиску починають рухатися у напрямі крана (рисунок 8.8) з деякою швидкістю V, тиск збільшується до величини P_O. В інтервалі часу $\frac{3l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ відбувається процес вирівнювання тиску в трубі. При цьому рух ударної хвилі проходить зі швидкістю a від початку труби до крана. В момент часу $t = \frac{4l}{a}$ ударна хвиля сягає кінця труби, завершуючи другу фазу гідравлічного удару – фазу зниженого тиску в трубі.

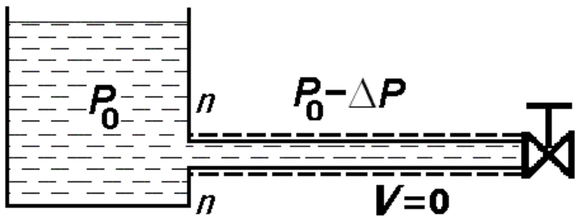


Рисунок 8.7.

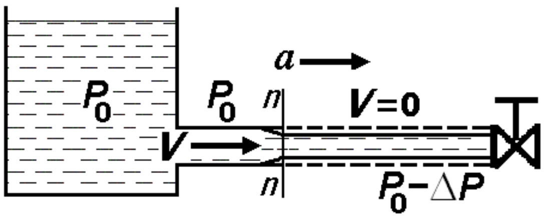


Рисунок 8.8.

Далі весь процес починається знову. Протікання гідравлічного удару у часі можна проілюструвати діаграмою на рисунку 8.9.

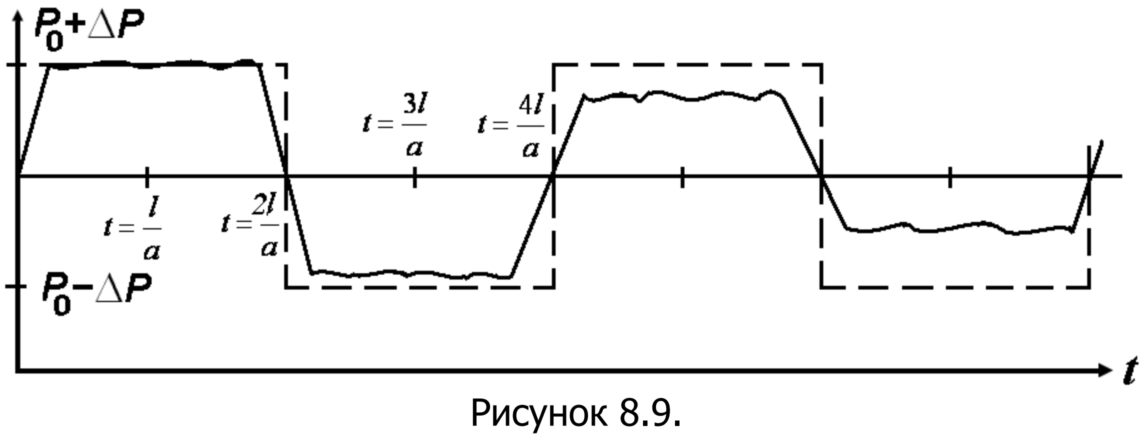


Рисунок 8.9.

Штриховими лініями показано теоретичну зміну тиску біля крана, а суцільною лінією дійсний вигляд картини зміни тиску за часом. При цьому затухання коливань тиску від $P_О + \Delta P$ до $P_О - \Delta P$ на першому періоді і далі, наближаючись до початкового тиску $P_О$, відбувається внаслідок втрат енергії рідини на подолання сил тертя та переміщення в резервуар, деформації стінок труби. Підвищення тиску сприяє виникненню додаткових напружень в матеріалі труби – радіальних і окружних, що може призвести до розриву труби.

III. ПІДВИЩЕННЯ ТИСКУ В ТРУБОПРОВОДАХ ПІД ЧАС ГІДРАВЛІЧНОГО УДАРУ

Визначимо величину зміни тиску ΔP. Нехтуючи силами тертя і ваги, відповідно до теореми про зміну кількості руху запишемо залежність

$$F \cdot \Delta t = mV - mV_S, \tag{8.2}$$

де F - сила тиску рідини в шарі ΔS, Δt - час утворення шару ΔS, m - маса рідини в зупиненому шарі, V - початкова швидкість рідини в трубі, V_S - швидкість у зупиненому шарі, котра дорівнює нулю. У свою чергу $F = \Delta P \cdot \omega$, $m = \rho\omega \cdot \Delta S$, де ω - площа перерізу труби, тоді

$$\Delta P = \rho V \frac{\Delta S}{\Delta t}, \tag{8.3}$$

позначаючи через $\frac{\Delta S}{\Delta t} = a$ швидкість поширення ударної хвилі, остаточно запишемо формулу М.Є.Жуковського

$$\Delta P = \rho a V. \tag{8.4}$$

Швидкість поширення ударної хвилі визначається як

$$a = \sqrt{\frac{E_Р}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{E_Р \cdot d}{E_Т \cdot \delta}}}, \tag{8.5}$$

де $E_{\text{Р}}$ - модуль пружності рідини, Па; ρ - густина рідини, кг/м^3; d - внутрішній діаметр труби, м; $E_{\text{Т}}$ - модуль пружності матеріалу труби, Па; δ - товщина стінок труби, м. Під час розрахунків, зважаючи на співвідношення у знаменнику d/δ двох лінійних величин, суворої вимоги до кожної з них щодо дотримання розмірності системи SI не існує. Тобто ці величини можна підставляти до формули в будь-яких лінійних (можна позасистемних одиницях), але обов’язково в однаковій розмірності, наприклад, в сантиметрах або міліметрах.

Якщо вважати матеріал труби абсолютно непружнім ($E_{\text{Т}} \to \infty$), то формула (8.5) перетворюється на $a = \sqrt{\dfrac{E_{\text{Р}}}{\rho}}$ і швидкість поширення ударної хвилі в цьому випадку дорівнює швидкості поширення звука в рідині.

Для води $E_{\text{Р}} \approx 2 \cdot 10^9$ Па, $\rho = 10^3$ кг/м^3, тому швидкість $\sqrt{\dfrac{E_{\text{Р}}}{\rho}} \approx 1425$ м/с. Для різного матеріалу труб можна обчислити величину $E_{\text{Р}}/E_{\text{Т}}$: сталеві - $E_{\text{Р}}/E_{\text{Т}}$ =0,01; чавунні - $E_{\text{Р}}/E_{\text{Т}}$ =0,02; бетонні - $E_{\text{Р}}/E_{\text{Т}}$ =0,1; азбестоцементні - $E_{\text{Р}}/E_{\text{Т}}$ =0,11; дерев’яні - $E_{\text{Р}}/E_{\text{Т}}$ =0,2; вінілпластові - $E_{\text{Р}}/E_{\text{Т}}$ =0,68...0,73; поліетиленові - $E_{\text{Р}}/E_{\text{Т}}$ =1,0...1,45.

Неважко відмітити, що за рівних умов (геометричних розмірів) швидкість поширення ударної хвилі значно вища в трубах, зроблених з матеріалів, у яких модуль пружності вищий. Внаслідок цього і підвищення тиску в них теж буде значно вищим.

Формула Жуковського справедлива для прямого гідравлічного удару, коли час закриття $t_{зак}$ крана або засувки менший за $t_{фаз}$ - фазу гідравлічного удару, тобто за час подвійного пробігу ударної хвилі вздовж трубопроводу довжиною l

$$t_{фаз} = \frac{2l}{a}. \tag{8.6}$$

При $t_{зак} > t_{фаз}$ виникає непрямий гідравлічний удар, і тоді підвищення тиску визначається за формулою М.З.Френкеля

$$\Delta P = \rho a V \cdot \frac{t_{фаз}}{t_{зак}}. \tag{8.7}$$

З цієї формули можна зробити деякі висновки. По-перше, підвищення тиску при непрямому ударі завжди буде меншим, ніж при прямому, що зумовлено співвідношенням $t_{зак} > t_{фаз}$. По-друге, чим повільніше закривається кран, тим менше будуть підвищення тиску в трубі, тобто цим можна послабити негативний вплив гідравлічного удару.

Для запобігання ушкодження трубопроводів при виникненні гідравлічного удару вживають різні заходи. Найбільш ефективний метод зниження тиску – це усунення можливості прямого гідравлічного удару при збільшенні часу закриття запірної і регулюючої апаратури. На водопровідних лініях встановлюють повітряні ковпаки, що дозволяє зменшити тиск за рахунок стиснення повітря у ковпаку.

Гідравлічний удар може також зіграти корисну роль. Якщо в трубі існує пошкодження, для виявлення його місця необхідно розкопати значну ділянку трубопроводу. Уникнути важкої роботи та точно визначити положення течі дозволяє невеликий гідравлічний удар. Він створить хвилю, що рухається по трубопроводу, яка, відбившись від місця пошкодження, повернеться через деякий час. За цим часом легко визначити відстань до пошкодженої ділянки.

Газ у порівнянні з рідиною має значно меншу густину та й швидкість поширення звука в ньому у декілька разів менша, тому газ, навіть знаходячись під більшим тиском, не може створювати удар, подібний гідравлічному. Тому конструкція газового крана значно простіша – поворот важеля на чверть оберту одразу перекриває рух газу по трубі.

Підвищення тиску в рідині на ΔP призводить до виникнення додаткових напружень в трубі, визначення яких розглядається в курсах «Опору матеріалів» або «Теорії пружності». Розглянемо ділянку циліндричної труби круглого перерізу з внутрішнім діаметром d і товщиною стінки δ, яка навантажена внутрішнім тиском (рисунок 8.10). Слід розрізняти напружений стан тонкостінної і товстостінної оболонки, якими можна змоделювати реальний об’єкт.

Циліндр вважається товстостінним, якщо товщина його стінки перевищує 0,1 середнього радіуса циліндра. При розрахунках тонкостінних циліндрів вважається, що в окружному напрямі напруження постійні за товщиною стінки, а в радіальному взагалі відсутні. Ці припущення неприпустимі для товстостінних циліндрів.

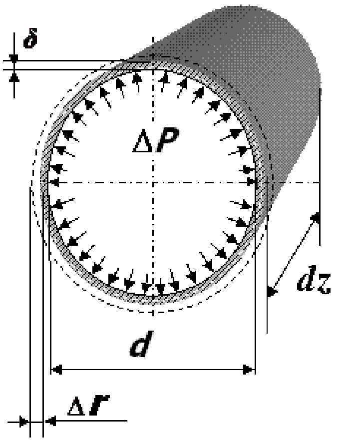


Рисунок 8.10.

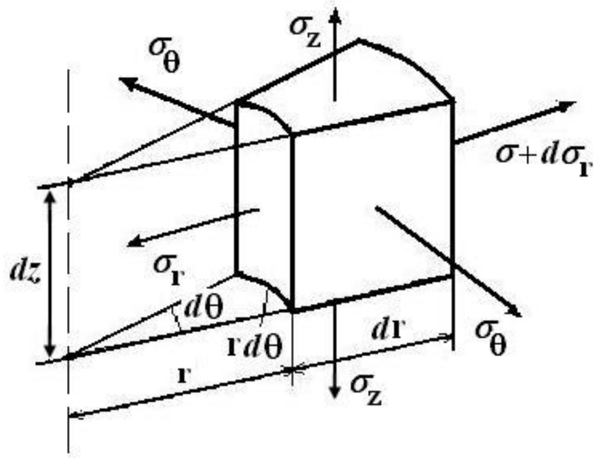


Рисунок 8.11.

Розглянемо циліндр з внутрішнім радіусом $r_1 = r = \dfrac{d}{2}$ і зовнішнім $r_2 = r + \delta$. Через осьову симетрію циліндра та навантаження напруження та деформації також симетричні відносно його осі. В трубі довжиною dz виділимо елемент площинами, що проходять через вісь циліндра та утворюють між собою кут $d\theta$, і двома співвісними циліндричними поверхнями з радіусами r і $r + dr$ (рисунок 8.11). Грані елемента не будуть перекошуватися, на них не діють дотичні напруження. Нормальні напруження на циліндричних поверхнях елемента радіусів r_1 і r_2 позначаються σ_r (радіальні), на плоских гранях - σ_θ (тангенціальні або окружні). При внутрішньому тиску ΔP приріст напружень в інтервалі $r_1 \le r \le r_2$ буде:

$$\Delta\sigma_r = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right)\Delta P, \quad \Delta\sigma_\theta = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right)\Delta P. \quad (8.8)$$

Радіальні напруження всюди стискаючі, окружні – розтягаючі, вони сягають максимального значення на внутрішній поверхні циліндра (радіальні поступаються окружним):

$$\Delta\sigma_r(r = r_1) = -\Delta P, \;\; \Delta\sigma_\theta(r = r_1) = \frac{1+k^2}{1-k^2}\Delta P, \quad k = \frac{r_1}{r_2}. \qquad (8.9)$$

За умов відсутності поздовжньої сили N напруження σ_z в поперечних перерізах не виникають. Далі за однією з теорій міцності визначають еквівалентне напруження та перевіряють виконання умов міцності.

Частіше у системах водопостачання зустрічаються конструкції, які можна з точки зору їхнього розрахунку на міцність віднести до тонких оболонок. Для тонкостінних циліндрів під дією внутрішнього тиску залишаються окружні напруження σ_θ, вздовж поздовжньої осі діють меридіональні напруження σ_m, а радіальне σ_r змінюється від 0 на зовнішній поверхні до ΔP на внутрішній, але воно значно поступається першим двом, тому ним нехтують і вважають, що труба знаходиться в умовах плоского напруженого стану. Через тонкість стінок можна для розрахунків брати відповідні радіуси внутрішньої або зовнішньої поверхонь. Тоді:

$$\Delta\sigma_\theta = \frac{\Delta P \cdot d}{2\delta}, \; \Delta\sigma_m = \frac{\Delta P \cdot d}{4\delta}. \qquad (8.10)$$

Останні співвідношення пояснюють руйнування труб вздовж твірної. Як і в попередньому випадку, найнебезпечнішими є окружні напруження, тому саме їхні розрахунки необхідні для визначення наслідків гідравлічного удару в трубопроводі.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА № 1. По чавунному трубопроводу d=300 мм, довжиною l=3 км подається вода зі швидкістю V=1,3 м/с. Товщина стінки труби δ=12,5 мм. Визначити підвищення тиску ΔP для двох випадків: 1) чс закриття засувки $t_{зак}$ =4 с; 2) час закриття засувки $t_{зак}$ =8 с.

Розв'язання. За формулою (8.5) знаходимо швидкість поширення ударної хвилі, підставляючи лінійні розміри в міліметрах:

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^9}{10^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}02 \cdot \frac{300}{12{,}5}}} = 1171 \text{ м/с.}$$

За формулою (8.6) знайдемо фазу гідравлічного удару $t_{фаз} = \frac{2 \cdot 3000}{1171}$=5,12 с. Тому у першому випадку $t_{зак} < t_{фаз}$ (4<5,12), отже удар прямий, для визначення ΔP застосовуємо формулу Жуковського (8.4) $\Delta P = 10^3 \cdot 1{,}3 \cdot 1171$= 1522300 Па=1,52 МПа. У другому випадку $t_{зак} > t_{фаз}$ (8>5,12), отже удар непрямий, для визначення ΔP застосовуємо формулу Френкеля (8.7) $\Delta P = 10^3 \cdot 1{,}3 \cdot 1171 \cdot \frac{5{,}12}{8}$=975000 Па=0,975 МПа.

Відповідь: Підвищення тиску ΔP при прямому ударі 1,52 МПа, при непрямому 0,975 МПа.

ЗАДАЧА № 2. По сталевому трубопроводу d=200 мм, довжиною l=100 м подається вода з об'ємною витратою Q=200 м^3/годину. Товщина стінки труби δ=10 мм. Визначити підвищення тиску ΔP для двох випадків: 1) час закриття засувки $t_{зак}$ =0,1 с; 2) час закриття засувки $t_{зак}$ =1,0 с.

Розв'язання. За формулою (8.5) знаходимо швидкість поширення ударної хвилі, підставляючи лінійні розміри в міліметрах:

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^9}{10^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}01 \cdot \frac{200}{10}}} = 1300 \text{ м/с.}$$

За формулою (8.6) знайдемо фазу гідравлічного удару $t_{фаз} = \frac{2 \cdot 100}{1300}$=0,154 с. Середня швидкість води в трубі, використовуючи рівняння нерозривності потоку, визначається наступним чином:

$$V = \frac{Q}{3600} \cdot \frac{4}{\pi d^2} = \frac{200 \cdot 4}{3600 \cdot 3{,}1415 \cdot \left(200 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 1{,}77 \text{ м/с.}$$

У першому випадку $t_{зак} < t_{фаз}$ (0,1<0,154), отже удар прямий; для визначення ΔP застосовуємо формулу Жуковського (8.4) $\Delta P = 10^3 \cdot 1{,}77 \cdot 1300$ = 2302134 Па≈ 2,3 МПа. У другому випадку $t_{зак} > t_{фаз}$ (1>0,154), отже удар непрямий; для визначення ΔP застосовуємо формулу Френкеля (8.7) $\Delta P = 10^3 \cdot 1{,}77 \cdot 1300 \cdot \frac{0{,}154}{1}$ =354000 Па =0,354 МПа.

<u>Відповідь</u>: Підвищення тиску ΔP при прямому ударі 2,3 МПа, при непрямому - 0,354 МПа.

<u>ЗАДАЧА № 3.</u> Визначити напруження, що виникають при гідравлічному ударі в чавунному трубопроводі, скориставшись рішенням задачі № 1.

<u>Розв'язання</u>. При підвищенні тиску на ΔP в трубопроводі з діаметром d і товщиною стінок δ виникає приріст окружних напружень $\Delta\sigma_\theta = \frac{\Delta P \cdot d}{2\delta}$. Тому при прямому ударі за умов d =300 мм, δ =12,5 мм, ΔP =1,52 МПа $\Delta\sigma_\theta = \frac{1{,}52 \cdot 300}{2 \cdot 12{,}5}$ =18,24 МПа, при непрямому ударі при ΔP =0,975 МПа $\Delta\sigma_\theta = \frac{0{,}975 \cdot 300}{2 \cdot 12{,}5}$ =11,7 МПа.

<u>Відповідь.</u> Додаткові напруження, що виникають при прямому ударі, $\Delta\sigma_\theta$ =18,24 МПа, при непрямому ударі - $\Delta\sigma_\theta$ =11,7 МПа.

ЛЕКЦІЯ № 9. ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ОТВОРІВ, НАСАДОК І ЧЕРЕЗ КОРОТКІ ТРУБОПРОВОДИ

І. ВИТІКАННЯ РІДИНИ З КРУГЛОГО ОТВОРУ В ТОНКІЙ СТІНЦІ

Задача про витікання рідини через отвори є однією з основних в гідравліці. Її розв'язання зводиться до визначення швидкості витікання та витрати рідини, що витікає. Цей випадок руху характеризується тим, що в процесі витікання запас потенційної енергії, яку має рідина в резервуарі, перетворюється з більшими або меншими втратами в кінетичну енергію вільного струменя або крапель.

Залежно від розмірів і форми розрізняють малі, середні та великі отвори в тонкій і товстій стінці.

Малим називається такий отвір, у якого поперечний розмір (для круглого отвору діаметр d) менший 0,1H, де H - діючий напір. Великим отвором називається такий отвір, у якого поперечний розмір перевищує 0,4H. За умов $d =(0{,}3 \div 0{,}4)\ H$ отвір вважається середнім. Ця класифікація дозволяє зробити висновок про враховування або нехтування зміною тиску по висоті отвору.

Стінка вважається тонкою, коли отвір в ній не впливає на форму та умови витікання струменя (товщина стінки $\delta < 3d$). При $\delta > 3d$ стінка вважається товстою.

Залежно від розташування отвору та умов протікання рідини розрізняють досконале та недосконале, повне та неповне стиснення струменя, витікання із затопленого або незатопленого отвору при постійному та змінному напорі.

Досконале стиснення буде тоді, коли бокові стінки і дно резервуара не впливають на витікання рідини, тобто віддалені від отвору на відстані, яка перевищує потроєний поперечний розмір отвору. Для прямокутного отвору ця відстань дорівнює потроєним значенням розмірів прямокутника.

Стиснення буде недосконалим, коли принаймні одна з бокових стінок або дно будуть віддалені від отвору на відстані, яка менше за потроєний поперечний розмір отвору.

Стиснення струменя може бути повним (по всьому периметру) і неповним, якщо отвір частиною периметру збігається з боковими стінками або дном резервуара.

Отвір вважається незатопленим, якщо витікання рідини відбувається в атмосферу, і затопленим, якщо витікання відбувається під рівень рідини.

Розглянемо випадок сталого витікання рідини через круглий отвір діаметром d у вертикальній тонкій стінці резервуара при постійному напорі H (рисунок 9.1).

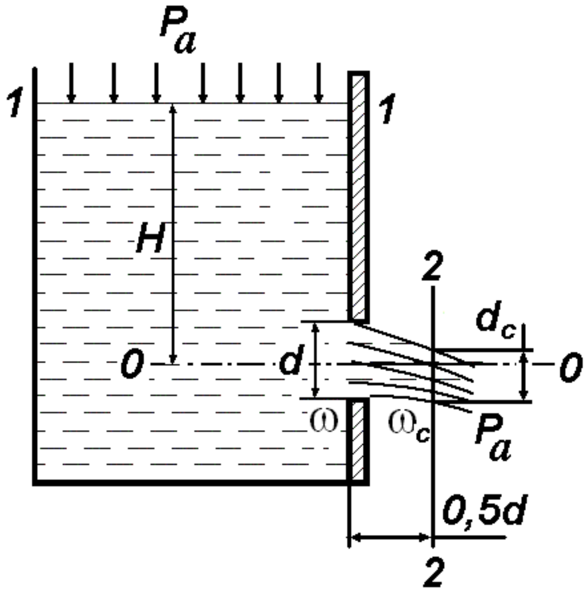


Рисунок 9.1.

На підході рідини до отвору траєкторії частин, що рухаються, мають криволінійну непаралельну форму. В струмені виникають відцентрові сили, під дією яких струмінь звужується, сягаючи найменших розмірів у перерізі 2-2 (приблизно на відстані $0{,}5d$ від площини отвору). Це явище характерне для витікання рідини з отворів в тонкій стінці з гострими кромками.

Ступінь стиснення струменя визначається ***коефіцієнтом стиснення***

$$\varepsilon = \frac{\omega_C}{\omega}, \tag{9.1}$$

де ω - площа перерізу отвору, ω_C - площа перерізу стисненого струменя. Внаслідок непаралельності траєкторій і кривизни елементарних струминок рідини для ділянки між отвором і стисненим струменем рівняння Бернуллі в звичайній формі застосовувати неможливо. Тому при виводі формул для визначення швидкості витікання вказане рівняння складають не для перерізу в самому отворі, а для стисненого струменя на деякій відстані від нього – там, де рух рідини змінюється повільно, траєкторії струминок можна вважати паралельними, а тиск розподіляється за гідростатичним законом.

Для визначення швидкості витікання рідини з отвору запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2 відносно горизонтальної площини 0-0 (аналогічно рівнянню (4.16))

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h. \qquad (9.2)$$

Втрати напору між перерізами визначаються за формулою Вейсбаха (5.10)

$$h = \zeta_O \cdot \frac{V_2^2}{2g}, \qquad (9.3)$$

де ζ_O - коефіцієнт опору отвору. Оскільки $z_1 = H$, $z_2 = 0$, $V_1 = 0$, $P_1 = P_2 = P_a$, то рівняння (9.2) з урахуванням (9.3) спрощується

$$H = \frac{V_2^2}{2g} + \zeta_O \frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \cdot (1 + \zeta_O), \qquad (9.4)$$

звідки швидкість витікання дорівнює

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_O}} \sqrt{2gH} = \varphi\sqrt{2gH}, \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_O}}, \qquad (9.5)$$

де φ - ***коефіцієнт швидкості***. Якщо φ =1, тобто відсутній опір отвору – відверта ідеалізація реального процесу, отримуємо теоретичну швидкість витікання рідини через отвір $V_{\text{ТЕОР}} = \sqrt{2gH}$. Водночас з (9.5) можна отримати коефіцієнт опору як функцію φ у вигляді $\zeta_O = \frac{1}{\varphi^2} - 1$. Витрата рідини, що витікає з отвору, дорівнює для стисненого струменя

$$Q = V_2 \omega_C = \varepsilon\varphi\omega\sqrt{2gH} = \mu\omega\sqrt{2gH}, \quad \mu = \varepsilon \cdot \varphi. \qquad (9.6)$$

Добуток $\varepsilon \cdot \varphi$ називають ***коефіцієнтом витрати*** і позначають μ, тоді остаточно $Q = \mu\omega\sqrt{2gH}$. Використовуючи останню формулу, можна визначити напір H перед отвором:

$$H = \frac{Q^2}{\mu^2 \omega^2 2g}. \qquad (9.7)$$

Коефіцієнти μ і ε визначають дослідним шляхом, φ - після обчислення. Формула для визначення витрати рідини через боковий отвір має той же вигляд, що й для донного отвору. Допущені при виводі цієї формули неточності виправляються уточненням значень коефіцієнта витрати μ.

Слід зазначити, що знаходження отвору відносно дна та стінок резервуара істотно впливає на досконалість стиснення струменя, що призводить до певних обмежень в застосуванні отриманих формул.

Часто при досконалому стисненні для визначених вище коефіцієнтів стиснення, витрати і швидкості приймають середні значення, знайдені дослідним шляхом $\varepsilon = 0{,}64$, $\mu = 0{,}62$, $\varphi = 0{,}97$.

Для затопленого отвору формули для визначення швидкості та витрати мають той самий вигляд, що і для незатопленого отвору. Різниця полягає в тому, що під величиною H в формулі (9.6) розуміють не напір, а різницю рівнів в резервуарах $\Delta H = H_1 - H_2$. Числові значення коефіцієнтів стиснення, швидкості та витрати залишаються практично незмінними.

II. ВИТІКАННЯ РІДИН З НАСАДОК

Насадкою називається приєднана до отвору в стінці резервуара коротка трубка того ж діаметра, що й отвір, з метою зміни витрати і швидкості витікання струменя. Зазвичай довжина насадки $l = 3 \div 4d$. Найбільш поширеними типами насадок є (рисунок 9.2):

1) циліндрична насадка – зовнішня (а) та внутрішня (б);
2) конічна насадка – збіжна (в) та розбіжна (г);
3) коноїдна насадка криволінійного контуру, яка має форму стисненого струменя (д).

На рисунку 9.2 чітко видно, що відбувається зі струменем при вході в насадку, як деформуються окремі струминки, і в якому вигляді струмінь виходить з насадки.

В циліндричній зовнішній при безвідривному режимі витікання струмінь після входу в насадку стискається аналогічно до витікання через отвір у тонкій стінці. В проміжку між стиснутим перерізом і стінками насадки утворюється вихрова зона. Потім струмінь розширюється до розмірів отвору, виходячи з насадки повним перерізом ($\varepsilon=1$), $\mu=\varphi$, $\varphi\approx0{,}82$ при $\varsigma=0{,}5$. Ця насадка збільшує витрату і зменшує швидкість витікання у порівнянні з круглим отвором в тонкій стінці.

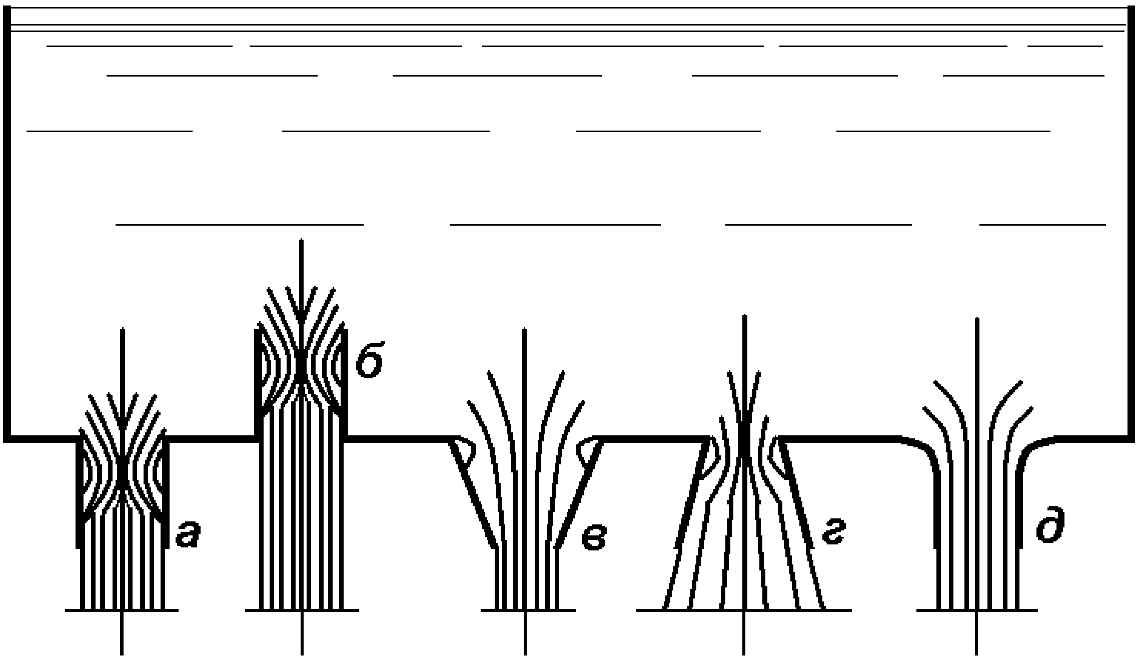


Рисунок 9.2.

Приєднання насадки з середини утворює циліндричну внутрішню насадку. На вході стискання струменя є більшим, ніж у зовнішньої циліндричної, розширяючись на виході до повного перерізу ($\varepsilon=1$), $\mu=\varphi$, $\varphi\approx0{,}71$. Коефіцієнт витрати для цієї насадки менше, ніж для зовнішньої. Тому для зменшення втрат при вході в трубу необхідно слідкувати за тим, щоб труба не виступала за внутрішню поверхню резервуара. Більш раціональним є приєднання труби до стінки резервуара за допомогою зовнішніх кілець.

Для конічної збіжної насадки стискання струменя на вході менше, ніж для зовнішньої циліндричної, натомість з'являється зовнішнє стискання на виході з насадки, після чого в подальшому рідина тече паралельними струменями. Через зменшене внутрішнє стискання втрати напору тут менші, ніж в зовнішній циліндричній, швидкість більша, коефіцієнт стискання струменя на вході менший.

Для конічної розбіжної насадки внутрішнє стискання значно більше, ніж у конічній збіжній і циліндричних. Через це істотно зростають втрати і зменшується коефіцієнт швидкості. Зовнішнє стискання при виході з насадки відсутнє, тому $\varepsilon=1$. При конусності $\theta > 12^\circ$ насадка припиняє працювати повним перерізом, відбувається зрив струменя, він витікає, не торкаючись стінок, і течія відбувається, як з отвору в тонкій стінці. Якщо віднести коефіцієнт витрати не до вихідного перерізу, а до вхідного, то отримують значно більш високі значення коефіцієнта витрати.

В коноїдній насадці, яка має контури у формі контурів струменя, що витікає через отвір в тонкій стінці, коефіцієнти швидкості та витрати є найбільшими з усіх насадок. На практиці вони порівняно рідко використовуються, головним чином через великі труднощі виготовлення. Замість них використовуються конічні збіжні насадки.

Таблиця 9.1.

Тип насадки	ε	φ	μ
Круглий отвір в тонкій стінці	0,64	0,97	0,62
Зовнішня циліндрична	1,00	0,82	0,82
Внутрішня циліндрична	1,00	0,707	0,707
Конічна розбіжна при конусності $\theta = 5\text{-}7^\circ$	1,00	0,45÷0,50	0,45÷0,50
Конічна збіжна при конусності $\theta = 13^\circ 24'$	0,98	0,96	0,94
Коноїдна	1,00	0,98	0,98

Аналізуючи процеси, що відбуваються під час проходження рідини через насадку, зазначимо, що швидкість втрачається через чергування стискання і розширення потоку, що можна моделювати за допомогою відповідних місцевих опорів (лекція №5). Розрахункові формули для швидкості витікання та витрати рідини з насадки відрізняються від формул, які були отримані при дослідженні витікання рідини через отвір в тонкій стінці, тільки величинами коефіцієнтів ε, φ, і як наслідок, μ. В таблиці 9.1 наведені величини коефіцієнтів ε, φ, μ для різних насадок (рідина – вода).

Значення коефіцієнтів ζ_0, ε, φ, μ залежать від числа Re і визначаються з номограм або таблиць.

У практичних розрахунках для визначення витрат рідини з пожежних стволів використовується формула

$$Q = P\sqrt{H}\,, \quad P = \mu\omega\sqrt{2g}\,, \tag{9.8}$$

де P - провідність насадки. Напір перед насадкою $H = SQ^2$, де S - опір насадки:

$$S = \frac{1}{\mu^2 \omega^2 2g} = \frac{1}{P^2}. \tag{9.9}$$

Значення P і S знаходять з таблиць.

Насадки мають широке застосування для різних технічних цілей. Прикладами циліндричних насадок є труби для випуску води з резервуарів і водоймищ, всілякі крани тощо; конічні збіжні насадки застосовуються для отримання великих швидкостей на виході та збільшення сили і дальності польоту струменя рідини в пожежній техніці, в форсунках для подачі палива, гідромоніторах для розмиву ґрунту, фонтанних соплах, соплах активних гідравлічних турбін; конічні розбіжні насадки використовуються для уповільнення течії рідини та, як наслідок, збільшення тиску – в усмоктувальних трубах гідравлічних турбін, трубах під насипом, для уповільнення подачі мастил тощо. Взагалі, останні доцільно використовувати у тих випадках, коли при заданому напорі необхідно збільшити витрату, водночас зменшуючи швидкість витікання рідини.

III. ВИТІКАННЯ РІДИНИ ЧЕРЕЗ КОРОТКІ ТРУБОПРОВОДИ

При розрахунках параметрів витікання рідини через короткі трубопроводи необхідно враховувати як місцеві втрати напору, так і лінійні по всій довжині. Частково це питання вже було розглянуто в розділі II лекції № 6, тому зараз буде зроблено наголос на отриманні коефіцієнтів ε, φ, μ для трубопроводів. Розглянемо схему короткого трубопроводу.

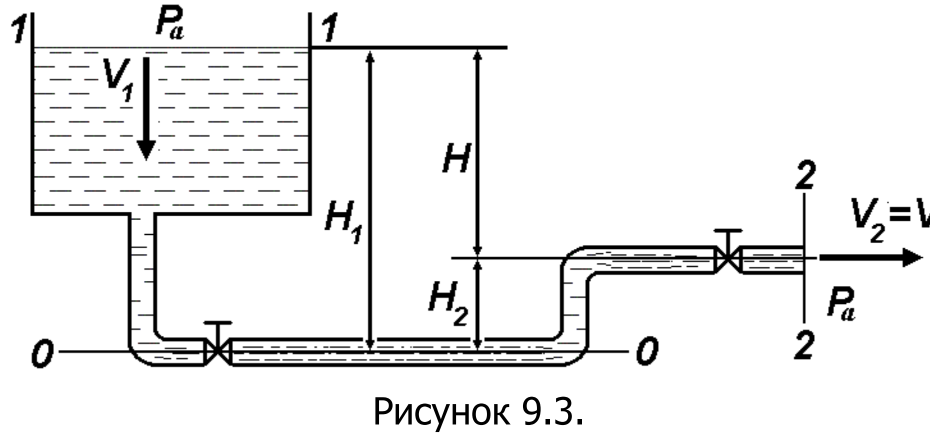


Рисунок 9.3.

Складемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 та 2-2 відносно площини порівняння 0-0:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h. \qquad (9.10)$$

З огляду на те, що $V_1 = 0$, $V_2 = V$, $P_1 = P_2 = P_a$, $H = H_1 - H_2$, одержимо

$$H = \frac{V^2}{2g} + \sum h, \quad \sum h = \frac{V^2}{2g} \cdot \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right). \qquad (9.11)$$

Тоді маємо $H = \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \cdot \frac{V^2}{2g}$, звідки можна знайти швидкість витікання рідини

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} \cdot \sqrt{2gH}. \qquad (9.12)$$

З огляду на (9.5) перший співмножник в (9.12) є коефіцієнтом швидкості

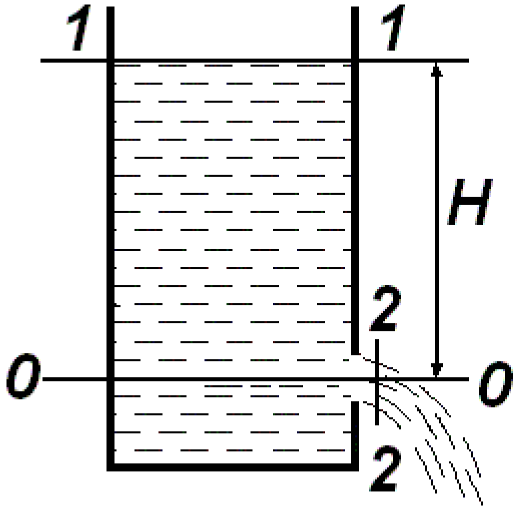
$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} \text{ або } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_C}}, \quad \zeta_C = \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta,$$

де ζ_C - коефіцієнт опору системи. Остаточно отримаємо формулу для визначення швидкості V - $V = \varphi \sqrt{2gH}$, і витрат рідини $Q = \mu \omega \sqrt{2gH}$, де $\mu = \varphi$ - коефіцієнт витрати.

Прикладами коротких трубопроводів служать сифони всмоктувальної лінії насосів, системи аварійного зливу рідин з резервуарів і апаратів тощо.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА № 1. За допомогою рівняння Бернуллі визначити швидкість витікання води з круглого отвору в тонкій стінці відкритого резервуара, якщо отвір знаходиться під напором H=1,8 м, а коефіцієнт опору отвору $\zeta_О$=0,06.



Розв'язання. Рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 (вільна поверхня в резервуарі) та 2-2 (стиснений переріз струменя) (див. рисунок) з урахуванням втрат напору має вигляд

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \zeta_О \frac{V_2^2}{2g}.$$

Вода витікає в атмосферу, отже тиск на поверхні та на виході з резервуара в струмені однаковий $P_1 = P_2 = P_a$. Площина порівняння проходить через центр отвору, тоді $z_1 = H$, $z_2 = 0$. Швидкість $V_1 = 0$, швидкість на виході з отвору позначимо $V_2 = V$. Остаточно запишемо

$$H = \frac{V^2}{2g} + \zeta_О \frac{V^2}{2g} = \left(1 + \zeta_О\right) \cdot \frac{V^2}{2g}.$$

Дійсна швидкість витікання обчислюється за формулою (9.5):

$$V = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_О}} \sqrt{2gH} = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}06}} \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}8} = 5{,}76 \text{ м/с}.$$

Відповідь. Швидкість витікання V =5,76 м/с.

ЗАДАЧА № 2. При дослідженні витікання води з круглого отвору в тонкій стінці діаметром d=10 мм під напором H=2 м вимірювали діаметр стисненого струменя d_C =8 мм і час заповнення десятилітрового (W =10 л) мірного бачка t =32,8 с. Визначити чисельні значення коефіцієнтів стиснення ε, швидкості φ, витрати μ, місцевого опору отвору ζ_O.

Розв’язання. Коефіцієнт стиснення струменя визначаємо за формулою (9.1) $\varepsilon = \frac{\omega_C}{\omega} = \frac{d_C^2}{d^2} = \frac{8^2}{10^2}$ =0,64. Коефіцієнти у виразі для площі отвору скорочуються, розмірність обох діаметрів залишаємо міліметр. Теоретична швидкість витікання $V_{ТЕОР} = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2}$ =6,25 м/с. Дійсна швидкість витікання з урахуванням рівняння нерозривності $V = \frac{W}{t \cdot \omega_C} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{32{,}8} \cdot \frac{4}{3{,}1415 \cdot 0{,}008^2}$ =6,05 м/с. Безумовно, в цьому виразі необхідно всі величини привести до розмірностей системи SI.

Коефіцієнт швидкості $\varphi = \frac{V}{V_{ТЕОР}} = \frac{6{,}05}{6{,}25}$ =0,97. Коефіцієнт витрати $\mu = \varphi \cdot \varepsilon = 0{,}97 \cdot 0{,}64$=0,62. Коефіцієнт опору отвору $\zeta_O = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{0{,}97^2} - 1$=0,06.

Відповідь. Коефіцієнти стиснення ε=0,64, швидкості φ=0,97, витрати μ=0,62, місцевого опору отвору ζ_O=0,06.

ЛЕКЦІЯ № 10. СПОРОЖНЕННЯ РЕЗЕРВУАРІВ

І. СПОРОЖНЕННЯ РЕЗЕРВУАРІВ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРЕРІЗОМ ЗА ВИСОТОЮ

Розглянемо загальний випадок, коли спорожнюється резервуар зі змінним перерізом за висотою, наповнений рідиною з вільною поверхнею, через донний отвір.

У цьому випадку витікання рідини відбуваються при змінному напорі, який постійно зменшується, тобто рух рідини є неусталеним. Однак, якщо напір, а тим самим і швидкість витікання рідини змінюються повільно, то рух рідини безпосередньо у даний момент часу можна вважати усталеним.

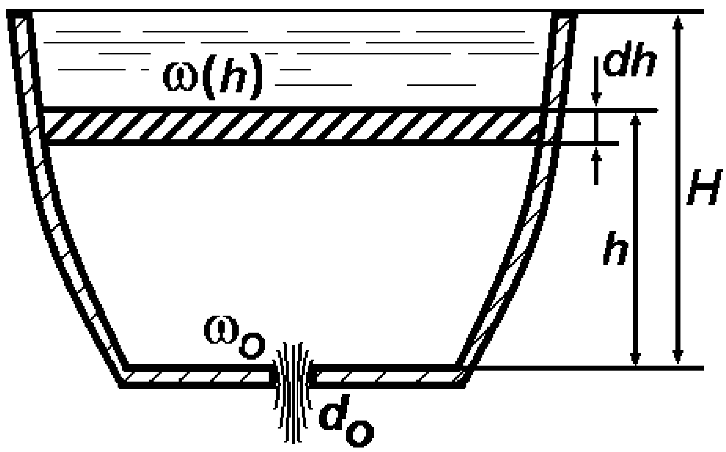


Рисунок 10.1.

Позначимо змінну висоту рідини в резервуарі (рисунок 10.1), яка відраховується від дна, через h, площу перерізу відповідно до цього рівня $\omega(h)$, площу донного отвору ω_o, коефіцієнт витрати отвору μ.

За час dt, протягом якого рівень опуститься на величину dh, із резервуара через круглий отвір площею $\omega_\text{o} = \dfrac{\pi d_\text{o}^2}{4}$ з урахуванням рівняння нерозривності потоку витече кількість рідини

$$dW = Qdt = \omega_\text{O} V dt = \omega_\text{O} \cdot \mu\sqrt{2gh}dt.$$

Водночас рівень в резервуарі знизиться на величину $dh = -\dfrac{dW}{\omega(h)}$. Тому, зрівнюючи вирази для dW,

$$-\omega(h)dh = \omega_\text{o} \cdot \mu\sqrt{2gh}dt.$$

Знак «—» взятий тому, що напір зменшується, тобто додатному приросту dt відповідає від’ємний приріст dh

$$dt = -\frac{\omega(h)}{\omega_O \mu \sqrt{2gh}} dh .$$

Звідси можна визначити час повного спорожнення резервуара висотою H, для чого зінтеґрувати останній вираз в границях між напорами $h = H$ і h =0

$$t = -\int_H^O \frac{\omega(h)}{\omega_O \mu \sqrt{2gh}} dh = \frac{1}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \int_O^H \frac{\omega(h)}{\sqrt{h}} dh . \qquad (10.1)$$

Інтеграл в (10.1) можна обчислити за умов відомого закону залежності площі перерізу від висоти $\omega(h)$, що буде показано на прикладах в розділі II.

II. ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕННЯ ЧАСУ СПОРОЖНЕННЯ РЕЗЕРВУАРІВ РІЗНОЇ ФОРМИ

1. Спорожнення циліндричного (призматичного) резервуара

Для цього найпростішого випадку $\omega(h) = \Omega = const$ і час витікання рідини визначається за формулою

$$t = \frac{\Omega}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \int_O^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2\Omega}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \sqrt{h}\Big|_O^H = \frac{2\Omega}{\omega_O \mu} \sqrt{\frac{H}{2g}} . \qquad (10.2)$$

Ця формула може бути подана у вигляді $t = \frac{2\Omega H}{\omega_O \mu \sqrt{2gH}}$. Чисельник в цьому виразі є подвоєним об’ємом резервуара, а знаменник є об’ємною витратою Q при початковому напорі H, що перетворює формулу на $t = \frac{2W}{Q}$. Бачимо, що час повного спорожнення резервуара в 2 рази більший за час, який необхідний для витікання із резервуара такої ж кількості рідини при початковому постійному напорі.

Для визначення часу неповного спорожнення резервуара (часу зниження рівня рідини від величини H_1 до H_2) необхідно зінтеґрувати (10.2) в інших границях і отримати

$$t = \frac{2\Omega}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2} \right). \qquad (10.3)$$

2. Спорожнення резервуарів у формі зсіченого конуса

Площа перерізу $\omega(h)$ має вигляд $\omega(h) = \pi (r + htg\alpha)^2$ (Рисунок 10.2), конусність резервуара через кут α $tg\alpha = \frac{R - r}{H}$,

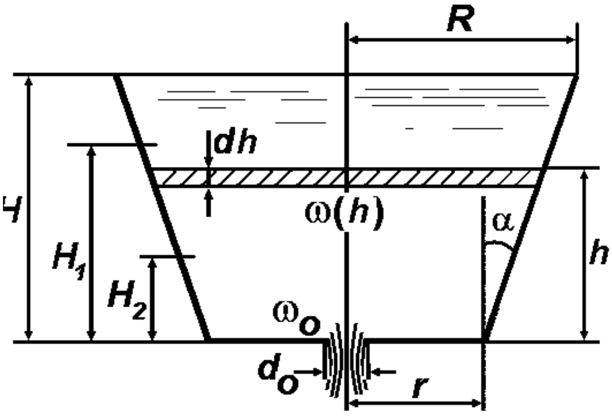


Рисунок 10.2.

де відповідно R і r - радіуси верхньої та нижньої основи конуса, H - висота конуса, або початковий напір. Використання формули (10.1) потребує визначення $\omega(h)$, після чого знаходження часу повного спорожнення резервуара не має принципових труднощів:

$$t = \frac{\pi}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \int_O^H \frac{(r + htg\alpha)^2}{\sqrt{h}} dh =$$

$$= \frac{\pi}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left[r^2 2\sqrt{h} + 2rtg\alpha \cdot \frac{2}{3} h\sqrt{h} + tg^2\alpha \cdot \frac{2}{5} h^2 \sqrt{h} \right]_O^H =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{H}}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left[r^2 + \frac{2}{3} rH \frac{R - r}{H} + \frac{1}{5} H^2 \left(\frac{R - r}{H} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_O \mu} \sqrt{\frac{H}{2g}} \left[r^2 + \frac{2}{3} r(R - r) + \frac{1}{5} \left(R^2 - 2Rr + r^2 \right) \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{15\omega_O \mu} \sqrt{\frac{H}{2g}} \left[3R^2 + 4Rr + 8r^2 \right]. \qquad (10.4)$$

При неповному спорожненні резервуара, коли напір знижується від величини H_1 до H_2, використовується формула

$$t=\frac{2\pi}{\omega_O\mu\sqrt{2g}}\left[r^2\sqrt{h}+rtg\alpha\cdot\frac{2}{3}h\sqrt{h}+tg^2\alpha\cdot\frac{2}{5}h^2\sqrt{h}\right]\Bigg|_{H_2}^{H_1}=$$

$$=\frac{2\pi}{\omega_O\mu\sqrt{2g}}\left[\begin{array}{c} r^2\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right)+\frac{2}{3}r\frac{R-r}{H}\cdot\left(H_1\sqrt{H_1}-H_2\sqrt{H_2}\right)+ \\ +\frac{1}{5}\left(\frac{R-r}{H}\right)^2\left(H_1^2\sqrt{H_1}-H_2^2\sqrt{H_2}\right)\end{array}\right].$$

(10.5)

Якщо у формулах (10.4) і (10.5) покласти $r=R$, то вони перетворяться відповідно у формули (10.2) і (10.3).

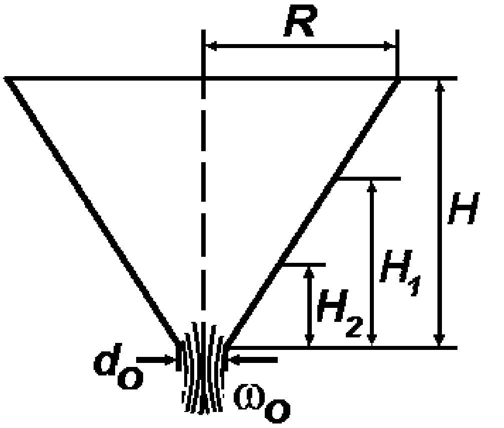


Рисунок 10.3.

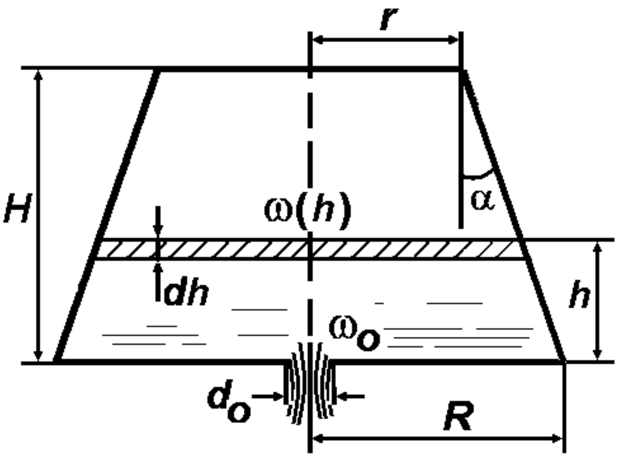


Рисунок 10.4.

Поклавши $r=0$ у формулі (10.4). отримаємо формулу для визначення часу повного спорожнення конічної лійки (рисунок 10.3)

$$t=\frac{2\pi R^2}{5\omega_O\mu}\sqrt{\frac{H}{2g}}. \qquad (10.6)$$

При неповному спорожненні конічної лійки із зменшенням напору від величини H_1 до H_2 треба у формулі (10.5) покласти $r=0$, що приводить до

$$t=\frac{2\pi R^2}{5\omega_O\mu\sqrt{2g}H^2}\left[H_1^2\sqrt{H_1}-H_2^2\sqrt{H_2}\right]. \qquad (10.7)$$

Можливо інше розташування зсіченого конуса у просторі (рисунок 10.4). Площа перерізу $\omega(h)$ має вигляд:

$\omega(h)=\pi(R-htg\alpha)^2$, $tg\alpha=\dfrac{R-r}{H}$. Час повного спорожнення визначається інтегралом

$$t=\frac{\pi}{\omega_O\mu\sqrt{2g}}\int_O^H\frac{(R-htg\alpha)^2}{\sqrt{h}}dh=$$

$$=\frac{\pi}{\omega_O\mu\sqrt{2g}}\left[R^2 2\sqrt{h}-2Rtg\alpha\cdot\frac{2}{3}h\sqrt{h}+tg^2\alpha\cdot\frac{2}{5}h^2\sqrt{h}\right]\Bigg|_O^H=$$

$$=\frac{2\pi\sqrt{H}}{\omega_O\mu\sqrt{2g}}\left[R^2-\frac{2}{3}RH\,\frac{R-r}{H}+\frac{1}{5}H^2\left(\frac{R-r}{H}\right)\right]^2=$$

$$=\frac{2\pi}{15\omega_O\mu}\sqrt{\frac{H}{2g}}\left[8R^2+4Rr+3r^2\right]. \qquad (10.8)$$

При частковому спорожненні у разі падіння напору від H_1 до H_2 маємо таку формулу для визначення часу:

$$t=\frac{\pi}{\omega_O\mu\sqrt{2g}}\int_{H_2}^{H_1}\frac{(R-htg\alpha)^2}{\sqrt{h}}dh=$$

$$=\frac{2\pi}{\omega_O\mu\sqrt{2g}}\left[R^2\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right)-\frac{2}{3}R\frac{R-r}{H}\left(H_1\sqrt{H_1}-H_2\sqrt{H_2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{R-r}{H}\right)^2\left(H_1^2\sqrt{H_1}-H_2^2\sqrt{H_2}\right)\right]. \qquad (10.9)$$

Порівнюючи (10.4) і (10.8), бачимо, що за однакових геометричних розмірів час спорожнення для першого резервуара буде меншим. Це пояснюється збільшенням об’єму рідини, яка має витікати при меншому напорі для другого резервуара.

3. Спорожнення циліндричної бочки, розташованої горизонтально

При аналізі цього питання приймаються наступні співвідношення $H\le 2R$, $0 \quad < h\le \quad H$. Тоді площа поверхні рідини $\omega(h)$ при довжині бочки b має вигляд (рисунок 10.5):

$$\omega(h) = 2b\sqrt{R^2 - (R-h)^2} = 2b\sqrt{2Rh - h^2}.$$

Час спорожнення визначається інтегралом

$$t = \frac{2b}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \int_O^H \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{\sqrt{h}} dh = \frac{2b}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \int_O^H \sqrt{2R - h} dh =$$

$$- \frac{4b}{3\omega_O \mu \sqrt{2g}} (2R - h)^{\frac{3}{2}} \Big|_O^H = \frac{4b}{3\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left[2R\sqrt{2R} - (2R - H)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (10.10)$$

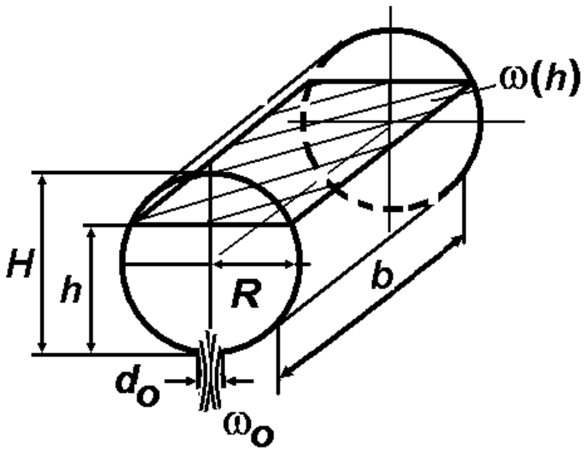


Рисунок 10.5.

При $H = 2R$ спорожнення повної бочки дорівнює

$$t = \frac{8bR\sqrt{R}}{3\omega_o \mu \sqrt{g}} = \frac{8bR}{3\omega_o \mu} \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

1. Спорожнення резервуарів, які мають форму сфери та півсфери

Резервуари у формі півсфери та сфери представлені відповідно на рисунку 10.6 і рисунку 10.7.

Час спорожнення резервуара у формі півсфери знаходиться за (10.1), де $\omega(h)$ має вигляд $\omega(h) = \pi(R^2 - h^2)$ (рисунок 10.6). Тоді час спорожнення резервуара за умов $h \leq H$, $0 \leq H \leq R$

$$t = \frac{1}{\omega_o \mu \sqrt{2g}} \int_O^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh = \frac{\pi}{\omega_o \mu \sqrt{2g}} \int_O^H \frac{R^2 - h^2}{\sqrt{h}} dh =$$

$$= \frac{\pi}{\omega_o \mu \sqrt{2g}} \left[R^2 2\sqrt{h} - \frac{2}{5} h\sqrt{h} \right] \Bigg|_O^H = \frac{2\pi\sqrt{H}}{\omega_o \mu \sqrt{2g}} \left(R^2 - \frac{H^2}{5} \right). \quad (10.11)$$

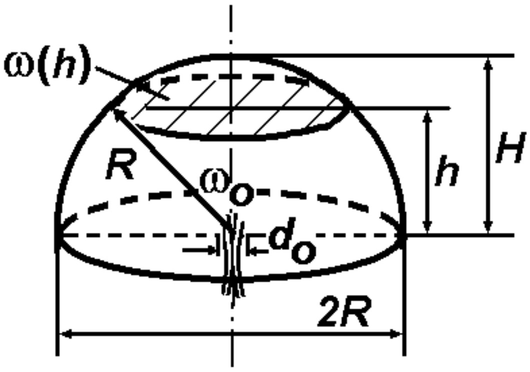


Рисунок 10.6.

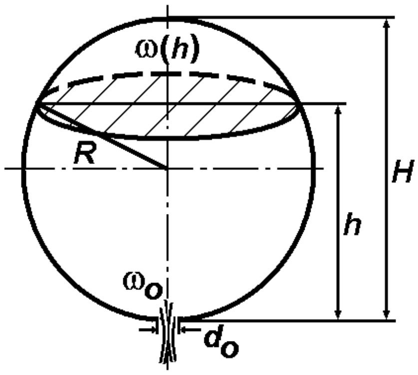


Рисунок 10.7.

При $H = R$ маємо

$$t = \frac{2\pi\sqrt{R}}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left(R^2 - \frac{R^2}{5} \right) = \frac{8\pi R^2 \sqrt{R}}{5\omega_O \mu \sqrt{2g}}. \qquad (10.12)$$

Для резервуара на рисунку 10.7 площа його довільної поверхні дорівнює $\omega(h) = \pi\left[R^2 - (h-R)^2\right] = \pi\left(2Rh - h^2\right)$. Тоді час спорожнення резервуара визначається за формулою (10.1) за умов $h \le H$, $0 \le H \le 2R$:

$$t = \frac{1}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \int_O^H \frac{\omega(h)}{\sqrt{h}} dh = \frac{\pi}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \int_O^H \frac{2Rh - h^2}{\sqrt{h}} dh =$$

$$= \frac{\pi}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left[2R \int_O^H h^{\frac{1}{2}} dh - \int_O^H h^{\frac{3}{2}} dh \right] =$$

$$= \frac{\pi}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left[2R \cdot \frac{2}{3} h\sqrt{h} - \frac{2}{5} h^2 \sqrt{h} \right]_O^H =$$

$$= \frac{2\pi H}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left(\frac{2}{3} R\sqrt{H} - \frac{1}{5} H\sqrt{H} \right). \qquad (10.13)$$

При $H = 2R$ (спорожнення повного резервуара)

$$t = \frac{2\pi \cdot 2R}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left(\frac{2}{3} R\sqrt{2R} - \frac{2}{5} R\sqrt{2R} \right) =$$

$$= \frac{8\pi R^2\sqrt{2R}}{\omega_O\mu\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{16\pi R^2\sqrt{2R}}{15\omega_O\mu\sqrt{2g}}.$$

При $H = R$

$$t = \frac{2\pi R}{15\omega_o\mu\sqrt{2g}}\left(10R\sqrt{R} - 3R\sqrt{R}\right) = \frac{14\pi R^2\sqrt{R}}{15\omega_o\mu\sqrt{2g}}. \qquad (10.14)$$

При частковому спорожненні резервуара від рівня H_1 до рівня H_2

$$t = \frac{2\pi}{\omega_o\mu\sqrt{2g}}\left(\frac{2}{3}R\left(H_1\sqrt{H_1} - H_2\sqrt{H_2}\right) - \frac{1}{5}\left(H_1^2\sqrt{H_1} - H_2^2\sqrt{H_2}\right)\right)$$

(10.15)

Якщо $H_1 = 2R$ та $H_2 = R$, тобто спорожнюється верхня півсфера, остання формула набуває вигляду:

$$t = \frac{2\pi}{\omega_o\mu\sqrt{2g}}\left(\frac{2}{3}R\left(2R\sqrt{2R} - R\sqrt{R}\right) - \frac{1}{5}\left(4R^2\sqrt{2R} - R^2\sqrt{R}\right)\right) =$$

$$= \frac{2\pi R^2}{\omega_o\mu\sqrt{2g}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{R}\left(2\sqrt{2}-1\right) - \frac{1}{5}\sqrt{R}\left(4\sqrt{2}-1\right)\right) = \frac{2\pi R^2\sqrt{R}}{15\omega_o\mu\sqrt{2g}}\left(8\sqrt{2}-7\right).$$

(10.16)

5. Спорожнення резервуарів у формі параболоїда обертання та у формі перегорнутого параболоїда обертання

Резервуар у формі параболоїда обертання та у формі перегорнутого параболоїда обертання показано на рисунку 10.8 і рисунку 10.9.

Час спорожнення резервуарів знаходиться за (10.1), де $\omega(h)$ - поточна площа поперечного горизонтального перерізу $\omega(h) = \dfrac{\pi b^2 h}{4H}$ (рисунок 10.8). Підставляючи цей вираз у наведену формулу, отримаємо:

$$t=\frac{\pi b^2}{4H\omega_O\mu\sqrt{2g}}\int_O^H\frac{h}{\sqrt{h}}dh=\frac{\pi b^2}{6\omega_O\mu}\sqrt{\frac{H}{2g}}\,. \qquad (10.17)$$

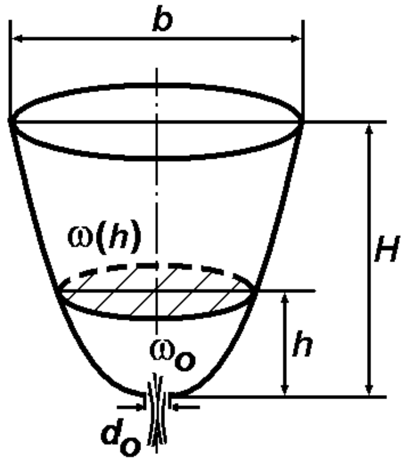


Рисунок 10.8.

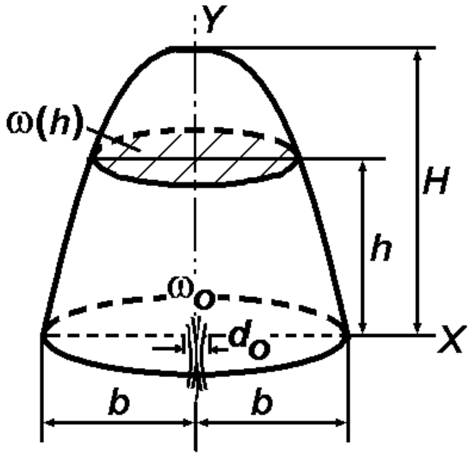


Рисунок 10.9.

Для резервуара на рисунку 10.9 рівняння параболи $y=-\frac{H}{b^2}x^2+H$. Для $y=h$ $x=\sqrt{\frac{(H-h)}{H}b^2}$, тоді $\omega(h)=\pi\frac{(H-h)}{H}b^2$ і остаточно

$$t=\frac{\pi}{\omega_O\mu\sqrt{2g}}\cdot\frac{b^2}{H}\int_O^H\frac{(H-h)}{\sqrt{h}}dh=$$

$$=\frac{\pi}{\omega_O\mu\sqrt{2g}}\cdot\frac{b^2}{H}\left[2H\sqrt{h}-\frac{2}{3}h\sqrt{h}\right]_O^H=$$

$$=\frac{\pi}{\omega_O\mu\sqrt{2g}}\cdot\frac{b^2}{H}H\sqrt{H}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4\pi b^2\sqrt{H}}{3\omega_O\mu\sqrt{2g}}\,. \qquad (10.18)$$

6. Спорожнення резервуарів у формі корит (трапецоїдного, напівсферичного та параболічного)

Резервуари у формі трапецоїдного корита та напівсферичного корита показані на рисунку 10.10 і Рисунку 10.11.

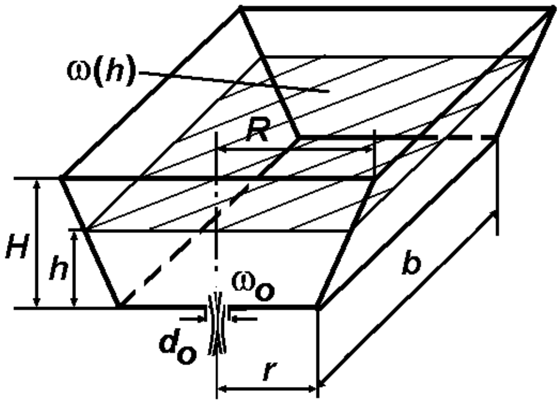


Рисунок 10.10.

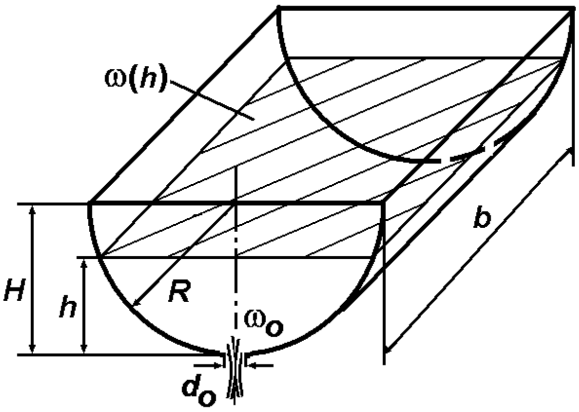


Рисунок 10.11.

Для резервуара на рисунку 10.10 на рівні h площа довільної поверхні дорівнює $\omega(h) = 2b(r + htg\alpha)$, де $tg\alpha = \dfrac{R - r}{H}$.

Тоді час спорожнення резервуара, як завжди, визначається за формулою (10.1):

$$t = \frac{1}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \int_O^H \frac{\omega(h)}{\sqrt{h}} dh = \frac{1}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \int_O^H \frac{2b(r + htg\alpha)}{\sqrt{h}} dh =$$

$$= \frac{2b}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left[2r\sqrt{H} + \left(\frac{R - r}{H} \right) \cdot \frac{2}{3} H\sqrt{H} \right] = \frac{4b\sqrt{H}}{3\omega_O \mu \sqrt{2g}} (2r + R)$$

.(10.19)

Для резервуара на рисунку 10.11 для довільної поверхні на рівні h її площа дорівнює $\omega(h) = 2b\sqrt{R^2 - (R - h)^2} = 2b\sqrt{2Rh - h^2}$. За умов $R \geq H \geq 0$ час спорожнення резервуара дорівнює $t = \dfrac{2b}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \displaystyle\int_O^H \sqrt{2R - h} dh$. Розглянемо окремо інтеграл в цій формулі:

$$\int_O^H \sqrt{2R - h} dh = -\int_O^H (2R - h)^{\frac{1}{2}} d(2R - h) = -\frac{2}{3}(2R - h)\sqrt{2R - h}\Big|_O^H =$$

$$= -\frac{2}{3}\left[(2R - H)\sqrt{2R - H} - 2R\sqrt{2R} \right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[2R\sqrt{2R} - (2R - H)\sqrt{2R - H} \right].$$

Остаточно

$$t=\frac{4b}{3\omega_{o}\mu\sqrt{2g}}\left[2R\sqrt{2R}-(2R-H)\sqrt{2R-H}\right]. \qquad (10.20)$$

При $H=R$, тобто при спорожненні повністю заповненого резервуара, маємо:

$$t=\frac{4b}{3\omega_{o}\mu\sqrt{2g}}\left[2R\sqrt{2R}-R\sqrt{R}\right]=\frac{4bR\sqrt{R}}{3\omega_{o}\mu\sqrt{2g}}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

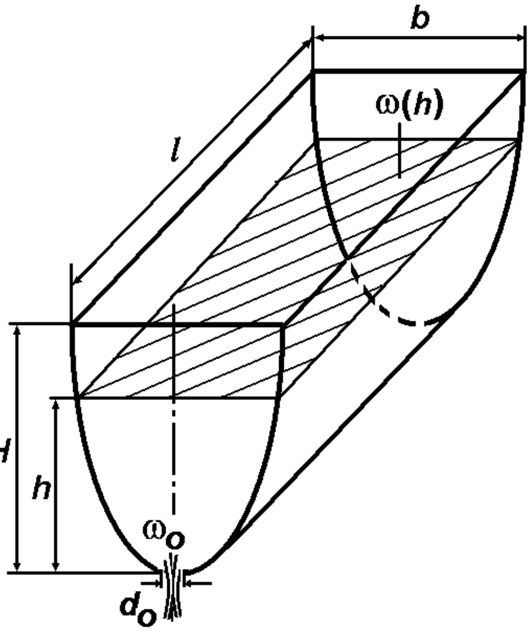


Рисунок 10.12.

Для резервуара у формі параболічного корита (рисунок 10.12) для довільної поверхні на рівні h її площа дорівнює $S(h)=lb\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{H}}$. Тоді час спорожнення

$$t=\frac{lb}{\omega_{o}\mu\sqrt{2g}}\int_{0}^{H}\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{H}\cdot\sqrt{h}}dh=$$

$$=\frac{lb}{\omega_{o}\mu\sqrt{2g}}\cdot\frac{H}{\sqrt{H}}=\frac{lb}{\omega_{o}\mu}\sqrt{\frac{H}{2g}}. \qquad (10.21)$$

7. Спорожнення складених резервуарів

Всі резервуари, що розглядалися вище, мали певну геометричну форму, і зміна площі перерізу залежно від довільної висоти визначалась неперервною функцією. Однак на практиці зустрічаються так звані складені резервуарі, що складаються з декількох (двох і більше) резервуарів, кожний з яких має відносно просту геометричну форму. Як приклад такого типу резервуарів можна навести різні водонапірні вежі.

В цьому випадку при визначенні часу повного або часткового спорожнення резервуара формула (10.1) буде складатися з двох і більше доданків з відповідними границями зміни висоти, для якої відлік здійснюється від загального дна.

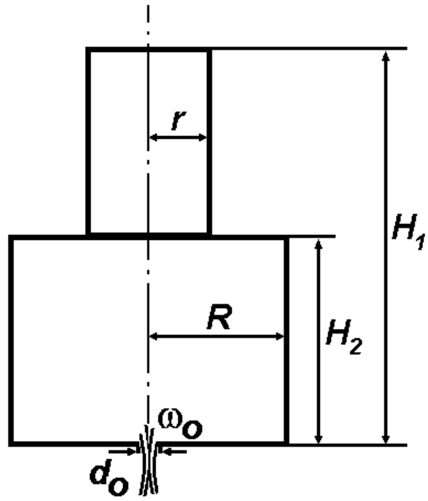


Рисунок 10.13.

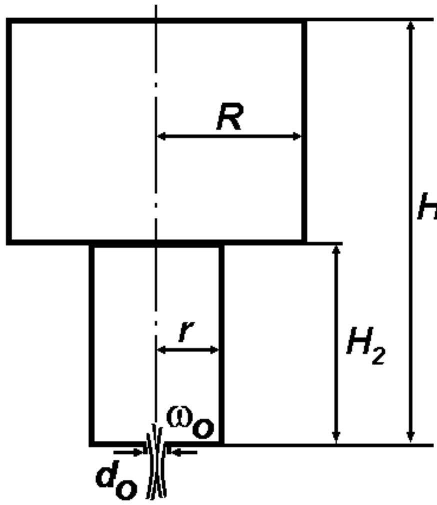


Рисунок 10.14.

В нашому курсі розглянемо деякі прості приклади. Для резервуара, зображеного на рисунку 10.13, площа поперечного перерізу залежно від висоти має вигляд: $0 \le h \le H_2$, $\omega(h) = \pi R^2$; $H_2 < h \le H_1$, $\omega(h) = \pi r^2$. Тоді час його спорожнення

$$t = \frac{1}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left[\int_O^{H_2} \frac{\pi R^2}{\sqrt{h}} dh + \int_{H_2}^{H_1} \frac{\pi r^2}{\sqrt{h}} dh \right] =$$

$$= \frac{1}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left[2\pi R^2 \sqrt{h} \Big|_O^{H_2} + 2\pi r^2 \sqrt{h} \Big|_{H_2}^{H_1} \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left[R^2 \sqrt{H_2} + r^2 \left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2} \right) \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_O \mu \sqrt{2g}} \left[\sqrt{H_2} \left(R^2 - r^2 \right) + r^2 \sqrt{H_1} \right]. \tag{10.22}$$

Для резервуара, зображеного на рисунку 10.14, площа поперечного перерізу залежно від висоти має вигляд: $0 \le h \le H_2$, $\omega(h) = \pi r^2$, $H_2 < h \le H_1$, $\omega(h) = \pi R^2$. Тоді час спорожнення резервуара

$$t=\frac{1}{\omega_{O}\mu\sqrt{2g}}\left[\int_{O}^{H_2}\frac{\pi r^2}{\sqrt{h}}dh+\int_{H_2}^{H_1}\frac{\pi R^2}{\sqrt{h}}dh\right]=$$

$$=\frac{1}{\omega_{O}\mu\sqrt{2g}}\left[2\pi r^2\sqrt{h}\Big|_{O}^{H_2}+2\pi R^2\sqrt{h}\Big|_{H_2}^{H_1}\right]=$$

$$=\frac{2\pi}{\omega_{O}\mu\sqrt{2g}}\left[r^2\sqrt{H_2}+R^2\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right)\right]=$$

$$=\frac{2\pi}{\omega_{O}\mu\sqrt{2g}}\left[\sqrt{H_2}\left(r^2-R^2\right)+R^2\sqrt{H_1}\right]$$

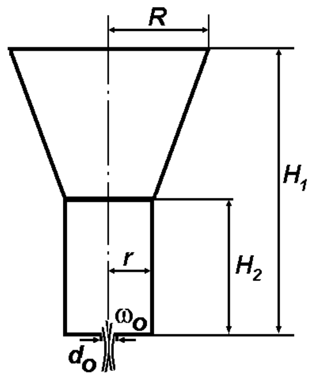
і остаточно

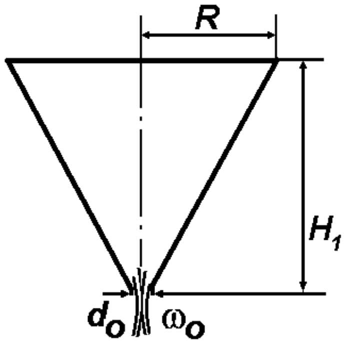
$$t=\frac{2\pi}{\omega_{O}\mu\sqrt{2g}}\left[R^2\sqrt{H_1}-\left(R^2-r^2\right)\sqrt{H_2}\right]. \qquad (10.23)$$

Для резервуара, зображеного на рисунку 10.15, складовими елементами є зсічений конус (верхня частина) і циліндр (нижня). В цьому випадку час спорожнення визначається у вигляді

$$t=\frac{2\pi}{\omega_{O}\mu\sqrt{2g}}\left[r^2\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right)+\frac{2}{3}r\frac{R-r}{H_1-H_2}\left(H_1\sqrt{H_1}-H_2\sqrt{H_2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{R-r}{H_1-H_2}\right)^2\left(H_1^2\sqrt{H_1}-H_2^2\sqrt{H_2}\right)\right]+\frac{2\pi r^2}{\omega_{O}\mu}\sqrt{\frac{H_2}{2g}}. \qquad (10.24)$$





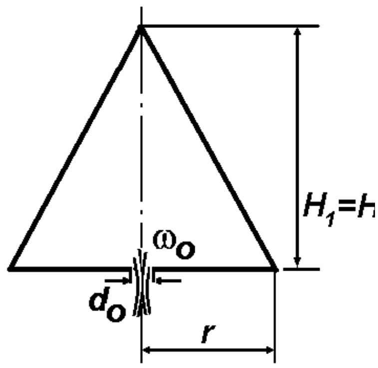


Рисунок 10.15. Рисунок 10.16. Рисунок 10.17.

При $R=r$ конструкція стає циліндром з висотою H_1, що дає

$$t=\frac{2\pi}{\omega_o\mu\sqrt{2g}}r^2\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right)+\frac{2\pi r^2}{\omega_o\mu}\sqrt{\frac{H_2}{2g}}=\frac{2\pi r^2}{\omega_o\mu}\sqrt{\frac{H_1}{2g}}.$$

Отримана формула збігається з формулою (10.2).

При $r=0$, $H_1=H$, $H_2=0$ (рисунок 10.16) $t=\frac{2\pi R^2}{5\omega_o\mu}\sqrt{\frac{H}{2g}}$, тобто ми отримуємо вираз (10.6) для часу спорожнення конічної лійки.

При $R=0$, $H_1=H$, $H_2=0$ (рисунок 10.17) $t=\frac{16\pi r^2}{15\omega_o\mu}\sqrt{\frac{H}{2g}}$ і отримана формула є окремим випадком формули (10.8) з точністю до позначень.

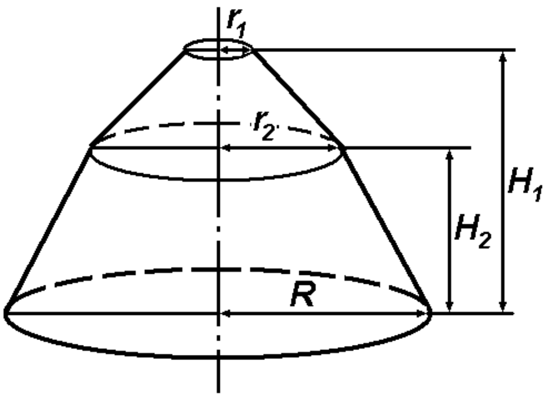


Рисунок 10.18.

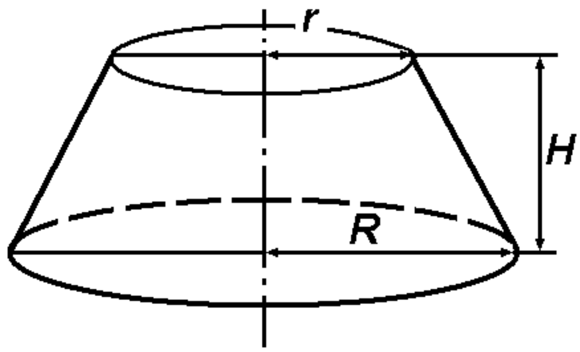


Рисунок 10.19.

Для резервуара, зображеного на Рисунку 10.18, час спорожнення визначається наступним чином:

$$t=\frac{2\pi}{\omega_o\mu\sqrt{2g}}\left[r_2^2\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right)-\frac{2}{3}r_2\frac{r_2-r_1}{H_1-H_2}\left(H_1\sqrt{H_1}-H_2\sqrt{H_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{r_2-r_1}{H_1-H_2}\right)^2\left(H_1^2\sqrt{H_1}-H_2^2\sqrt{H_2}\right)\right]+\frac{2\pi}{15\omega_o\mu}\sqrt{\frac{H_2}{2g}}\left(8R^2+4Rr_2+3r_2^2\right)$$

(10.25)

Як окремий випадок при $H_2 = H_1 = H$, $r_1 = r_2 = r$ маємо формулу (10.8) повного спорожнення резервуара у формі зсіченого конуса (рисунок 10.19)

$$t = \frac{2\pi}{15\omega_o\mu}\sqrt{\frac{H}{2g}}\left[8R^2 + 4Rr + 3r^2\right].$$

<u>**ЗАДАЧА № 1**</u>. Визначити час t повного спорожнення складеного резервуара (рисунок 10.18) з розмірами R=1 м, r_1=0,5 м, r_2=0,8 м, H_1=1 м, H_2=0,2 м через малий донний отвір діаметром d_o=5 см, коефіцієнт витрати отвору μ=0,6.

<u>Розв’язання.</u> Використовуючи формулу (10.25), безпосередньо знаходимо

$$t = \frac{2\cdot 3{,}1415}{\dfrac{3{,}1415\cdot 0{,}05^2}{4}\cdot 0{,}6\cdot\sqrt{2\cdot 9{,}81}}\cdot$$

$$\left[0{,}8^2\cdot\left(\sqrt{1}-\sqrt{0{,}2}\right)-\frac{2}{3}\cdot 0{,}8\cdot\frac{0{,}8-0{,}5}{1-0{,}2}\cdot\left(1\sqrt{1}-0{,}2\sqrt{0{,}2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{0{,}8-0{,}5}{1-0{,}2}\right)\cdot\left(1^2\sqrt{1}-0{,}2^2\sqrt{0{,}2}\right)\right]+$$

$$\frac{2\cdot 3{,}1415}{15\cdot\dfrac{3{,}1415\cdot 0{,}05^2}{4}\cdot 0{,}6}\cdot\sqrt{\frac{0{,}2}{2\cdot 9{,}81}}\cdot\left(8\cdot 1^2+4\cdot 1\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}2^2\right)=$$

=678,5 с.

<u>Відповідь.</u> Час повного спорожнення складеного резервуара t=678,5 с.

ЛЕКЦІЯ № 11. ВЕРТИКАЛЬНІ ГІДРАВЛІЧНІ СТРУМЕНІ

I. ВЕРТИКАЛЬНІ СТРУМЕНІ.

Для гасіння зовнішніх пожеж часто використовують вільні (незатоплені) гідравлічні струмені. Водяні струмені поділяються на ***суцільні***, одержані від ручних і лафетних пожежних стволів з конічними та коноїдними насадками, і ***розпилені***, що утворені за допомогою спеціальних насадок – розпилювачів.

Суцільні водяні струмені відрізняються компактністю і значною дальністю польоту, але такі струмені при великому тиску в стволі одержати неможливо. У цьому випадку струмінь умовно поділяється на дві частини: ***компактну*** та ***роздроблену***.

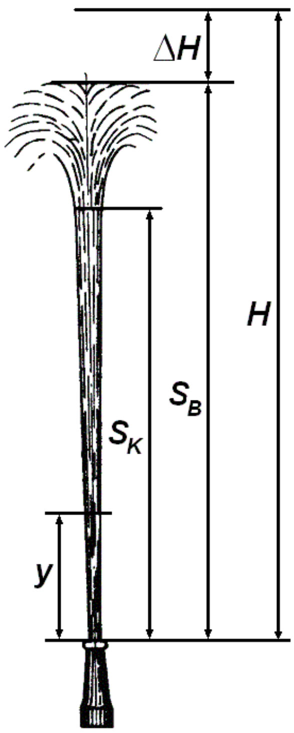


Рисунок 11.1.

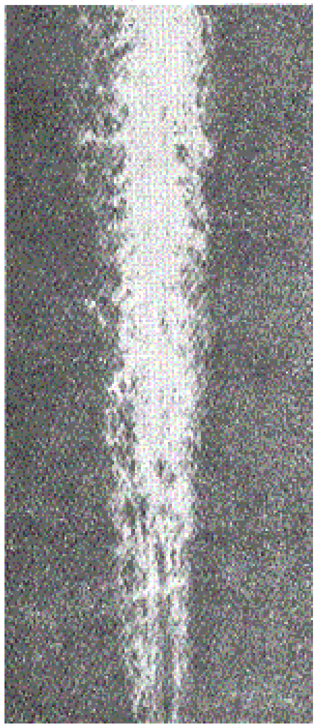


Рисунок 11.2.

У вертикальному струмені роздроблена частина виникає внаслідок руйнування суцільної частини і відрізняється від неї підвищеною домішкою повітря у рідині. Висоти компактної $S_{\text{К}}$ і роздробленої $S_{\text{В}}$ частин струменя показано на рисунку 11.1. Там же зазначено напір H у сприску стовпа і втрати висоти струменя ΔH. Між цими параметрами існує зв'язок

$$S_{\text{В}} = H - \Delta H. \qquad (11.1)$$

На рисунку 11.2 показано реальне руйнування суцільності струменя.

Для обчислення ΔH використовуємо відому в гідравліці формулу Дарсі-Вейсбаха (5.3), яка побудована для обчислення лінійних втрат напору в трубах за умови сталості середньої швидкості потоку і діаметра труби. Запишемо вираз диференціала втрат висоти струменя у вигляді

$$d(\Delta H) = \frac{\lambda(y)}{2gD(y)} V^2(y) dy,$$

де g - прискорення вільного падіння; $\lambda(y)$ - коефіцієнт лінійних втрат; $D(y)$ - діаметр струменя; $V(y)$ - середня швидкість потоку; y– вертикальна координата (рисунок 11.1). При зростанні y зростають відповідно $D(y)$ і $\lambda(y)$, тому далі відношення $\lambda(y)D^{-1}(y)$ будемо вважати сталим і рівним $\lambda_{\text{О}} D_{\text{О}}^{-1}$, де $\lambda_{\text{О}} = \lambda(0)$, $D_{\text{О}} = D(0)$ - діаметр насадки або ствола.

Розглянемо два варіанти розподілу швидкості потоку за координатою y. В першому варіанті зміна швидкості описується функцією $V(y) = \sqrt{2gH\left(1 - yS_{\text{В}}^{-1}\right)}$, $0 \le y \le S_{\text{В}}$. Тоді

$$\Delta H = \frac{\lambda_{\text{О}} H}{D_{\text{О}}} \int_{\text{О}}^{S_{\text{В}}} \left(1 - yS_{\text{В}}^{-1}\right) dy = \frac{\lambda_{\text{О}} H}{D_{\text{О}}} \left(y - \frac{y^2}{2S_{\text{В}}} \right) \Bigg|_{\text{О}}^{S_{\text{В}}} = \frac{\lambda_{\text{О}} H}{2D_{\text{О}}} S_{\text{В}}. \quad (11.2)$$

В цьому виразі виділимо коефіцієнт $\eta = \frac{\lambda_{\text{О}}}{2D_{\text{О}}}$, розмірність якого [1/м], тоді з (11.1) і (11.2) одержуємо

$$S_{\text{В}} = H - \eta H S_{\text{В}} \Rightarrow S_{\text{В}} = \frac{H}{1 + \eta H}.$$

До аналогічної формули прийшов у 1895 р. Люгер, аналізуючи результати експериментів для фонтанних струменів. Він установив, що

$$S_{\text{В}} = \frac{H}{1 + \eta H}, \quad \eta = \frac{0{,}00025}{D_{\text{О}}\left(1 + 1000 D_{\text{О}}^2\right)}. \quad (11.3)$$

Для другого варіанта розподіл швидкості потоку має вигляд:

$$V(y)=\sqrt{2gH\left(1-\frac{y}{H}\right)},\ 0\le y\le H,$$

для обчислення втрат напору одержуємо

$$\Delta H=\frac{\lambda_{\text{O}}H}{D_{\text{O}}}\int_{\text{O}}^{H}\left(1-\frac{y}{H}\right)dy=\frac{\lambda_{\text{O}}H}{D_{\text{O}}}\left(y-\frac{y^2}{2H}\right)\Bigg|_{\text{O}}^{H}=\frac{\lambda_{\text{O}}}{2D_{\text{O}}}H^2. \quad (11.4)$$

З виразів (11.1) і (11.4) знаходимо

$$S_{\text{B}}=H-\frac{\lambda_{\text{O}}}{2D_{\text{O}}}H^2.$$

До аналогічної залежності в 1888 р. прийшов Фріман, аналізуючи результати експериментів для пожежних струменів. Він установив, що $\lambda_{\text{O}}=0{,}000226$. Тому, за Фріманом,

$$S_{\text{B}}=H-\frac{0{,}000113}{D_{\text{O}}}H^2=H\left(1-\frac{0{,}000113}{D_{\text{O}}}H\right). \quad (11.5)$$

Характеризуючи точність формул (11.3) і (11.5), наголошується, що вони дають близькі результати для тих значень D_{O} і H, які використовуються в пожежній справі. З цих формул видна залежність висоти вертикального струменя від величини напору і діаметра насадки. Однак висота струменя для кожної окремої насадки зі збільшенням напору не може зростати необмежено, вона досягає визначеної максимальної величини, після чого не змінюється при «нескінченому» збільшенні напору. Максимальну висоту суцільного струменя можна визначити за формулою Люгера

$$S_{\text{B}\,max}=\lim_{H\to\infty}\frac{H}{1+\eta H}=\frac{1}{\eta}.$$

Оскільки величина η залежить тільки від діаметра насадки (11.3) (η зменшується зі збільшенням D_{O}, тобто зворотна величина до η теж буде збільшуватися), то при великих напорах зростання висоти струменя можливе тільки при збільшенні діаметра насадки.

Граничну величину напору, при якому струмінь досягає максимальної висоти, знайдемо з формули Фрімана (11.5), прирівнюючи першу похідну від $S_{\text{В}}$ по H до нуля $\dfrac{dS_{\text{В}}}{dH} = 1 - 0{,}000226\,\dfrac{H}{D_{\text{О}}} = 0$, звідки $H = \dfrac{D_{\text{О}}}{0{,}000226}$. Слід зазначити, що рекомендовані формули Люгера і Фрімена дають цілком задовільні результати при розрахунку струменів, одержаних з ручних стволів, і вимагають обмеженого застосування для насадок великого діаметра.

Величину компактної частини струменя для ручних стволів прийнято визначати як частину усього вертикального струменя за формулою $S_{\text{К}} = fS_{\text{В}}$, де f - безрозмірний коефіцієнт, що змінюється залежно від величини $S_{\text{К}}$

$$f = \frac{1}{1{,}19 + 80\left(0{,}01 \cdot S_{\text{К}}\right)^4}.$$

Визначення $S_{\text{К}}$ здійснюється в ітераційний спосіб. Дослідні дані В.Г.Лобачова наведені в таблиці 11.1, з якої видно, що зі збільшенням напору перед насадкою частка компактної частини струменя відносно всього струменя зменшується.

Таблиця 11.1.

$S_{\text{В}}$, м	7	10	15	20	25	30
f	0,84	0,83	0,81	0,76	0,67	0,54

II. РОЗРАХУНОК ВИСОТИ ВЕРТИКАЛЬНИХ СТРУМЕНІВ З УРАХУВАННЯМ СИЛИ ОПОРУ ПОВІТРЯ ЗА ДОПОМОГОЮ СПРОЩЕНОГО РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

У гідравліці за допомогою рівняння Бернуллі описують одновимірні рухи рідин в трубах. Покажемо, що у спрощеному вигляді його можна використовувати і для розрахунку вертикальних струминних потоків з урахуванням сили опору повітря, коли сила опору $F_{\text{ОП}}$ є деякою неперервною функцією швидкості V, тобто $F_{\text{ОП}} = F_{\text{ОП}}(V)$, причому $F_{\text{ОП}}(0) = 0$.

Щоб скласти диференціальне рівняння руху, звернемося до рисунка 11.3, на якому зображено довільний виділений елемент струменя, та розглянемо динамічну рівновагу елемента струменя довжиною dy у напрямку вертикальної осі OY. Вона виражається рівнянням

$$\left(P+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\omega+F_{\text{ОП}}+F_{\text{ІН}}+G-P\omega=0, \qquad (11.6)$$

у якому

$$G=\rho g\omega dy,\ F_{\text{ОП}}=K_C\pi D_C f(V)dy,\ F_{\text{ІН}}=\rho\omega\left(\frac{\partial V}{\partial y}V+\frac{\partial V}{\partial t}\right)dy. \qquad (11.7)$$

В наведених формулах D_C і ω - діаметр і площа поперечного перерізу струменя, P - тиск, V - вертикальна швидкість руху центра виділеного елемента, ρ - густина рідини, g - прискорення вільного падіння, G - сила ваги, $F_{\text{ІН}}$ - сила інерції, $F_{\text{ОП}}$ - сила опору повітря, що діє на виділений елемент; $K_C=K_C(y)$ - коефіцієнт тертя струменя об повітря; $f(V)$ - деяка неперервна функція швидкості.

Оскільки далі буде розглядатися тільки стаціонарний рух струменя, то для нього $\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$, а частинні похідні по y переходять у звичайні. Підставивши вираз (11.7) у (11.6), приходимо до рівняння Бернуллі в диференційній формі:

$$\frac{dP}{dy}+\frac{4K_C}{D_C}f(V)+\rho g+\rho V\frac{dV}{dy}=0. \qquad (11.8)$$

Щоб спростити цей вираз, тиск P у струмені вважаємо сталим, у силу чого $\dfrac{dP}{dy}=0$. Крім того, приймаємо $K_{\text{О}}=K_C(0)$, $K_C D_C^{-1}=K_{\text{О}}D_{\text{О}}^{-1}=const$.

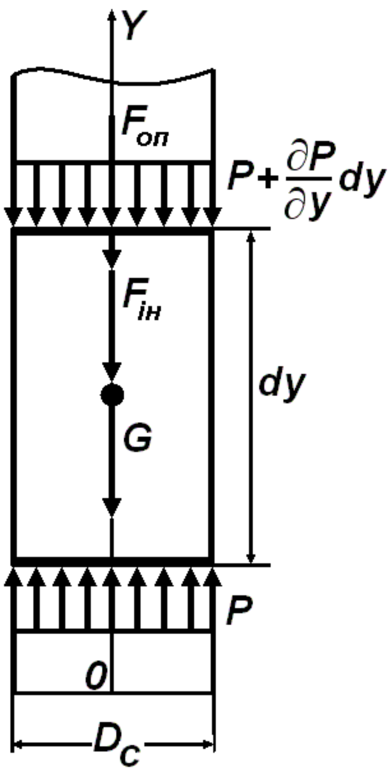


Рисунок 11.3.

У результаті, замість (11.8), одержуємо

$$V\frac{dV}{dy}+\frac{4K_{\text{О}}}{\rho D_{\text{О}}}f(V)=-g \qquad (11.9)$$

Покажемо, що це спрощене рівняння Бернуллі за суттю є рівнянням руху кинутого вертикально вгору абсолютно твердого тіла масою m. Дійсно, якщо сила опору представлена виразом $F_{\text{ОП}}=K_C\cdot f(\dot{y})$, то рух тіла визначається рівнянням, яке розглядається в курсі «Теоретична механіка»

$$m\ddot{y}+K_C\cdot f(\dot{y})=-mg\,, \qquad (11.10)$$

де точка означає похідну за часом t.
Увівши позначення

$$\dot{y}=V\,,\ \ddot{y}=\frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{d\dot{y}}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=V\frac{dV}{dy}\,,$$

отримуємо

$$V\frac{dV}{dy}+\alpha\cdot f(V)=-g\,, \qquad (11.11)$$

де $\alpha=\frac{K_C}{m}$. Вираз (11.11) збігається з (11.9), коли $\alpha=4K_{\text{О}}(\rho D_{\text{О}})^{-1}$, що і потрібно було довести. Після відокремлення змінних у (11.11), маємо

$$dy=-\frac{VdV}{g+\alpha\cdot f(V)}\,. \qquad (11.12)$$

Після інтегрування диференційного рівняння (11.12) отримуємо загальну формулу для висоти вертикального струменя:

$$\int_{\text{О}}^{S_{\text{В}}}dy=S_{\text{В}}=\int_{\text{О}}^{V_{\text{О}}}\frac{V\cdot dV}{g+\alpha\cdot f(V)}\,. \qquad (11.13)$$

Вона дозволяє за умов – відомих залежності $f(V)$ і величини коефіцієнта K_C (чи α) – за допомогою інтегрування знаходити $S_{\text{В}}$.

Як окремий випадок розглянемо лінійну залежність сили опору від швидкості потоку, коли функція $f(V) = V_{\text{О}} \cdot V$. Підставимо цю функцію в (11.13), позначимо $\alpha V_{\text{О}} = \beta$ і виконаємо інтегрування:

$$S_{\text{В}} = \int_{\text{О}}^{V_{\text{О}}} \frac{VdV}{g + \beta V} = \frac{1}{g}\int_{\text{О}}^{V_{\text{О}}} \frac{VdV}{1 + \frac{\beta}{g}V} = \frac{1}{\beta}\int_{\text{О}}^{V_{\text{О}}} \frac{\frac{\beta}{g} + 1 - 1}{1 + \frac{\beta}{g}V}dV = \frac{1}{\beta}\left[V - \frac{g}{\beta} ln\left(1 + \frac{\beta}{g}V\right)\right]\Bigg|_{\text{О}}^{V_{\text{О}}} =$$

$$= \frac{V_{\text{О}}}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} ln\left(1 + \frac{\beta V_{\text{О}}}{g}\right). \qquad (11.14)$$

З формули (11.13) бачимо, що висота підйому струменя без урахування сили опору повітря $S_{\text{В}} = \frac{V_{\text{О}}^2}{2g}$. Покажемо, що це співвідношення можна отримати з (11.14), розкриваючи невизначеність цього виразу при $\beta \to 0$. Дійсно,

$$S_{\text{В}} = \lim_{\beta \to \text{О}}\left[\frac{V_{\text{О}}}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} ln\left(1 + \frac{\beta V_{\text{О}}}{g}\right)\right] = \lim_{\beta \to \text{О}} \frac{V_{\text{О}}\beta - g\, ln\left(1 + \frac{\beta V_{\text{О}}}{g}\right)}{\beta^2} =$$

Невизначеність $\frac{\text{О}}{\text{О}}$ розкриваємо за правилом Лопіталя

$$= \lim_{\beta \to \text{О}} \frac{V_{\text{О}} - g\frac{\frac{V_{\text{О}}}{g}}{1 + \frac{\beta V_{\text{О}}}{g}}}{2\beta} = \lim_{\beta \to \text{О}} \frac{\frac{V_{\text{О}}^2\beta}{g}}{\left(1 + \frac{V_{\text{О}}}{g}\beta\right)2\beta} = \frac{V_{\text{О}}^2}{2g}$$

На рисунку 11.4 показано якісний характер залежності висоти підйому вертикального струменя від параметра β

$$\beta = 4K_{\text{О}}\left(\rho D_{\text{О}}\right)^{-1}V_{\text{О}}, \qquad (11.15)$$

де $K_{\text{О}}$ [кг/м^3] - коефіцієнт опору повітря, який визначається експериментально, ρ [кг/м^3] - густина води, $D_{\text{О}}$ [м] - діаметр насадки ствола, $V_{\text{О}}$ [м/с] - початкова швидкість витікання струменя.

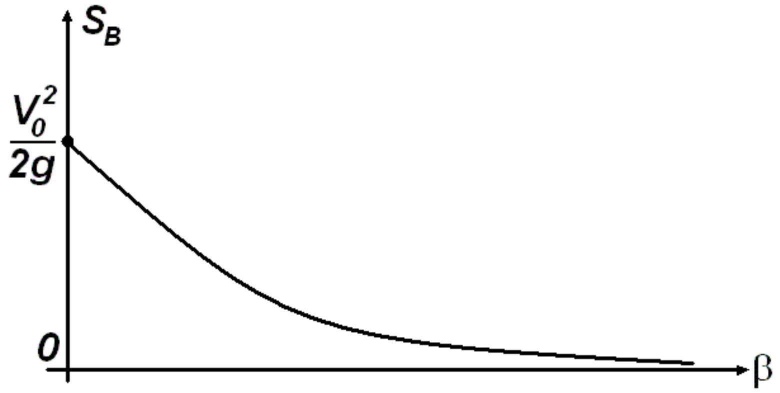


Рисунок 11.4.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

<u>ЗАДАЧА № 1.</u> Визначити висоту підйому гідравлічного струменя $S_{\text{В}}$, що витікає з насадки з початковою швидкістю $V_{\text{О}}$=20 м/с, якщо діаметр насадки $D_{\text{О}}$=19 мм, при лінійній залежності опору повітря, тобто $\mathrm{f(V)} = \mathrm{V_O \cdot V}$, коефіцієнт опору повітря $K_{\text{О}}$=0,02375 кг/м^3.

<u>Розв'язання.</u> За формулою (11.15) визначаємо коефіцієнт $\beta = 4K_{\text{О}}\left(\rho D_{\text{О}}\right)^{-1}V_{\text{О}} = 4 \cdot 0{,}02375 \cdot \left(1000 \cdot 0{,}019\right)^{-1} \cdot 20$ =0,1 1/с.
Використовуючи формулу (11.14), маємо:

$$S_{\text{В}} = \frac{V_{\text{О}}}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} ln\left(1 + \frac{\beta V_{\text{О}}}{g}\right) = \frac{20}{0{,}1} - \frac{9{,}81}{0{,}1^2} ln\left(1 + \frac{0{,}1 \cdot 20}{9{,}81}\right) = 17{,}98 \text{ м.}$$

Висота підйому струменя без урахування сили опору повітря $S_{\text{В}} = \dfrac{V_{\text{О}}^2}{2g} = \dfrac{20^2}{2 \cdot 9{,}81}$ =20,39 м.

Відповідь. Висота підйому гідравлічного струменя $S_{\text{В}}$ з урахуванням сили опору повітря $S_{\text{В}}$ =17,98 м, а без урахування - 20,39 м.

ЗАДАЧА № 2. Визначити висоту підйому гідравлічного струменя $S_{\text{В}}$, що витікає з насадки з початковою швидкістю $V_{\text{О}}$ =20 м/с, якщо діаметр насадки $D_{\text{О}}$ =19 мм, при квадратичній залежності опору повітря, тобто, $f(V) = V_{\text{О}} \cdot V^2$, коефіцієнт опору повітря $K_{\text{О}}$ =0,02375 кг·с/м^4.

Розв'язання. За формулою (11.15) визначаємо коефіцієнт $\beta = 4K_{\text{О}}(\rho D_{\text{О}})^{-1} V_{\text{О}} = 4 \cdot 0{,}02375 \cdot (1000 \cdot 0{,}019)^{-1} \cdot 20$ =0,01 1/м. За формулою (11.13) висота підйому гідравлічного струменя

$$S_{\text{В}} = \frac{1}{g} \int_{\text{О}}^{V_{\text{О}}} \frac{V \cdot dV}{1 + \frac{\beta}{g} V^2} = \frac{1}{g \frac{2\beta}{g}} \int_{\text{О}}^{V_{\text{О}}} \frac{\frac{2\beta}{g} V}{1 + \frac{\beta}{g} V^2} dV = \frac{1}{2\beta} ln\left(1 + \frac{\beta}{g} V_{\text{О}}^2\right).$$

Остаточно маємо $S_{\text{В}} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}01} ln\left(1 + \frac{0{,}01}{9{,}81} \cdot 20^2\right)$ =17,09 м. Легко також довести, що при $\beta \to 0$, розкриваючи невизначеність $\frac{0}{0}$ за правилом Лопіталя, отримуємо вже відому формулу для висоти підйому струменя без урахування опору повітря

$$S_{\text{В}} = \lim_{\beta \to \text{О}} \frac{ln\left(1 + \frac{\beta}{g} V_{\text{О}}^2\right)}{2\beta} = \lim_{\beta \to \text{О}} \frac{\frac{1}{1 + \frac{\beta}{g} V_{\text{О}}^2} \cdot \frac{V_{\text{О}}^2}{g}}{2} = \frac{V_{\text{О}}^2}{2g}.$$

Відповідь. Висота підйому гідравлічного струменя при квадратичній залежності сили опору повітря $S_{\text{В}}$ =17,09 м.

ЛЕКЦІЯ № 12. НАХИЛЕНІ ГІДРАВЛІЧНІ СТРУМЕНІ

І. ОБЧИСЛЕННЯ РАДІУСІВ ДІЇ КОМПАКТНОЇ І РОЗДРОБЛЕНОЇ ЧАСТИН НАХИЛЕНОГО СТРУМЕНЯ

У практиці пожежогасіння звичайно використовують похилі струмені. Їх характеризують двома радіусами дії. Розглянемо ці поняття. Радіусом дії компактної частини струменя називається відстань $R_К$ від торця сприску ствола до кривої, що обгинає компактну частину струменя (рисунок 12.1).

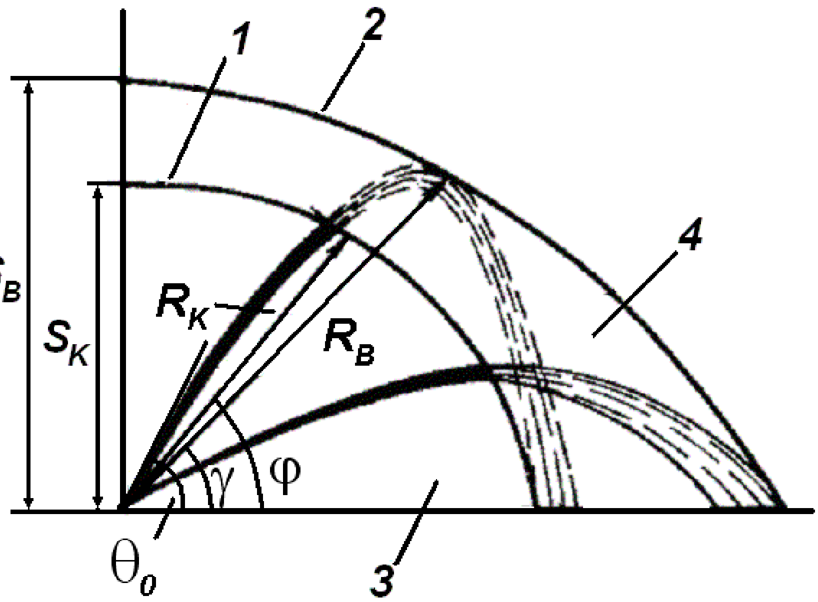


Рисунок 12.1. Ділянки зрошення роздробленою і компактною частинами струменя:

1 – крива, що обгинає компактну частину $R_К$ струменя; 2 - крива, що обгинає роздроблені частини польоту струменя; 3 - ділянка, що поливається компактним струменем; 4 - ділянка, що поливається роздробленим струменем

Радіусом дії роздробленої частини називається відстань $R_В$ від торця сприску ствола до кривої, яка обгинає роздроблену частину струменя. Положення $R_К$ і $R_В$ визначаються їхніми кутами нахилу до горизонту, що на рисунку 12.1 позначені кутами φ і γ. Не слід плутати φ і γ з кутом нахилу осі ствола до горизонту θ_0. Між ними виконуються нерівності $\theta_О > \varphi > \gamma$.

Способи обчислення $R_К$ і $R_В$ залежать від величини діаметра сприску ствола. Для ручних пожежних стволів, у яких $D_О \leq$ 25 мм, приймають $R_К \approx S_К ; R_В = f_1(\gamma) \cdot S_В$. Множник $f_1(\gamma)$ залежить від кута γ. Його значення наведені в таблиці 12.1.

Таблиця 12.1.

γ, °	0	15	30	45	60	75	90
$f_1(\gamma)$	1,40	1,30	1,20	1,12	1,07	1,03	1,00

Із таблиці 12.1 випливає, що $max\, R_В = 1{,}4 S_В$. Ця максимальна далекобійність похилого струменя досягається при γ = 0°, коли $\theta_О \approx 30 \div 32^0$. Складніше обчислювати $R_К$ і $R_В$ для лафетних стволів, у яких $D_О \geq$ 28 мм. У цьому випадку $R_К$ залежить від кута φ і визначається добутком

$$R_К = f_2(\varphi) \cdot R_К^* . \tag{12.1}$$

У ньому $R_К^*$ - радіус дії компактної частини, що відповідає куту φ = 30^0. Множник $f_2(\varphi)$ беруть з таблиці 12.2. Як бачимо, визначення $R_К$ і зв'язане з обчисленням $S_В$ за формулою (11.3) чи (11.5). У зв'язку з цим звернемо увагу на те, що зазначені формули дають цілком задовільні величини $S_В$ тільки для ручних пожежних стволів і обмежено застосовні у випадку насадок великого діаметра, характерних для лафетних стволів.

Таблиця 12.2

φ, °	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$f_2(\varphi)$	1,18	1,10	1,05	1,0	0,95	0,92	0,90	0,88	0,86	0,85

З метою спрощення розрахунків параметрів пожежних струменів складені таблиці (таблиця 12.3), в яких наведені залежності $S_В$, H і Q від $D_О$ і $R_К$ для ручних пожежних стволів [8,19] з виправленням помилок і неточностей округлень, допущених при їхньому розрахунку попередніх виданнях.

Таблиця 12.3

$R_К$, м	$S_В$, м	$D_О$ = 0,013 м		$D_О$ = 0,016 м		$D_О$ = 0,019 м		$D_О$ = 0,022 м		$D_О$ = 0,025 м	
		H, м	Q, л/с	H, м	Q, л/с	H, м	Q, л/с	H, м	Q, л/с	H, м	Q, л/с
6	7,1	8,1	1,7	7,8	2,5	7,7	3,5	7,6	4,6	7,5	5,9
7	8,3	9,7	1,8	9,3	2,7	9,1	3,8	8,9	5,0	8,8	6,5
8	9,5	11,3	2,0	10,8	2,9	10,5	4,1	10,3	5,4	10,1	6,9
9	10,8	13,1	2,1	12,4	3,1	12,0	4,4	11,7	5,8	11,5	7,4
10	12,0	14,9	2,3	14,1	3,3	13,5	4,6	13,2	6,1	12,9	7,8
11	13,2	16,9	2,4	15,8	3,5	15,2	4,9	14,7	6,5	14,4	8,2
12	14,5	19,0	2,6	17,7	3,7	16,8	5,2	16,3	6,8	15,9	8,7
13	15,8	21,3	2,7	19,6	3,9	18,6	5,4	17,9	7,1	17,5	9,1
14	17,1	23,8	2,9	21,7	4,1	20,5	5,7	19,7	7,5	19,1	9,5
15	18,5	26,5	3,0	24,0	4,4	22,5	6,0	21,5	7,8	20,8	9,9
16	19,9	29,5	3,2	26,4	4,6	24,6	6,2	23,4	8,2	22,7	10,3
17	21,4	32,9	3,4	29,1	4,8	26,9	6,5	25,5	8,5	24,6	10,8
18	22,9	36,8	3,6	32,1	5,0	29,5	6,8	27,8	8,9	26,7	11,2
19	24,6	41,3	3,8	35,4	5,3	32,3	7,1	30,3	9,3	29,0	11,7
20	26,4	46,5	4,0	39,2	5,6	35,4	7,5	33,0	9,7	31,5	12,2
21	28,3	52,8	4,3	43,6	5,9	38,9	7,8	36,1	10,1	34,2	12,7
22	30,3	60,4	4,6	48,6	6,2	42,9	8,2	39,4	10,6	37,2	13,3
23	32,5	69,9	4,9	54,6	6,6	47,4	8,6	43,3	11,1	40,7	13,9
24	34,9	82,1	5,3	61,8	7,0	52,7	9,1	47,7	11,6	44,5	14,5
25	37,6	98,3	5,8	70,5	7,5	59,0	9,6	52,7	12,2	48,9	15,2
26	40,4	-	-	81,4	8,0	66,4	10,2	58,6	12,9	53,8	16,0
27	43,6	-	-	95,3	8,7	75,4	10,9	65,5	13,6	59,6	16,8
28	47,1	-	-	-	-	86,4	11,7	73,6	14,5	66,3	17,7
29	50,9	-	-	-	-	-	-	83,5	15,4	74,2	18,7
30	55,1	-	-	-	-	-	-	95,4	16,5	83,5	19,9

Задача № 1. Визначити H і $D_О$, при яких $R_К$≥18 м, а Q≥5 л/с.
Розв'язання. Звертаючись до таблиці 12.3, знаходимо, що зазначені обмеження будуть виконані при H≥32,1 м; $D_О$≥16 мм.

Задача № 2. Знайти, якими будуть $R_К$, $S_В$ і Q, якщо $D_О$= 22 мм; $H \geq$ 39 м.
Розв'язання. З таблиці 12.3 одержуємо, що для зазначених вихідних параметрів струменя: $R_К$ > 22 м, $S_В$ > 30 м і Q > 10,6 л/с.

II. НАБЛИЖЕНИЙ СПОСІБ РОЗРАХУНКУ ТРАЄКТОРІЇ ГІДРАВЛІЧНОГО СТРУМЕНЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПОХИБОК ПОЧАТКОВОЇ ШВИДКОСТІ І КУТА НАХИЛУ СТВОЛА НА ДОВЖИНУ ПОЛЬОТУ СТРУМЕНЯ

Найпростіший спосіб розрахунку траєкторії гідравлічного струменя базується на інтегруванні рівнянь вільного руху матеріальної точки під дією сили ваги без урахування опору середовища. В цьому випадку, як відомо, траєкторією струменя є дуга параболи. Вона описується рішенням задачі Коші для двох диференційних рівнянь

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g,$$

з початковими умовами

$$x(0) = 0, \quad y(0) = h_О, \quad \dot{x}(0) = V_О \cos\theta_О, \quad \dot{y}(0) = V_О \sin\theta_О.$$

Тут $x = x(t)$, $y = y(t)$ - поточні координати частинки рідини на траєкторії, $V_О$ - швидкість витікання струменя з насадки ствола, $\theta_О$ - кут нахилу осі ствола до горизонту, g - прискорення вільного падіння, $h_О$ - початкова висота ствола відносно горизонтальної осі, точка означає похідну за часом t. Рішення задачі Коші має простий вигляд:

$$x = V_О \cos\theta_О t, \; y = V_О \sin\theta_О t - \frac{gt^2}{2} + h_О, \qquad (12.2)$$

що дозволяє представити y як функцію x

$$y = xtg\theta_O - \frac{gx^2}{2V_O^2 cos^2\theta_O} + h_O. \qquad (12.3)$$

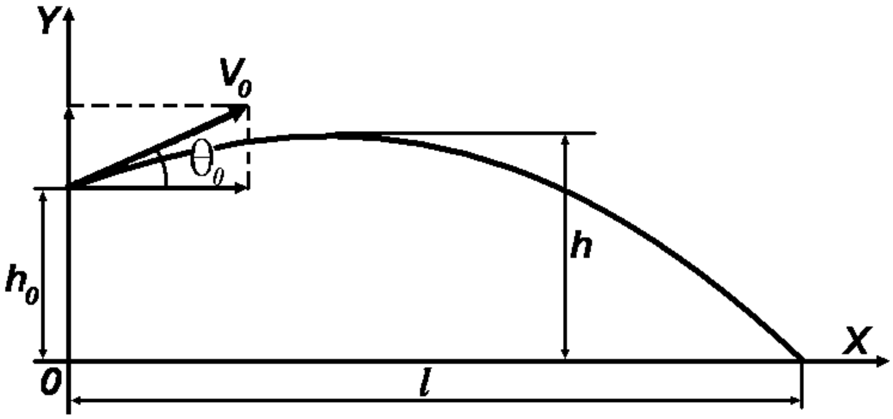


Рисунок 12.2.

Траєкторія струменя має довжину польоту l і найбільшу висоту підйому h, які визначаються за формулами:

$$l = \frac{V_O^2 cos\theta_O}{g}\left(sin\theta_O + \sqrt{sin^2\theta_O + \frac{2gh_O}{V_O^2}}\right), \qquad (12.4)$$

$$h = \frac{V_O^2 sin^2\theta_O}{2g} + h_O. \qquad (12.5)$$

Для визначення кута θ_O, якому відповідає максимальна довжина польоту струменя, дослідимо функцію l на екстремум:

$$\frac{dl}{d\theta_O} = -\frac{V_O^2 sin\theta_O}{g}\left(sin\theta_O + \sqrt{sin^2\theta_O + \frac{2gh_O}{V_O^2}}\right) +$$

$$\frac{V_O^2 cos\theta_O}{g}\left(cos\theta_O + \frac{sin\theta_O cos\theta_O}{\sqrt{sin^2\theta_O + \frac{2gh_O}{V_O^2}}}\right) =$$

$$=\frac{V_O^2}{g}\left\{cos^2\theta_O\left[1+\frac{sin\theta_O}{\sqrt{sin^2\theta_O+\frac{2gh_O}{V_O^2}}}\right]-sin^2\theta_O\left[1+\frac{\sqrt{sin^2\theta_O+\frac{2gh_O}{V_O^2}}}{sin\theta_O}\right]\right\}.$$

Дорівнюючи цей вираз нулю, приходимо до тригонометричного рівняння

$$tg^2\theta_O=\left\{\left[1+\frac{sin\theta_O}{\sqrt{sin^2\theta_O+\frac{2gh_O}{V_O^2}}}\right]\Big/\left[1+\frac{\sqrt{sin^2\theta_O+\frac{2gh_O}{V_O^2}}}{sin\theta_O}\right]\right\}=\frac{sin\theta_O}{\sqrt{sin^2\theta_O+\frac{2gh_O}{V_O^2}}},$$

звідки $cos^2\theta_O=sin\theta_O\sqrt{sin^2\theta_O+\frac{2gh_O}{V_O^2}}$, або

$$1-sin^2\theta_O=sin\theta_O\sqrt{sin^2\theta_O+\frac{2gh_O}{V_O^2}}.$$

За допомогою заміни $sin\theta_O=z$ останнє рівняння набуває вигляду $1-z^2=z\sqrt{z^2+\frac{2gh_O}{V_O^2}}$. Після зведення обох частин рівняння в квадрат і спрощення, воно набуває вигляду $\left(\frac{2gh_O}{V_O^2}+2\right)z^2=1$. Рішення цього рівняння дає два корені, один з яких є від'ємним, тобто не має фізичного смислу, а другий - додатним і дорівнює $z=\frac{1}{\sqrt{2+\frac{2gh_O}{V_O^2}}}$. Таким чином, остаточно маємо

$$\theta_O=arcsin\frac{1}{\sqrt{2+\frac{2gh_O}{V_O^2}}}. \qquad (12.6)$$

Довжина польоту струменя l, що визначається за формулою (12.4), при постійній величині h_O є функцією двох незалежних змінних - початкової швидкості V_O і кута θ_O нахилу осі ствола до горизонту. Оскільки задати точні значення будь-яких фізичних величин неможливо, проведемо дослідження впливу похибок ΔV_O і $\Delta\theta_O$ на величину дальності польоту струменя l. Для цього, замінюючи повний приріст функції $l \;\; l\left(V_O + \Delta V_O, \theta_O + \Delta\theta_O\right)$ її першим диференціалом Δl, маємо

$$\Delta l \approx \frac{\partial l}{\partial V_O}\Delta V_O + \frac{\partial l}{\partial \theta_O}\Delta\theta_O, \qquad (12.7)$$

де частинні похідні $\dfrac{\partial l}{\partial V_O}$ і $\dfrac{\partial l}{\partial \theta_O}$ визначаються наступним чином:

$$\frac{\partial l}{\partial V_O} = \frac{1}{g}\left(sin 2\theta_O \cdot V_O + 2 cos\,\theta_O \frac{V_O^2\, sin^2\,\theta_O + gh_O}{\sqrt{V_O^2\, sin^2\,\theta_O + 2gh_O}} \right), \qquad (12.8)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_O} = \frac{V_O}{g}\left(cos\,2\theta_O \cdot V_O + sin\,\theta_O \frac{V_O^2\, cos\,2\theta_O - 2gh_O}{\sqrt{V_O^2\, sin^2\,\theta_O + 2gh_O}} \right). \qquad (12.9)$$

<u>Задача № 3.</u> Обчислити найбільше відхилення Δl від теоретичної дальності польоту l_T гідравлічного струменя при h_O = 3 м, якщо V_O = 20 м/с, θ_O =30°, похибка визначення швидкості витікання ΔV_O = ±1 м/с, кута нахилу осі ствола до горизонту $\Delta\theta_O$ = ±1°.

<u>Розв’язання.</u> Знаходимо за формулами (12.8) і (12.9) величини частинних похідних:

$$\frac{\partial l}{\partial V_O} = \frac{1}{9{,}81}\left(sin\,60^\circ \cdot 20 + 2\,cos\,30^\circ \frac{20^2 \cdot sin^2\,30^\circ + 9{,}81 \cdot 3}{\sqrt{20^2 \cdot sin^2\,30^\circ + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 3}} \right) =$$

$$=0{,}0883\left(10{,}0+\frac{400\cdot 0{,}25+9{,}81\cdot 3}{\sqrt{400\cdot 0{,}25+2\cdot 9{,}81\cdot 3}}\right)=\text{ 1,79 с,}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_O}=\frac{20}{9{,}81}\left(\cos 60^\circ\cdot 20+\sin 30^\circ\,\frac{20^2\cdot\cos 60^\circ-2\cdot 9{,}81\cdot 3}{\sqrt{20^2\cdot\sin^2 30^\circ+2\cdot 9{,}81\cdot 3}}\right)=$$

$$=0{,}1019\left(10+0{,}5\frac{400\cdot 0{,}5-2\cdot 9{,}81\cdot 3}{\sqrt{400\cdot 0{,}25+2\cdot 9{,}81\cdot 3}}\right)=\text{ 31,8 м/°.}$$

Для визначення граничної абсолютної похибки Δl формула (12.7) записується у вигляді

$$\Delta l\approx\left|\frac{\partial l}{\partial V_O}\right|\cdot\left|\Delta V_O\right|+\left|\frac{\partial l}{\partial \theta_O}\right|\cdot\left|\Delta\theta_O\right|=1{,}79\cdot 1+31{,}8\cdot\left(\frac{3{,}1415}{180}\right)=\text{ 3,39 м.}$$

Сама теоретична дальність l_T визначається за формулою (12.4)

$$l_T=\frac{V_O^2\cos\theta_O}{g}\left(\sin\theta_O+\sqrt{\sin^2\theta_O+\frac{2gh_O}{V_O^2}}\right)=$$

$$=\frac{20^2\cdot 0{,}866}{9{,}81}\left(0{,}5+\sqrt{0{,}25+\frac{2\cdot 9{,}81\cdot 3}{20^2}}\right)=$$ 39,89 м. Остаточно запишемо відповідь у вигляді $l=\left(39{,}89\pm 3{,}39\right)$ м, тобто при вказаних умовах і похибках ΔV_O і $\Delta\theta_O$ дійсна величина дальності польоту l гідравлічного струменя знаходиться в діапазоні $36{,}50\le l\le 43{,}28$ м.

Розрахункові залежності параметрів траєкторії гідравлічного струменя істотно спрощуються при h_O = 0. Рівняння (12.3) траєкторії має вигляд $y=xtg\theta_O-\dfrac{gx^2}{2V_O^2\cos^2\theta_O}$.

Дальність польоту l струменя та найбільша висота h її підйому визначаються за формулами

$$l = \frac{V_O^2 \sin 2\theta_O}{g}, \; h = \frac{V_O^2}{2g} \sin^2 \theta_O .$$

Максимум l досягається при $\theta_O = 45^\circ$, для цього кута $l_{max} = \frac{V_O^2}{g} = 2H$, $h = \frac{V_O^2}{4g} = \frac{H}{2}$, де $H = \frac{V_O^2}{2g}$ - напір у сприску ствола. До речі, із формули (12.6) при $h_O = 0$ θ_O також складає кут 45°.

Теоретичні значення l_{max} і h виявляються значно завищеними у порівнянні з експериментальними дослідженнями. Це пов'язано з тим, що отримані розрахункові залежності не враховують вплив сили опору навколишнього середовища гідравлічному струменя, що рухається в повітряному просторі (силу тертя струменя об повітря).

III. КОРИГУВАННЯ РОЗРАХУНКОВИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ПАРАМЕТРІВ ГІДРАВЛІЧНОГО СТРУМЕНЯ З УРАХУВАННЯМ ВТРАТИ НАПОРУ

Найпростішим методом урахування сили тертя, який приводить до коригування виразів (12.2) і, відповідно, усіх розрахункових залежностей, є метод ,оснований на застосуванні формули Дарсі-Вейсбаха (5.3) для втрат напору, що дозволяє вказані вирази записати у вигляді

$$x = V_O \cos\theta_O t - \frac{kx}{D_O}\frac{V_O^2}{2g}, \; y = V_O \sin\theta_O t - \frac{gt^2}{2} - \frac{ky}{D_O}\frac{V_O^2}{2g} + h_O , \tag{12.10}$$

де k - безрозмірний коефіцієнт опору, що визначається за допомогою експерименту, D_O - внутрішній діаметр сприску насадки. Виключаючи у виразі (12.10) час t, одержимо рівняння траєкторії гідравлічного струменя у явному вигляді

$$y = tg\theta_O x - \frac{gx^2}{2V_O^2 \cos^2\theta_O}\left(1 + \frac{k}{D_O}\frac{V_O^2}{2g}\right) + \frac{h_O}{1 + \frac{k}{D_O}\frac{V_O^2}{2g}} . \tag{12.11}$$

В результаті проведеного коригування вигляд траєкторії гідравлічного струменя (дуга параболи) у формі (12.11) не змінився, хоча її параметри – дальність польоту l і висота підйому h - зменшились.

Для отримання формули дальності польоту струменя залишається в (12.11) покласти $y = 0$ і знайти додатний корінь відповідного квадратного рівняння. Введемо позначення

$$a = \frac{g}{2V_O^2 cos^2 \theta_O}\left(1 + \frac{k}{D_O}\frac{V_O^2}{2g}\right), \; b = \frac{h_O}{1 + \frac{k}{D_O}\frac{V_O^2}{2g}}, \quad (12.12)$$

тоді необхідне квадратне рівняння набуває вигляду

$$ax^2 - tg\theta_O x - b = 0, \quad (12.13)$$

звідки отримуємо формулу для визначення дальності польоту струменя

$$l = \frac{tg\theta_O + \sqrt{tg^2\theta_O + 4ab}}{2a}. \quad (12.14)$$

Формула для обчислення висоти h підйому струменя записується так:

$$h = \frac{tg^2\theta_O}{4a} + b. \quad (12.15)$$

<u>Задача № 4.</u> Обчислити дальність польоту l і висоту підйому h гідравлічного струменя, який витікає з початковою швидкістю V_O = 20 м/с під кутом θ_O =30°. Діаметр насадки ствола D_O = 19 мм, h_O = 3 м, коефіцієнт опору повітря k = 10^{-4}.

<u>Розв’язання.</u> За формулами (12.12) обчислюємо коефіцієнти

$$a = \frac{g}{2V_O^2 cos^2 \theta_O}\left(1 + \frac{k}{D_O}\frac{V_O^2}{2g}\right) = \frac{9{,}81}{2 \cdot 20^2 \cdot 0{,}866^2}\left(1 + \frac{10^{-4}}{0{,}019} \cdot \frac{20^2}{2 \cdot 9{,}81}\right)$$

= 0,0181,

$$b = \frac{h_О}{1 + \frac{k}{D_О}\frac{V_О^2}{2g}} = \frac{3}{1 + \frac{10^{-4}}{0{,}019}\cdot\frac{20^2}{2\cdot 9{,}81}}$$ = 2,71, $tg\theta_О = tg30^\circ$ = 0,577.

Квадратне рівняння (12.13) з урахуванням цих значень запишемо у вигляді $0{,}0181x^2 - 0{,}577x - 2{,}71 = 0$. Його додатний корінь і є величиною дальності польоту струменя (12.14)

$$l = \frac{0{,}577 + \sqrt{0{,}577^2 + 4\cdot 0{,}0181\cdot 2{,}71}}{2\cdot 0{,}0181}$$ = 36,03 м.

Необхідно відмітити, що в задачі № 3 теоретична дальність польоту при тих же вихідних даних, але без урахування опору повітря, склала $l_Т$ = 39,89 м, тобто на 3,86 м більше у порівнянні з величиною l.

Висота підйому h струменя за формулою (12.15) складає $h = \frac{tg^2\theta_О}{4a} + b = \frac{0{,}577^2}{4\cdot 0{,}0181} + 2{,}71$ = 7,31 м. Якщо не враховувати опір повітря, відповідна формула для висоти h має вигляд $h = \frac{V_О^2 \, sin^2\theta_О}{2g} + h_О = \frac{20^2\cdot 0{,}5^2}{2\cdot 9{,}81} + 3$ = 8,1 м. Із цих розрахунків безпосередньо випливає, що урахування сили опору повітря призводить до зменшення розрахункових величин дальності польоту та висоти підйому гідравлічного струменя.

ЛЕКЦІЯ № 13. ВЗАЄМОДІЯ ПОТОКУ РІДИНИ І ГАЗУ З ТВЕРДИМ ТІЛОМ. РЕАКЦІЯ СТРУМЕНЯ. МЕТОДИ РОЗПИЛЕННЯ СТРУМЕНЯ

I. СИЛА ДІЇ ВІЛЬНОГО СТРУМЕНЯ НА НЕРУХОМУ ПЛОСКУ ПОВЕРХНЮ

Якщо струмінь рідини, що витікає з отвору або насадки, зустрічає на своєму шляху тверду перешкоду (стінку), рідина здійснює на цю перешкоду тиск з деякою силою, яка зазвичай називається силою тиску, або силою удару струменя. Величина цієї сили залежить від середньої швидкості і розмірів поперечного перерізу струменя рідини, форми та розмірів перешкоди та її розташування по відношенню до струменя. Зазначене явище спостерігається в багатьох практичних випадках: при ударі струменя рідини об лопатки турбін та водяних коліс, ударі струменя, який витікає з пожежних насадок і стволів, ударі хвилі об стінку звичайних і захисних споруд тощо. Тому визначення сили тиску є важливою практичною задачею.

В основу виводу динамічних властивостей струменя покладена теорема про кількість руху. У векторному вигляді ця теорема формулюється наступним чином: похідна за часом від вектора $\vec{q}$ кількості руху матеріальних точок дорівнює головному вектору всіх зовнішніх масових $\vec{R}_{\text{М}}$, поверхневих $\vec{R}_{\text{П}}$ сил, які діють на систему, сил гідродинамічного тиску $\vec{F}_{\text{PO}}$ та $\vec{F}_{\text{P1}}$, які діють на торцеві перерізи рідкого тіла $\text{O}-\text{O}$ та $1-1$ з боку решти рідини

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{R}_{\text{М}} + \vec{R}_{\text{П}} + \vec{F}_{\text{PO}} + \vec{F}_{\text{P1}}. \qquad (13.1)$$

Вектор масових сил дорівнює вазі об’єму рідини, що розглядається, між вказаними довільними перерізами. Вектор зовнішніх поверхневих сил в загальному випадку дорівнює вектору сил реакції стінки

$$\vec{R}_{\text{П}} = \vec{R}_{\text{СТ}}. \qquad (13.2)$$

За час dt приріст кількості руху дорівнює тільки різниці

$$d\vec{q} = \vec{q}_1 - \vec{q}_{\text{O}} = \left(\vec{R}_{\text{M}} + \vec{R}_{CT} + \vec{F}_{\text{PO}} + \vec{F}_{\text{P1}}\right)dt. \quad (13.3)$$

Головний вектор сил дії потоку на стінку $\vec{F}$ дорівнює вектору реакції стінки $\vec{R}_{CT}$, але за напрямом є протилежним

$$\vec{F} = -\vec{R}_{CT}, \quad (13.4)$$

з урахуванням цього виразу

$$\vec{F}dt = \vec{q}_{\text{O}} - \vec{q}_1 + \left(\vec{R}_{\text{M}} + \vec{F}_{\text{PO}} + \vec{F}_{\text{P1}}\right)dt. \quad (13.5)$$

Розглянемо загальний випадок удару компактного струменя по нерухомій перешкоді, розташованій перпендикулярно до його осі. При натіканні на неї струмінь змінює свій напрям і в подальшому розтікається по поверхні. Якщо остання горизонтальна та необмежена, то розтікання відбувається симетрично відносно осі струменя , причому в межах деякого кільця струмінь розтікається тонким шаром. Нехтуючи силами тертя в межах зазначеного кільця, можна вважати, що швидкість розтікання дорівнює початковій швидкості струменя V_{O}. Поза зовнішньою границею кільця відбувається різке збільшення товщини шару, який розтікається. На вільній границі струменя тиск є постійним, який дорівнює тиску в навколишньому середовищі та тиску в перерізі струменя, що набігає.

Аналогічну картину розтікання можна уявити і для вертикальної плоскої поверхні, якщо нехтувати впливом ваги рідини. Рідина розтікається по поверхні, а не відбивається від неї.

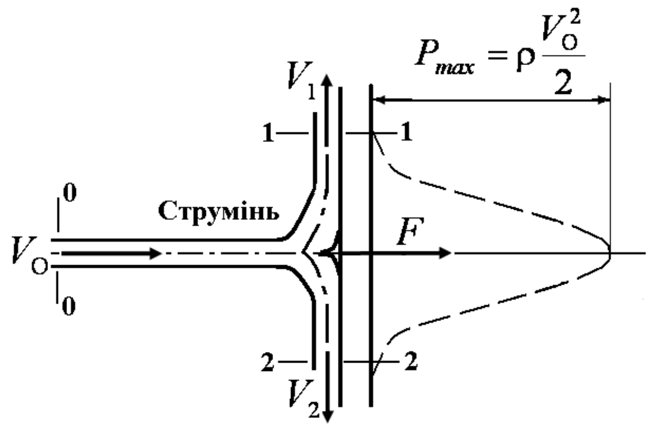


Рисунок 13.1.

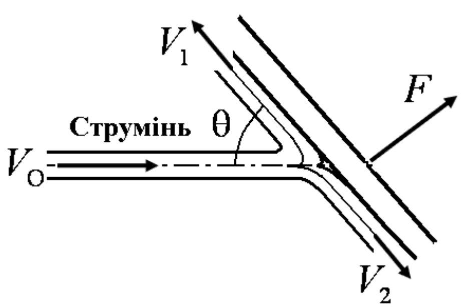


Рисунок 13.2.

Нехай в перерізі $\mathrm{O}-\mathrm{O}$ струмінь має площу живого перерізу ω_{O} і середню швидкість потоку V_{O}. При зустрічі з перешкодою струмінь розділяється на дві частини з відповідними характеристиками ω_1, V_1 і ω_2, V_2. За час Δt маса рідини струменя, що рухається, складає $\rho V_{\mathrm{O}} \omega_{\mathrm{O}} \Delta t = \rho Q \Delta t$. Маса рідини ρQ, що проходить за одиницю часу (секунду) через довільний переріз потоку, при напрямі вздовж потоку є величиною постійною. Взагалі, кількість руху вказаної маси $\rho Q V$ в певному плоскому живому перерізі, до якого відноситься швидкість V, цей вираз можна назвати секундною кількістю руху (або, умовно кажучи, витратами кількості руху). Розмірність останнього – розмірність сили. З урахуванням (13.4) і заміною на Δt в загальному вигляді (13.5)

$$\rho Q \vec{V}_1 \Delta t - \rho Q \vec{V}_{\mathrm{O}} \Delta t = \left(\vec{R}_{\mathrm{M}} + \vec{R}_{CT} + \vec{F}_{\mathrm{PO}} + \vec{F}_{\mathrm{P1}}\right)\Delta t \text{, або}$$

$$\rho Q\left(\vec{V}_1 - \vec{V}_{\mathrm{O}}\right) = \vec{R}_{\mathrm{M}} + \vec{R}_{CT} + \vec{F}_{\mathrm{PO}} + \vec{F}_{\mathrm{P1}}. \qquad (13.6)$$

Гідравлічне рівняння кількості руху (13.6) – рівняння балансу секундної кількості руху – можна прочитати наступним чином: при переході від плоского живого перерізу $\mathrm{O}-\mathrm{O}$ до плоского живого перерізу $1-1$ проекція на будь-яку вісь секундної кількості руху потоку змінюється на величину, яка дорівнює сумі проекцій на ту ж саму вісь всіх зовнішніх сил, діючих на відсік потоку між вказаними перерізами. Це рівняння, до речі, дозволяє пояснити принцип реактивного руху. Якщо деяке тіло викидає високошвидкісний струмінь газу або рідини, то цей струмінь діє на тіло з силою, яка дорівнює зміні кількості її руху, що примушує тіло рухатися. За умов: 1) вільний струмінь сприймає однаковий вплив навколишнього середовища, тобто в перерізах $\mathrm{O}-\mathrm{O}$ та $1-1$ тиск атмосферний $F_{\mathrm{PO}} = F_{\mathrm{P1}} = 0$; 2) впливом ваги можна знехтувати $\vec{R}_{\mathrm{M}} = 0$ - отримують рівняння

$$\rho Q \vec{V}_{\mathrm{O}} - \rho Q \vec{V}_1 = \vec{F}. \qquad (13.7)$$

Проекції сил і швидкостей, спрямованих проти напряму руху потоку, мають в рівнянні (13.7) від'ємну величину. Спроектуємо рівняння на напрям дії струменя. При перпендикулярності векторів $\vec{V}_O \perp \vec{V}_1$ і $\vec{V}_O \perp \vec{V}_2$ проекції останніх дорівнюють нулю, що дає для сили

$$F = \rho Q V_O, \text{ або } F = 2\omega_O \frac{V_O^2}{2}\rho. \qquad (13.8)$$

Сила тиску струменя на плоску поверхню дорівнює вазі стовпа рідини, основою якого є поперечний переріз струменя навколо виходу з насадки, а висота дорівнює подвоєному швидкісному напору.

При розташуванні перешкоди безпосередньо близько до отвору, слушно в формулу (13.8) підставити вираз для швидкості витікання $V_O = \sqrt{2gH}$ без урахування коефіцієнта швидкості або прийняття його рівним 1. Тоді для сили тиску (13.8) маємо

$$F = 2\omega_O \rho g H. \qquad (13.9)$$

З формули (13.9) бачимо, що сила тиску струменя рідини у два рази більший за силу гідростатичного тиску рідини $\omega_O \rho g H$, що створюється на ту саму площину ω_O при тій самій глибині заглиблення H під вільною поверхнею.

За достатньо великих швидкостей витікання рідини характер взаємодії струменя і перешкоди приводить до вісесиметричної задачі розтікання потоку по стінці. Живий переріз 1-1 (2-2) має круглоциліндричну форму: на вертикальну площину, нормальну до креслення, контур цього перерізу проектується в окружність, причому лінії течії перетинають таку окружність в радіальному напрямі.

Даний випадок може розглядатися як виняток: незважаючи на наявність криволінійного живого перерізу 1-1 (2-2) і різко змінний характер руху рідини в ньому, можна, розглядаючи такий переріз, скористатися поняттям середньої швидкості й, як наслідок, рівнянням (13.8).

Дійсне значення сили буде дещо меншим, що враховується введенням в рівняння коефіцієнта ψ:

$$F = \psi \rho Q V_O. \qquad (13.10)$$

На основі експериментальних досліджень цей коефіцієнт при діаметрах кільця розтікання, більших за три діаметри струменя, виявляється рівним $\psi = 0{,}92 \div 0{,}96$. Тиск, що діє з боку струменя на окремі ділянки площини, розподіляється (рисунок 13.1) нерівномірно по відношенню до осі струменя. Максимальний тиск відчуває точка площини, яка збігається з віссю струменя. В цій точці диск досягає величини $P_{max} = \rho \frac{V_О^2}{2}$; при віддаленні рідини від осі тиск різко зменшується.

Якщо вісь струменя утворює з плоскою поверхнею гострий кут θ (рисунок 13.2), то напрям дії сили $\vec{F}$ є нормальним до поверхні стінки. За умов проведення осі проектування через цю нормаль, потрібно просто в рівнянні (13.8) взяти проекцію $\rho Q V_О \sin\theta$, тоді

$$F = \rho Q V_О \sin\theta. \tag{13.11}$$

При утворенні гострого кута $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ вектором швидкості $\vec{V}_1$ (і $\vec{V}_2$) з віссю струменя і за умов збереження маси рідини

$$mV_О - \left(m_1 V_1 \cos\theta + m_2 V_2 \cos\theta\right) = F\Delta t, \text{ або}$$

$$F = \rho Q V_О \left(1 - \cos\theta\right). \tag{13.12}$$

Тиск струменя, безумовно, залежить від відстані до перешкоди. Із збільшенням відстані струмінь розсіюється і тиск зменшується.

II. СИЛА ДІЇ ВІЛЬНОГО СТРУМЕНЯ НА НЕРУХОМУ КРИВОЛІНІЙНУ ПОВЕРХНЮ

З криволінійних поверхонь розглянемо ті, які мають вісь симетрії, що збігається з віссю струменя (рисунок 13.3 – відбиття з частковим розворотом струменя, рисунок 13.4 – відбиття з повним розворотом). В цьому випадку сила $\vec{F}$ буде спрямована за вказаною віссю. Для її визначення скористаємось формулою (13.7), спроектувавши її на вісь симетрії. Приймаючи швидкість розтікання за $V_1 = V_2 = V_О$, маємо:

$$F = \rho Q V_O + \rho Q V_O \cos\theta = \rho Q V_O (1 + \cos\theta). \quad (13.13)$$

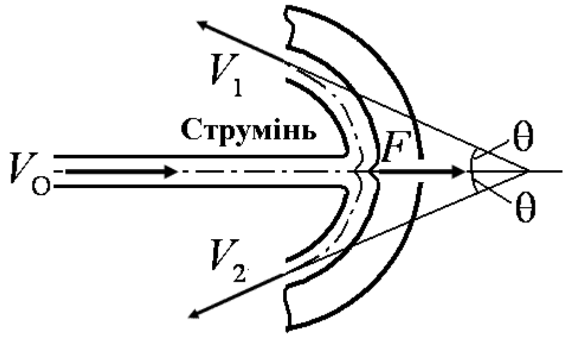


Рисунок 13.3.

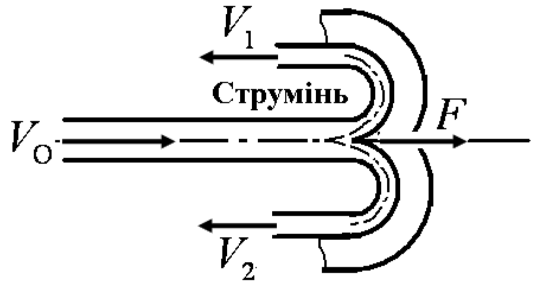


Рисунок 13.4.

Максимального значення сила набуває при $\theta = 0$, що приводить до випадку відбиття з повним розворотом

$$F = 2\rho Q V_O. \quad (13.14)$$

Ця формула доводить: характер повного розвороту не впливає на тиск за умов, що струмінь не гальмується. За аналогією до формули (13.8) сила тиску струменя в цьому випадку підвищує гідростатичний тиск у чотири рази.

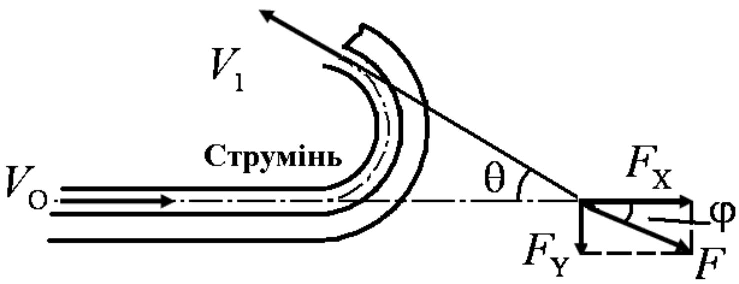


Рисунок 13.5.

Якщо криволінійна поверхня має довільну форму, дія рідини визначиться силами, які перехрещуються, що приводить до динамічного гвинта.

У випадку плоского потоку сили можуть бути приведені до рівнодіючої F з проекціями F_X і F_Y (рисунок 13.5), які знаходяться з рівняння

$$\rho Q \vec{V}_O - \rho Q \vec{V}_1 = \vec{F}_X + \vec{F}_Y. \quad (13.15)$$

Приймаючи $V_O = V_1$, для кожного напряму отримуємо (кут θ - гострий кут між напрямом вектора швидкості $\vec{V}_1$ і віссю потоку)

$$F_X = \rho Q V_O (1 + \cos\theta), \; F_Y = \rho Q V_O \sin\theta, \quad (13.16)$$

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = 2\rho Q V_O \cos\frac{\theta}{2}, \quad \cos\varphi = \frac{1 + \cos\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}}.$$

За останньою формулою визначають кут φ.

Аналізуючи отримані формули для визначення сили дії струменя на поверхню, можна зробити такий висновок: при зіткненні з перешкодою струмінь тисне на неї з силою, яка визначається, по-перше, витратами рідини та його швидкістю, а по-друге, формою перешкоди та кутом зіткнення. Загальний вигляд виразу для вказаної сили у термінах об'ємних витрат та швидкісного напору записується наступним чином:

$$F = k\rho Q V_O \text{ або } F = k\rho\omega_O V_O^2, \tag{13.17}$$

де k - безрозмірний коефіцієнт, залежний від форми перешкоди та умов зіткнення (коефіцієнт форми). Неважко за бажанням визначити на основі формул (13.8), (13.11), (13.12), (13.13), (13.16) цей коефіцієнт. Окрім визначених вище, для невеликої вузької перешкоди, яку огинають симетричні потоки зі швидкостями $\vec{V}_1$ і $\vec{V}_2$, утворюючи гострий кут θ з віссю потоку, коефіцієнт $k = 1 - \cos\theta$. Сила тиску визначається внутрішнім кутом розльоту рідини, який вимірюється на кромці перешкоди. Очевидно, що коефіцієнт форми є аналогічним коефіцієнту передачі імпульсу для абсолютно пружного механічного зіткнення твердого тіла з перешкодою за відповідного кута відскоку. У випадку, коли струмінь містить бульбашки газу або в момент зіткнення з перешкодою вже переходить до роздробленої або розпиленої стадій, за густину слід брати усереднену густину по всьому перерізу струменя біля перешкоди.

III. СИЛА ДІЇ ВІЛЬНОГО СТРУМЕНЯ НА ПОВЕРХНІ, ЩО РУХАЮТЬСЯ ПОСТУПАЛЬНО, ПРЯМОЛІНІЙНО ТА РІВНОМІРНО

Розглянемо дію струменя на поверхні, що рухаються поступально, рівномірно та прямолінійно зі швидкістю U (рисунки 13.6, 13.7).

В цьому випадку розтікання струменя відбувається, як і в розглянутих вище. Наприклад, на плоскі поверхні струмінь натикає з відносною швидкістю $V_{\text{B}} = V_{\text{O}} - U$. Нехтуючи тертям і вагою, можна вважати, що з цією швидкістю струмінь розтікається по поверхні.

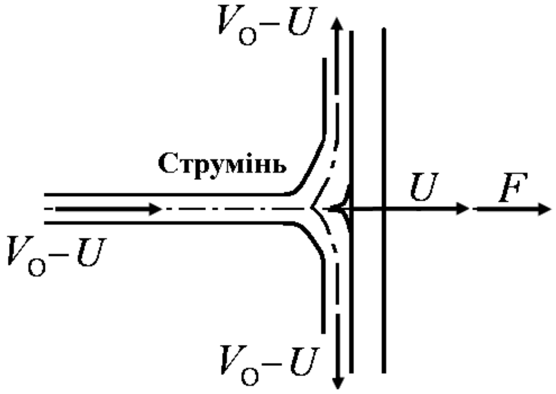


Рисунок 13.6.

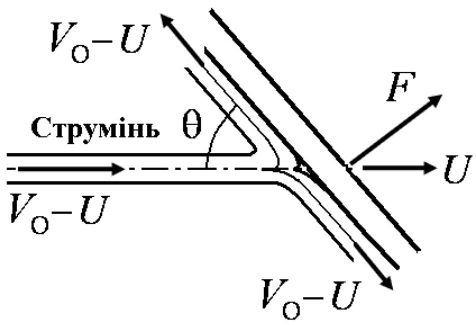


Рисунок 13.7.

Для криволінійної поверхні (наприклад, рисунок 13.5) ситуація ускладнюється змінним напрямом швидкості потоку V_{O} (змінним значенням кута θ) під час руху вздовж цієї поверхні. Струмінь натікає з відносною швидкістю

$$V_{\text{B}} = \sqrt{V_{\text{O}}^2 + U^2 - 2V_{\text{O}} U \cos\theta}.$$

Зазвичай приймається, що з цією швидкістю струмінь рухається по поверхні. В реальних умовах відносна швидкість зменшується, і після сходу з поверхні вона менша у порівнянні з входом.

Міркування, аналогічні до передуючих, дозволяють отримати для розглянутих випадків наступні вирази для сил. Для схеми на рисунку 13.6 очевидно максимальне значення сили відповідає нерухомій площині при $U = 0$, мінімальне $F = 0$ при $U = V_{\text{O}}$. Для останнього випадку струмінь не досягне площини, яка рухається з однаковою з нею швидкістю. Для схеми на рисунку 13.7 так само визначаються максимальна та мінімальна сили.

IV. РЕАКЦІЯ СТРУМЕНЯ

Струмінь рідини, який витікає з резервуара зменшує імпульс на величину (площу перерізу позначаємо ω)

$$\Delta\vec{q} = \rho\omega V \Delta t \vec{V} = \Delta m \vec{V}, \tag{13.18}$$

де $\vec{V}$ - швидкість витікання струменя, $\rho\omega V\Delta t = \Delta m$ - маса рідини, що витікає за час Δt. За третім законом Ньютона резервуар отримує від рідини, що витікає, за той же час імпульс $-\Delta\vec{q}$, тобто відчуває дію сили, яка дорівнює секундній зміні кількості руху і протилежна за напрямом до неї

$$\vec{F}_r = -\frac{\Delta\vec{q}}{\Delta t} = \rho\omega V\vec{V}. \qquad (13.19)$$

Ця сила називається силою реакції струменя. Якщо резервуар знаходиться на візку, то він буде рухатися у протилежному напрямі під дією сили, модуль якої з урахуванням формули Торрічеллі для теоретичної швидкості витікання $V_{\text{ТЕОР}} = \sqrt{2gH}$

$$F_r = \rho\omega V^2 = 2gH\rho\omega. \qquad (13.20)$$

Сила гідростатичного тиску на такій глибині дорівнює $F = \rho gH\omega$, тобто менша за силу реакції струменя, що витікає. Це пояснюється тим, що при витіканні струменя рух рідини в резервуарі призводить до перерозподілу тиску, причому тиск поблизу стінки, котра лежить проти отвору, є дещо більшим, чим поблизу стінки, в якій зроблено отвір. В отриманому співвідношенні є повна аналогія з активним рухом (формула 13.9).

Для визначення реакції рідини, що витікає зі скривленої на 90° труби (рисунок 13.8) застосуємо теорему про зміну кількості руху.

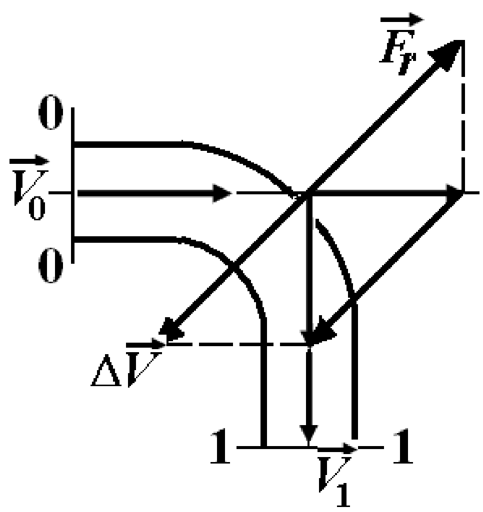


Рисунок 13.8.

Нехай рідина надходить в трубу зі швидкістю $\vec{V}_O$ (переріз $O-O$) і виходить зі швидкістю $\vec{V}_1$ (переріз $1-1$). Для спрощення розрахунків беремо постійність поперечного перерізу по всій довжині труби. За таких умов швидкості $\vec{V}_O$ і $\vec{V}_1$ за модулем рівні, але їхні напрями різні. Відповідно, швидкість отримує приріст $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_O$. Це означатиме, що під час течії по зігнутій трубі рідина відчуває прискорення, середнє значення якого спрямовано вздовж вектора $\Delta\vec{V}$. Прискорення рідини з'являється через сили, з якими стінки труби діють на рідину. За третім законом Ньютона на трубу з боку рідини діє сила протидії $\vec{F}_r$, спрямована проти напряму вектора $\Delta\vec{V}$, що призводить до відхилення труби у бік сили $\vec{F}_r$. Точкою прикладання є точка перетину лінії дії векторів швидкостей $\vec{V}_O$, $\vec{V}_1$.

На об'єм рідини між торцевими перерізами діють сили тиску, які є однаковими, що випливає з рівняння Бернуллі з урахуванням незмінності швидкості. Кількості руху рідини, що зсередини поступає до труби (переріз $O-O$) і виходить з неї (переріз $1-1$) за величиною є однаковими, але спрямованими перпендикулярно одна до одної. Геометричні побудови (вектори $\vec{V}_O$, $\vec{V}_1$ і $\Delta\vec{V}$ утворюють прямокутний трикутник з однаковими катетами) дозволяють знайти зміну кількості руху при введенні позначення $V_O = V_1 = V$

$$F_r = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \sqrt{2}\rho\omega V^2. \qquad (13.21)$$

Таким чином, ми отримали вираз для визначення реакції струменя рідини і визначили напрям дії цієї сили.

V. МЕТОДИ РОЗПИЛЕННЯ СТРУМЕНЯ

Розпилення (розбиття) рідини широко застосовується в техніці. Розповсюджене застосування розпилення пояснюється тим, що в цьому процесі зменшення розмірів крапель різко збільшує коефіцієнт теплопередачі і, як наслідок, зменшує час протікання процесу. Крім того, розпилення забезпечує більшу рівномірність розподілу рідини і кращу взаємодію її з реагуючим середовищем. Режим витікання рідини через розпилювачі забезпечує розбиття суцільного струменя на окремі краплі, загальна площа поверхні яких набагато перевищує площу поверхні компактного струменя. Зазначений режим широко використовується в пожежній справі для створення перешкод горінню через наступні чинники:

1) збільшення поверхні рідини, яка випаровується та відбирає тепло при взаємодії з полум'ям;
2) збільшення площі поверхні горіння, яку можна накрити рідинним шаром, що перешкоджає протіканню горіння.

В традиційних системах водяного пожежогасіння діаметр крапель, які попадають на осередок займання, складає приблизно 0,4-2,0 мм. Це призводить до того, що біля 30% води йде на тушіння вогню, а решта проливається і в процесі гасіння ніяк не задіяна. При зменшенні розмірів водяної краплі (менше 100 мкм) механізм гасіння вогню істотно змінюється. Маючи високі проникні та охолоджуючі здібності, тонко розпилена вода (водяний туман) ефективно гасить пожежі, завдаючи меншої шкоди матеріальним цінностям.

Механізм розбиття рідини, яка залишила розпилювач, залежить головним чином від форми струменя, що витікає, і співвідношення швидкостей струменя і навколишнього газу, котрі в свою чергу визначаються способом розпилення, класом і конструкцією розпилюючого пристрою.

При гідравлічному розпиленні основним енергетичним фактором, який призводить до розпаду рідини на краплі, є тиск нагнітання. Проходячи через пристрій, що розпилює, рідинний потік набуває високої швидкості і перетворюється у форму, яка сприяє швидкому та ефективному розпаду (струмінь, плівка, крупні частинки залежно від належності розпилювача до того чи іншого класу). Цей вид розпилення є найекономічнішим за споживанням енергії, однак розпил, який утворюється при цьому, є достатньо грубим і неоднорідним, утруднені регулювання витрати при заданій якості розбиття, а також розпилювання високов'язких рідин. Водночас цей спосіб є найбільш поширеним через його порівняну простоту.

Для здійснення розпилення застосовують різноманітні за конструктивним виконанням форсунки, в яких реалізовані два основних способи розпилення рідини – механічний і пневматичний, що і покладено в основу розподілу форсунок на дві великі групи. Застосовуються також форсунки комбінованого типу, так звані повітряно-механічні.

Механічні форсунки можна умовно розділити на відцентрові та прямої дії. У відцентровій рідина закручується в каналах або спеціальній вихровій камері, надходить в камеру тангенційно, обертаючись, переміщується у напрямі до притискного отвору, звідки через звужене сопло викидається назовні. При витіканні рідини з отвору через припинення дії доцентрових сил стінок на потік, частинки рідини розлітаються за прямолінійними променями, утворюючи конусоподібну поверхню. Форсунки такого типу виготовляються залежно від необхідного ступеня диспергування, заданої продуктивності та необхідної дальності струменя. До переваг цього способу слід віднести можливість розпилювання високов'язких і забруднених рідин, регулювання продуктивності розпилювача без істотної зміни дисперсності. Недоліками є складність виготовлення та експлуатації, висока ціна, наявність вентиляційного ефекту.

При пневматичному розпиленні енергія підводиться до рідини головним чином в результаті її динамічної взаємодії з високошвидкісним потоком газу (розпилюючого агента). Завдяки великій відносній швидкості потоків в розпилювачі або за його межами рідина спочатку розшаровується на окремі нитки, котрі потім розпадаються на краплі.

Форсунки використовуються для пожежного захисту кораблів, резервуарів для газу та кислоти, в машинних і котельних приміщеннях, в переносних вогнегасниках, на установках нафтопереробних заводів, в системах з хладоном.

Форсунки з дрібнодисперсним розпиленням мають вбудований завихрювач, можуть зробити дрібнодисперсний туман з формою розпилення у вигляді повного конуса, при цьому забезпечуються потрібні показники витрати рідини.

Спіралеподібне виконання забезпечує повноконусну або порожньоконусну форму розпилення, а відносно великий прохідний переріз зводить до мінімуму риск засмічення. Повноконусні форсунки забезпечують повноконусний факел з коловою поверхнею зрошення, рівномірне розпилення (від середніх до великорозмірних крапель) при широкому діапазоні показників продуктивності і тиску.

Пневмоакустичні розпилювачі використовуються в протипожежних установках, пристроях і системах дегазації і дезактивації. Одною з переваг цього типу є те, що тонко розпилена рідина має дуже велику проникність. При цьому в системах пожежогасіння навколишні предмети практично не страждають від води. Також за допомогою цих форсунок утворюється вогнегасна суміш води та інертного газу (наприклад, азотно-водяна) в системах пожежогасіння в закритих приміщеннях.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА № 1. Визначити силу тиску F на вертикальну нерухому стінку струменя води, який витікає під напором H = 20 м вод.ст. з вертикального отвору діаметром насадки d_O = 0,05 м в тонкій стінці.

Розв'язання. Скористаємось формулою (13.8), прийнявши струмінь горизонтальним. Для отвору в тонкій стінці коефіцієнти швидкості φ =0,97, стиснення ε =0,64, тому коефіцієнт витрати μ =0,62. Для води густина ρ =1000 кг/м^3. Для швидкості струменя $V_O = \varphi\sqrt{2gH} = 0{,}97\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 20}$ =19,21 м/с, площі круглого отвору ω_O =12,56·10^{-2} м^2 визначаємо F =10^3·12,56·10^{-2}·19,21^2= 463,5 Н.

Відповідь. Сила тиску струменя F =463,5 Н.

ЗАДАЧА № 2. Визначити силу тиску F на вертикальну нерухому стінку струменя води, який спрямований до неї під кутом θ = 30°, швидкість струменя V_O =6 м/с, площа живого перерізу ω_O =0,005 м^2

Розв'язання. Скористаємось формулою (13.11). Для води густина ρ =1000 кг/м^3. F =10^3·0,005·6^2·0,5= 90 Н.

Відповідь. Сила тиску струменя F =90 Н.

ЛЕКЦІЯ № 14*. ЗАКОН ПАСКАЛЯ. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ГІДРОСТАТИКИ

I. ЗАКОН ПАСКАЛЯ

Розглянемо тиск на нахилену площину (рисунок 14.1). Усередині маси рідини, що знаходиться у рівновазі, обираємо дуже малий об'єм рідини у формі тетраедра з ребрами dx, dy, dz, паралельними координатним осям. Рівновага виділеного тетраедра описується векторним рівнянням статики

$$\vec{P}_n \omega_n = \vec{P}_X \omega_X + \vec{P}_Y \omega_Y + \vec{P}_Z \omega_Z, \qquad (14.1)$$

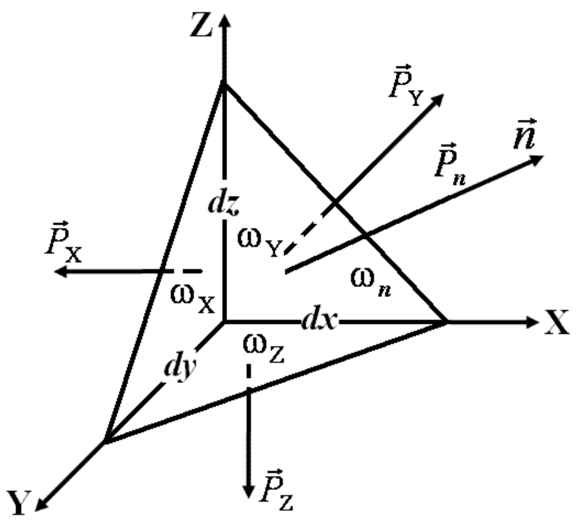


Рисунок 14.1.

де ω_n, ω_X, ω_Y, ω_Z - площі нахиленої грані та граней, що знаходяться відповідно у площині YZ, XZ, XY; $\vec{P}_n$, $\vec{P}_X$, $\vec{P}_Y$, $\vec{P}_Z$ - тиски, діючі на відповідних гранях. За класифікацією добуток цих тисків на площу їхньої дії можна віднести до поверхневих сил (на відміну від масових, або об'ємних).

Нормаль $\vec{n}$ складає з відповідною віссю кути $(\vec{n},X)$, $(\vec{n},Y)$, $(\vec{n},Z)$, для яких справедливі співвідношення $\dfrac{\omega_X}{\omega_n} = cos(\vec{n},X)$, $\dfrac{\omega_Y}{\omega_n} = cos(\vec{n},Y)$, $\dfrac{\omega_Z}{\omega_n} = cos(\vec{n},Z)$, або

$$\omega_X = \omega_n\, cos(\vec{n},X) = \frac{1}{2} dydz,\ \omega_Y = \omega_n\, cos(\vec{n},Y) = \frac{1}{2} dxdz,$$

$$\omega_Z = \omega_n\, cos(\vec{n},Z) = \frac{1}{2} dxdy. \qquad (14.2)$$

Переходячи до рівнянь рівноваги тетраедра в проекціях сил на відповідні осі, запишемо з урахуванням (14.1) і (14.2) (напрям дії тиску тільки за нормаллю до відповідних площин):

$$\begin{cases} P_n \omega_n \cos(\vec{n},\mathrm{X}) = P_\mathrm{X}\omega_\mathrm{X} \Rightarrow P_n \frac{1}{2} dydz = P_\mathrm{X} \frac{1}{2} dydz \\ P_n \omega_n \cos(\vec{n},\mathrm{Y}) = P_\mathrm{Y}\omega_\mathrm{Y} \Rightarrow P_n \frac{1}{2} dxdz = P_\mathrm{Y} \frac{1}{2} dxdz, \\ P_n \omega_n \cos(\vec{n},\mathrm{Z}) = P_\mathrm{Z}\omega_\mathrm{Z} \Rightarrow P_n \frac{1}{2} dxdy = P_\mathrm{Z} \frac{1}{2} dxdy \end{cases} \quad (14.3)$$

тобто за умов довільності вибору площини нахилу поверхні з нормаллю $\vec{n}$ (незалежність від орієнтації площини) це означає рівність тиску у довільній точці простору в усіх напрямах (закон Паскаля) для ідеальної рідини

$$P_\mathrm{X} = P_\mathrm{Y} = P_\mathrm{Z} = P_n = -P. \quad (14.4)$$

Знак мінус означає напрям дії тиску за внутрішньою нормаллю усередину. Для підкреслення відповідності цього визначення лише випадку рівноваги середовища, цей тиск називають гідростатичним. Очевидно, що для різних точок рідини його величина відрізняється, тому тиск можна розглядати як скалярну величину, яка залежна тільки від координат точки та часу. Власно кажучи, ця властивість гідростатичного тиску витікає з теорії суцільного середовища.

Маса вказаного тетраедра $dm = \rho \frac{1}{6} dxdydz$, ρ - густина рідини, тоді проекціями об'ємної сили будуть

$$dR_\mathrm{X} = \rho \frac{1}{6} dxdydz\mathrm{X},\ dR_\mathrm{Y} = \rho \frac{1}{6} dxdydz\mathrm{Y},\ dR_\mathrm{Z} = \rho \frac{1}{6} dxdydzZ, \quad (14.5)$$

де X, Y, Z - проекції прискорення об'ємної сили на відповідні осі. При підстановці в загальне рівняння рівноваги у проекціях на осі вказаних сил тиску та об'ємних сил і скорочення на множники $\frac{1}{2}dydz$, $\frac{1}{2}dxdz$, $\frac{1}{2}dxdy$ кожного з рівнянь в останніх залишаються нескінченно малі величини по відношенню до тисків, а саме: $\rho\frac{1}{3}dx\mathrm{X}$, $\rho\frac{1}{3}dy\mathrm{Y}$, $\rho\frac{1}{3}dz\mathrm{Z}$. Поверхневі сили є величинами 2-го порядку малості, об'ємні сили – 3-го порядку. Останніми нехтують, що означає неврахування масових сил в (14.1).

II. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ГІДРОСТАТИКИ

Нехай довільне рідке тіло масою M і густиною ρ знаходиться у рівновазі під дією зовнішніх сил, які мають проекції на осі OX, OY, OZ.

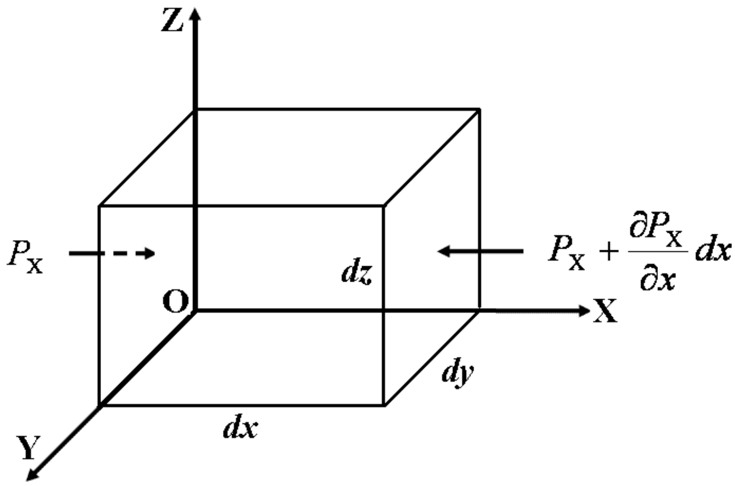


Рисунок 14.2.

Виділимо в довільній точці нескінченно малий об'єм рідини у вигляді паралелепіпеда з ребрами dx, dy, dz, грані якого паралельні координатним площинам (Рисунок 14.2). Подумки відкидаючи рідину навколо вказаного об'єму, замінюємо її дію силами. Це будуть стискаючі сили, нормальні до кожної грані. При переході від однієї грані до іншої тиск має змінитися. До граней, паралельних площині YZ і за умов зміни тільки координати x, будуть прикладені сили тиску: на ліву грань $F_{\mathrm{P}1} = Pdydz$, на праву грань $F_{\mathrm{P}2} = \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\right)dydz$. Маса виділеного об'єму рідини $\rho dxdydz$, на нього діє масова сила $\vec{F} = \left(F_{\mathrm{X}}, F_{\mathrm{Y}}, F_{\mathrm{Z}}\right)$, складові прискорення $\vec{a} = \left(a_{\mathrm{X}}, a_{\mathrm{Y}}, a_{\mathrm{Z}}\right)$. Проекція масової сили на вісь X $F_{\mathrm{X}} = a_{\mathrm{X}}\rho dxdydz$. З урахуванням дії сил тиску рівняння рівноваги на вісь X записується у вигляді

$$F_{\mathrm{X}} + F_{\mathrm{P}1} - F_{\mathrm{P}2} = 0, \text{ або}$$

$$a_X\rho dxdydz + Pdydz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}dx\right)dydz = 0. \quad (14.6)$$

Після перетворень для вказаних проекцій і за аналогією проекцій для решти осей запишемо:

$$a_X\rho dxdydz - \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = 0,$$
$$a_Y\rho dxdydz - \frac{\partial P}{\partial y}dydxdz = 0,$$
$$a_Z\rho dxdydz - \frac{\partial P}{\partial z}dzdxdy = 0. \quad (14.7)$$

З урахуванням довільності виділеного об'єму та відмінності його від нуля поділимо кожний з доданків на $\rho dxdydz$, отримавши диференційні рівняння рівноваги у формі Ейлера, і помножимо кожне рівняння відповідно на dx, dy, dz:

$$\begin{aligned} a_X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \quad \Big|\cdot \quad dx \\ a_Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \quad \Big|\cdot \quad dy. \\ a_Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \quad \Big|\cdot \quad dz \end{aligned} \quad (14.8)$$

Підсумуємо отримані вирази

$$a_X dx + a_Y dy + a_Z dz = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) = \frac{1}{\rho}dP; \quad (14.9)$$

в дужках записано повний диференціал тиску P. Рівняння (14.9) називають основним диференційним рівнянням статики рідин і газів. З нього

$$dP = \rho\left(a_X dx + a_Y dy + a_Z dz\right).$$

До рівняння (14.9), яке містить дві невідомих функції P і ρ, необхідно додати рівняння стану, котре в загальному випадку визначає залежність густини від тиску (наприклад, для досконалих газів рівняння Менделєєва-Клапейрона). Інтегруючи це рівняння і вважаючи густину незмінною (рідина нестислива), отримуємо гідростатичний тиск в довільній точці рідини

$$P = \rho\int\left(a_X dx + a_Y dy + a_Z dz\right). \qquad (14.10)$$

Якщо рідина перебуває у рівновазі під дією власної ваги, то проекції прискорень для обраних координатних осей $a_X = 0$, $a_Y = 0$, $a_Z = -g$, де g - прискорення вільного падіння. Після підстановки в (14.10) та інтегрування

$$P = -\rho gz + C \text{ або } P + \rho gz = C. \qquad (14.11)$$

Якщо на деякій поверхні на відстані z_O від площини порівняння діє тиск P_O, то константа $C = P_O + \rho g z_O$. Рівняння можна записати через геометричні висоти

$$P + \rho gz = P_O + \rho g z_O \text{ (або } P = P_O + \rho g\left(z_O - z\right) = P_O + \rho gh\text{)}$$

та п’єзометричні висоти

$$\frac{P}{\rho g} + z = \frac{P_O}{\rho g} + z_O. \qquad (14.12)$$

Таким чином, отримано різні форми запису основного рівняння гідростатики. Величина ρgh може бути названа ваговим тиском, вона представляє ту частину абсолютного тиску, яка зумовлена вагою самої рідини.

Рідина, котра знаходиться у спокої або русі, має певний запас механічної енергії, тобто здатність виконувати роботу. Рідина у стані спокою має тільки потенційну енергію. В рівності (14.12) перший доданок в енергетичному сенсі є питомою потенційною енергією тиску, а другий – питомою потенційною енергією положення. Їхня сума дає питому потенційну енергію (повну), яка зветься напором H. В гідравліці слово напір застосовується в особливому сенсі – прийнято напором називати питому енергію рідини, тобто міру енергії, яка належить одиниці ваги рідини.

ЛЕКЦІЯ № 15*. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ. ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ РІДИН І ГАЗІВ

І. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

Оскільки докладне викладання основ векторного аналізу передбачено загальними курсами математичного аналізу, наведемо лише деякі найбільш необхідні відомості.

Скаляр, або скалярна величина, характеризується своїм числовим значенням (наприклад, об'єм, маса, густина, температура). Вектор, або векторна величина, для свого повного визначення потребує указання на напрям (переміщення, швидкість, прискорення, сила тощо). Якщо з кожною точкою певної просторової області зв'язана деяка скалярна або векторна величина, то кажуть, що задано поле цієї величини, відповідно, скалярне або векторне.

Градієнтом скалярної функції $\varphi(x, y, z)$ називається вектор, проекції якого на координатні осі OX, OY і OZ відповідно дорівнюють $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ і $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ (вважаємо функцію $\varphi(x, y, z)$ однозначною та неперервною, такою, що має неперервні частинні похідні), тобто

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = \nabla\varphi. \qquad (15.1)$$

Під оператором Гамільтона розуміється символічний диференційний оператор, який позначається знаком ∇ (набла) і визначається в декартовій системі координат рівністю

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}. \qquad (15.2)$$

Дивергенцією (розходженням) поля вектора $\vec{V} = \vec{V}(V_{\mathrm{X}}, V_{\mathrm{Y}}, V_{\mathrm{Z}})$ називається скалярна величина, яка визначається

$$div\vec{V} = \frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial x} + \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial y} + \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial z} \text{ або } div\vec{V} = \nabla\cdot\vec{V}. \qquad (15.3)$$

$$rot\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_X & V_Y & V_Z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial V_Z}{\partial y} - \frac{\partial V_Y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial V_X}{\partial z} - \frac{\partial V_Z}{\partial x}\right) + + \vec{k}\left(\frac{\partial V_Y}{\partial x} - \frac{\partial V_X}{\partial y}\right) = \nabla \times \vec{V}. \qquad (15.4)$$

Вихор вектора, або ротор вектора $\vec{V} = \vec{V}(V_X, V_Y, V_Z)$, визначається виразом (15.4). Проекції цього вектора на координатні осі дорівнюють

$$rot_X\vec{V} = \frac{\partial V_Z}{\partial y} - \frac{\partial V_Y}{\partial z};\ rot_Y\vec{V} = \frac{\partial V_X}{\partial z} - \frac{\partial V_Z}{\partial x};\ rot_Z\vec{V} = \frac{\partial V_Y}{\partial x} - \frac{\partial V_X}{\partial y}. \qquad (15.5)$$

II. ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ РІДИН ТА ГАЗІВ

При вивченні руху рідини в кожній точці потоку обчислюються параметри, що визначають цей рух, а саме – швидкість, тиск, густина, температура тощо. За певних передумов це можна звести до визначення поля швидкостей, яке представляє сукупність швидкостей частинок рідини, тобто до розв’язання кінематичної задачі. Потім за відомим розподілом швидкостей визначається решта параметрів.

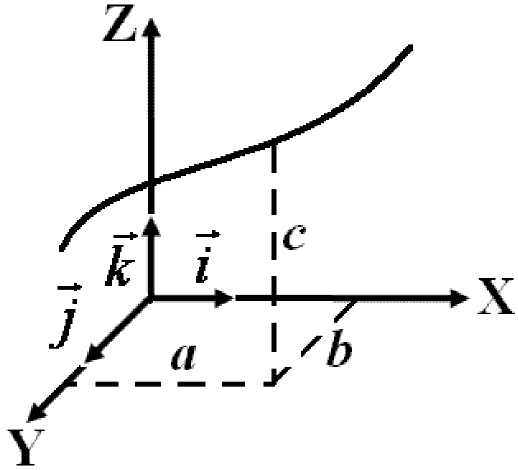


Рисунок 15.1.

Виділяють дві точки зору на опис руху суцільного середовища – Лагранжа та Ейлера. При способі Лагранжа виділяється точка суцільного середовища, тобто розглядаються координати її початкового положення a, b, c при $t = 0$. З безлічі сукупностей траєкторій певній частинці належить та, що проходить через точку з вказаними координатами.

Тоді в довільний наступний момент часу її координати описуються наступним чином:

$$x = f_1(a,b,c,t), \quad y = f_2(a,b,c,t), \quad z = f_3(a,b,c,t),$$
$$\rho = f_4(a,b,c,t) \tag{15.6}$$

і задається траєкторія руху в параметричному вигляді. Визначення цих функцій є основною задачею механіки. Змінні a, b, c, t мають назву змінних Лагранжа. Складові вектора швидкості в кожній точці траєкторії дорівнюють похідним

$$V_X(x,y,z,t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad V_Y(x,y,z,t) = \frac{dy}{dt} = \dot{y},$$
$$V_Z(x,y,z,t) = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \tag{15.7}$$

а складові вектора прискорення – відповідним другим похідним

$$a_X = \frac{dV_X}{dt} = \ddot{x}, \; a_Y = \frac{dV_Y}{dt} = \ddot{y}, \; a_Z = \frac{dV_Z}{dt} = \ddot{z}, \tag{15.8}$$

напрями векторів швидкості та прискорення визначаються через напрямні косинуси.

За Ейлером спостерігаються характеристики руху середовища в різні моменти часу в певній точці простору, в яку приходять різні точки середовища в різні моменти часу. На відміну від способу Лагранжа фіксується не частинка рідини, а точка простору з координатами x, y, z і досліджується зміна швидкості в цій точці з часом. Таким чином, спосіб Ейлера полягає у виразі швидкостей частинок в функції часу t і координат x, y, z, які мають назву змінних Ейлера.

Нехай задано розподіл швидкостей точок середовища у просторі. Тоді проекції швидкості V_X, V_Y, V_Z вектора швидкості $\vec{V} = V_X\vec{i} + V_Y\vec{j} + V_Z\vec{k}$ можуть бути знайдені зі співвідношень

$$V_X = \frac{dx}{dt} = f_1(x,y,z,t), \; V_Y = \frac{dy}{dt} = f_2(x,y,z,t),$$
$$V_Z = \frac{dz}{dt} = f_3(x,y,z,t). \tag{15.9}$$

Розв’язуючи систему диференційних рівнянь (15.9), отримуємо рівняння сім’ї траєкторій в параметричному вигляді, які збігаються з рівняннями (15.6) (a, b, c - постійні інтегрування)

$$x=\int V_{\mathrm{X}}dt\,,\quad y=\int V_{\mathrm{Y}}dt\,,\quad z=\int V_{\mathrm{Z}}dt\,.$$

Обидва підходи до опису руху суцільного середовища еквівалентні, якщо закони руху задані достатньо гладкими функціями, що мають необхідну кількість похідних.

Таким чином, за методом Ейлера від опису кінематики можна перейти до представлення течії за методом Лагранжа. Зворотна задача, пов’язана з переходом від методу Лагранжа (15.6) до методу Ейлера (15.9), зводиться до диференціювання рівнянь (15.6) за часом з подальшим виключенням постійних a, b, c за допомогою рівнянь (15.6).

Якщо V_{X}, V_{Y}, V_{Z} - складові вектора швидкості, виражені як функції координат точок (x, y, z) і часу t, то повна похідна від вектора швидкості за часом – вектор прискорення – у векторному вигляді є

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}V_{\mathrm{X}}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}V_{\mathrm{Y}}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}V_{\mathrm{Z}}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}grad\right)\vec{V}\,, \tag{15.10}$$

де символ $\left(\vec{V}grad\right)$ має вигляд

$$\left(\vec{V}grad\right)=V_{\mathrm{X}}\frac{\partial}{\partial x}+V_{\mathrm{Y}}\frac{\partial}{\partial y}+V_{\mathrm{Z}}\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Складова вектора прискорення $\vec{a}$ по осі OX a_{X} дорівнює повній похідній за часом від складової $V_{\mathrm{X}}(x,y,z,t)$ вектора швидкості, через те можна записати

$$a_{\mathrm{X}}=\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial t}+\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial z}\frac{dz}{dt}\,,\text{ або}$$

$$a_{\mathrm{X}}=\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial t}+\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial x}V_{\mathrm{X}}+\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial y}V_{\mathrm{Y}}+\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial z}V_{\mathrm{Z}}\,. \tag{15.11}$$

Також і для складових по осі OY a_{Y} і OZ a_{Z} відповідно через складові $V_{\mathrm{Y}}(x,y,z,t)$ і $V_{\mathrm{Z}}(x,y,z,t)$

$$a_{\mathrm{Y}} = \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial t} + \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial x} V_{\mathrm{X}} + \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial y} V_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial z} V_{\mathrm{Z}}, \qquad (15.12)$$

$$a_{\mathrm{Z}} = \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial t} + \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial x} V_{\mathrm{X}} + \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial y} V_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial z} V_{\mathrm{Z}}. \qquad (15.13)$$

В проекціях на координатні осі через градієнт

$$gradV_{\mathrm{X}} = \frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial z}\vec{k},$$
$$gradV_{\mathrm{Y}} = \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial z}\vec{k}, \qquad (15.14)$$
$$gradV_{\mathrm{Z}} = \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial z}\vec{k}.$$

У формулах (15.11)-(15.13) перший доданок, тобто перша похідна за часом $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \left(\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial t}, \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial t}, \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial t}\right)$, характеризує зміну величини в певному місці за часом за незмінних координат x, y, z і має назву локальної складової, а другий є результатом руху самого середовища і має назву конвективних складових. У випадку $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ (швидкості не змінюються за часом, змінюються тільки в просторі) рух є усталеним стаціонарним, що дає $\vec{a} = (\vec{V} grad)\vec{V}$. При $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \neq 0$ рух є нестаціонарним. Рух може бути напірним, коли рідина з усіх боків обмежена каналом з твердими стінками, або безнапірним, коли обмеження відсутні (наприклад, рух гідравлічного струменя). При математичному моделюванні рух поділяють на одно-, дво- або тривимірний, в нашому курсі в основному розглядають перший з указаних.

При розгляді загального характеру руху використовують векторне поле – поле швидкостей. В кожній точці простору, де поле є заданим, вектор вважається заданим. Векторною лінією поля називається така крива, в кожній точці якої дотична має напрям вектора $\vec{V}$. Напрямні косинуси дотичної до кривої в точці кривої, тобто косинуси кутів, утворених напрямом дотичної з осями координат, пропорційні проекціям елемента дуги $d\vec{s}$ лінії течії dx, dy, dz. Векторний добуток вектора $d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ і вектора швидкості $\vec{V}$ через збігання напрямів $d\vec{s} \times \vec{V} = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ V_X & V_Y & V_Z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(V_Z dy - V_Y dz\right) - \vec{j}\left(V_Z dx - V_X dz\right) + \\ + \vec{k}\left(V_Y dx - V_X dy\right) = 0. \qquad (15.15)$$

Кожний з доданків в (15.15) має дорівнювати нулю, що призводить до системи диференційних рівнянь векторних ліній поля швидкостей:

$$\frac{dx}{V_X} = \frac{dy}{V_Y} = \frac{dz}{V_Z}. \qquad (15.16)$$

Інтегрування рівнянь (15.16) дає рівняння лінії течії в кінцевому вигляді. Швидкості є заданими функціями координат і часу. Вважаючи t параметром, який приймає будь-які фіксовані значення, можна розглядати сукупність рівнянь (15.16) як систему двох звичайних диференційних рівнянь, а третє – наслідком решти. Через кожну точку векторного поля буде проходити одна певна векторна лінія.

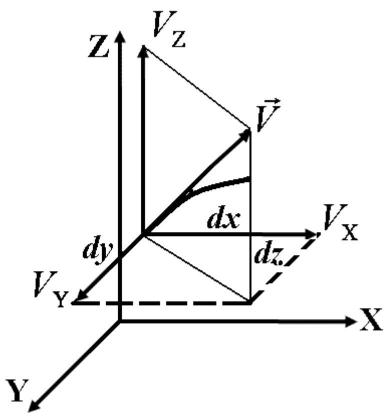


Рисунок 15.2.

Якщо провести всі векторні лінії, що проходять через точки деякої частини поверхні, то їхня сукупність дасть векторну трубку. На відміну від лінії течії, побудова якої відбувається у фіксований момент часу, поняття про траєкторію пов'язано з деяким проміжком часу, протягом якого частинка проходить певний шлях. З цього виходить, що лінія течії і траєкторія, яка є слідом руху однієї частинки, збігаються у сталій течії.

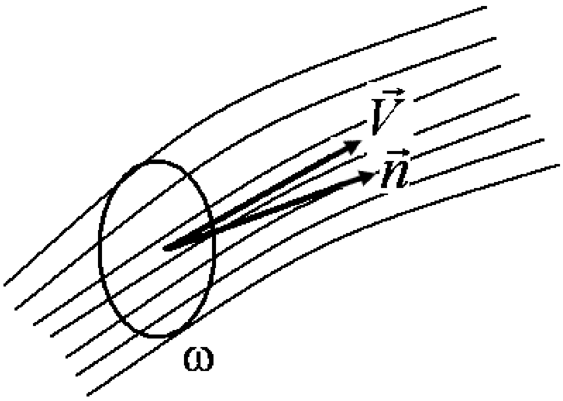


Рисунок 15.3.

За нестаціонарності руху рідини лінія течії і траєкторія не збігаються.

Виділимо в векторному полі деякий об'єм W і нехай ω є поверхня, що обмежує цей об'єм, а $\vec{n}$ - напрям нормалі до ω, зовнішньої по відношенню до об'єму W (рисунок 15.3.).

Застосуємо формулу Остроградського до функцій V_X, V_Y, V_Z, вважаючи, що ці функції неперервні та мають неперервні частинні похідні першого порядку в області W до її границь:

$$\iiint_W \left(\frac{\partial V_X}{\partial x} + \frac{\partial V_Y}{\partial y} + \frac{\partial V_Z}{\partial z} \right) dW = \iint_\omega \left[V_X \cos(\vec{n}, X) + V_Y \cos(\vec{n}, Y) + V_Z \cos(\vec{n}, Z) \right] d\omega ,$$

або

$$\iiint_W \left(\frac{\partial V_X}{\partial x} + \frac{\partial V_Y}{\partial y} + \frac{\partial V_Z}{\partial z} \right) dW = \iint_\omega V_n d\omega. \qquad (15.17)$$

Інтеграл по поверхні, що стоїть у правій частині рівняння, називається потоком поля через поверхню. Підінтегральна функція в об'ємному інтегралі називається розходженням (дивергенцією) (15.3) векторного поля, що дозволяє записати

$$\iiint_W div\vec{V} dW = \iint_\omega V_n d\omega, \qquad (15.18)$$

тобто об'ємний інтеграл від розходження дорівнює потоку поля через поверхню цього об'єму.

Термін «потік вектора» має фізичне походження. Якщо векторне поле є полем швидкостей рідини, яка рухається, то її потік через поверхню ω дорівнює кількості рідини, що протікає через цю поверхню за одиницю часу у напрямі від негативного до позитивного боку поверхні. Якщо потік через замкнену поверхню додатний, це означає, що з частини простору, яка обмежена поверхнею ω, витікає більше рідини, ніж втікає в неї. Це пояснюється тим, що усередині ω є джерела, які виділяють рідину. Якщо потік від'ємний, то усередину поверхні ω втікає більше рідини, ніж витікає з неї. Це означає, що усередині ω є стоки, які поглинають рідину.

В кінематиці абсолютно твердого тіла викладається теорема Ейлера про розклад вектора швидкості $\vec{V}$ будь-якої точки довільних розмірів на складову поступового руху $\vec{V}_{\text{ПР}}$ разом з довільно обраним полюсом і обертальну складову згідно з вектором кутової швидкості $\vec{\omega}$:

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{ПР}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,. \qquad (15.19)$$

Аналогічна за змістом теорема, розширена урахуванням можливих деформацій середовища, встановлюється для рідини і газу.

Якщо тверде тіло обертається з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо деякої осі в певній площині (в загальному випадку це можливо одночасно в трьох площинах), то задача знаходження $rot\vec{V}$ зводиться до наступного. Спрямуємо вектор $\vec{\omega}$ вздовж осі обертання, якою вважаємо вісь OZ, у бік, звідки обертання уявляється проти руху годинникової стрілки. Проекції векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$ (радіус-вектор точки тіла) на координатні осі

$$\omega_X = 0;\ \omega_Y = 0;\ \omega_Z = \omega;\ r_X = x;\ r_Y = y;\ r_Z = z. \qquad (15.20)$$

Вектор $\vec{V}$ дорівнює векторному добутку векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$; підставляючи величини проекцій векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$ (15.20), отримуємо

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ r_X & r_Y & r_Z \end{vmatrix},\ \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}\,, \qquad (15.21)$$

звідки проекції вектора $\vec{V}$ $V_X = -\omega y$; $V_Y = \omega x$; $V_Z = 0$. Для використання формули визначення ротора (15.4) необхідно знайти частинні похідні, що входять до неї:

$$\frac{\partial V_X}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V_X}{\partial y} = -\omega; \quad \frac{\partial V_X}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial V_Y}{\partial x} = \omega; \quad \frac{\partial V_Y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V_Y}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial V_Z}{\partial x} = \frac{\partial V_Z}{\partial y} = \frac{\partial V_Z}{\partial z} = 0.$$

Після підстановки в (15.4)

$$rot\vec{V} = \left(\frac{\partial V_Y}{\partial x} - \frac{\partial V_X}{\partial y}\right)\vec{k} = [\omega - (-\omega)]\vec{k} = 2\omega\vec{k}. \qquad (15.22)$$

Урахування того, що $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, $rot\vec{V} = 2\vec{\omega}$, дозволяє зробити висновок: ротор лінійної швидкості твердого тіла, що обертається, має постійне значення в усіх точках тіла і дорівнює подвоєній кутовій швидкості його обертання. Звідси і сама назва вектора $rot\vec{V}$ - обертання вектора швидкості.

Для елементарного об’єму рідини нас не цікавить його форма деформації, тому розглядаємо це як тверде тіло. Перша теорема Гельмгольца формулюється наступним чином:

швидкості точок будь-якого елементарного об’єму рідини можна представити як суму швидкості руху будь-якого квазі-твердого тіла та швидкості деформації:

$$\vec{V} = \vec{V}_Т + \vec{V}_Д = \vec{V}_{ПР} + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{V}_Д = \vec{V}_{ПР} + \frac{1}{2}rot\vec{V}\times\vec{r} + \vec{V}_Д, \qquad (15.23)$$

де $\vec{V}_{ПР}$ - швидкість поступального руху, при якому всі частинки мають однакові швидкості незалежно від координат і часу; $\frac{1}{2}rot\vec{V}\times\vec{r}$ - швидкість вихрового руху, при якому відбувається обертання частинок навколо певного центра, $\vec{V}_Д$ - швидкість деформації, при якій відбувається зміна форми рухомих об’ємів і яка складається з лінійної та кутової деформацій. Останнє пов’язано з поняттям дивергенції вектора швидкості. Взагалі, деформаційна складова руху не має в механіці рідини і газу такого значення, як в теорії твердого тіла (пружного, пластичного та інших). Компоненти тензора швидкостей деформацій будуть необхідні тільки в динаміці в'язких рідин і газів, де вони будуть зв'язані з компонентами тензора напружень.

В багатьох випадках при дослідженні руху рідини можна не враховувати обертання через зневажливо малі кутові швидкості частинок. Такий рух називається безвихровим. Якщо існує певна функція $\varphi(x,y,z)$, для якої компоненти швидкості можна представити як

$$V_{\mathrm{X}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad V_{\mathrm{Y}} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad V_{\mathrm{Z}} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \text{ або } \vec{V} = grad\varphi, \quad (15.24)$$

такий потік називається потенційним, а функція $\varphi(x,y,z)$ називається потенціалом швидкостей потоку. З (15.24) виходить, що

$$V_{\mathrm{X}}dx + V_{\mathrm{Y}}dy + V_{\mathrm{Z}}dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi. \quad (15.25)$$

Легко пересвідчитися, що для потенційного потоку його вихор дорівнює нулю:

$$rot\vec{V} = rot(grad\varphi) = \nabla \times \nabla\varphi = 0. \quad (15.26)$$

Використання потенційної функції істотно спрощує дослідження руху рідини, тому що замість визначення трьох невідомих - проекцій швидкості – достатньо знайти одну невідому функцію $\varphi(x,y,z)$ і повністю розрахувати поле швидкостей.

Лінійний інтеграл від (15.25) по кривій AB від цього виразу дає

$$\int\limits_{\mathrm{AB}}(V_{\mathrm{X}}dx + V_{\mathrm{Y}}dy + V_{\mathrm{Z}}dz) = \int\limits_{\mathrm{AB}}d\varphi = \varphi(\mathrm{B}) - \varphi(\mathrm{A}), \quad (15.27)$$

що означає незалежність від вигляду кривої, а залежність тільки від координат її кінців A і B, тобто через значення функції φ в цих точках (вважається однозначність потенціалу швидкості). Якщо крива AB замкнена, то лінійний інтеграл у рівнянні є циркуляцією швидкості, а $\varphi(\mathrm{B}) - \varphi(\mathrm{A}) = 0$ внаслідок збігання точок A і B. Звідси циркуляція швидкості по довільній замкненій кривій за наявності однозначного потенціалу дорівнює нулю, а взагалі циркуляція Γ по замкненому контуру L визначається як

$$\Gamma = \oint_L \left(V_X dx + V_Y dy + V_Z dz\right) = \oint_L V_L dL, \tag{15.28}$$

причому обхід вказаного контуру в правій системі координат має відбуватися проти ходу годинникової стрілки.

Формула Стокса зв'язує криволінійний інтеграл по замкненому контуру L з інтегралом по поверхні, яка обмежена цим контуром:

$$\Gamma = \oint_L \left(V_X dx + V_Y dy + V_Z dz\right) = \iint_\omega \left[\left(\frac{\partial V_Z}{\partial y} - \frac{\partial V_Y}{\partial z}\right) cos\left(\vec{n}, X\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial V_X}{\partial z} - \frac{\partial V_Z}{\partial y}\right) cos\left(\vec{n}, Y\right) + \left(\frac{\partial V_Y}{\partial x} - \frac{\partial V_X}{\partial y}\right) cos\left(\vec{n}, Z\right)\right] d\omega. \tag{15.29}$$

З урахуванням, що вираз у квадратних дужках під інтегралом є проекцією вектора $rot\vec{V}$ на нормаль до поверхні, у векторній формі запишемо

$$\Gamma = \oint_L V_L dL = \iint_\omega rot_n \vec{V} d\omega. \tag{15.30}$$

З цього виразу циркуляція довільного вектора по замкненому контуру дорівнює потоку ротора цього вектора через будь-яку поверхню, яка спирається на цей контур (напрям обходу контуру L і напрям нормалі до поверхні ω мають бути узгоджені). За вимірюваною циркуляцією за замкненим контуром в поле швидкостей можна судити не про наявність або відсутність усередині його вихрових трубок, а лише про сумарну їхню інтенсивність. Рівність нулю циркуляції швидкості по замкненому контуру ще не дозволяє зробити висновок про відсутність вихрових трубок, тому що усередині цього контуру можуть існувати вихрові трубки з різними спрямуваннями обертання, котрим відповідають різні за знаком інтенсивності.

ЛЕКЦІЯ № 16*. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ. ДИНАМІКА ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ

I. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ

Всі рівняння, якими користуються для опису фізичних процесів, які відбуваються в суцільному середовищі (для опису переносу) можуть бути інтерпретовані як специфічна форма виразу законів збереження речовини, імпульсу, моменту імпульсу, енергії. Математичний вираз закону збереження речовини для суцільного середовища називається рівнянням неперервності потоку, яке виражає залежності між швидкостями в потоці, а в гідродинаміці – рівнянням нерозривності, яке виражає закон збереження маси в елементарному об'ємі , тобто неперервність потоку (відсутність розривів струменів) рідини або газу. Це рівняння належить до основних рівнянь аерогідродинаміки і використовується для знаходження параметрів, які визначають рух рідинного або газового середовища.

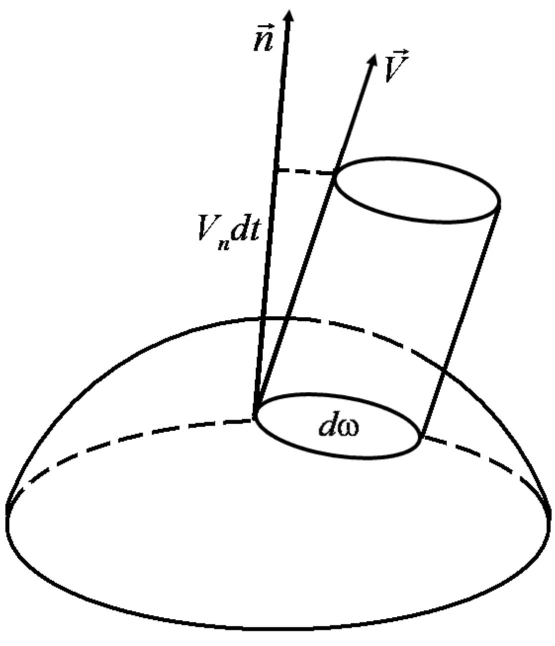


Рисунок 16.1.

Нехай $\vec{V}$ - швидкість течії рідини. Обчислимо кількість рідини, що протікає через поверхню ω, для якої вирізаємо $d\omega$ - малий елемент цієї поверхні. Частинки, які займали в момент часу t положення на поверхні $d\omega$, за проміжок часу dt пересунуться на відрізок $\vec{V}dt$ і, таким чином, за цей проміжок часу через $d\omega$ протече кількість рідини dM в об'ємі циліндра з основою $d\omega$ і утворюючою $\vec{V}dt$.

Висота циліндра дорівнює $V_n dt$, де V_n є проекцією вектора $\vec{V}$ на нормаль $\vec{n}$ до поверхні, тому

$$dM = \rho V_n dt d\omega,$$

де ρ - густина рідини. Загальна кількість рідини, що витікає через поверхню і віднесена до одиниці часу, буде

$$M = \iint_{\omega} \rho V_n d\omega, \tag{16.1}$$

при цьому рідина, що втікає, підраховується за цією формулою зі знаком мінус.

Кількість рідини, яка займає об'єм W, обмежений площею поверхні ω, виражається інтегралом

$$\iiint_{W} \rho dW$$

і за час dt ця кількість зміниться на величину

$$dt \iiint_{W} \frac{\partial \rho}{\partial t} dW,$$

тому віднесений до одиниці часу приріст кількості рідини буде

$$\iiint_{W} \frac{\partial \rho}{\partial t} dW. \tag{16.2}$$

Кількість рідини, що витікає, виразиться таким самим інтегралом, але зі зворотним знаком (поверхня зорієнтована назовні), тому для M отримуємо два вирази (16.1), (16.2)

$$M = \iint_{\omega} \rho V_n d\omega = -\iiint_{W} \frac{\partial \rho}{\partial t} dW,$$

або згідно з формулою (15.18)

$$M = \iiint_{W} div\left(\rho \vec{V}\right) dW = -\iiint_{W} \frac{\partial \rho}{\partial t} dW,$$

причому ми залишаємо густину ρ під знаком розходження, бо вона може бути змінною, тобто залежить від положення точки. Вектор $\rho\vec{V}$ називають вектором щільності потоку речовини. Його напрям збігається з напрямом течії рідини, а абсолютна величина визначає кількість речовини, що протікає через одиницю площі, яка розташована перпендикулярно до вектора швидкості. Остання формула дає нам співвідношення, що справедливе для будь-якого об'єму усередині рідини:

$$\iiint\limits_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{V}\right) \right] dW = 0. \qquad (16.3)$$

Якщо потрійний інтеграл по довільній області від неперервної функції дорівнює нулю, то ця функція тотожно дорівнює нулю. Звідси

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{V}\right) = 0. \qquad (16.4)$$

Це співвідношення, що зв'язує густину та вектор швидкості довільної рідини (стисливої або ні), називається ***рівнянням нерозривності***. Воно описує несталу течію, а для сталої течії $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, отже

$$div\left(\rho \vec{V}\right) = 0. \qquad (16.5)$$

Співвідношення (16.4) може бути записано інакше, якщо ми врахуємо зміну густини ρ рідкої частинки, причому $\rho(t, x, y, z)$ є густиною частки, яка в момент часу t мала координати (x, y, z). Густина цієї частки залежна від t як безпосередньо, так і через (x, y, z), оскільки частинка рухається і її координати залежні від t. Повна похідна від ρ за t буде

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}V_X + \frac{\partial \rho}{\partial y}V_Y + \frac{\partial \rho}{\partial z}V_Z$$

або

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + grad\rho \cdot \vec{V}. \qquad (16.6)$$

Рівняння (16.4) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + grad\rho \cdot \vec{V} + \rho div\vec{V} = 0, \qquad (16.7)$$

що з урахуванням (16.6) дає

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho div\vec{V}=0, \text{ або } div\vec{V}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}. \qquad (16.8)$$

Таким чином, розходження поля швидкостей $\vec{V}$ дає відносну зміну густини елемента рідини, що знаходиться в певному місці,- зміну, віднесену до одиниці часу. Якщо рідина нестислива, то ця зміна має дорівнювати нулю, і можна отримати з (16.8) умову нестисливості

$$div\vec{V}=0. \qquad (16.9)$$

Векторне поле швидкостей в нестисливій рідині є соленоїдним. В цьому випадку завжди можна знайти векторне поле $\vec{A}$, що $\vec{V}=rot\vec{A}$. Для соленоїдного поля потік вектора через поперечні перерізи векторної трубки зберігає постійну величину, яка називається інтенсивністю векторної трубки. Ми вивели умову нерозривності через підрахунок кількості рідини, що витікає з об'єму, зробленого двома способами. При цьому ми вважали, що в об'ємі немає джерел рідини – ані позитивної, ані негативної сили (стік). Якщо течія рідини безвихрова ($rot\vec{V}=0$), або потенційна, для якої вектор $\vec{V}$ є потенційним вектором

$$\vec{V}=grad\varphi,$$

то φ називається потенціалом швидкості. Підставляючи останній вираз у рівняння (16.9), отримуємо

$$div(grad\varphi)=0, \text{ тобто } \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi=0, \qquad (16.10)$$

тобто потенціал швидкості для нестисливої рідини має задовольняти рівнянню Лапласа. Функція φ за умов (16.10) називається гармонічною.

Розглянемо окремий випадок рівняння нерозривності для усталеного рідкого потоку у формі струминки. Маса рідини в деякому фіксованому об'ємі, обмеженому поверхнею струминки і торцевими плоскими перерізами, не змінюється у часі внаслідок того, що в кожній точці виконується умова $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$. Тому маса рідини, яка надходить за одиницю часу в об'єм через торцевий переріз площею ω_1 і дорівнює $\rho_1 V_1 \omega_1$, та ж сама, як і маса рідини $\rho_2 V_2 \omega_2$, що витікає через протилежний переріз площею ω_2 (ρ_1, ρ_2 - густини, V_1, V_2 - швидкості відповідно в першому і другому перерізах). Таким чином, $\rho_1 V_1 \omega_1 = \rho_2 V_2 \omega_2$. Через можливість віднести цю рівність до будь-якого перерізу запишемо в загальному вигляді

$$\rho V \omega = const. \tag{16.11}$$

Це рівняння називається рівнянням постійності витрати.

II. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ РУХУ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ

Розглянемо рух рідкої частинки у вигляді елементарного паралелепіпеда з розмірами dx, dy, dz, побудованого навколо точки з координатами x, y, z. Сили, що діють на виділений об'єм рідини, можна поділити на об'ємні (масові) та поверхневі, які можна виразити через напруження, що діють на грані елементарного паралелепіпеда (рисунок 16.2)

$$\begin{gathered}
F_{\mathrm{PX}} = \left(P_{\mathrm{XX}} + \frac{\partial P_{\mathrm{XX}}}{\partial x} dx \right) dydz - P_{\mathrm{XX}} dydz + \\
+ \left(P_{\mathrm{XY}} + \frac{\partial P_{\mathrm{XY}}}{\partial y} dy \right) dxdz - P_{\mathrm{XY}} dxdz + \\
+ \left(P_{\mathrm{XZ}} + \frac{\partial P_{\mathrm{XZ}}}{\partial z} dz \right) dxdy - P_{\mathrm{XZ}} dxdz \Rightarrow \\
F_{\mathrm{PX}} = \left(\frac{\partial P_{\mathrm{XX}}}{\partial x} + \frac{\partial P_{\mathrm{XY}}}{\partial y} + \frac{\partial P_{\mathrm{XZ}}}{\partial z} \right) dxdydz.
\end{gathered} \tag{16.12}$$

Аналогічно сили тиску F_{PY} і F_{PZ}

$$F_{\mathrm{PY}} = \left(\frac{\partial P_{\mathrm{YX}}}{\partial x} + \frac{\partial P_{\mathrm{YY}}}{\partial y} + \frac{\partial P_{\mathrm{YZ}}}{\partial z} \right) dxdydz\,, \tag{16.13}$$

$$F_{\mathrm{PZ}} = \left(\frac{\partial P_{\mathrm{ZX}}}{\partial x} + \frac{\partial P_{\mathrm{ZY}}}{\partial y} + \frac{\partial P_{\mathrm{ZZ}}}{\partial z} \right) dxdydz\,. \tag{16.14}$$

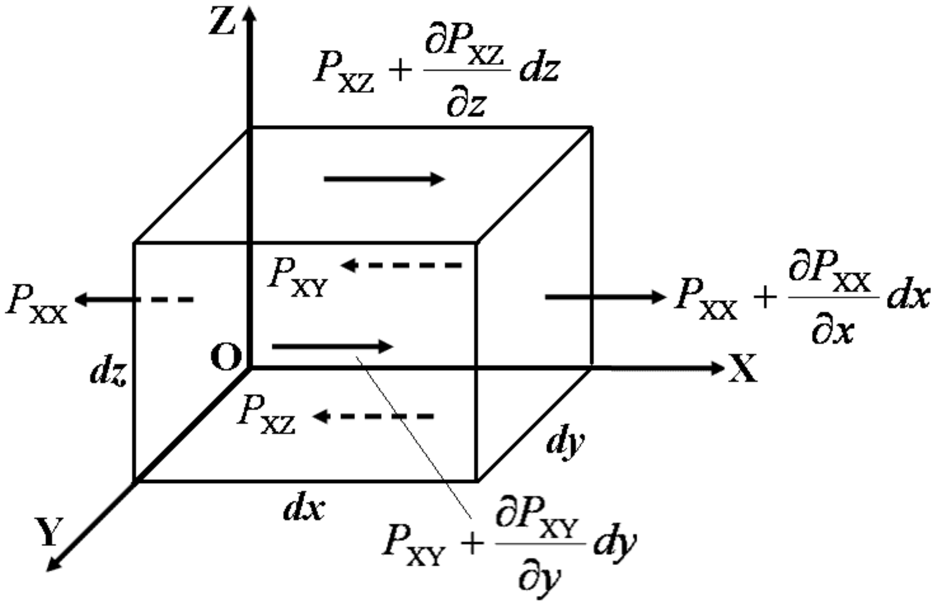


Рисунок 16.2.

У загальній постановці вважаємо, що на грані діють не тільки нормальні, але й дотичні напруження. У наведених вище рівняннях складові з однаковими позначеннями є нормальними напруженнями, решта – дотичні. Перший індекс показує, на яку вісь проектується певне напруження, другий позначає вісь, до якої нормальна грань і в якій діє вказане напруження (наприклад, для P_{XX} грань нормальна до осі X, для P_{XY} грань нормальна до осі Y, для P_{XZ} грань нормальна до осі Z). Домовимося вважати нормальні напруження додатними за умов напряму з виділеного елемента, який підлягає всебічному розтяганню. Дотичні напруження вважаються додатними, якщо вони спрямовані на гранях, що не перетинаються в точці O, за позитивним напрямом координатних осей.

Для прийняття гіпотези ідеальної рідини існує дві умови: 1) дотичними напруженнями можна знехтувати через відсутність в’язкості між шарами рідини; 2) теплопередача між шарами рідини відсутня.

$$P_{XY} = P_{XZ} = P_{YZ} = 0$$
$$P_{YX} = P_{ZX} = P_{ZY} = 0 . \qquad (16.15)$$

а $P_{XX} = P_{YY} = P_{ZZ} = P_n = -P$ згідно з (14.4) за умови дії тиску по внутрішній нормалі. Друге рівняння в (16.15) отримано з урахуванням закону взаємності дотичних напружень (паристості). Співвідношення (16.12-16.14) для рівнодіючої сил тиску на поверхню об′єму W дають

$$F_P = \left\{ \begin{aligned} F_{PX} &= -\frac{\partial P}{\partial x} dxdydz \\ F_{PY} &= -\frac{\partial P}{\partial y} dxdydz \\ F_{PZ} &= -\frac{\partial P}{\partial z} dxdydz \end{aligned} \right\} = -\iiint\limits_W gradPdW \, . \qquad (16.16)$$

За принципом Д′Аламбера необхідно урівноважити сили тиску зовнішніми силами, які ми відносимо до одиниці маси та позначаємо $\vec{F}$, що дає в об′ємі W рівнодіючу

$$\iiint\limits_W \rho\vec{F}dW , \qquad (16.17)$$

та силою інерції, яка на елемент маси буде $-\rho dW\vec{a}$, де ρ - густина, $\vec{a}$ - вектор прискорення рідкої частинки. На об′єм W сила інерції буде

$$-\iiint\limits_W \rho\vec{a}dW \, . \qquad (16.18)$$

Остаточно з урахуванням (16.16-16.18), маємо

$$\iiint\limits_W \left[\rho\vec{F} - gradP - \rho\vec{a}\right]dW = 0 , \qquad (16.19)$$

звідки через довільність W можна зробити висновок, що підінтегральна функція дорівнює нулю, що дає

$$\rho\vec{a} = \rho\vec{F} - gradP \, . \qquad (16.20)$$

В цьому рівнянні містяться при переході до проекцій на осі координат три скалярних рівняння, які є основними рівняннями руху ідеальної рідини

$$\begin{aligned} \rho a_X &= \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} & a_X &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho a_Y &= \rho Y - \frac{\partial P}{\partial y}, \text{ або } & a_Y &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}. \\ \rho a_Z &= \rho Z - \frac{\partial P}{\partial z} & a_Z &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}$$

З урахуванням виразів (15.9) для складових вектора швидкості та (15.11-15.13) для складових вектора прискорень отримаємо рівняння руху ідеальної рідини у формі Ейлера

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} grad\right)\vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradP. \qquad (16.21)$$

До цих рівнянь необхідно додати ще рівняння нерозривності (16.4), тоді рівняння (16.21) і (16.4) – чотири рівняння, які містять п'ять невідомих функцій (V_X, V_Y, V_Z, ρ, P). До цієї системи необхідно додати ще одне рівняння. Можна вважати, що густина є константою $\rho = const$ або між густиною та тиском існує певна залежність $P = f(\rho)$ (рівняння стану для баротропної рідини).

Для вектора $\vec{V}$ справедливе $\frac{V^2}{2} = \frac{V_X^2}{2} + \frac{V_Y^2}{2} + \frac{V_Z^2}{2}$, тому

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right) &= V_X \frac{\partial V_X}{\partial x} + V_Y \frac{\partial V_Y}{\partial x} + V_Z \frac{\partial V_Z}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}\right) &= V_X \frac{\partial V_X}{\partial y} + V_Y \frac{\partial V_Y}{\partial y} + V_Z \frac{\partial V_Z}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}\right) &= V_X \frac{\partial V_X}{\partial z} + V_Y \frac{\partial V_Y}{\partial z} + V_Z \frac{\partial V_Z}{\partial z} \end{aligned} \qquad (16.22)$$

або у векторному вигляді

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + grad\left(\frac{V^2}{2}\right) = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradP . \qquad (16.23)$$

Для стаціонарного потоку $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ і $grad\left(\frac{V^2}{2} + \frac{1}{\rho} P\right) = \vec{F}$, що в проекціях дає

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{1}{\rho} P\right) = \mathrm{X}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{1}{\rho} P\right) = \mathrm{Y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{1}{\rho} P\right) = \mathrm{Z}$$

або

$$d\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho}\right) = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + Zdz . \qquad (16.24)$$

Якщо масові сили визначаються тільки силами ваги, то $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{Z} = -g$ і

$$d\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho}\right) = -gdz , \qquad (16.25)$$

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = const \text{ або } \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z = const . \qquad (16.26)$$

Це рівняння у різних формах запису має назву рівняння Бернуллі для ідеальної рідини. В деяких окремих випадках це рівняння може бути узагальнено на випадок в’язкої і стисливої рідини, а також нестаціонарного руху.

ЛЕКЦІЯ № 17*. ПЛОСКИЙ ПОТІК ІДЕАЛЬНОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ. ПОТІК ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ В ТРУБІ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ. ГІДРОДИНАМІЧНА ПОДІБНІСТЬ

I. ПЛОСКИЙ ПОТІК ІДЕАЛЬНОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ

Вивчення безвихрової течії рідини спрощується через можливість його зведення до знаходження однієї потенційної функції, яка повністю визначає цю течію. Для деяких видів вихрового потоку існує функція, яка також визначає його кінематичні характеристики.

Розглянемо двовимірний (плоский або просторовий вісесиметричний) усталений вихровий рух рідини. Для плоского потоку $V_Z = 0$, решта функцій - V_X, V_Y, P, ρ, T - є залежними від (x,y). З рівняння нерозривності $div\vec{V} = 0$ за умов $\rho = const$ для нестисливої рідини

$$\frac{\partial V_X}{\partial x} + \frac{\partial V_Y}{\partial y} = 0 \tag{17.1}$$

можна встановити існування деякої функції $\psi(x,y)$ координат (x,y)

$$V_X = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad -V_Y = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{17.2}$$

Підстановка (17.2) в (17.1) перетворює останній вказаний вираз в тотожність. При внесенні (17.2) в рівняння ліній течії (15.16), яке записується у вигляді

$$V_Y dx - V_X dy = 0,$$

отримуємо вирази

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0, \text{ або } d\psi = 0, \tag{17.3}$$

перший з яких доводить, що (17.3) є диференціалом функції $\psi(x,y)$. Інтегруючи другий вираз, знаходимо рівняння ліній течії у вигляді

$$\psi(x,y) = const. \qquad (17.4)$$

Функція $\psi(x,y)$ називається функцією течії і повністю визначає швидкості вихрового потоку відповідно з (17.2).

Для потенційного потоку $rot\vec{V} = 0$, $\vec{V}$ є потенційним вектором, тому для плоского потоку виконується

$$\frac{\partial V_X}{\partial y} - \frac{\partial V_Y}{\partial x} = 0 \text{ та}$$

$$\vec{V} = grad\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j}\,,\; V_X = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\; V_Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \qquad (17.5)$$

Підстановка останніх виразів в рівняння нерозривності (17.1) дає

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \text{ або } \nabla^2 \varphi = 0, \qquad (17.6)$$

останнє означає, що потенціал потоку є гармонічною функцією. Якщо підставити вирази (17.2) в умову $rot\vec{V} = 0$, то

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \text{ або } \nabla^2 \psi = 0 \qquad (17.7)$$

означає – функції $\psi(x,y)$ і $\varphi(x,y)$ є гармонічно спряженими.

Сім'ю ліній течії потенційного потоку можна також характеризувати функцією (17.4), яка пов'язана з потенціалом швидкостей співвідношеннями для нестисливого плоского потоку рівняннями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y},\; \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \qquad (17.8)$$

Знаючи потенціал швидкостей, можна визначити функцію течії з точністю до довільної постійної та навпаки.

В потенційному потоці поряд з лініями течії можна провести сім'ю еквіпотенційних кривих (на площині) або еквіпотенційних поверхонь (у вісесиметричному потоці), яка визначається рівнянням $\varphi(x,y) = const$. Для векторів

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} \text{ і } grad\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j}$$

їхній напрям збігається з напрямом нормалей відповідно до кривих $\varphi(x,y)=const$ і $\psi(x,y)=const$. Скалярний добуток цих векторів з урахуванням (17.8)

$$grad\varphi \cdot grad\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0. \quad (17.9)$$

Це означає ортогональність ліній течії до еквіпотенційних ліній (на площині) або еквіпотенційних поверхонь (у вісесиметричному потоці) (рисунок 17.1).

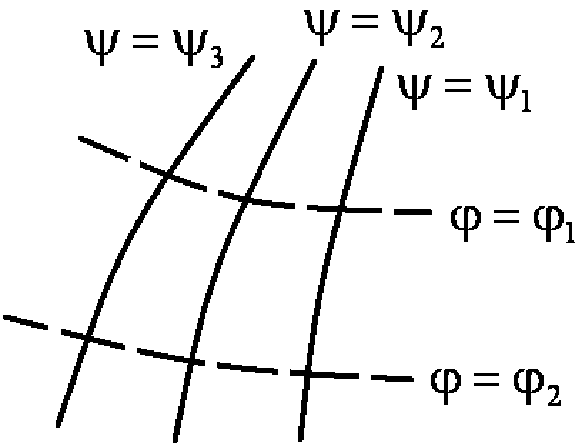


Рисунок 17.1.

Таким чином, рух безвихрового нестисливого потоку можна повністю визначити, якщо відома потенційна функція $\varphi(x,y)=const$ або функція течії $\psi(x,y)=const$, зв'язок між котрими дається рівняннями (17.8), відомими в теорії функцій комплексного змінного як рівняння Коши-Рімана.

Ці рівняння виражають необхідні та достатні умови того, що комбінація з двох функцій $\varphi + i\psi$ є аналітичною функцією комплексного змінного $z = x + iy$ (тут x - дійсна вісь, y - уявна вісь, z - площина комплексного змінного), тобто такою, що диференціюється в усіх точках певної області. Функція

$$W(z) = \varphi + i\psi, \quad (17.10)$$

котра визначається, якщо функції $\varphi = \varphi(x,y)$ і $\psi = \psi(x,y)$ задовольняють диференційним рівнянням (17.8), називається комплексним потенціалом. З цього виходить, що довільний двовимірний плоский потік може бути заданим комплексним потенціалом; задача про розрахунок вказаного потоку зводиться до знаходження функції $W(z)$.

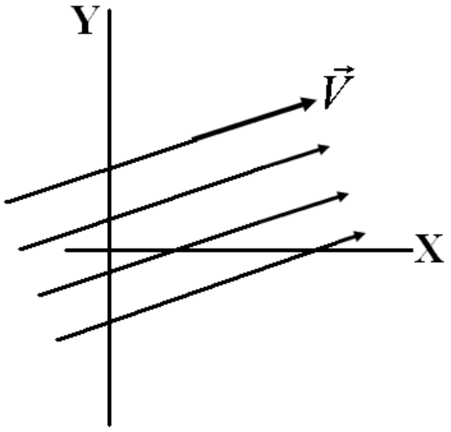


Рисунок 17.2.

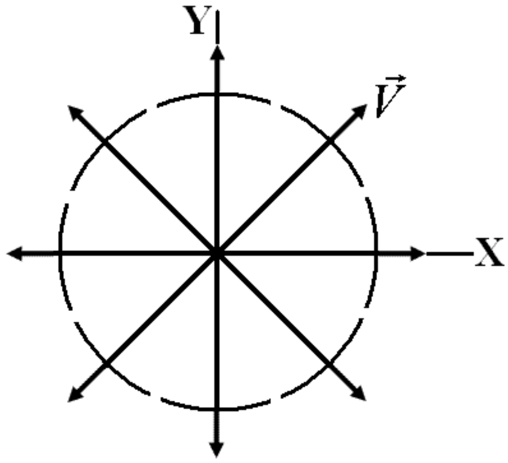


Рисунок 17.3.

Розглянемо деякі приклади. Для руху рідини, заданого комплексним потенціалом (V і θ постійні величини)

$$W(z) = V(\cos\theta - i\sin\theta)z\,, \qquad (17.11)$$

лінії течії є паралельними прямими, нахиленими до осі X під кутом θ, і цей потік називається поступальним плоскопаралельним (рисунок 17.2). Для комплексного потенціалу

$$W(z) = (q/2\pi)\ln z \qquad (17.12)$$

лініями течії є сім'я прямих, котрі проходять через початок координат. Радіальний потік, який йде від початку координат, називається плоским точковим джерелом, а величина q є потужністю або інтенсивністю джерела (рисунок 17.3). Для зворотного випадку – плоского точкового стоку – комплексний потенціал має вигляд

$$W(z) = -(q/2\pi)\ln z\,.$$

Знак мінус показує, що, на відміну від джерела, рух відбувається до центру із зміною напрямів векторів швидкостей.

II. ПОТІК ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ В ТРУБІ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

Розглянемо потік ідеальної ($\nu = 0$) рідини, для якого швидкість $V_X(x)$, густина $\rho(x)$, тиск $P(x)$, по трубі з площею перерізу $\omega(x)$ (рисунок 17.4).

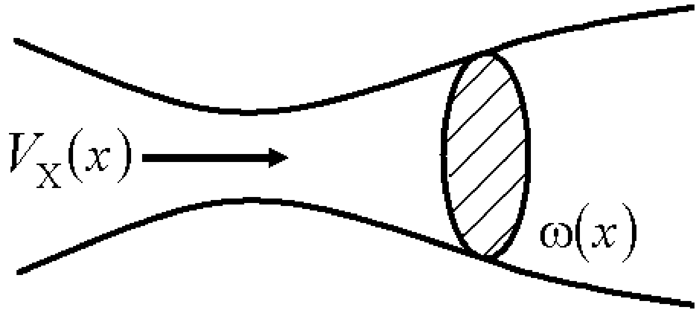


Рисунок 17.4.

Для усталеного одновимірного потоку $\frac{\partial V_X}{\partial t} = 0$. За відсутності масових сил рівняння руху (16.20) набувають вигляду

$$V_X \frac{\partial V_X}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}. \qquad (17.13)$$

Для швидкості звука a, приймаючи процес поширення звуку ізотермічним, існує загальний вираз $a^2 = \frac{dP}{d\rho}$, що для ізотермічного потоку дає $P = a^2\rho$ і перетворює рівняння (17.13)

$$V_X \frac{\partial V_X}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \text{ або } V_X \frac{\partial V_X}{\partial x} = -\frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \qquad (17.14)$$

Для рівняння постійності витрати (16.11) справедливе $\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_X \omega) = 0$ і, переходячи до звичайних похідних,

$$V_X \omega \frac{d\rho}{dx} + \rho\omega \frac{dV_X}{dx} + \rho V_X \frac{d\omega}{dx} = 0. \qquad (17.15)$$

Поділивши кожний з доданків на $\rho V_X \omega$, отримуємо

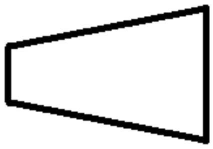
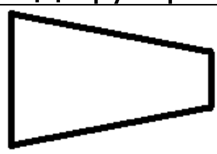
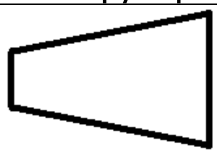
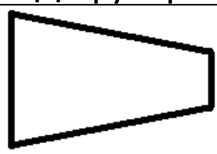
$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{V_X}\frac{dV_X}{dx} + \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dx} = 0,$$

що з урахуванням (17.13), помноженням кожного з доданків на V_X і введенням числа Маха $\frac{V_X}{a} = \mathrm{M}$ (відношення швидкості до швидкості звуку в повітрі, докладно в розділі III) дає вираз

$$\left(\mathrm{M}^2-1\right)\frac{dV_{\mathrm{X}}}{dx}=\frac{V_{\mathrm{X}}}{\omega}\frac{d\omega}{dx}. \qquad (17.16)$$

В отриманому рівнянні Гюгоніо величина $\frac{V_{\mathrm{X}}}{\omega}$ є суто додатною через фізичний сенс величин, що надходять до неї. Решта параметрів потребує аналізу, який зведено до таблиці 17.1. Характер поведінки параметрів – збільшення або зменшення залежно від координати x - і , як наслідок, знак певної похідної, узяті відповідно до необхідності виконання рівняння (17.16).

Таблиця 17.1.

$\mathrm{M}<1$ дозвукова швидкість	$\frac{d\omega}{dx}>0$	 Дифузор	$\frac{dV_{\mathrm{X}}}{dx}<0$	Сповільнення потоку
	$\frac{d\omega}{dx}<0$	 Конфузор	$\frac{dV_{\mathrm{X}}}{dx}>0$	Прискорення потоку
$\mathrm{M}>1$ надзвукова швидкість	$\frac{d\omega}{dx}>0$	 Дифузор	$\frac{dV_{\mathrm{X}}}{dx}>0$	Прискорення потоку
	$\frac{d\omega}{dx}<0$	 Конфузор	$\frac{dV_{\mathrm{X}}}{dx}<0$	Сповільнення потоку

Пристрої, що забезпечують відповідну зміну площі поперечного перерізу, називаються дифузор (поступове розширення) і конфузор (поступове звуження).

Якщо $\mathrm{M}=1$, то $d\omega=0$ і відповідний переріз труби буде критичним. Остання умова збігається з необхідною умовою екстремуму площі перерізу. Критичне значення буде мінімальним через те, що при наближенні до максимального перерізу дозвуковий потік уповільнюється, а надзвуковий прискорюється, що ніяк не може привести до течії зі швидкістю звука в критичному перерізі.

Якщо $d\omega = 0$ і переріз екстремальний (максимальний або мінімальний), то або $\mathrm{M} = 1$ (переріз критичний), або $\mathrm{M} \neq 1$ і $dV_{\mathrm{X}} = 0$. В останньому випадку, незважаючи на рух - дозвуковий або надзвуковий, швидкість в екстремальному перерізі також набуває екстремального значення: при дозвуковій течії - мінімальне в максимальному перерізі та максимальне в мінімальному; при надзвуковій течії – навпаки, в максимальному перерізі швидкість максимальна, а в мінімальному - мінімальна.

ІІІ. ГІДРОДИНАМІЧНА ПОДІБНІСТЬ

Гідродинамічна подібність – це подібність потоків нестисливої рідини, яка містить геометричну, кінематичну та динамічну подібності.

Геометрична подібність означає пропорційність подібних розмірів і рівність відповідних кутів. У гідравліці під цим розуміють подібність тих поверхонь, котрі обмежують потоки рідини, що означає подібність трубопроводів, по яких тече рідина.

Кінематична подібність – це подібність ліній течії і пропорційність подібних швидкостей. Для неї необхідно дотримання геометричної подібності.

Динамічна подібність полягає в пропорційності сил, які діють на подібні елементи кінематично та геометрично подібних потоків, і рівності кутів, які характеризують напрям дії цих сил. В потоці рідини зазвичай діють різні сили – тиску, в'язкого тертя, тяжіння, інерційні. Дотримання пропорційності усіх сил, які діють в потоці, означає повну гідродинамічну подібність. На практиці це досягається рідко, тому приходиться обмежуватися частковою (неповною) гідродинамічною подібністю, за якою маємо пропорційність лише основних сил.

Введемо масштаби певних параметрів – довжини L_{O}, швидкості процесу V_{O}, тиску P_{O}, часу t_{O}. Тоді для швидкостей, тиску, часу, довжини можна записати вирази через добуток відповідних масштабів і безрозмірних коефіцієнтів:

$$V_{\mathrm{X}} = V_{\mathrm{O}} \cdot \overline{V}_{\mathrm{X}}, \quad V_{\mathrm{Y}} = V_{\mathrm{O}} \cdot \overline{V}_{\mathrm{Y}}, \quad V_{\mathrm{Z}} = V_{\mathrm{O}} \cdot \overline{V}_{\mathrm{Z}}$$

$$P = P_{\mathrm{O}} \cdot \overline{P}, \quad t = t_{\mathrm{O}} \cdot \bar{t} \tag{17.17}$$

$$x = L_{\mathrm{O}} \cdot \bar{x}, \quad y = L_{\mathrm{O}} \cdot \bar{y}, \quad z = L_{\mathrm{O}} \cdot \bar{z}.$$

Рівняння руху в’язкої нестисливої рідини (18.11)

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} grad\right)\vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradP + \nu \nabla^2 \vec{V}$$

з урахуванням $\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = g$ запишемо для компоненти швидкості V_{Z}

$$\frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial t} + V_{\mathrm{X}} \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial x} + V_{\mathrm{Y}} \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial y} + V_{\mathrm{Z}} \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 V_{\mathrm{Z}}. \quad (17.18)$$

Підстановка (17.17) в це рівняння дає

$$\frac{V_{\mathrm{O}}}{t_{\mathrm{O}}} \frac{\partial \overline{V}_{\mathrm{Z}}}{\partial \bar{t}} + \frac{V_{\mathrm{O}}^2}{L_{\mathrm{O}}} \left(\overline{V}_{\mathrm{X}} \frac{\partial \overline{V}_{\mathrm{Z}}}{\partial \bar{x}} + \overline{V}_{\mathrm{Y}} \frac{\partial \overline{V}_{\mathrm{Z}}}{\partial \bar{y}} + \overline{V}_{\mathrm{Z}} \frac{\partial \overline{V}_{\mathrm{Z}}}{\partial \bar{z}} \right) =$$
$$= g - \frac{1}{\rho} \frac{P_{\mathrm{O}}}{L_{\mathrm{O}}} \frac{\partial \overline{P}}{\partial \bar{x}} + \nu \frac{V_{\mathrm{O}}}{L_{\mathrm{O}}^2} \nabla^2 \overline{V}_{\mathrm{Z}}.$$

Поділивши кожний з доданків на $\frac{V_{\mathrm{O}}^2}{L_{\mathrm{O}}}$, запишемо остаточно

$$\frac{L_{\mathrm{O}}}{V_{\mathrm{O}} t_{\mathrm{O}}} \frac{\partial \overline{V}_{\mathrm{Z}}}{\partial \bar{t}} + \left(\overline{V}_{\mathrm{X}} \frac{\partial \overline{V}_{\mathrm{Z}}}{\partial \bar{x}} + \overline{V}_{\mathrm{Y}} \frac{\partial \overline{V}_{\mathrm{Z}}}{\partial \bar{y}} + \overline{V}_{\mathrm{Z}} \frac{\partial \overline{V}_{\mathrm{Z}}}{\partial \bar{z}} \right) =$$
$$= \frac{g L_{\mathrm{O}}}{V_{\mathrm{O}}^2} - \frac{P_{\mathrm{O}}}{\rho V_{\mathrm{O}}^2} \frac{\partial \overline{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu}{V_{\mathrm{O}} L_{\mathrm{O}}} \nabla^2 \overline{V}_{\mathrm{Z}}. \quad (17.19)$$

Множники в цьому виразі мають назву критеріїв подібності гідродинаміки, а саме (опускаємо індекс при величинах):

1) $\frac{L}{Vt} = \frac{L}{V}\omega = Sh$ - число Струхаля (за умов періодичності $\frac{1}{t} = \omega$ - частота вихроутворення), характеризує відношення локальної інерційної сили до конвективної;

2) $\frac{V^2}{gL} = Fr$ - число Фруда, характеризує відношення сили інерції до сили тяжіння;

3) $\frac{P}{\rho V^2} = Eu$ - число Ейлера, характеризує відношення сили тиску до сили інерції;

4) $\frac{VL}{\nu} = \frac{VL\rho}{\mu} = Re$ - число Рейнольдса, характеризує відношення сили інерції до сили в'язкості.

До вказаних критеріїв слід додати принаймні ще два важливих:

1) $\frac{V}{a} = \mathrm{M}$ - число Маха, воно характеризує відносну величину впливу стисливості на течію газу;

2) $\frac{\mu c_{\mathrm{P}}}{\lambda} = Pr$ - число Прандтля, воно характеризує відносні величини впливу в'язкості та теплопровідності (λ — коефіцієнт теплопровідності, c_{P} – масова ізобарна теплоємність).

Всі критерії характеризують відношення сил різного фізичного походження і тому є критеріями динамічної подібності. За умови існування механічно подібних потоків, записавши систему диференційних рівнянь руху в безрозмірному вигляді, отримуємо єдине рішення, до якого входять як параметрив зафіксовані значення вищевказаних чисел. Це рішення визначить цілий клас фізично реальних процесів, розмірні параметри котрих в подібних точках будуть відрізнятися тільки числовими множниками, а безрозмірні будуть однаковими.

Слід відзначити, що зміна величини Re означає зміну співвідношення усіх основних сил в потоці, у зв'язку з чим вказані коефіцієнти можуть також дещо змінюватися. Тому всі ці коефіцієнти слід розглядати як функції Re, хоча в деяких інтервалах Re вони можуть залишатися постійними.

ЛЕКЦІЯ № 18*. ДИНАМІКА В′ЯЗКОЇ РІДИНИ. ТЕЧІЯ В′ЯЗКОЇ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ТРУБІ

I. ДИНАМІКА В′ЯЗКОЇ РІДИНИ

В Лекції 16* розглядалась найпростіша модель суцільного середовища – ідеальна (позбавлена внутрішнього тертя) нестислива рідина. Властивості останньої виражаються відсутністю дотичних напружень у ній, коли всі нормальні напруження в певній точці можуть бути виражені через одну скалярну величину – тиск. Наступним на шляху ускладнення є модель, яка враховує пропорційність між дотичними компонентами тензора напружень (тертя) і поперечною до напряму потоку похідної швидкості зсуву. Коефіцієнтом пропорційності між ними є динамічний коефіцієнт в′язкості μ, залежний тільки від температури рідини, а не від тиску. Розглянемо рух малої частинки рідини, що має початкову форму паралелепіпеда з ребрами, паралельними осям координат (Рисунок 18.1). Нехай швидкість (рисунок 18.2):

в точці a - $\vec{V}_a = \left(V_\mathrm{X}, V_\mathrm{Y}, V_\mathrm{Z}\right)$;

в точці b - $\vec{V}_b = \left(V_\mathrm{X} + \dfrac{\partial V_\mathrm{X}}{\partial y}dy, V_\mathrm{Y} + \dfrac{\partial V_\mathrm{Y}}{\partial y}dy, V_\mathrm{Z} + \dfrac{\partial V_\mathrm{Z}}{\partial y}dy\right)$;

в точці d - $\vec{V}_d = \left(V_\mathrm{X} + \dfrac{\partial V_\mathrm{X}}{\partial x}dx, V_\mathrm{Y} + \dfrac{\partial V_\mathrm{Y}}{\partial x}dx, V_\mathrm{Z} + \dfrac{\partial V_\mathrm{Z}}{\partial x}dx\right)$;

в точці e - $\vec{V}_e = \left(V_\mathrm{X} + \dfrac{\partial V_\mathrm{X}}{\partial z}dz, V_\mathrm{Y} + \dfrac{\partial V_\mathrm{Y}}{\partial z}dz, V_\mathrm{Z} + \dfrac{\partial V_\mathrm{Z}}{\partial z}dz\right)$.

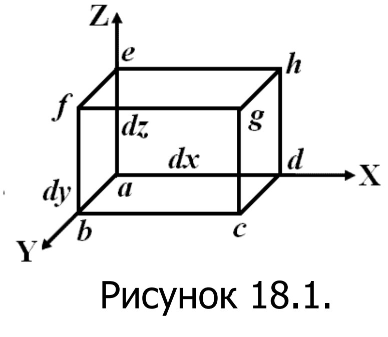


Рисунок 18.1.

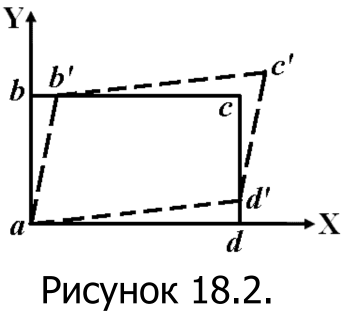


Рисунок 18.2.

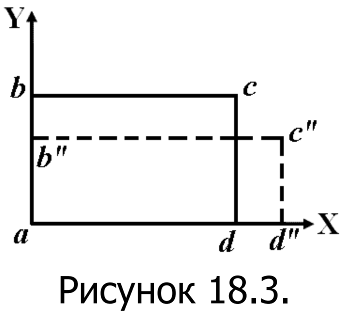


Рисунок 18.3.

Розглянемо малу деформацію грані $abcd$, яка паралельна площині XY, і відбулася за час dt

$$bb' = \frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial y} dydt,\ dd' = \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial x} dxdt.$$

Відносне зміщення, або кутова деформація

$$\frac{bb'}{ab} = \frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial y} dt,\ \frac{dd'}{ad} = \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial x} dt.$$

Повна зміна кута (кутова деформація) в вершині a за проміжок часу dt

$$\gamma_{\mathrm{XY}} = \left(\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial y} + \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial x} \right) dt,$$

а швидкість відповідної кутової деформації грані, що знаходиться в площині XY (і за аналогією для площин XZ і YZ)

$$\dot{\gamma}_{\mathrm{XY}} = \left(\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial y} + \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial x} \right),\ \dot{\gamma}_{\mathrm{YZ}} = \left(\frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial z} + \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial y} \right),$$

$$\dot{\gamma}_{\mathrm{XZ}} = \left(\frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial z} + \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial x} \right). \qquad (18.1)$$

Вказаними величинами визначаються швидкості кутових деформацій рідкої частинки. Для швидкості лінійних деформацій (рисунок 18.3)

$$dd'' = \frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial x} dxdt,\ bb'' = \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial y} dydt.$$

Відносне подовження

$$\varepsilon_{\mathrm{X}} = \frac{dd''}{ad} = \frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial x} dt,\ \varepsilon_{\mathrm{Y}} = \frac{bb''}{ab} = \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial y} dt,$$

а швидкість відносного подовження

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{X}} = \frac{\partial V_{\mathrm{X}}}{\partial x},\ \dot{\varepsilon}_{\mathrm{Y}} = \frac{\partial V_{\mathrm{Y}}}{\partial y},\ \dot{\varepsilon}_{\mathrm{Z}} = \frac{\partial V_{\mathrm{Z}}}{\partial z}. \qquad (18.2)$$

Тензор швидкості кутових і лінійних деформацій визначимо у вигляді

$$S=\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{X} & \dot{\gamma}_{XY} & \dot{\gamma}_{XZ} \\ \dot{\gamma}_{YX} & \dot{\varepsilon}_{Y} & \dot{\gamma}_{YZ} \\ \dot{\gamma}_{ZX} & \dot{\gamma}_{ZY} & \dot{\varepsilon}_{Z} \end{pmatrix}.$$

Для швидкості зміни об'єму, нехтуючи малими величинами порядку вище першого, можна записати

$$\frac{dW}{dt}=\left(\dot{\varepsilon}_{X}dx\right)dydz+\left(\dot{\varepsilon}_{Y}dy\right)dxdz+\left(\dot{\varepsilon}_{Z}dz\right)dydx=$$
$$=\left(\dot{\varepsilon}_{X}+\dot{\varepsilon}_{Y}+\dot{\varepsilon}_{Z}\right)dxdydz.$$

Тоді відносна зміна об'єму, або швидкість питомої об'ємної деформації

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}=\left(\dot{\varepsilon}_{X}+\dot{\varepsilon}_{Y}+\dot{\varepsilon}_{Z}\right)=\frac{\partial V_{X}}{\partial x}+\frac{\partial V_{Y}}{\partial y}+\frac{\partial V_{Z}}{\partial z}=div\vec{V}, \quad (18.3)$$

що розкриває фізичний сенс дивергенції – швидкість зміни об'єму частинки рідини.

При врахуванні в'язкого тертя вводиться гіпотеза пропорційності швидкості відповідної деформації (на відміну від механіки твердого деформівного тіла, в якій існує пропорційність самій деформації), згідно з якою

$$P_{XY}=\mu\dot{\gamma}_{XY}=\mu\left(\frac{\partial V_{X}}{\partial y}+\frac{\partial V_{Y}}{\partial x}\right) \qquad P_{XX}=\mathrm{A}+2\mu\dot{\varepsilon}_{X}=\mathrm{A}+2\mu\frac{\partial V_{X}}{\partial x}$$
$$P_{XZ}=\mu\dot{\gamma}_{XZ}=\mu\left(\frac{\partial V_{X}}{\partial z}+\frac{\partial V_{Z}}{\partial x}\right), \text{ і } P_{YY}=\mathrm{A}+2\mu\dot{\varepsilon}_{Y}=\mathrm{A}+2\mu\frac{\partial V_{Y}}{\partial y}.$$
$$P_{YZ}=\mu\dot{\gamma}_{YZ}=\mu\left(\frac{\partial V_{Y}}{\partial z}+\frac{\partial V_{Z}}{\partial y}\right) \qquad P_{ZZ}=\mathrm{A}+2\mu\dot{\varepsilon}_{Z}=\mathrm{A}+2\mu\frac{\partial V_{Z}}{\partial z}$$

(18.4)

За умов відсутності швидкості (рідина перебуває у стані спокою) дотичні напруження дорівнюють нулю і залишаються тільки нормальні напруження. У виразах A - невідома константа, для суми наведених рівнянь

$$P_{XX}+P_{YY}+P_{ZZ}=3A+2\mu div\vec{V}\,.$$

З урахуванням для нев’язкої рідини $P_{XX}=P_{YY}=P_{ZZ}=P_n=-P$ (14.4) (діють тільки нормальні напруження, рідина опирається стисканню) $-P=A+\frac{2}{3}\mu div\vec{V}$ і $A=-P-\frac{2}{3}\mu div\vec{V}$. Тоді

$$\begin{aligned} P_{XX}&=-P+2\mu\frac{\partial V_X}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu div\vec{V}\\ P_{YY}&=-P+2\mu\frac{\partial V_Y}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu div\vec{V}\,.\\ P_{ZZ}&=-P+2\mu\frac{\partial V_Z}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu div\vec{V}\end{aligned} \qquad (18.5)$$

Рівняння (18.4) і (18.5) зв’язують швидкості деформацій з напруженнями на довільній грані елементарного об’єму рідини. Другі та треті доданки в правій частині (18.5) визначають додаткові напруження за рахунок в’язкості.

Для виділеного об’єму рідини рівняння рівноваги в проекціях з урахуванням всіх компонент тиску записується у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dV_X}{dt}&=X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{XX}}{\partial x}+\frac{\partial P_{XY}}{\partial y}+\frac{\partial P_{XZ}}{\partial z}\right)\\ \frac{dV_Y}{dt}&=Y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{YX}}{\partial x}+\frac{\partial P_{YY}}{\partial y}+\frac{\partial P_{YZ}}{\partial z}\right).\\ \frac{dV_Z}{dt}&=Z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{ZX}}{\partial x}+\frac{\partial P_{ZY}}{\partial y}+\frac{\partial P_{ZZ}}{\partial z}\right)\end{aligned} \qquad (18.6)$$

У векторному вигляді з урахуванням $\vec{P}_X=\left(P_{XX},P_{XY},P_{XZ}\right)$, $\vec{P}_Y=\left(P_{YX},P_{YY},P_{YZ}\right)$, $\vec{P}_Z=\left(P_{ZX},P_{ZY},P_{ZZ}\right)$ і закону паристості, згідно з яким $P_{IJ}=P_{JI}$, можна записати:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\vec{P}_X}{\partial x}+\frac{\partial\vec{P}_Y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{P}_Z}{\partial z}\right). \qquad (18.7)$$

До цієї системи додаються рівняння нерозривності та рівняння стану, але загальна кількість невідомих 12 (P_{XX}, P_{XY}, P_{XZ}, P_{YY}, P_{YZ}, P_{ZZ}, V_X, V_Y, V_Z, ρ, P, T) перевищує кількість рівнянь.

Для отримання повної системи рівнянь, що описують динаміку в'язкої рідини, підставимо в (18.6) вирази для відповідних векторів із узяттям похідних

$$\frac{dV_X}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial V_X}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu div\vec{V}\right) +$$

$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial V_X}{\partial y} + \frac{\partial V_Y}{\partial x}\right)\right] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial V_X}{\partial z} + \frac{\partial V_Z}{\partial x}\right)\right].$$

$$\frac{dV_X}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(2\frac{\partial^2 V_X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_Y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_X}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_Z}{\partial x \partial z}\right) -$$

$$-\frac{2}{3}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu div\vec{V}\right).$$

(18.8)

Вираз у дужках можна переписати наступним чином:

$$\frac{\partial^2 V_X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_X}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_X}{\partial x} + \frac{\partial V_Y}{\partial y} + \frac{\partial V_Z}{\partial z}\right) =$$

$$= \nabla^2 V_X + \frac{\partial}{\partial x} div\vec{V},$$

де ∇^2 - скалярний добуток оператора Гамільтона або лапласіан (позначається Δ). Аналогічні за структурою рівняння отримують для складових V_Y, V_Z. Загалом до трьох рівнянь додаються рівняння нерозривності, балансу енергії і стану, тобто 6-ти невідомим відповідають 6 рівнянь. За структурою отримані рівняння досить складні та розв'язуються зазвичай чисельно.

Кінематичний коефіцієнт в'язкості $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ і за умови , що μ є постійним, це призводить до

$$\frac{dV_X}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\nabla^2 V_X + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x} div\vec{V};$$
$$\frac{dV_Y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\nabla^2 V_Y + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial y} div\vec{V};. \qquad (18.9)$$
$$\frac{dV_Z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\nabla^2 V_Z + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial z} div\vec{V}.$$

Система рівнянь (18.9) має назву рівняння Нав'є-Стокса, які у векторному вигляді

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}grad\right)\vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}gradP + \nu\nabla^2\vec{V} + \frac{\nu}{3}grad\left(div\vec{V}\right).$$

При дослідженні газових потоків можна не враховувати масові сили та приймати $X = Y = Z = 0$, що дає

$$\frac{dV_X}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\nabla^2 V_X + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x} div\vec{V};$$
$$\frac{dV_Y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\nabla^2 V_Y + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial y} div\vec{V}; \qquad (18.10)$$
$$\frac{dV_Z}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\nabla^2 V_Z + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial z} div\vec{V}.$$

За умов $div\vec{V} = 0$, коефіцієнт μ є постійним для всього об'єму рідини і $\rho = const$ рівняння приводяться до рівнянь руху в'язкої нестисливої рідини:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}grad\right)\vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}gradP + \nu\nabla^2\vec{V}. \qquad (18.11)$$

Для ідеальної (нев'язкої) рідини коефіцієнти $\mu = 0$ і $\nu = 0$ маємо рівняння у формі Ейлера (16.21).

Як було сказано вище, з додаванням необхідних рівнянь встановлюється відповідність між їхньою кількістю та кількістю невідомих - 6. Для вирішення до системи рівнянь Нав'є-Стокса необхідно додати граничні та початкові умови.

Вектор повного прискорення

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + grad\left(\frac{V^2}{2}\right) + rot\vec{V} \times \vec{V}, \qquad (18.12)$$

що з урахуванням (18.9) і (18.12) дає рівняння руху у формі

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + grad\left(\frac{V^2}{2}\right) + rot\vec{V} \times \vec{V} =$$
$$= \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradP + \nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\nu}{3} grad\left(div\vec{V}\right). \qquad (18.13)$$

Для нев'язкого ($\nu = 0$) середовища, що стискається, рівняння руху має вигляд

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + grad\left(\frac{V^2}{2}\right) + rot\vec{V} \times \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradP. \qquad (18.14)$$

В цій формі рівняння руху ідеальної рідини вперше було отримано російським вченим І.С.Громека.

ІІ. ТЕЧІЯ В′ЯЗКОЇ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ТРУБІ

Розглянемо рух в'язкої рідини в циліндричній трубі (рисунок 18.4) за наступних припущень.

1. Потік одновимірний, тому $V_X \neq 0$, $V_Y = 0$, $V_Z = 0$.
2. Рідина нестислива, $\rho = const$, $div\vec{V} = 0$.
3. Температура не змінюється, $T = const$, в'язкість не змінюється $\mu = const$, число Рейнольдса $Re < Re_{КР}$ (рух ламінарний).
4. Течія усталена, $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$.
5. Масові сили відсутні, $X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$

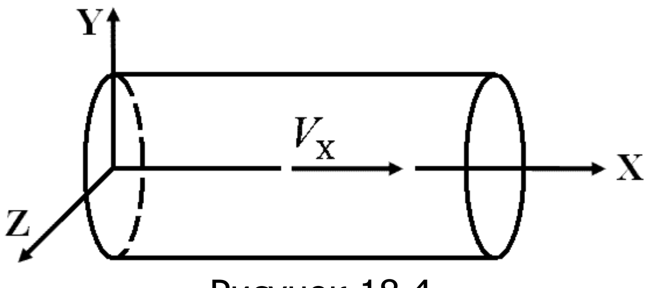


Рисунок 18.4.

Скористаємось рівняннями Нав′є-Стокса (18.9), що дає таку систему:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \nu\nabla^2 V_X, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0. \qquad (18.15)$$

Згідно з другим припущенням $\frac{\partial V_X}{\partial x} = 0$, що автоматично дає $V_X = V_X(y,z)$, розглядаючи рівняння системи (18.15), запишемо

$$P = P(x), \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 V_X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_X}{\partial z^2}\right). \qquad (18.16)$$

Останнє рівняння дає $F_1(x) = F_2(y,z) = const$. Внаслідок внутрішнього тертя для протікання рідини по трубі необхідна деяка різниця тиску на кінцях, тому $\Delta P = P_1 - P_2$. Диференційне рівняння $\frac{\partial P}{\partial x} = C_1$ з граничними умовами $x = 0 \quad P = P_1, \quad x = l$ $P = P_2$ має рішення

$$P = C_1 x + C_2 = -\frac{\Delta P}{l}x + P_1. \qquad (18.17)$$

Аналогічно

$$\mu\left(\frac{\partial^2 V_X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_X}{\partial z^2}\right) = C_1 \text{ або } \left(\frac{\partial^2 V_X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_X}{\partial z^2}\right) = -\frac{\Delta P}{\mu l}. \qquad (18.18)$$

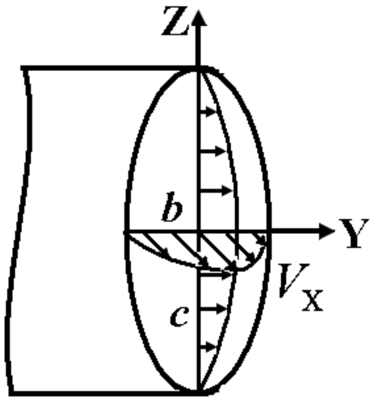


Рисунок 18.5.

Для в′язкої рідини характерне прилипання до границі та рух зі швидкістю контуру, який обмежує потік рідини. За умов нерухомості труби швидкість на границі $V_X(y,z)\big/_{\Gamma} = 0$. В загальному випадку вважаємо переріз труби еліпсом з розмірами півосей - b по осі y, c по осі z, рівняння контуру на границі

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Згідно з цим виразом будемо шукати $V_X(y,z)$ у вигляді (A - константа)

$$V_X(y,z)=A\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right). \qquad (18.19)$$

Максимальної величини швидкість $V_X(y,z)$ набуває при $y=0$, $z=0$ (рРисунок 18.5). Підстановка (18.19) в (18.18) дає

$$-A\left(\frac{2}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right)=-\frac{\Delta P}{\mu l},\ A=\frac{\Delta P}{2\mu l}\cdot\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}=V_{X\,max}.$$

Остаточно

$$V_X(y,z)=V_{X\,max}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)=\frac{\Delta P}{2\mu l}\cdot\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right). \qquad (18.20)$$

Епюрою векторів швидкості, проведених з точок перерізу труби, буде поверхня еліптичного параболоїда. Об’ємна витрата визначається за формулою

$$Q=\iint_{\omega}V_X(y,z)dydz=V_{X\,max}\iint_{\omega}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)dydz.$$

Переходячи до полярних координат,

$$Q=\frac{\pi bc}{2}V_{X\,max}=\pi bcV_{X\,cp}, \qquad (18.21)$$

де середня швидкість

$$V_{X\,cp}=\frac{V_{X\,max}}{2}=\frac{\Delta P}{4\mu l}\cdot\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}.$$

Якщо форма перерізу – коло ($b = c = R$), то $V_{Xmax} = \frac{\Delta P}{4\mu l} \cdot R^2$,

$V_{Xcp} = \frac{\Delta P}{8\mu l} \cdot R^2$, $V_X(r) = V_{Xmax}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$.

Епюра швидкості в цьому випадку називається параболою Пуазейля. Об'ємна витрата дорівнює

$$Q = \pi R^2 V_{Xcp} \text{ або } Q = \frac{\Delta P}{8\mu l} \cdot \pi R^4 \qquad (18.22)$$

і виражає закон Пуазейля, який описує об'ємну витрату рідини через круглу трубу при усталеній ламінарній течії в'язкої нестисливої рідини.

На практиці вводиться поняття коефіцієнта опору труби (коефіцієнт гідравлічного тертя) – падіння тиску на ділянці труби одиничної довжини, одиничного діаметра при одиничному динамічному або швидкісному напорі:

$$\Delta P = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{V_{Xcp}^2}{2} = \frac{8\mu l}{R^2} V_{Xcp} = \frac{32\mu l}{d^2} V_{Xcp}. \qquad (18.23)$$

З останнього виразу ми бачимо, що коефіцієнт гідравлічного тертя λ не є постійним по відношенню до швидкості, і з урахуванням $\lambda = \frac{64\mu}{\rho d V_{Xcp}}$ та $Re = \frac{\rho d V_{Xcp}}{\mu} = \frac{d V_{Xcp}}{\nu}$ остаточно маємо для ламінарного потоку $\lambda = \frac{64}{Re}$. За умов $Re \geq Re_{КР}$ (турбулентний режим руху) формула для коефіцієнта гідравлічного тертя може бути записана:

$$\lambda = \frac{C}{Re^n}, \qquad (18.24)$$

де ступінь n визначається дослідним шляхом.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке фізична величина? Навести приклади.
2. Поясніть, як утворюються похідні одиниці системи SI .
3. Назвіть основні фізичні властивості рідини та газу.
4. Який закон показує зв'язок між густиною газу та тиском?
5. Дайте визначення гідростатичного тиску у точці. Які його властивості?
6. Як формулюється основне рівняння гідростатики?
7. Як будуються епюри гідростатичного тиску на плоскі вертикальну та похилу стінки, визначається сила тиску?
8. Як будуються епюри гідростатичного тиску на криволінійну поверхню, визначається сила тиску?
9. Що характеризує остійність плаваючого тіла? Дайте визначення виштовхувальної сили.
10. Які параметри пов'язані в рівнянні нерозривності потоку?
11. Які існують режими руху рідини? Що характеризує число Рейнольдса?
12. Що таке кавітація?
13. В якому режимі рухається рідина в системах протипожежного водопостачання?
14. В чому полягають відмінності ідеальної і реальної рідини?
15. Запишіть рівняння Бернуллі для потоку ідеальної рідини.
16. Запишіть рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини. Поясніть відмінності від рівняння Бернуллі для ідеальної рідини.
17. Накреслити схему витратоміра Вентурі та пояснити принцип його дії.
18. За якими принципами класифікують втрати напору?
19. За якою формулою визначаються втрати напору за довжиною трубопроводу? Як визначається коефіцієнт гідравлічного тертя залежно від числа Рейнольдса?
20. Які існують типи місцевих опорів? Які зміни в потоці відбуваються під час проходження певних місцевих опорів?
21. Записати формулу для визначення втрат напору на місцевих опорах.
22. Навести формули для визначення втрат напору в пожежному рукаві та рукавній лінії.
23. Наведіть приклади складних трубопроводів.

24. За яких процесів може відбуватися рух газу в газопроводах?
25. Який вигляд має рівняння Бернуллі для нестаціонарного руху рідини?
26. Дайте фізичне тлумачення явища гідравлічного удару.
27. Записати формулу Жуковського. Для якого гідравлічного удару вона застосовується?
28. Записати формулу Френкеля. Для якого гідравлічного удару вона застосовується?
29. Що є коефіцієнтами стиснення струменя, швидкості та витрати при витіканні рідини через малий отвір в малій стінці?
30. Дати визначення насадки та навести приклади найбільш поширених типів насадок, порівняти їхні характеристики.
31. Для яких технічних цілей використовують насадки? Навести приклади.
32. Навести загальну формулу для часу повного та часткового спорожнення резервуара зі змінним перерізом за висотою через донний отвір з певним коефіцієнтом витрати.
33. Як визначається час спорожнення складених резервуарів?
34. Що таке вертикальний гідравлічний струмінь? Записати формули Люгера та Фрімана для висоти підйому роздробленої частини вертикального струменя.
35. Який вигляд має спрощене рівняння Бернуллі для визначення висоти вертикального струменя з урахуванням сили опору повітря?
36. Навести загальну формулу для визначення висоти підйому вертикального струменя з урахуванням сили опору повітря.
37. Записати формулу для визначення висоти вертикального струменя при лінійній залежності сили опору від швидкості потоку.
38. Що таке нахилений гідравлічний струмінь? Від чого залежать радіуси дії компактної і роздробленої частин нахиленого струменя?
39. Поясніть сутність методу врахування сил тертя, на основі якого базується коригування формул для визначення дальності та висоти польоту гідравлічного струменя, що нахилений до горизонту.
40. Як взаємодіє струмінь з рухомою або нерухомою плоскою та криволінійною поверхнями?
41. Поясніть принцип реактивного руху.
42. Які пристрої використовують для розпилення струменя?

Додаток 1. Найменування приставок для кратних та часткових одиниць вимірювань

Найменування приставки (позначення)					Множник	Наймену-вання множ-ника
Українське		Російське		Лат		
йота	Й	йотта	Й	Y	10^{24} = 1000000000000000000000000	септильйон
зета	ЗТ	зетта	ЗТ	Z	10^{21} =1000000000000000000000	секстильйон
екса	Е	экса	Э	E	10^{18} =1000000000000000000	квінтильйон
пета	П	пета	П	P	10^{15} =1000000000000000	квадрильйон
тера	Т	тера	Т	T	10^{12} =1000000000000	трильйон
гіга	Г	гига	Г	G	10^{9} =1000000000	мільярд
мега	М	мега	М	M	10^{6} =1000000	мільйон
міріа	ма	мириа	ма	ma	10^{4} =10000	міріад
кіло	к	кило	к	k	10^{3} =1000	тисяча
гекто	г	гекто	г	h	10^{2} =100	сто
дека	да	дека	да	da	10^{1} =10	десять
					10^{0} =1	одиниця
деци	д	деци	д	d	10^{-1} =0,1	одна десята
санти	с	санти	с	c	10^{-2} =0,01	одна сота
мілі	м	милли	м	m	10^{-3} =0,001	одна тисячна
міріо	мо	мирио	мо	mo	10^{-4} =0,0001	одна міріадна
мікро	мк	микро	мк	μ	10^{-6} =0,000001	одна мільйонна
нано	н	нано	н	n	10^{-9} =0,000000001	одна мільярдна
піко	п	пико	п	p	10^{-12} =0,000000000001	одна трильйонна
фемто	ф	фемто	ф	f	10^{-15} =0,000000000000001	одна квадрильйонна
ато	а	атто	а	a	10^{-18} =0,000000000000000001	одна квинтильйонна
цепто, зепто	зп	цепто, зепто	зп	z	10^{-21} = 0,000000000000000000001	одна секстильйонна
йокто	й	йокто	й	y	10^{-24} = 0,000000000000000000000001	одна септильйонна

Додаток 2. Розмірності та одиниці вимірювання фізичних величин, які використовуються в технічній механіці рідини і газу

Найменування величини, її позначення	Одиниця вимірювання	Скорочене позначення одиниць вимірювання	Розмірність похідних одиниць
Площа, ω	Квадратний метр	м^2	$\left[L^2\right]$, (1 м)^2
Об'єм, W	Кубічний метр	м^3	$\left[L^3\right]$, (1 м)^3
Густина, ρ	Кілограм на кубічний метр	кг/м^3	$\left[M\right]\cdot\left[L^{-3}\right]$, (1 кг):(1 м)^3
Швидкість, V	Метр за секунду	м/с	$\left[L\right]\cdot\left[T^{-1}\right]$, (1 м):(1 с)
Прискорення, a	Метр на секунду в квадраті	м/с^2	$\left[L\right]\cdot\left[T^{-2}\right]$, (1 м):(1 с)^2
Сила, F Вага, G	Ньютон	Н	$\left[M\right]\cdot\left[L\right]\cdot\left[T^{-2}\right]$ (1 кг)·(1 м):(1 с)^2
Питома вага, γ	Ньютон на кубічний метр	Н/м^3	$\left[M\right]\cdot\left[L^{-2}\right]\cdot\left[T^{-2}\right]$ (1 кг):(1 м)^2:(1 с)^2
Тиск, P	Паскаль (Ньютон на квадратний метр)	Па (Н/м^2)	$\left[M\right]\cdot\left[L^{-1}\right]\cdot\left[T^{-2}\right]$ (1 кг):(1 м):(1 с)^2
Динамічна в'язкість, μ	Ньютон-секунда на квадратний метр	Па·с (Н·с/м^2)	$\left[M\right]\cdot\left[L^{-1}\right]\cdot\left[T^{-1}\right]$, (1 кг):(1 м):(1 с)
Кінематична в'язкість, ν	Квадратний метр на секунду	м^2/с	$\left[L^2\right]\cdot\left[T^{-1}\right]$, (1 м)^2:(1 с)
Напір, H	Метр	м	$\left[L\right]$, (1 м)
Об'ємні витрати, Q	Кубічний метр за секунду	м^3/с	$\left[L^3\right]\cdot\left[T^{-1}\right]$, (1 м)^3:(1 с)
Робота, енергія	Джоуль	Дж (Н·м)	$\left[M\right]\cdot\left[L^{2}\right]\cdot\left[T^{-2}\right]$, (1 кг)·(1 м)^2:(1 с)^2
Коефіцієнт стисливості, β_W	Квадратний метр на ньютон	м^2/Н (1/Па)	$\left[M^{-1}\right]\cdot\left[L\right]\cdot\left[T^{2}\right]$, (1 м)·(1 с)^2:(1 кг)
Модуль пружності, E	Паскаль (Ньютон на квадратний метр)	Па (Н/м^2)	$\left[M\right]\cdot\left[L^{-1}\right]\cdot\left[T^{-2}\right]$, (1 кг):(1 м):(1 с)^2
Коефіцієнт температурного розширення, β_t	Одиниця на градус	$1/C^{\circ}$	$\left[K^{-1}\right]$, 1:(1 К)

Додаток 3. Густина рідин ρ при 20$^{\circ}C$

Назва рідини	ρ, кг/м^3	Назва рідини	ρ, кг/м^3
Вода (при 4$^{\circ}C$)	1000	Нафта (легка)	650÷870
Ацетон	800	Нафта (середня)	870÷910
Бензин (легкий)	700	Нафта (важка)	910÷1050
Бензол	880	Ртуть	13520
Гліцерин	1260	Спирт (ректифікат)	830
Дизпаливо	1000		
Керосин	800	Сірчана кислота	1920
Молоко	1030	Етиловий спирт	790
Морська вода	1020	Ефір	720

Додаток 4. Динамічний коефіцієнт в’язкості

Рідина (при 20$^{\circ}C$)	μ, Па·с	Гази (при 20$^{\circ}C$ і 1,013·10^5 Па)	μ, Па·с
Ацетон	0,000322	Азот	0,0175·10^{-3}
Бензин	0,00060 – 0,00065	Аміак	0,00995·10^{-3}
Вода	0,001008	Водень	0,0088·10^{-3}
Гліцерин / Гліцерин безводний	1,480 / 0,512	Повітря	0,0182·10^{-3}
Ртуть	0,001554	Гелій	0,0196·10^{-3}
Смола	3·10^7	Двоокис вуглецю	0,0147·10^{-3}
Мастила	0,03÷5	Кисень	0,0202·10^{-3}
Нафта	0,001÷0,01	Метан	0,0108·10^{-3}
Етиловий спирт	0,00119	Окис вуглецю	0,0177·10^{-3}

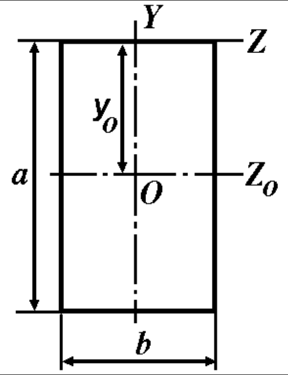
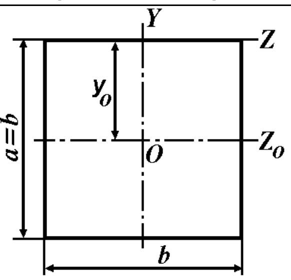
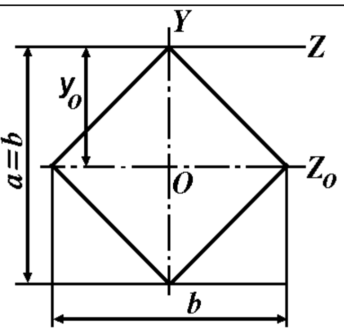
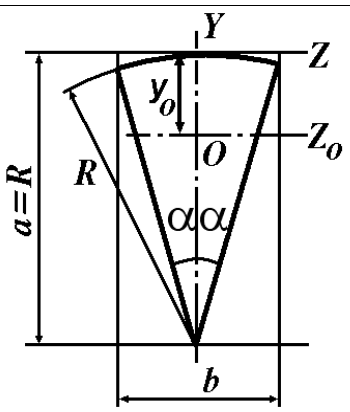
Додаток 5. Залежність густини та кінематичного коефіцієнту в'язкості води від температури

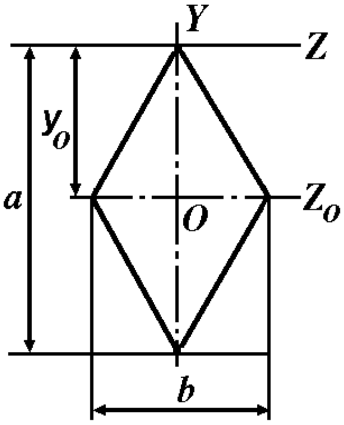
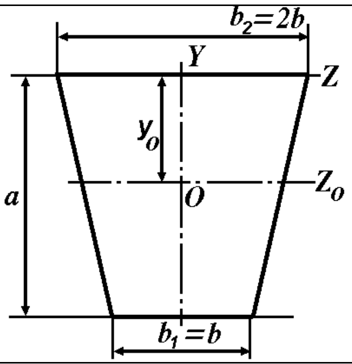
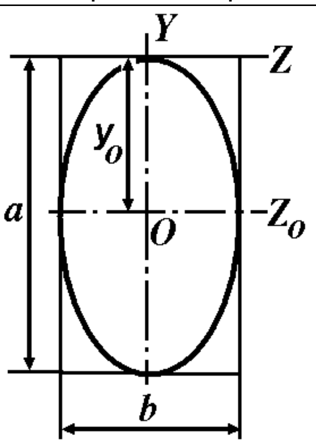
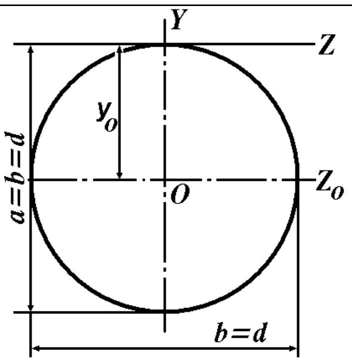
Температура, $^{\circ}C$	ρ, кг/м^3	ν, м^2/с
0	999,87	$1{,}79 \cdot 10^{-6}$
4	1000,00	$1{,}52 \cdot 10^{-6}$
10	999,73	$1{,}31 \cdot 10^{-6}$
20	998,23	$1{,}01 \cdot 10^{-6}$
30	995,67	$0{,}81 \cdot 10^{-6}$
40	992,24	$0{,}66 \cdot 10^{-6}$
50	988,07	$0{,}55 \cdot 10^{-6}$
60	983,24	$0{,}48 \cdot 10^{-6}$
70	977,81	$0{,}41 \cdot 10^{-6}$
80	971,83	$0{,}37 \cdot 10^{-6}$
90	965,34	$0{,}33 \cdot 10^{-6}$
100	958,38	$0{,}28 \cdot 10^{-6}$

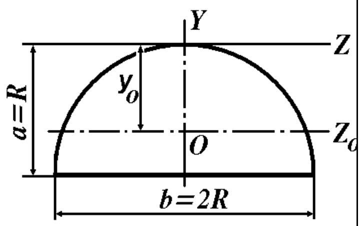
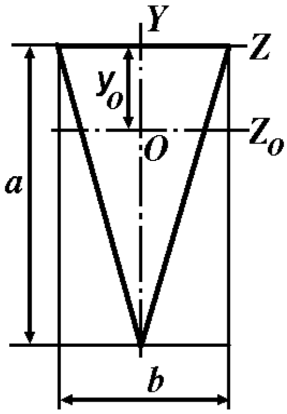
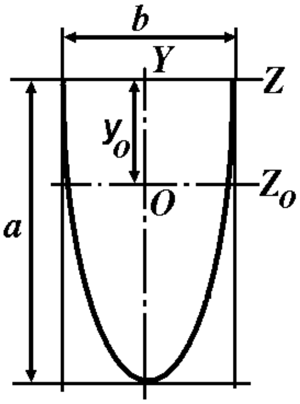
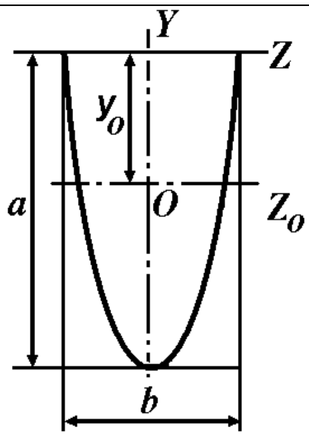
Додаток 6. Грецький алфавіт

Малі букви	Великі букви	Назва букв		Малі букви	Великі букви	Назва букв
α	A	альфа		ν	N	ню
β	B	бета		ξ	Ξ	ксі
γ	Γ	гамма		o	O	омікрон
δ	Δ	дельта		π	Π	пі
ε	E	епсилон		ρ	P	ро
ζ	Z	дзета		σ	Σ	сігма
η	H	ета		τ	T	тау
θ	Θ	тета		υ	Υ	іпсилон
ι	I	йота		φ	Φ	фі
κ	K	каппа		χ	X	хі
λ	Λ	лямбда		ψ	Ψ	псі
μ	M	мю		ω	Ω	омега

Додаток 7. Площа, координата центру ваги, осьовий момент інерції для деяких плоских перерізів

ФОРМА ПЕРЕРІЗУ	ПЛОЩА ПЕРЕРІЗУ ω, КООРДИНАТА ЦЕНТРУ ВАГИ y_{O}, МОМЕНТ ІНЕРЦІЇ $I_{Z_{\text{O}}}$		
ПРЯМОКУТНИК 	$\omega = ab$	$y_{\text{O}} = \dfrac{a}{2}$	$I_{Z_{\text{O}}} = \dfrac{ba^3}{12}$
КВАДРАТ 	$\omega = ab = b^2$	$y_{\text{O}} = \dfrac{b}{2}$	$I_{Z_{\text{O}}} = \dfrac{b^4}{12}$
КВАДРАТ НА РЕБРІ 	$\omega = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{b^2}{2}$	$y_{\text{O}} = \dfrac{b}{2}$	$I_{Z_{\text{O}}} = \dfrac{b^4}{48}$
КРУГОВИЙ СЕКТОР 	$\omega = \alpha R^2,\ \alpha = \dfrac{\pi\alpha^{\circ}}{180^{\circ}}$, $y_{\text{O}} = R\left(1 - \dfrac{2\sin\alpha}{3\alpha}\right)$, $I_{Z_{\text{O}}} = \dfrac{R^4}{8}\left(2\alpha + \sin 2\alpha - \dfrac{32\sin^3\alpha}{9\alpha}\right)$		

ФОРМА ПЕРЕРІЗУ		ПЛОЩА ПЕРЕРІЗУ ω, КООРДИНАТА ЦЕНТРУ ВАГИ y_O, МОМЕНТ ІНЕРЦІЇ I_{Z_O}		
РОМБ		$\omega = \dfrac{ab}{2}$	$y_O = \dfrac{a}{2}$	$I_{Z_O} = \dfrac{ba^3}{48}$
ТРАПЕЦІЯ		$\omega = \dfrac{1}{2}(b_1 + b_2)a$, $y_O = \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2}$, $I_{Z_O} = \dfrac{a^3}{36} \cdot \dfrac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}$		
ЕЛІПС		$\omega = \pi\dfrac{ab}{4}$	$y_O = \dfrac{a}{2}$	$I_{Z_O} = \pi\dfrac{a^3b}{64}$
КОЛО		$\omega = \pi\dfrac{d^2}{4}$	$y_O = \dfrac{d}{2}$	$I_{Z_O} = \pi\dfrac{d^4}{64}$

<table>
<tr><td colspan="2">ФОРМА ПЕРЕРІЗУ</td><td colspan="3">ПЛОЩА ПЕРЕРІЗУ ω, КООРДИНАТА ЦЕНТРУ ВАГИ y_{O}, МОМЕНТ ІНЕРЦІЇ $I_{Z_{\text{O}}}$</td></tr>
<tr><td>НАПІВКОЛО</td><td>
</td><td colspan="3">$$\omega=\pi\frac{R^2}{2},\; y_{\text{O}}=R\left(1-\frac{4}{3\pi}\right),$$ $$I_{Z_{\text{O}}}=\frac{R^4}{256}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)$$</td></tr>
<tr><td>ТРИКУТНИК</td><td>
</td><td>$$\omega=\frac{1}{2}ab$$</td><td>$$y_{\text{O}}=\frac{a}{3}$$</td><td>$$I_{Z_{\text{O}}}=\frac{ba^3}{36}$$</td></tr>
<tr><td>НАПІВЕЛІПС</td><td>
</td><td colspan="3">$$\omega=\pi\frac{ab}{4},\; y_{\text{O}}=\frac{4}{3\pi}a,$$ $$I_{Z_{\text{O}}}=\frac{ba^3}{2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)$$</td></tr>
<tr><td>ПАРАБОЛІЧНИЙ СЕГ-МЕНТ</td><td>
</td><td colspan="3">$$\omega=\frac{2}{3}ab,\; y_{\text{O}}=\frac{2}{5}a$$ $$I_{Z_{\text{O}}}=\frac{8}{175}ba^3$$</td></tr>
</table>

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Агроскин И.И. Гидравлика / И.И.Агроскин, Г.Т.Дмитриев, Ф.И.Пикалов.-М.-Л.: Энергия, 1964.-352 с.
2. Альтшуль А.Д. Гидравлика и аэродинамика / А.Д.Альтшуль, П.Т.Киселев.-М.: Стройиздат, 1965.-274 с.
3. Витман Л.А.. Распыливание жидкости форсунками / Л.А.Витман, Б.Д.Кацнельсон, И.И.Палеев.-М.-Л.: Государственное энергетическое издательство, 1962.-265 с.
4. Идеальная и вязкая жидкости: Учеб. пособие / А.С.Романов, А.В.Семиколенов, С.Н.Тараненко, А.П.Шахорин.-М.: Изд-во МГТУ им Н.Э.Баумана, 2008.-64 с.
5. Краснов Н.Ф. Аэродинамика. Учебник для студентов втузов: в 2 ч. / Н.Ф.Краснов.-М.: Высшая школа, 1980.-.-Ч.1: Основы теории. Аэродинамика профиля и крыла-1980.-495 с.
6. Курганов А.М. Справочник по гидравлическим расчетам систем водоснабжения и канализации / А.М.Курганов, Н.Ф.Федоров.-Л.: Стройиздат (Лен. отд-ние), 1973.-408 с.
7. Лаврівський З.В. Технічна механіка рідин та газів. Навчальний посібник / З.В.Лаврівський, В.І.Мандрус.-Львів: Видавництво «СПОЛОМ», 2004.-198 с.
8. Латышенков А.М. Гидравлика / А.М.Латышенков, В.Г.Лобачев.-М.: Гос. издательство по строительству и архитектуре, 1956.-408 с.
9. Левицький Б.Ф. Гідравліка. Загальний курс / Б.Ф.Левицький, Н.П.Лещій.-Львів: Світ, 1994.-264 с.
10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов / Л.Г.Лойцянский.-М.: Дрофа, 2003.-840 с.
11. Ольшанский В.П. Приближенные методы расчета гидравлических пожарных струй / В.П.Ольшанский, В.М.Халыпа, О.А.Дубовик.-Харьков: Митець, 2004.-115 с.
12. Пажи Д.Г. Основы техники распыливания жидкостей / Д.Г.Пажи, В.С.Галустов.-М.: Химия, 1984.-256 с.

13. Писаренко Г.С. Опір матеріалів: підручник / Г.С.Писаренко, О.Л.Квітка, Е.С.Уманський; за ред. Г.С.Писаренка.-К.: Вища школа, 1993.-655 с.

14. Рабинович Е.З. Гидравлика / Е.З.Рабинович.-М.: Физматгиз, 1963.-408 с.

15. Розрахунок пожежних гідравлічних струменів. Навчальний посібник / С.А.Єременко, В.П.Ольшанський, В.М.Халипа, О.О.Дубовик.-К.: 2005.-124 с.

16. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2 т. / Л.И.Седов.-М.: Наука, 1970.-.-Т.2.-1970.-568 с.

17. Смирнов В.И. Курс высшей математики: в 5 т. / В.И.Смирнов.-М.: Наука, 1974.-.-Т.2-.-1974.-656 с.

18. Смислов В.В. Гідравліка і аеродинаміка / В.В.Смислов.-К.: Вища школа, 1971.-348 с.

19. Стрелков С.П. Механика / С.П.Стрелков.-М.: Наука, 1975.-559 с.

20. Тарасов-Агалаков Н.А. Практическая гидравлика в пожарном деле / Н.А.Тарасов-Агалаков.-М.: Изд-во Министерства коммунального хозяйства РСФСР, 1959.- 262 с.

21. Технічна механіка рідини і газу. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи / Уклад. В.М.Халипа, С.О.Вамболь, І.В.Міщенко.- Х.: УЦЗУ, 2007.-64 с.

22. Угинчус А.А. Гидравлика и гидравлические машины / А.А.Угинчус.-Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1960.-360 с.

23. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г.М.Фихтенгольц.-М.: Физматлит, 2001.-.-Т.3.-2001-662 с.

24. Френкель Н.З. Гидравлика / Н.З.Френкель.-М.-Л.: Госэнергоиздат, 1956.-456 с.

25. Ходаков В.Ф. Гидравлика в пожарном деле / В.Ф.Ходаков.-М.: Высшая школа МООП РСФСР, 1965.-204 с.

26. Чугаев Р.Р. Гидравлика: Учебник для вузов / Р.Р.Чугаев.-Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982.-672 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Укладачі: **Халипа** Віктор Маркович
Вамболь Сергій Олександрович
Міщенко Ігор Вікторович
Прокопов Олександр Васильович

Технічна механіка рідини і газу.

Курс лекцій.

Відповідальний за випуск І.В.Міщенко

Підп. до друку 26.05.2012 р. Формат 60х84 1/16
Папір 80 г/см^2. Друк ризограф. Умовн.-друк. арк. 14,0
Тираж 250 прим. Вид № XX/11 Зам №

Відділення редакційно-видавничої діяльності
Національного університету цивільного захисту України
61023, Харків, вул. Чернишевська, 94