

**Кафедра прикладної механіки
факультету техногенно-екологічної безпеки
Національного університету цивільного захисту України**

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

РОЗДІЛ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ
КОНТРОЛЬНОЇ (МОДУЛЬНОЇ) РОБОТИ**

Харків 2014

Укладачі: І.В.Міщенко, В.М.Халипа, Г.О.Чернобай

Рецензенти: В.Л.Хавін – завідувач кафедри опору матеріалів Національного технічного університету «ХПІ», кандидат технічних наук, професор;

В.К.Мунтян - завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін Національного університету цивільного захисту України, кандидат технічних наук, доцент.

Прикладна механіка. Розділ «Опір матеріалів». Методичні вказівки до виконання контрольної (модульної) роботи /Уклад. І.В.Міщенко, В.М.Халипа, Г.О.Чернобай.- Х.: НУЦЗУ, 2014.-84 с.

Запропоновані типові задачі дисципліни «Прикладна механіка. Розділ «Опір матеріалів». Викладена методика розв'язання наведених задач. Проведено числові розрахунки.

Для курсантів, студентів і слухачів відповідно до програми вищої освіти у напрямках «Пожежна безпека», «Цивільний захист», «Охорона праці», «Хімічна технологія». Може бути корисним під час аудиторних занять та для самостійної роботи.

Відповідальний за випуск І.В.Міщенко

© Національний університет цивільного захисту України, 2014

ВСТУП

Основною метою модульних робіт є набуття студентами та курсантами вміння самостійної роботи, практичного використання теоретичних знань з дисципліни прикладна механіка.

Методичні вказівки до виконання модульної роботи підготовлені згідно з навчальною програмою розділів курсу прикладної механіки, розділу «Опір матеріалів». Опір матеріалів є однією з основних загальноосвітніх інженерних дисциплін і відіграє значну роль у формуванні фахівців технічних спеціальностей.

У запропонованому виданні наведено розв'язання десяти характерних задач з вказаної дисципліни, в яких аналізується поведінка конструкцій при розтяганні-стисканні, крученні, згинанні, та під навантаженням, яке може привести до втрати стійкості. Підбір і кількість задач зумовлені обсягом теоретичного матеріалу, який викладається під час проведення аудиторних занять з прикладної механіки. Опис кожної задачі містить в собі теоретичну та практичну частини, а також порядок проведення розрахунків.

В опорі матеріалів розглядаються питання розрахунку окремих елементів конструкцій та питання розрахунку деяких найпростіших конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість. Набуття навичок правильного розрахунку конструкцій дозволить вірно оцінювати спроможність конструкцій опиратися навантаженню, прогнозувати їхню поведінку з точки зору задоволенню вищевказаним характеристикам міцності, жорсткості та стійкості. Невірні розрахунки навіть незначного елемента конструкцій може мати важкі наслідки та привести до руйнування конструкції в цілому.

На відміну від теоретичної механіки, розділом якої є статика, і в якій всі тіла розглядаються як абсолютно тверді, в опорі матеріалів враховується, що елементи конструкцій при дії зовнішніх сил змінюють свої форму та розміри, тобто деформуються. Під час вирішення задач опору матеріалів застосовуються методи теоретичної механіки (розділ «Статика») і математичного аналізу, а також використовуються дані з розділів фізики, в яких вивчаються властивості різних матеріалів.

Навчально-методичне видання має структуру, котра дозволяє студентам та курсантам самостійно без зайвих пояснень викладача виконувати модульну роботу.

1. ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ МОДУЛЬНОЇ РОБОТИ

Методичні вказівки містять розв'язання десяти характерних задач з вказаної дисципліни. Підбір задач зумовлений обсягом теоретичного матеріалу, який викладається під час проведення аудиторних занять з прикладної механіки (розділ «Опір матеріалів»). Кожна задача відповідає певній частині курсу – задачі 1-4 пов'язані з вивченням розтягання-стискання, задачі 5 і 6 присвячені крученню. Під час вирішення задачі 7 аналізується поведінка конструкції під час згинання, причому окремо розглядаються конструкції з характерними видом закріплення – консольне закладення та шарнірне спирання балки. Задачі 8 і 9, використовуючи у якості вихідних даних результати розрахунків попередньої задачі, допомагають визначенню або вибору оптимальних плоских перерізів конструкції, що працює на згинання, а також наводять певні критерії оптимальності. Остання задача присвячена аналізу поведінки стержнів в умовах поздовжнього стискання.

На початку кожної задачі містяться теоретичні відомості, визначення та формули, які використовуються під час вирішення. Кожна задача супроводжується роз'ясненням, як приклад наводиться розв'язання задачі з певними числовими даними. Під час вирішення задачі №8 даються посилання на Таблицю з числовими даними, яку розміщено в кінці видання в окремому Додатку.

Кожній задачі відповідає певна схема, на якій показано зовнішнє навантаження (сили, моменти, розподілене навантаження). Напрямок дії зовнішніх факторів на схемі відповідає даним із знаком «+», для даних із знаком «—» необхідно змінити напрям дії цих навантажень на протилежний, привести навантаження до реального, що відповідає варіанту завдання, після чого починати вирішення задачі.

Нумерація формул, рисунків і таблиць в теоретичній частині, що передуює розв'язанню кожної задачі, є подвійною і прив'язана до номера задачі: перше число (цифра) показує поточний номер задачі (від 1 до 10), друге – номер формули.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Робота подається виконаною на форматі А4, титульний лист оформлюється згідно з загальними правилами Університету цивільного захисту України.

При виконанні завдань необхідно взяти з таблиці до кожної задачі дані відповідно до наданого викладачем цифрового шифру та трьох літер (Г, Д, Е). Цей шифр зберігається протягом виконання всіх задач і має бути вказаним на титульному листі. З кожної вертикальної колонки таблиці вихідних даних до задачі, означеною внизу певною літерою, треба взяти тільки одне значення, номер якого збігається з цифрою шифру літери. Наприклад, якщо шифр ГДЕ = 105, тобто Г = 1, Д = 0, Е = 5, відповідні вихідні дані з таблиці необхідно брати наступним чином:

Номер	Вихідні дані (1)	Вихідні дані (2)	Вихідні дані (3)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
0			
	Г	Д	Е

До задачі додається відповідний Рисунок з усіма умовними позначеннями. Розрахунок супроводжується необхідними поясненнями з наведенням основних формул в загальному вигляді та після підстановки числових даних. Обов'язково вказувати розмірність будь-якої величини.

При вирішенні кожної задачі необхідно приводити розмірності всіх величин до системи SI , для чого на наступній сторінці наведені розмірності основних фізичних величин, які використовуються в прикладній механіці. В деяких випадках ця умова не є необхідною, але з метою запобігання певних непорозумінь кожного такого разу на цьому робиться окремий наголос.

РОЗМІРНОСТІ ТА ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ В ОПОРІ МАТЕРІАЛІВ

Найменування величини, її позначення	Одиниця вимірювання (система <i>SI</i>)	Скорочене позначення одиниць вимірювання	Розмірність основних або похідних одиниць
Довжина, L, l	Метр	м	$[L], 1 \text{ м}$
Діаметр, D, d	Метр	м	$[L], 1 \text{ м}$
Площа, A	Квадратний метр	м ²	$[L^2], (1 \text{ м})^2$
Осьовий момент опору перерізу, W	Кубічний метр	м ³	$[L^3], (1 \text{ м})^3$
Момент інерції перерізу, I	Метр в четвертому ступені	м ⁴	$[L^4], (1 \text{ м})^4$
Густина, ρ	Кілограм на кубічний метр	кг/м ³	$[M] \cdot [L^{-3}], (1 \text{ кг}) : (1 \text{ м})^3$
Сила, F, N, Q Вага, G	Ньютон	Н	$[M] \cdot [L] \cdot [T^{-2}]$ (1 кг) : (1 м) : (1 с) ²
Питома вага, γ	Ньютон на кубічний метр	Н/м ³	$[M] \cdot [L^{-2}] \cdot [T^{-2}]$ (1 кг) : (1 м) ² : (1 с) ²
Розподілене навантаження, інтенсивність, q	Ньютон на метр	Н/м	$[M] \cdot [T^{-2}]$ (1 кг) (1 с) ²
Момент, M	Ньютон-метр	Н·м	$[M] \cdot [L^2] \cdot [T^{-2}]$, (1 кг) · (1 м) ² : (1 с) ²
Напруження, σ, τ	Паскаль (Ньютон на квадратний метр)	Па (Н/м ²)	$[M] \cdot [L^{-1}] \cdot [T^{-2}]$ (1 кг) : (1 м) : (1 с) ²
Модуль пружності, E, G	Паскаль (Ньютон на квадратний метр)	Па (Н/м ²)	$[M] \cdot [L^{-1}] \cdot [T^{-2}]$ (1 кг) : (1 м) : (1 с) ²
Кут закручування, φ	Радіан	рад	1
Подовження, Δl	Метр	м	$[L], 1 \text{ м}$

Зауваження! Скорочені позначення одиниць вимірювання *SI*, що мають спеціальне найменування (та позначення) на честь видатних вчених (наприклад, Ньютон, Паскаль, Джоуль тощо), завжди починаються з великої літери.

НАЙМЕНУВАННЯ ПРИСТАВОК ДЛЯ КРАТНИХ ТА ЧАСТКОВИХ ОДИНИЦЬ ВИМІРЮВАНЬ (В ДІАПАЗОНІ 10^{-12} - 10^{12})

Найменування приставки (позначення)					Множник	Найменування множника
Українське		Російське		Лат		
тера	T	тера	T	T	$10^{12} = 1000000000000$	трильйон
гіга	G	гига	G	G	$10^9 = 1000000000$	мільярд
мега	M	мега	M	M	$10^6 = 1000000$	мільйон
мірія	ma	мириа	ma	ma	$10^4 = 10000$	міріад
кіло	k	кило	k	k	$10^3 = 1000$	тисяча
гекто	h	гекто	h	h	$10^2 = 100$	сто
дека	da	дека	da	da	$10^1 = 10$	десять
					$10^0 = 1$	одиниця
деци	d	деци	d	d	$10^{-1} = 0,1$	одна десята
санти	c	санти	c	c	$10^{-2} = 0,01$	одна сота
мілі	m	милли	m	m	$10^{-3} = 0,001$	одна тисячна
міріо	mo	мирио	mo	mo	$10^{-4} = 0,0001$	одна міріадна
мікро	μ	микро	μ	μ	$10^{-6} = 0,000001$	одна мільйонна
нано	n	нано	n	n	$10^{-9} = 0,000000001$	одна мільярдна
піко	p	пико	p	p	$10^{-12} = 0,000000000001$	одна трильйонна

$g = 9,80665 \text{ м/с}^2 \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння.

$\pi = 3,1415926356\dots$

2. ОСНОВНІ ПЕРЕДУМОВИ НАУКИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

Під час дослідження міцності, жорсткості та стійкості елементів конструкцій в опорі матеріалів використовують низку передумов (припущень), які спрощують розрахунки. До основних передумов можна віднести наступні.

1. Матеріал конструкції є однорідним і суцільним, тобто його властивості не залежать від форми та розмірів тіла й є однаковими в усіх його точках.

2. Матеріал конструкції є ізотропним, тобто його властивості за усіма напрямками однакові. Ця передумова використовується для більшості задач опору матеріалів, хоча для деяких матеріалів, які називаються у протилежність анізотропними (наприклад, для деревини, коли властивості вздовж і поперек волокна суттєво різняться) вона надто умовна, що потрібно враховувати під час розв'язання задач.

3. Матеріал конструкції є ідеально пружним, тобто здатний повністю відновлювати початкову форму і розміри тіла після усунення причин (зняття навантаження), які викликали його деформацію. Остання не залежить від послідовності прикладання навантаження.

4. Деформація матеріалу конструкції в кожній його точці прямо пропорційна напруженню в цій точці. Ця передумова називається законом Гука.

5. Деформації конструкції вважаються настільки малими, що можна не враховувати їхнього впливу на взаємне розташування навантаження та на відстань від навантаження до будь-яких точок конструкції.

Питання придатності цієї передумови вирішується у кожному випадку з урахуванням не тільки виду конструкції, а також характеру та величини діючого на неї навантаження.

6. Результат впливу на конструкцію системи навантажень дорівнює сумі результатів впливу кожного навантаження окремо. При цьому слід мати на увазі, що на конструкцію одночасно з кожним навантаженням діють реакції опорних закріплень, що викликані цим навантаженням.

Це положення має назву принципу незалежності дії сил. Його часто називають також принципом накладення. Він застосовується у випадках, коли можна використовувати закон Гука (п. 4) та передумова про малість деформацій (п. 5), оскільки є їхнім наслідком.

7. Поперечні перерізи бруса (стержня), які є плоскими до прикладання до нього навантаження, залишаються плоскими й під час дії навантаження. Ця гіпотеза називається гіпотезою плоских перерізів, або гіпотезою Бернуллі. Вона відіграє значну роль в опорі матеріалів і використовується при виведенні більшості формул для розрахунку конструкцій.

3. ЗАДАЧА № 1. РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ МЕТАЛЕВИХ СТЕРЖНІВ ПОСТІЙНОГО ПЕРЕРІЗУ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Теоретичні відомості, які надані до Задачі № 1, мають бути використані під час вирішення задач № 1-4.

При розтяганні (стисканні) прямого бруса в його поперечних перерізах виникає тільки один внутрішній силовий фактор - поздовжня сила, яка позначається N_z або N . Прямі бруси, що працюють на розтягання або стискання, часто називають стержнями.

Поздовжні сили, що відповідають деформації розтягання, вважають позитивними, а стискання – негативними. При розтяганні поздовжня сила спрямована від перерізу, а при стисканні – до нього.

Модуль і напрям (знак) поздовжньої сили визначається з рівняння рівноваги, складеного для відсіченої частини бруса

$$N + \sum_i F_{iz} = 0, \quad (1.1)$$

тобто поздовжня сила в довільному поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на його поздовжню вісь Z всіх зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини. Напрямок сили N протилежний напрямку проєкції (на вісь Z) рівнодіючої зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини.

В тих випадках, коли поздовжні сили в різних поперечних перерізах бруса неоднакові, закон їхньої зміни по довжині бруса зручно представити у вигляді графіка, який називається епюрою поздовжніх сил. Аргументом при побудові цього графіка є координата поперечного перерізу бруса (z), а функцією – поздовжня сила (N). Таким чином, еюра поздовжніх сил – це графік функції $N = f(z)$. Не завжди можна скласти вираз вказаної функції, яке справедливе при всіх значеннях координати z (для всього бруса), тому приходиться розбивати брус на ділянки, для кожної з яких буде свій вираз функції $N = f(z)$.

Епюру поздовжніх сил будують в першу чергу для того, що використати її під час розрахунку бруса на міцність, вона дає можливість знайти найбільші значення поздовжніх сил і положення перерізів, в яких вони виникають.

В загальному випадку брус навантажений зосередженими силами F_i , прикладеними в певних місцях бруса, та інтенсивностями q_i , що діють на деяких ділянках певної довжини. При побудові епюри N та подальшому аналізі її правильності необхідно користуватися певними правилами.

1. Величини поздовжніх сил відкладають у вибраному масштабі від осі епюри; при цьому додатні значення N (розтягання) відкладають догори, а від'ємні – вниз від осі.
2. Якщо на ділянці відсутня інтенсивність ($q = 0$), а діють тільки зосереджені сили, епюра паралельна осі абсцис, тобто $N = const$.
3. Якщо на ділянці інтенсивність $q \neq 0$, то епюра є нахиленою прямою, нахил якої залежить від знаку (напряму дії) інтенсивності.
4. В місцях прикладення зосереджених сил на епюрі відбуваються стрибки у зміні ординат.

При розтяганні (стисканні) бруса в його поперечних перерізах виникають тільки нормальні напруження σ . В загальному вигляді

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1.2)$$

де A - площа поперечного переріза бруса. Для нормальних напружень приймають те ж саме правило знаків, що й для поздовжніх сил, тобто при розтяганні вважають напруження позитивними. Умова міцності записується у вигляді

$$\sigma = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma], \quad (1.3)$$

де $[\sigma]$ - допустиме нормальне напруження.

Для визначення зміни довжини Δl всього бруса (або його окремої ділянки) необхідно взяти інтеграл

$$\Delta l = \int_i \frac{N dz}{EA}, \quad (1.4)$$

де E - модуль пружності 1-го роду для певного матеріалу. В найбільш загальному випадку, коли закони зміни N і A (або одної з цих величин) різні для окремих ділянок бруса, при визначенні Δl інтегрування ведуть в межах кожної з ділянок, а потім результати додають

$$\Delta l = \sum_{i=1}^k \int_{l_i} \frac{N dz}{EA}. \quad (1.5)$$



В окремому випадку, коли поперечний переріз бруса або окремої її ділянки постійне та поздовжня сила в усіх перерізах постійна, то

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (1.6)$$

Зважаючи на те, що поздовжня сила може мати знак «-» або «+», зміни довжини Δl теж має відповідний знак. Якщо $\Delta l > 0$ – це подовження бруса, якщо $\Delta l < 0$ – це укорочення. Зміна довжини бруса (подовження або укорочення) дорівнює алгебраїчній сумі (тобто з урахуванням знаків) подовжень (укорочень) окремих ділянок

$$\Delta l = \sum_{i=1}^k \Delta l_i = \sum_{i=1}^k \frac{N_i l_i}{E_i A_i}. \quad (1.7)$$

При побудові епюри Δl та аналізі її правильності слід користуватися певними правилами. Зазначений аналіз слід проводити, рухаючись зліва направо.

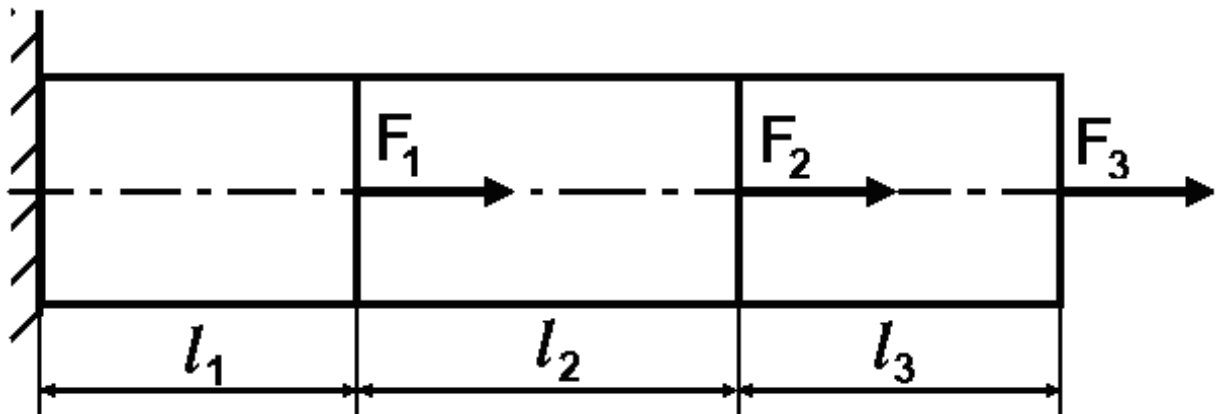
1. Переріз, в якому брус закріплений, є нерухомим, тому слід відкладати переміщення Δl з нульової відмітки.
2. На границі певної ділянки слід відкладати величину алгебраїчної суми змін довжини всіх попередніх ділянок, наприклад, на границі першої ділянки Δl_1 , другої $\Delta l_1 + \Delta l_2$ тощо.
3. Якщо епюра поздовжніх сил паралельна осі абсцис, тобто $N = const$, епюра Δl є нахиленою лінією.
4. Якщо епюра поздовжніх сил є нахиленою прямою, епюра Δl є параболою. Для випадку, коли N зростатиме, незважаючи на знак, парабола буде випуклістю вниз ; коли N зменшується, незважаючи на знак, парабола буде випуклістю догори .

3.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 1

Сталевий стержень, що складається з трьох ділянок постійного поперечного перерізу площею A і довжиною l_1, l_2, l_3 , навантажений зосередженими силами F_1, F_2, F_3 , які спрямовані вздовж його осі.

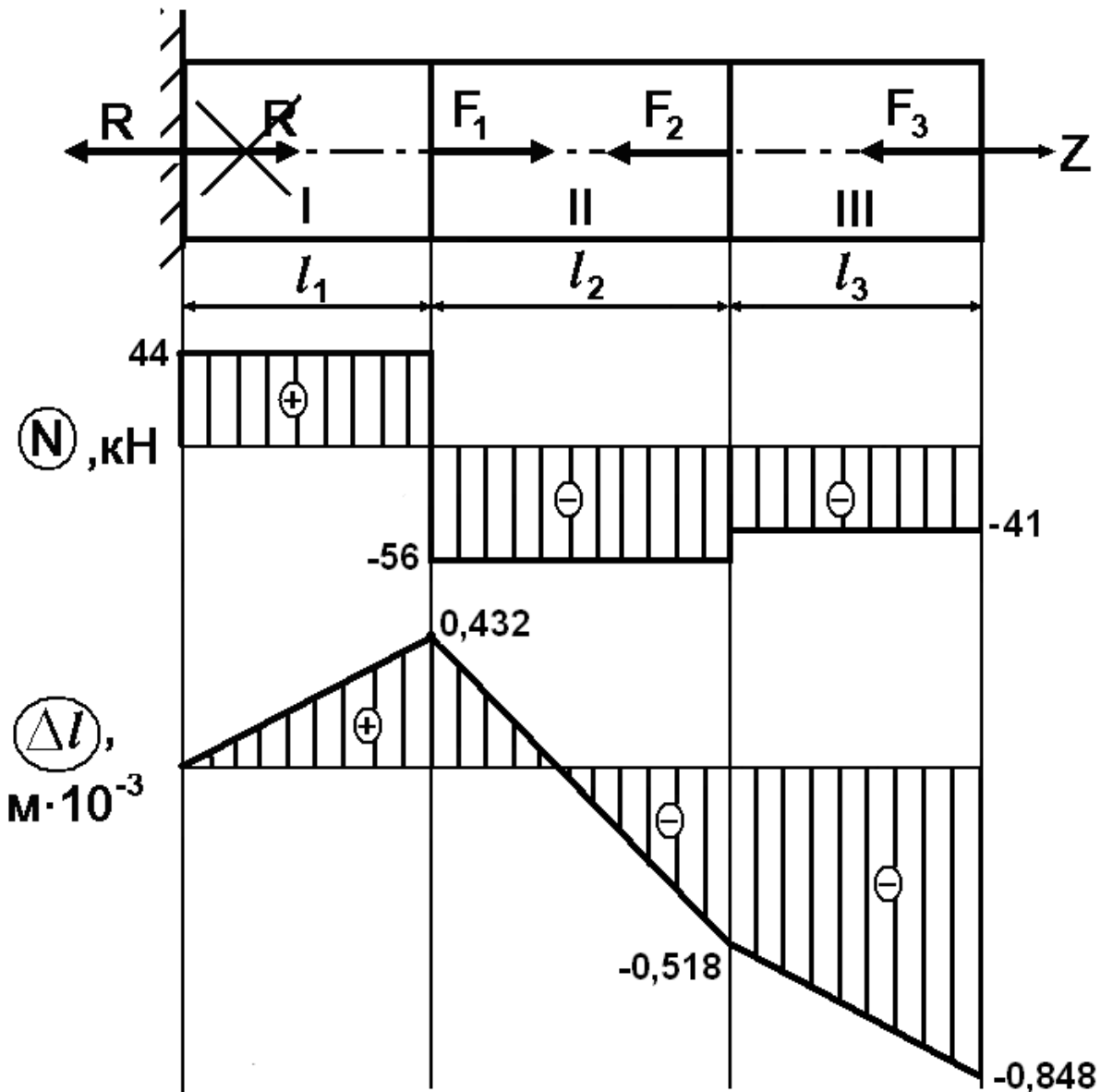
Необхідно побудувати епюру поздовжніх сил N та визначити площу перерізу A , яка забезпечує міцність стержня (матеріал – сталь Ст3, допустимі нормальні напруження $[\sigma]=100$ МПа, модуль пружності $E=2\cdot 10^{11}$ Па). Побудувати епюру переміщень та визначити зміну довжини стержня (окремо по кожній ділянці та загальну).

Загальна схема навантаження стержня має бути адаптована з урахуванням вихідних даних, які відповідають певному варіанту завдання й які необхідно взяти з таблиці.



№	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН
1	1,0	1,9	0,5	-10	105	-41
2	2,0	2,8	2,0	20	-25	32
3	1,0	1,7	1,0	-30	35	-23
4	2,0	1,6	1,0	40	-45	56
5	0,6	0,5	0,7	-50	55	-28
6	0,7	1,0	0,9	90	-65	93
7	0,8	1,0	0,4	-80	75	-54
8	2,4	0,6	0,5	70	-85	37
9	1,2	0,7	0,8	-60	95	-61
0	1,1	0,8	0,9	100	-15	19
	Д	Г	Е	Е	Д	Г

3.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ



Вихідні числові дані:

$$l_1 = 1,1 \text{ м}; l_2 = 1,9 \text{ м}; l_3 = 0,9 \text{ м}; F_1 = 100 \text{ кН}; F_2 = -15 \text{ кН};$$

$$F_3 = -41 \text{ кН}$$

Числові дані з урахуванням знаків (враховано зміною напрямів дії сил):

$$F_1 = 100 \text{ кН}; F_2 = 15 \text{ кН}; F_3 = 41 \text{ кН}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Спрямуємо вісь Z у позитивному напрямі праворуч. Визначимо опорну реакцію R в лівому жорсткому закладенні, попередньо спрямувавши її праворуч (проекція опорної реакції на вісь Z має знак «+»).

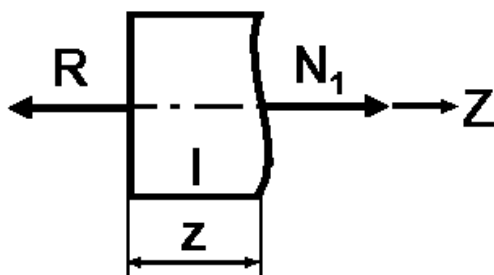
Якщо напрям дії опорної реакції, умовно кажучи, «вгадано», то з рівняння рівноваги ми отримуємо величину R додатною. Якщо «не вгадано» і опорна реакція R є від'ємною, необхідно змінити напрям її дії на протилежний і присвоїти замість від'ємного значення узятий за модулем додатний. Це і буде остаточно вірне визначення опорної реакції за напрямом дії та величиною.

За умови рівноваги конструкції відповідне рівняння має вигляд:
 $R + F_1 - F_2 - F_3 = 0$, або $R = -F_1 + F_2 + F_3$. Остаточно
 $R = -100 + 15 + 41 = -44$ кН.

Знак «-» показує, що обраний попередній напрям опорної реакції є невірним. Змінюємо напрям дії R на протилежний (ліворуч), на рисунку закреслюємо попередній варіант її спрямування та показуємо дійсний напрям дії. Величина, що буде використовуватися для розрахунків величин поздовжніх сил, буде $R = 44$ кН.

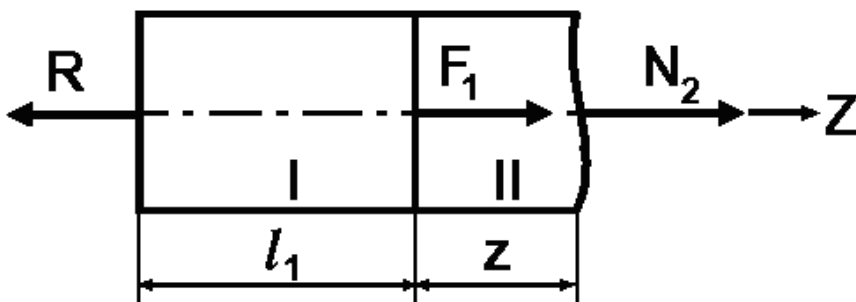
Визначимо поздовжні сили на кожній з трьох ділянок, записавши умови рівноваги. На кожній ділянці поздовжню силу N спрямуємо у позитивному напрямку, зробимо умовний перетин у будь-якому місці ділянки та запишемо умови рівноваги. Якщо після розрахунків поздовжня сила N матиме знак «+», то на цій ділянці розтягання, якщо «-» - стискання.

Необхідно зауважити, що після урахування знаків зовнішніх сил зміною напрямів їхньої дії всі зовнішні сили мають знак «+» і саме ці величини слід підставляти в рівняння для визначення величини поздовжньої сили.



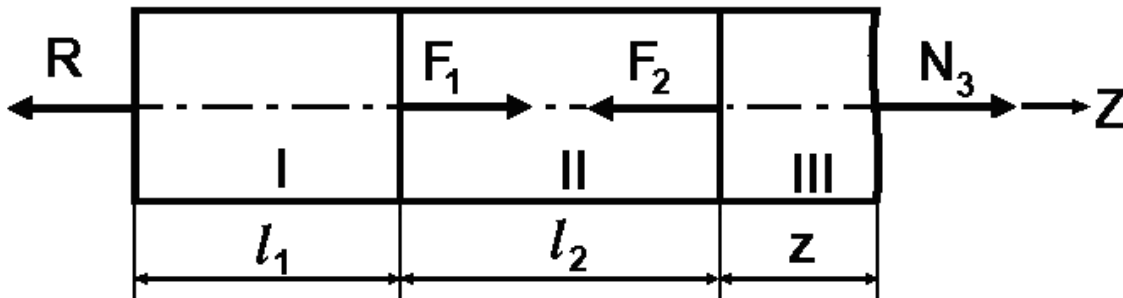
Ділянка I: $0 \leq z \leq l_1$.

За умов рівноваги $-R + N_1 = 0$.
 Тому $N_1 = R = 44$ кН. На цій ділянці поздовжня сила є постійною.



Ділянка II: $0 \leq z \leq l_2$.

За умов рівноваги $-R + F_1 + N_2 = 0$. Звідки отримуємо $N_2 = R - F_1 = 44 - 100 = -56$ кН, на цій ділянці поздовжня сила є постійною та від'ємною.



Ділянка III: $0 \leq z \leq l_3$.

За умов рівноваги $-R + F_1 - F_2 + N_3 = 0$. Звідки отримуємо $N_3 = R - F_1 + F_2 = 44 - 100 + 15 = -41$ кН. Як і на попередній ділянці, поздовжня сила є постійною та від'ємною.

Величина N_3 має збігатися з величиною сили F_3 , враховуючи її характер дії.

За умов навантаження конструкції зосередженими силами, які прикладені до певних перерізів, поздовжні сили на ділянках є постійними. Це відображено на епюрі N у вигляді ліній, паралельних нульовій, та в залежностях для N_1 , N_2 , N_3 , у виразах для яких відсутня залежність від змінної z .

Аналізуючи побудовану епюру поздовжніх сил N , визначаємо найнебезпечнішу ділянку, на якій величина N (за модулем) буде найбільшою. Порівнюючи величини $|N_1|$, $|N_2|$, $|N_3|$, визначаємо максимальну. Тому $N_{max} = |N_2| = 56$ кН.

Для визначення площі перерізу A , яка забезпечує міцність стержня, треба записати умову міцності:

$$\sigma = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma], \text{ звідки } A \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]} = \frac{56 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Зміна довжини будь-якої i -ої ділянки постійного поперечного перерізу та однорідності матеріалу за умов постійності (в межах ділянки) поздовжньої сили $N_i = const$ визначається за формулою

$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A}$. Наголошуємо, що в наведену формулу величини N_i під-

ставляються зі своїми знаками. Отже

1) ділянка I –

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A} = \frac{44 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5,6 \cdot 10^{-4}} = 0,432 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

2) ділянка II –

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A} = \frac{-56 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5,6 \cdot 10^{-4}} = -0,950 \cdot 10^{-3}.$$

3) ділянка III –

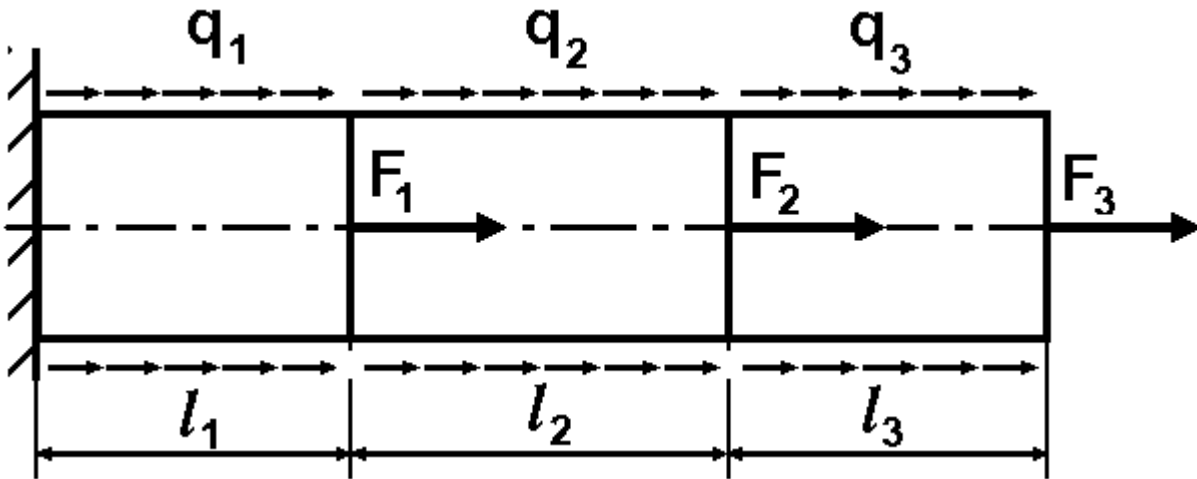
$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A} = \frac{-41 \cdot 10^3 \cdot 0,9}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5,6 \cdot 10^{-4}} = -0,330 \cdot 10^{-3}.$$

Загальна зміна довжини стержня $\Delta l_{\text{заг}} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$.
 $\Delta l_{\text{заг}} = 0,432 \cdot 10^{-3} - 0,950 \cdot 10^{-3} - 0,330 \cdot 10^{-3} = -0,848 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

Закон зміни довжин будь-якої i -ої ділянки є лінійним. При проведенні аналізу відповідності епюр поздовжніх сил N та переміщень Δl при русі від жорсткого закладення до вільного краю слід пам'ятати наступне. Якщо поздовжня сила додатна, пряма на епюрі переміщень прямує вгору (у задачі – ділянка I). Якщо поздовжня сила від'ємна, пряма на епюрі переміщень прямує вниз (у задачі – ділянки II та III). Якщо поздовжня сила дорівнює нулю, на епюрі переміщень пряма паралельна нейтральній лінії, що означає незмінність довжини ділянки. Аналізуючи побудовані епюри, можна визначити відповідно до поведінки конструкції в цілому розтягання на I-ій ділянці, розтягання та стискання на II-ій та стискання на III-ій. Загальна зміна довжини бруса отримана зі знаком «–», тому в задачі визначено скорочення бруса.

4. ЗАДАЧА № 2. РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ МЕТАЛЕВИХ СТЕРЖНІВ ПОСТІЙНОГО ПЕРЕРІЗУ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ ТА РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

4.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 2



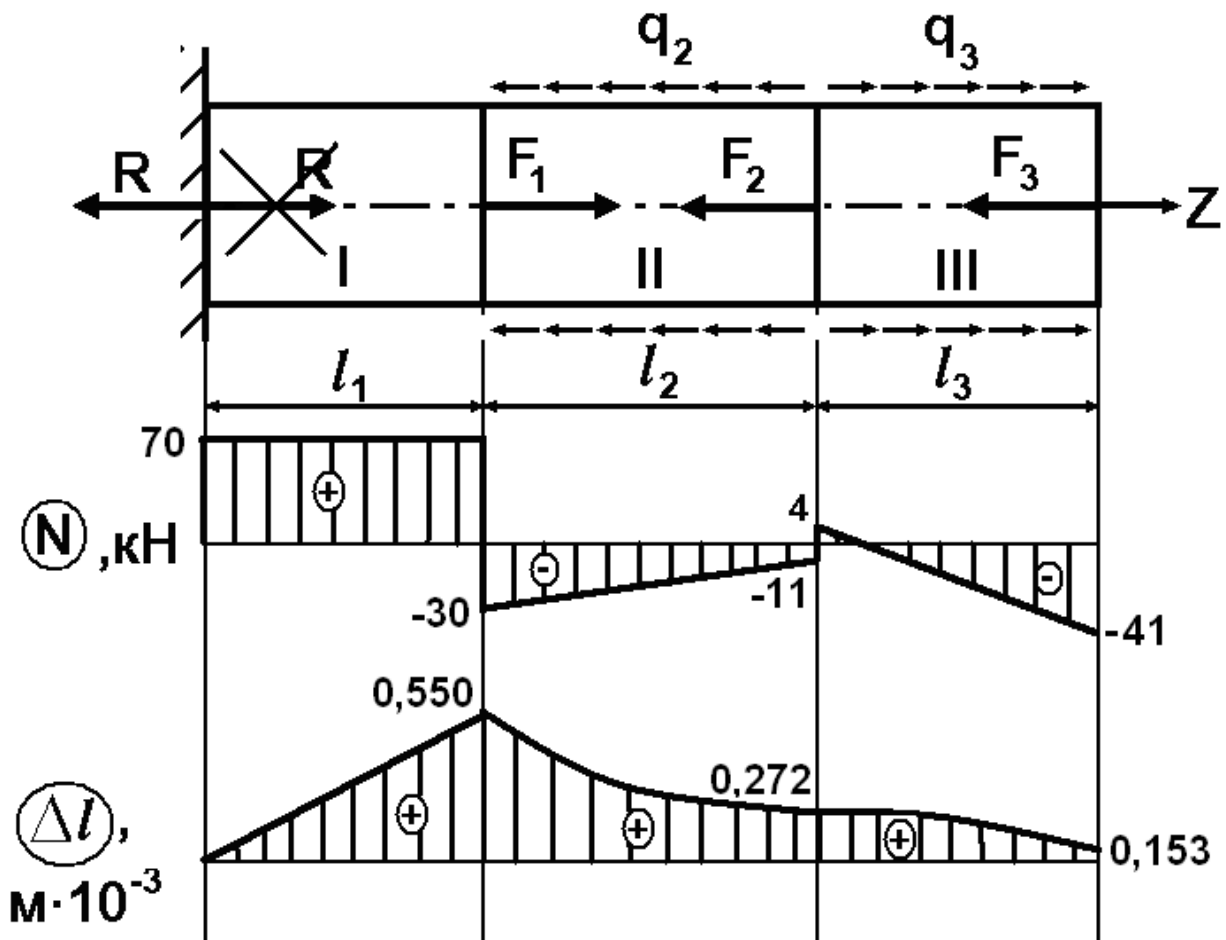
№	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	q_3 , кН/м
1	1,0	1,9	0,5	-10	105	-41	0	-10	0
2	2,0	2,8	2,0	20	-25	32	0	20	0
3	1,0	1,7	1,0	-30	35	-23	0	-30	-30
4	2,0	1,6	1,0	40	-45	56	-10	40	40
5	0,6	0,5	0,7	-50	55	-28	20	-25	-50
6	0,7	1,0	0,9	90	-65	93	-30	0	10
7	0,8	1,0	0,4	-80	75	-54	25	0	-20
8	2,4	0,6	0,5	70	-85	37	-15	0	30
9	1,2	0,7	0,8	-60	95	-61	0	10	-40
0	1,1	0,8	0,9	100	-15	19	0	-20	50
	Д	Г	Е	Е	Д	Г	Е	Г	Д

Сталевий стержень, що складається з трьох ділянок постійного поперечного перерізу площею A і довжиною l_1 , l_2 , l_3 , навантажений зосередженими силами F_1 , F_2 , F_3 та рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q_1 , q_2 , q_3 , які спрямовані вздовж його осі.

Необхідно побудувати епюру поздовжніх сил N та визначити площу перерізу A , яка забезпечує міцність стержня (матеріал – сталь Ст3, допустимі нормальні напруження $[\sigma]=100$ МПа, модуль пружності $E=2\cdot 10^{11}$ Па). Побудувати епюру переміщень та визначити зміну довжини стержня (окремо по кожній ділянці та загальну).

Загальна схема навантаження стержня має бути адаптована з урахуванням вихідних даних, які відповідають певному варіанту завдання й які необхідно взяти з таблиці.

4.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ



Вихідні числові дані:

$$l_1 = 1,1 \text{ м}; l_2 = 1,9 \text{ м}; l_3 = 0,9 \text{ м}; F_1 = 100 \text{ кН}; F_2 = -15 \text{ кН};$$

$F_3 = -41 \text{ кН}$; Числові дані з урахуванням знаків (враховано зміною напрямів дії сил):

$$F_1 = 100 \text{ кН}; F_2 = 15 \text{ кН}; F_3 = 41 \text{ кН}; q_1 = 0 \text{ кН/м}; q_2 = 10 \text{ кН/м};$$

$$q_3 = 50 \text{ кН/м}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Спрямуємо вісь Z у позитивному напрямі праворуч. Визначимо опорну реакцію R в лівому жорсткому закладенні, попередньо спрямувавши її праворуч (проекція опорної реакції на вісь Z має знак «+»). Якщо напрям дії опорної реакції, умовно кажучи, «вгадано», то з рівняння рівноваги ми отримуємо величину R додатною. Якщо «не вгадано» і опорна реакція R є від'ємною, необхідно змінити напрям її дії на протилежний і присвоїти замість від'ємного значення узятий за модулем додатний. Це і буде остаточно вірне визначення опорної реакції за напрямом дії та величиною.

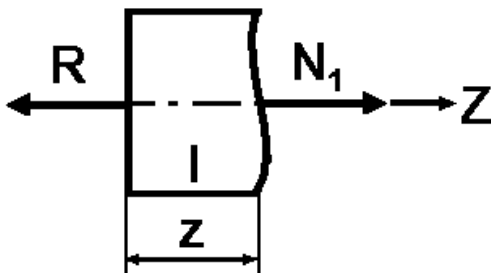
За умови рівноваги конструкції відповідне рівняння має вигляд:

$$R + F_1 - F_2 - F_3 - q_2 \cdot l_2 + q_3 \cdot l_3 = 0, \text{ або}$$
$$R = -F_1 + F_2 + F_3 + q_2 \cdot l_2 - q_3 \cdot l_3. \text{ Остаточно}$$
$$R = -100 + 15 + 41 + 10 \cdot 1,9 - 50 \cdot 0,9 = -70 \text{ кН.}$$

Знак «-» показує, що обраний попередній напрямок опорної реакції є невірним. Змінюємо напрям дії R на протилежний (ліворуч), на рисунку закреслюємо попередній варіант її спрямування та показуємо дійсний напрям дії. Величина, що буде використовуватися для розрахунків величин поздовжніх сил, буде $R = 70$ кН.

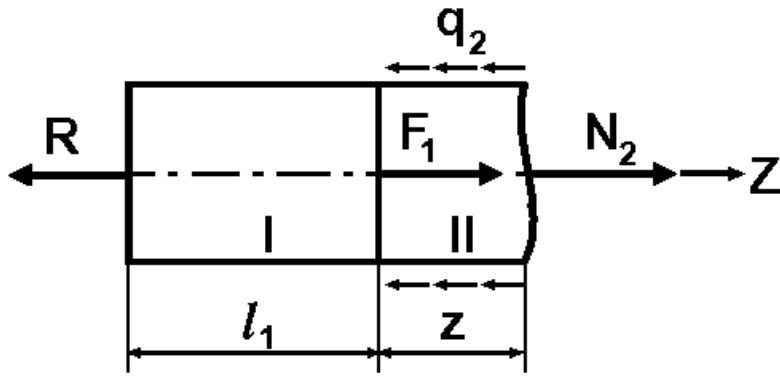
Визначимо поздовжні сили на кожній з трьох ділянок, записавши умови рівноваги. На кожній ділянці поздовжню силу N спрямуємо у позитивному напрямку, зробимо умовний перетин у будь-якому місці ділянки та запишемо умови рівноваги. Якщо після розрахунків поздовжня сила N матиме знак «+», то на цій ділянці розтягання, якщо «-» - стискання.

Необхідно зауважити, що після урахування знаків зовнішніх сил зміною напрямів їхньої дії всі зовнішні сили мають знак «+» і саме ці величини слід підставляти в рівняння для визначення величини поздовжньої сили.



Ділянка I. $0 \leq z \leq l_1$.

За умов рівноваги $-R + N_1 = 0$.
Тому $N_1 = R = 70$ кН. На цій ділянці поздовжня сила є постійною.

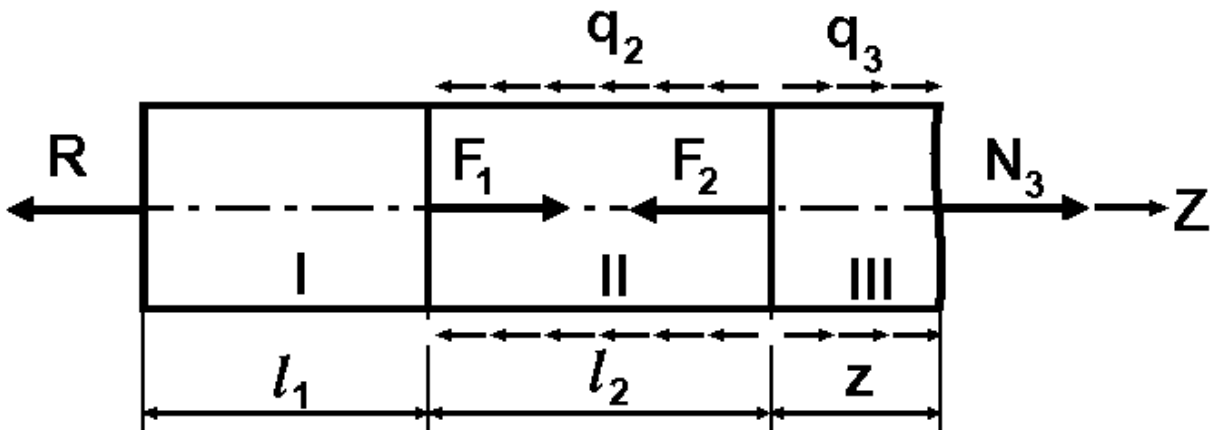


Ділянка II. $0 \leq z \leq l_2$.

За умов рівноваги $-R + F_1 - q_2 \cdot z + N_2 = 0$. Звідки отримуємо $N_2 = R - F_1 + q_2 \cdot z = -30 + 10 \cdot z$, на цій ділянці поздовжня сила змінюється за лінійними законами, тому для побудови епюри необхідно визначити значення N_2 у двох довільних перерізах на цій ділянці, в якості яких, зазвичай, беруть границі ділянки.

При $z = 0$ $N_2 = R - F_1 = -30$ кН;

при $z = l_2$ $N_2 = R - F_1 + q_2 \cdot l_2 = -11$ кН.



Ділянка III. $0 \leq z \leq l_3$.

За умов рівноваги $-R + F_1 - q_2 \cdot l_2 - F_2 + q_3 \cdot z + N_3 = 0$. Звідки отримуємо $N_3 = R - F_1 + q_2 \cdot l_2 + F_2 - q_3 \cdot z = 4 - 50 \cdot z$ (знову лінійна залежність).

При $z = 0$ $N_3 = R - F_1 + q_2 \cdot l_2 + F_2 = 4$ кН;

при $z = l_3$ $N_3 = R - F_1 + q_2 \cdot l_2 + F_2 - q_3 \cdot l_3 = -41$ кН.

Остання величина має збігатися з величиною сили F_3 , враховуючи її характер дії. Аналізуючи побудовану епюру поздовжніх сил N , визначаємо найнебезпечнішу ділянку, на якій величина N (за модулем) буде

найбільшою. Порівнюючи величини $|N_1|$, $|N_2|$, $|N_3|$, визначаємо максимальну. Тому $N_{max} = |N_1| = 70$ кН.

Для визначення площі перерізу A , яка забезпечує міцність стержня, треба записати умову міцності:

$$\sigma = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma], \text{ звідки } A \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]} = \frac{70 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Зміна довжини будь-якої i -ої ділянки постійного поперечного перерізу та однорідності матеріалу визначається за формулою

$$\Delta l_i = \int_0^{l_i} \frac{N_i(z)}{E \cdot A} dz = \frac{1}{E \cdot A_0} \int_0^{l_i} N_i(z) dz. \text{ Якщо на ділянці поздовжня сила}$$

$$N_i = const, \text{ наведена формула спрощується } \Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A}. \text{ Отже}$$

1) ділянка I –

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7 \cdot 10^{-4}} = 0,550 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

2) ділянка II –

$$\Delta l_2 = \int_0^{l_2} \frac{N_2(z)}{E \cdot A} dz = \frac{1}{E \cdot A_0} \int_0^{l_2} (-30 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3 \cdot z) dz. \quad \text{Остаточню}$$

$$\Delta l_2 = \frac{10^3}{1,4 \cdot 10^8} \left(-30z + 10 \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{1,9} = -0,278 \cdot 10^{-3} \text{ м. Як бачимо, зміна}$$

довжини другої ділянки змінюється за квадратичним законом, тому форму випуклості параболу визначає знак при доданку z^2 . В даному випадку випуклість спрямована вниз.

3) ділянка III –

$$\Delta l_3 = \int_0^{l_3} \frac{N_3(z)}{E \cdot A} dz = \frac{1}{E \cdot A_0} \int_0^{l_3} (4 \cdot 10^3 - 50 \cdot 10^3 \cdot z) dz. \quad \text{Остаточню}$$

$$\Delta l_3 = \frac{10^3}{1,4 \cdot 10^8} \left(4z - 50 \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{0,9} = -0,119 \cdot 10^{-3} \text{ м. В даному випадку}$$

випуклість спрямована догори.

Загальна зміна довжини стержня $\Delta l_{заг} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$.

$$\Delta l_{заг} = 0,550 \cdot 10^{-3} - 0,278 \cdot 10^{-3} - 0,119 \cdot 10^{-3} = 0,153 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Аналізуючи побудовані епюри, можна визначити розтягання на I-ій ділянці, стискання на II-ій та переважне стискання на III-ій. Загальна зміна довжини бруса отримана зі знаком «+», тому в задачі визначено подовження бруса.

5. ЗАДАЧА № 3. РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ МЕТАЛЕВИХ СТЕРЖНІВ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Розглядаючи розтягання (стискання) металевого стержня змінного по окремих ділянках перерізу, слід зауважити, що вся теоретична частина, наведена для вирішення попередніх задач, залишається без змін, але з деякими доповненнями. Для побудови епюри поздовжньої сили N так саме застосовується метод перерізів, коли по ділянках визначаються свої залежності для N . Відмінності полягають в тому, що перевірка умови міцності для стержня постійного перерізу або підбір необхідної його площини здійснюється за формулою (1.3). Для стержнів змінного перерізу для кожної окремої ділянки ця перевірка здійснюється за формулою у вигляді

$$\sigma_i = \frac{N_{max_i}}{A_i} \leq [\sigma], \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.1)$$

де для i -ої ділянки ($i = 1, \dots, k$, всього k ділянок), N_{max_i} - максимальна поздовжня сила, σ_i - максимальне напруження, A_i площа поперечного перерізу, $[\sigma]$ - допустиме напруження для певного матеріалу. Слід зауважити, що у випадку різної роботи матеріалу на стискання та розтягання (наприклад, чавун), перевірка за формулою (3.1) здійснюється з урахуванням знаку поздовжньої сили, який визначає вид деформування, а також вимагає знання величин $[\sigma]$ при стисканні та розтяганні.

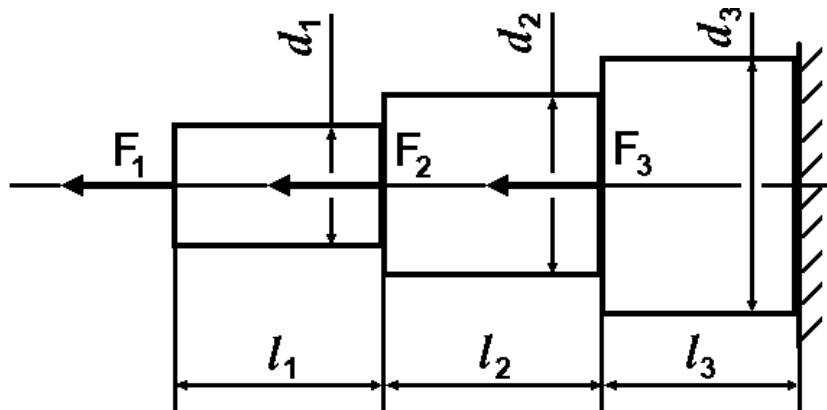
Зміна довжини бруса визначається за формулою (1.7). Правила побудови епюр N і Δl залишається незмінним у порівнянні з попередніми задачами.

5.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 3

Сталевий східчастий стержень, що складається з трьох ділянок циліндричного поперечного перерізу з діаметрами d_1, d_2, d_3 і довжиною l_1, l_2, l_3 , навантажений зосередженими силами F_1, F_2, F_3 , які спрямовані вздовж його осі.

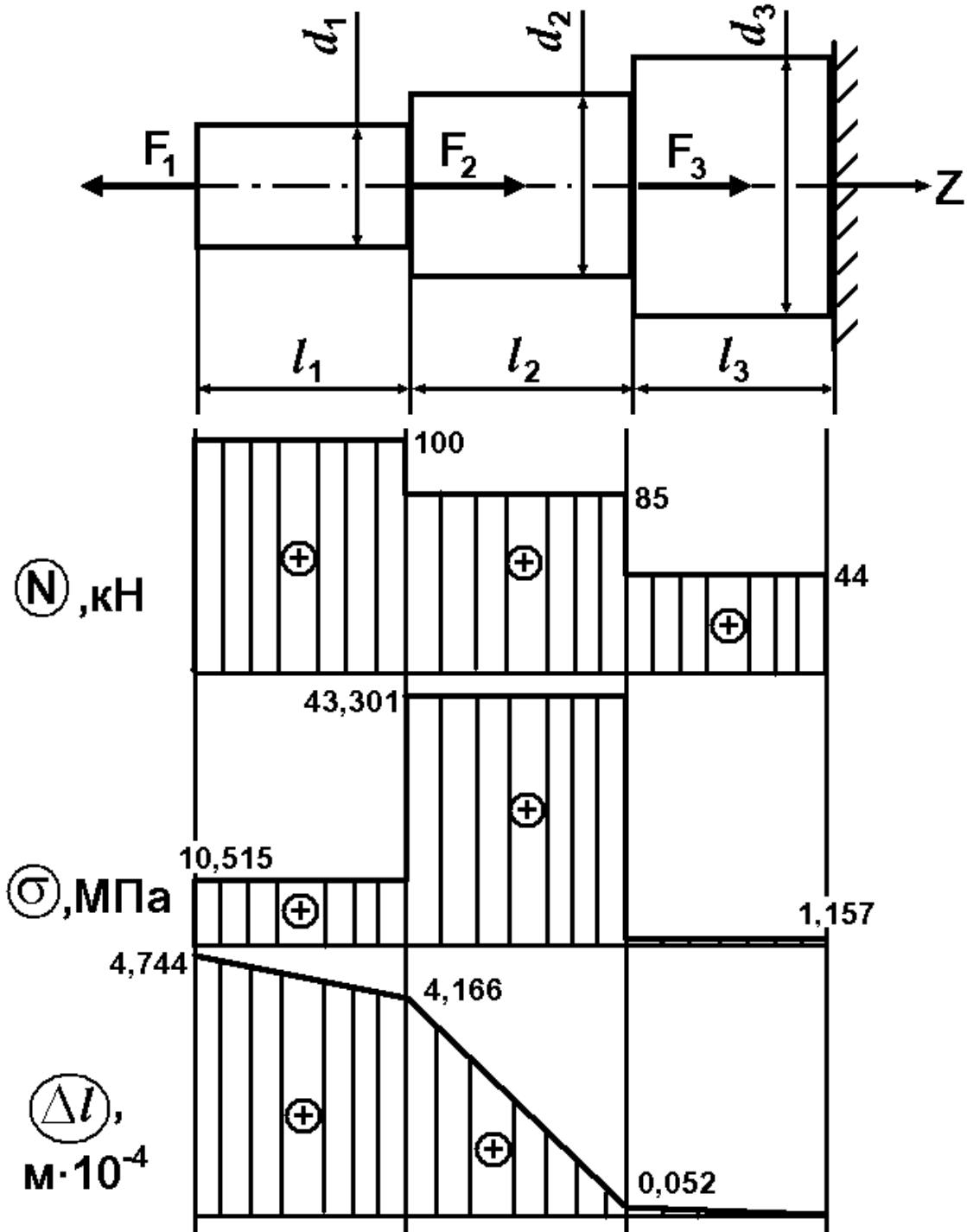
Необхідно побудувати епюру поздовжніх сил N та нормальних напружень σ . Перевірити, чи забезпечується міцність стержня (матеріал

– сталь Ст3, $[\sigma]=100$ МПа, $E=2\cdot 10^{11}$ Па). Якщо умова міцності не виконується, визначити величини діаметрів, які забезпечать міцність відповідних ділянок та зробити відповідне креслення. Побудувати епюру переміщень та визначити зміну довжини стержня.



№	$l_{1,}$ м	$l_{2,}$ м	$l_{3,}$ м	$F_{1,}$ кН	$F_{2,}$ кН	$F_{3,}$ кН	$d_{1,}$ м	$d_{2,}$ м	$d_{3,}$ м
1	1,0	1,9	0,5	-10	105	-41	0,10	0,05	0,08
2	2,0	2,8	2,0	20	-25	32	0,20	0,07	0,14
3	1,0	1,7	1,0	-30	35	-23	0,30	0,09	0,32
4	2,0	1,6	1,0	40	-45	56	0,15	0,11	0,12
5	0,6	0,5	0,7	-50	55	-28	0,25	0,03	0,08
6	0,7	1,0	0,9	90	-65	93	0,30	0,06	0,21
7	0,8	1,0	0,4	-80	75	-54	0,12	0,09	0,27
8	2,4	0,6	0,5	70	-85	37	0,14	0,12	0,25
9	1,2	0,7	0,8	-60	95	-61	0,15	0,24	0,16
0	1,1	0,8	0,9	100	-15	19	0,11	0,14	0,22
	Д	Г	Е	Е	Д	Г	Е	Г	Д

5.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ



Вихідні числові дані:

$$l_1 = 1,1 \text{ м}; l_2 = 1,9 \text{ м}; l_3 = 0,9 \text{ м}; F_1 = 100 \text{ кН}; F_2 = -15 \text{ кН};$$

$$F_3 = -41 \text{ кН}; d_1 = 0,11 \text{ м}; d_2 = 0,05 \text{ м}; d_3 = 0,22 \text{ м}$$

Числові дані з урахуванням знаків (враховано зміною напрямів сил):

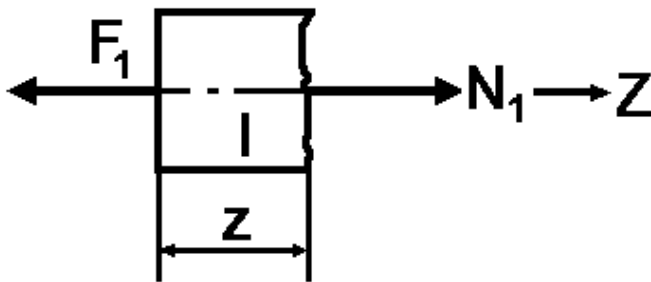
$$F_1 = 100 \text{ кН}; F_2 = 15 \text{ кН}; F_3 = 41 \text{ кН};$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Визначення опорної реакції R в правому жорсткому закладенні в даній задачі не є необхідним, тому починаємо вирішення задачі з вільного краю першої ділянки (опорна реакція визначається автоматично за умов вірної побудови епюри поздовжніх сил N) та рухаємось до жорсткого закладення.

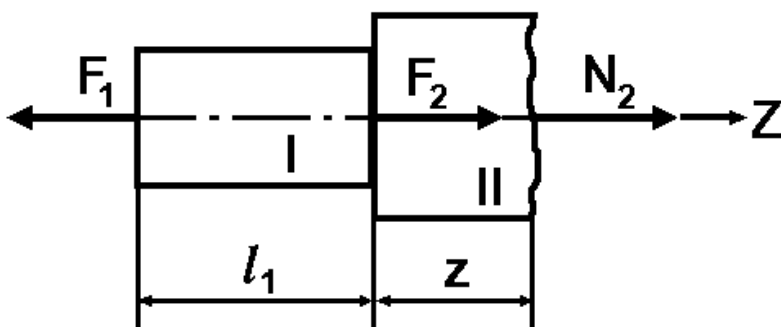
Визначимо поздовжні сили на кожній з трьох ділянок, записавши умови рівноваги. Спрямуємо вісь Z у позитивному напрямку праворуч. На кожній ділянці поздовжню силу N спрямуємо у позитивному напрямку праворуч, зробимо умовний перетин у будь-якому місці ділянки та запишемо умови рівноваги. Якщо після розрахунків поздовжня сила N матиме знак «+», то на цій ділянці розтягання, якщо «-» - стискання. За відсутності розподіленого навантаження на окремій ділянці поздовжня сила буде постійною.

Необхідно зауважити, що після урахування знаків зовнішніх сил зміною напрямів їхньої дії всі зовнішні сили мають знак «+» і саме ці величини слід підставляти в рівняння для визначення величини поздовжньої сили.



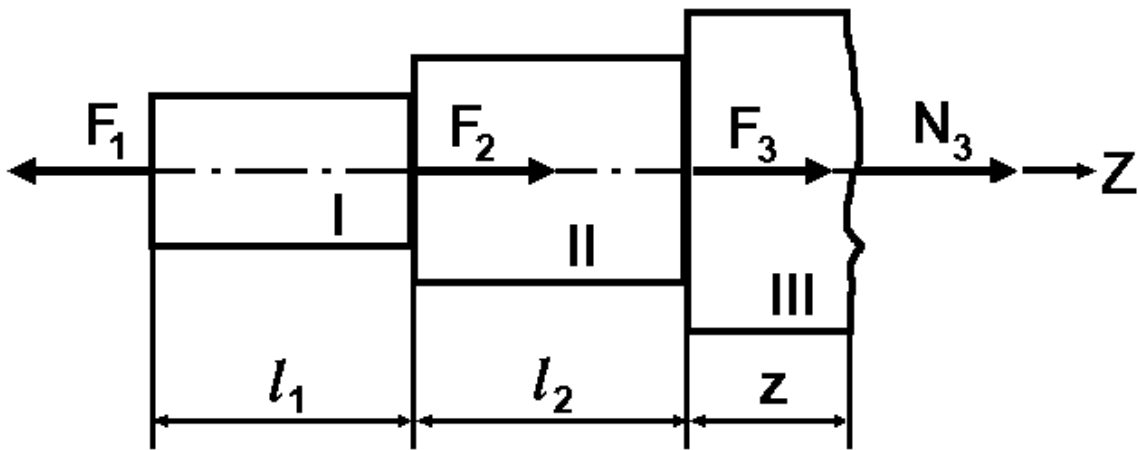
Ділянка I. $0 \leq z \leq l_1$.

За умов рівноваги
 $-F_1 + N_1 = 0$. Тому
 $N_1 = F_1 = 100$ кН.



Ділянка II. $0 \leq z \leq l_2$.

За умов рівноваги $-F_1 + F_2 + N_2 = 0$, звідки $N_2 = F_1 - F_2 = 85$ кН.



Ділянка III. $0 \leq z \leq l_3$. За умов рівноваги

$$-F_1 + F_2 + F_3 + N_3 = 0, \text{ звідки } N_3 = F_1 - F_2 - F_3 = 44 \text{ кН.}$$

Для аналізу напруженого стану розглянемо кожен ділянку окремо. Якщо напруження по ділянках є від'ємними, необхідно перевіряти умову міцності, беручи їхні значення за модулем. В цій задачі всі поздовжні сили додатні, тому для порівняннi з допустимим напруженням $[\sigma]=100$ МПа беремо визначені напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Ділянка I: поперечний переріз з діаметром $d_1 = 0,11$ м, його площа

$$\text{дорівнює } A_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 = 9,503 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

$$\text{Напруження } \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{100 \cdot 10^3}{9,503 \cdot 10^{-3}} = 10,515 \text{ МПа} \leq [\sigma], \text{ тобто}$$

умова міцності виконується. Зміна довжини ділянки постійного поперечного перерізу

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 9,503 \cdot 10^{-3}} = 0,578 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Ділянка II: поперечний переріз з діаметром $d_2 = 0,05$ м, його площа

$$\text{дорівнює } A_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2 = 1,963 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

$$\text{Напруження } \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{85 \cdot 10^3}{1,963 \cdot 10^{-3}} = 43,301 \text{ МПа} \leq [\sigma], \text{ тобто}$$

умова міцності виконується. Зміна довжини ділянки постійного поперечного перерізу

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{85 \cdot 10^3 \cdot 1,9}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,963 \cdot 10^{-3}} = 4,114 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Ділянка III: поперечний переріз з діаметром $d_3 = 0,22$ м, його площа дорівнює $A_3 = \frac{\pi}{4} d_3^2 = 38,013 \cdot 10^{-3}$ м².

$$\text{Напруження } \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{44 \cdot 10^3}{38,013 \cdot 10^{-3}} = 1,157 \text{ МПа} \leq [\sigma], \text{ тобто}$$

умова міцності виконується.

Зміна довжини ділянки постійного поперечного перерізу

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{44 \cdot 10^3 \cdot 0,9}{2 \cdot 10^{11} \cdot 38,013 \cdot 10^{-3}} = 0,052 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Загальна зміна довжини стержня $\Delta l_{\text{заг}} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$.
 $\Delta l_{\text{заг}} = 0,578 \cdot 10^{-4} + 4,114 \cdot 10^{-4} + 0,052 \cdot 10^{-4} = 4,744 \cdot 10^{-4}$ м. При побудові епюри Δl необхідно враховувати, що при $N_i = \text{const}$ на цій ділянці Δl змінюється за лінійним законом – на епюрі пряма нахилена лінія.

6. ЗАДАЧА № 4. РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ МЕТАЛЕВИХ СТЕРЖНІВ З УРАХУВАННЯМ ВЛАСНОЇ ВАГИ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

До теоретичних відомостей, наведених при вирішенні задач №1 - №3, додаються нові, пов'язані з розв'язанням задач на розтягання-стискання металевих стержнів під дією власної ваги та зовнішньої зосередженої сили.

Прикладом рівномірно розподіленого осевого навантаження є власна сила тяжіння (вага) бруса, при цьому $q = \gamma A$ - інтенсивність розподіленого навантаження, $G = \gamma Al$ - вага всього бруса (γ - питома вага матеріалу, A - площа поперечного перерізу, l - довжина бруса). Для частин бруса з різною площею поперечного перерізу A_i та різною довжиною l_i вага кожної частини буде визначатися за формулою

$$G_i = \gamma A_i l_i. \quad (4.1)$$

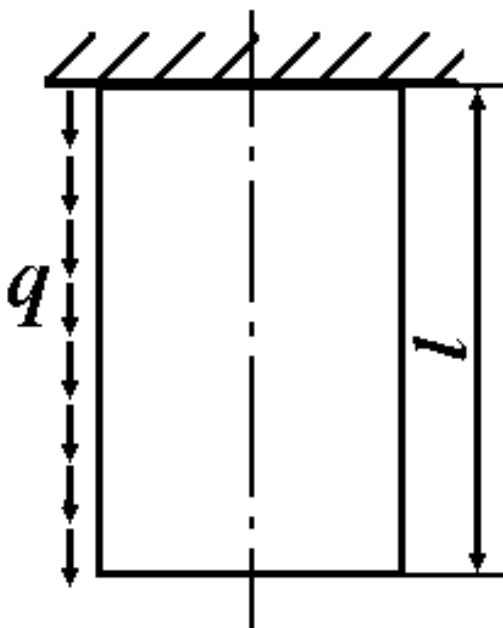


Рисунок 4.1.

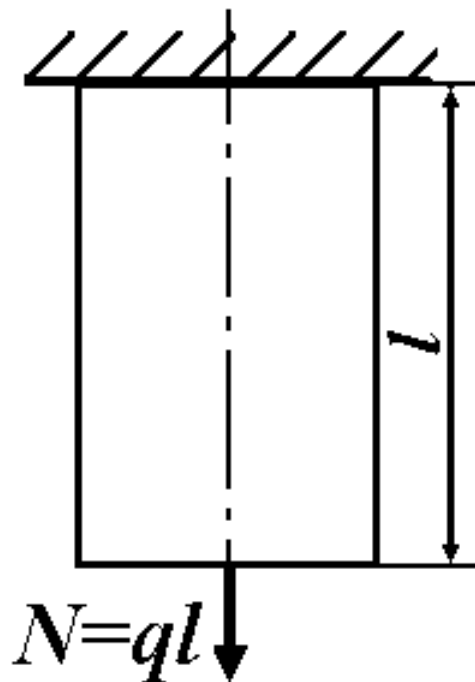


Рисунок 4.2.

Для східчастого стержня при визначенні переміщень деякого перерізу треба ретельно аналізувати характер зовнішнього навантаження. Розподілене навантаження, яке розташовано нижче вказаного перерізу, можна замінити зосередженим за формулою (4.1). Розподілене навантаження, що діє вище вказаного перерізу, теж можна замінити зосередже-

ним, але необхідно пам'ятати, що подовження бруса постійного перерізу від дії рівномірно розподіленого навантаження вдвічі менше, ніж подовження від зосередженої сили, що дорівнює рівнодіючої цього навантаження та прикладеної до вільного кінця бруса.

Математично це набуває наступного вигляду. Нехай необхідно визначити подовження вільного кінця бруса для двох випадків, наведених на Рис. 4.1 та Рис 4.2. Якщо для зображеного на Рис. 4.2 бруса загальне подовження за формулою (1.6) за умови $N = ql$ (можна визначити рівнодіючу, за величиною еквівалентною навантаженню на брус на Рис. 4.1) дорівнює

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{ql^2}{EA}, \quad (4.2)$$

то для зображеного на Рис. 4.1 бруса загальне подовження за формулою (1.4) за умови загального вигляду $N = qz$

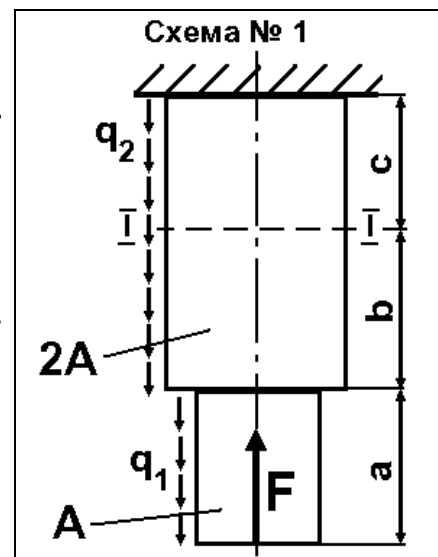
$$\Delta l = \int_0^l \frac{Ndz}{EA} = \int_0^l \frac{qz}{EA} dz = \frac{ql^2}{2EA}. \quad (4.3)$$

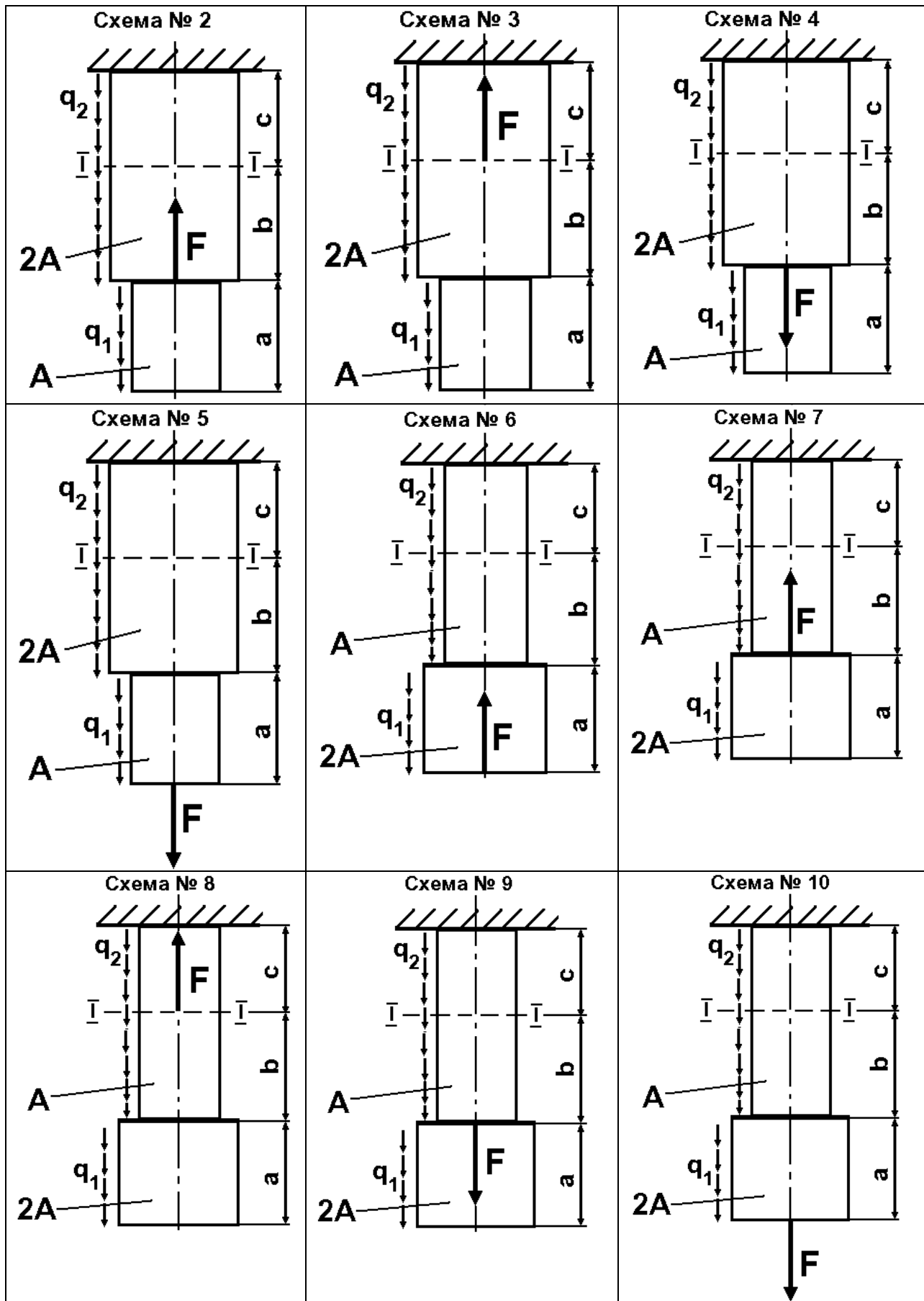
Взагалі, епюра переміщень бруса з урахуванням власної ваги є параболою.

6.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 4

Східчастий сталевий стержень складається з ділянок площею поперечного перерізу A , $2A$ і знаходиться під дією власної ваги та зосередженої сили F .

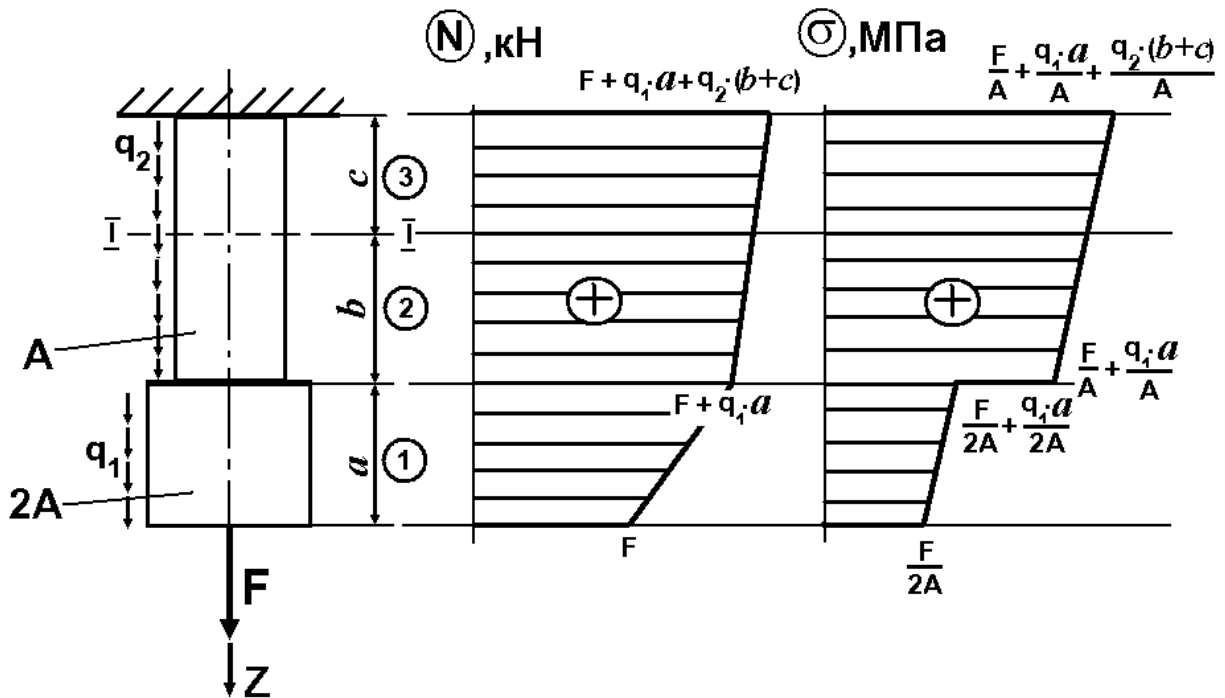
Побудувати епюру поздовжніх сил N та визначити площу поперечних перерізів, яка забезпечує міцність стержня (матеріал – сталь Ст3, $[\sigma]=160$ МПа, $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па). Побудувати епюру нормальних напружень σ . Визначити переміщення перерізу I-I.





№	№ схеми	F_1 , кН	a , м	b , м	c , м
1	1	600	3,1	4,0	4,4
2	2	800	3,2	4,9	4,3
3	3	900	3,3	4,8	4,2
4	4	1000	3,4	4,7	4,1
5	5	1400	3,5	4,6	2,1
6	6	1800	3,6	4,5	2,2
7	7	2000	3,7	4,4	3,1
8	8	1700	3,8	4,3	3,2
9	9	1500	3,9	4,2	3,3
0	10	1000	3,0	4,1	3,4
	Е	Д	Г	Д	Е

6.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ



Числові дані: $F = 1000$ кН, $a = 3,10$ м, $b = 4,10$ м, $c = 3,40$ м.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Густина матеріалу Ст3 $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, питома вага $\gamma = \rho \cdot g = 7800 \cdot 9,81 \approx 78000 \text{ Н/м}^3 = 78 \text{ кН/м}^3$.

Введемо позначення ділянок і параметри бруса на них:

Ділянка 1 – довжина a , площа поперечного перерізу $2A$;

Ділянка 2 – довжина b , площа поперечного перерізу A ;

Ділянка 3 – довжина c , площа поперечного перерізу A .

Розподілене навантаження (на ділянці 1) інтенсивністю $q_1 = \gamma \cdot 2A = 78 \cdot 2A = 156A \text{ кН/м}$.

Розподілене навантаження (на ділянках 2, 3) інтенсивністю $q_2 = \gamma \cdot A = 78 \cdot A = 78A \text{ кН/м}$.

Позитивний напрям осі Z – вниз, поздовжню силу N спрямуємо догори. Тоді у випадку, коли після розв'язання рівняння рівноваги відсіченої частини бруса величина $N > 0$, на цій ділянці розтягання.

Поздовжні сили N та напруження σ по ділянках при русі знизу догори відповідно дорівнюють.

Для ділянки 1 за умов рівноваги $-N_1 + F + q_1 \cdot z = 0$, звідки $N_1 = F + q_1 \cdot z$. Величина $N_1 > 0$, тому на першій ділянці розтягання. Лінійна залежність $N_1(z)$ вимагає для побудови епюри поздовжніх сил визначення величини N_1 у двох довільних точках. Для цього беремо границі 1-ої ділянки. Тоді при $z = 0$ $N_1 = F = 1000 \text{ кН}$ і напруження

$$\sigma = \frac{F}{2A} \text{ МПа; при } z = a \quad N_1 = F + q_1 \cdot a = 1000 + 156A \cdot a \text{ кН;}$$

$$\sigma = \frac{F}{2A} + \frac{156A \cdot a}{2A} = \frac{F}{2A} + 78 \cdot a \text{ МПа.}$$

Для ділянок 2 і 3 - $N_2 = F + q_1 \cdot a + q_2 \cdot z, 0 \leq z \leq b + c$.

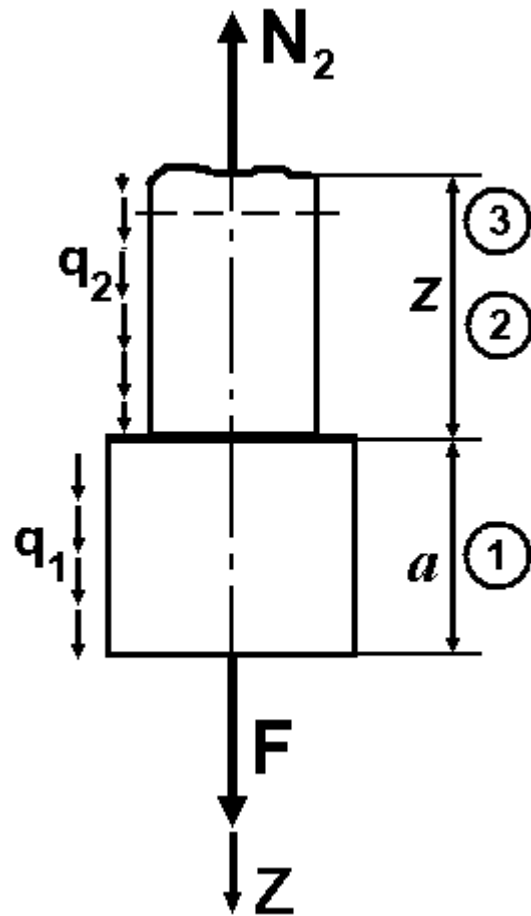
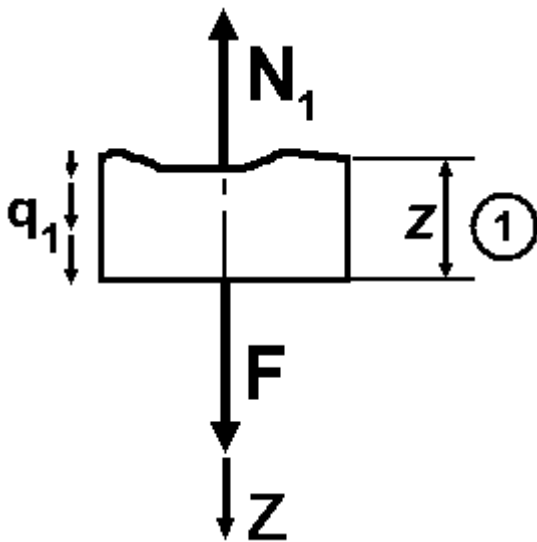
При $z = 0$ $N_2 = F + q_1 \cdot a = 1000 + 156A \cdot a \text{ кН;}$

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{156A \cdot a}{A} = \frac{F}{A} + 156 \cdot a \text{ МПа;}$$

При $z = b + c$

$$N_2 = F + q_1 \cdot a + q_2 \cdot (b + c) = 1000 + A \cdot (156 \cdot a + 78 \cdot (b + c)) \text{ кН.}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{156A \cdot a}{A} + \frac{78A \cdot (b + c)}{A} = \frac{F}{A} + 156 \cdot a + 78 \cdot (b + c) \text{ МПа.}$$



Ділянка 1 $0 \leq z \leq a$

Ділянки 2,3 $0 \leq z \leq b + c$

Епюра напружень σ побудована в умовних позначеннях з невідомою A . Визначаємо найбільш небезпечний переріз, для нього запишемо

умову міцності: $\sigma = \frac{F}{A} + 156 \cdot a + 78 \cdot (b + c) \leq [\sigma]$, звідки визнача-

ємо A :

$$A \geq \frac{F}{[\sigma] - 156 \cdot a - 78 \cdot (b + c)} = \frac{1000 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 - 156 \cdot 10^3 \cdot 3,1 - 78 \cdot 10^3 \cdot (4,1 + 3,4)} = 62,920 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$2A = 125,840 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Переміщення Δl_{I-I} перерізу I-I дорівнює подовженню (якщо $\Delta l_{I-I} > 0$), або укороченню (якщо $\Delta l_{I-I} < 0$) ділянки 3. Для цієї частини:

1) Сила $F = 1000$ кН є зосередженим навантаженням;

2) Вага ділянки 1 є зосередженим навантаженням:

$$G_1 = q_1 \cdot a = 156 \text{ А} \cdot a = 156 \cdot 10^3 \cdot 62,920 \cdot 10^{-4} \cdot 3,1 \approx 3043 \text{ Н};$$

3) Вага ділянки 2 є зосередженим навантаженням:

$$G_2 = q_2 \cdot b = 78 \text{ А} \cdot b = 78 \cdot 10^3 \cdot 62,920 \cdot 10^{-4} \cdot 4,1 \approx 2013 \text{ Н};$$

4) Вага ділянки 3 є розподіленим навантаженням:

$$G_3 = q_2 \cdot c = 78 \text{ А} \cdot c = 78 \cdot 10^3 \cdot 62,920 \cdot 10^{-4} \cdot 3,4 \approx 1669 \text{ Н}.$$

Зміна довжини будь-якої ділянки з довжиною l постійного поперечного перерізу $A_{\text{пер}}$ визначається за формулою

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z)}{E \cdot A_{\text{пер}}} dz = \frac{1}{E \cdot A_{\text{пер}}} \int_0^l N(z) dz. \text{ Для нашої схеми зміна довжини}$$

ділянки 3 від дії розподіленого навантаження дорівнює

$$\Delta l = \frac{1}{E \cdot A_{\text{пер}}} \int_0^c q_2 \cdot z \cdot dz = \frac{q_2 \cdot c^2}{E \cdot A_{\text{пер}} \cdot 2} = \frac{G_3 \cdot c}{E \cdot A_{\text{пер}} \cdot 2}. \text{ Отже остаточно з}$$

урахуванням усіх доданків

$$\begin{aligned} \Delta l_{I-I} &= \frac{F \cdot c}{E \cdot A} + \frac{G_1 \cdot c}{E \cdot A} + \frac{G_2 \cdot c}{E \cdot A} + \frac{G_3 \cdot c}{E \cdot A \cdot 2} = \\ &= (2,574 + 0,00783 + 0,00518 + 0,00215) \cdot 10^{-3} = 2,589 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

7. ЗАДАЧА № 5. КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ ПОСТІЙНОГО ПЕРЕРІЗУ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Стержень працює на кручення, якщо в його поперечних перерізах виникають крутильні моменти, тобто моменти, що знаходяться в площині перерізу. Стержні, що обертаються та працюють на кручення, називаються валами.

Застосовуючи метод перерізів і розглядаючи рівновагу відсіченої частини, робимо висновок - внутрішні сили, які виникають в поперечному перерізі бруса, мають дати момент (крутильний момент), що урівноважує зовнішні моменти, прикладені до цієї частини. Тобто, крутильний момент в довільному перерізі бруса, чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів, які прикладені до відсіченої частини.

Для розрахунку на міцність, як і при розтяганні (стисканні) бруса, необхідно знайти його найнебезпечніший переріз. У випадку, коли розміри поперечного перерізу по довжині бруса постійні, найнебезпечнішими будуть ті перерізи, в яких крутильний момент максимальний. Графік, який показує закон зміни крутильних моментів по довжині бруса, називається епюрою крутильних моментів. Побудова цих епюр принципово нічим не відрізняється від побудови епюр поздовжніх сил і проводиться на основі сформульованого правила обчислення крутильних моментів.

Для визначення знаків моментів існує певне правило, хоча фізичного сенсу воно не має. Крутильний момент $M_{кр}$ в перерізі $m-n$ вважається додатним, коли зовнішній момент M обертає відсічену частину проти годинникової стрілки, якщо дивитися на відсічену частину з боку перерізу (на Рис. 5.1,а це показано з точки спостерігача праворуч від зовнішнього моменту, на Рис. 5.1,б це показано з точки спостерігача ліворуч від зовнішнього моменту). Якщо зовнішній момент M обертає відсічену частину за годинниковою стрілкою (при погляді з боку перерізу), то крутильний момент в перерізі вважається від'ємним (на Рис. 5.2,а це показано з точки спостерігача праворуч від зовнішнього моменту, на Рис. 5.2,б це показано з точки спостерігача ліворуч від зовнішнього моменту).

Епюра має вигляд прямокутників. В місцях прикладення зовнішніх моментів ординати епюри мають стрибок на величину прикладеного в цьому місці зовнішнього моменту.

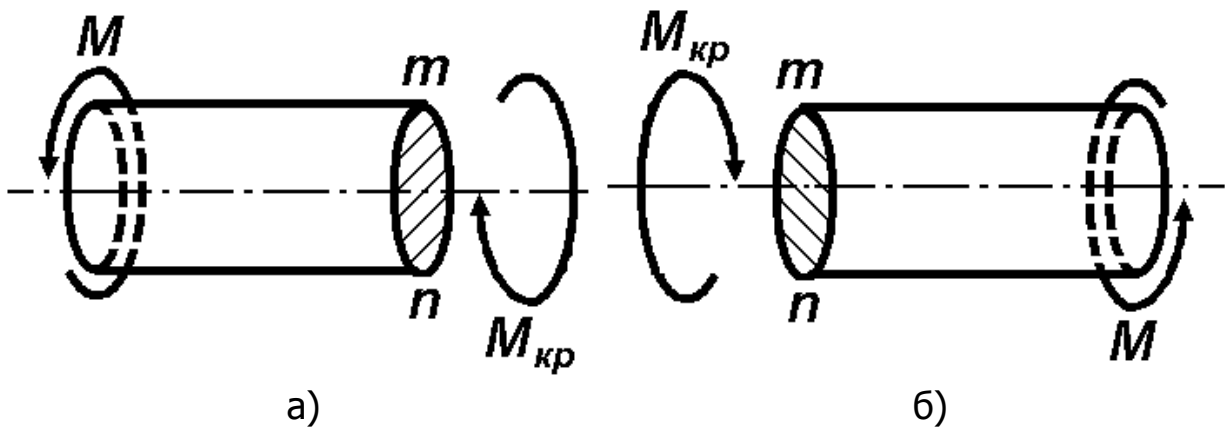


Рисунок 5.1.

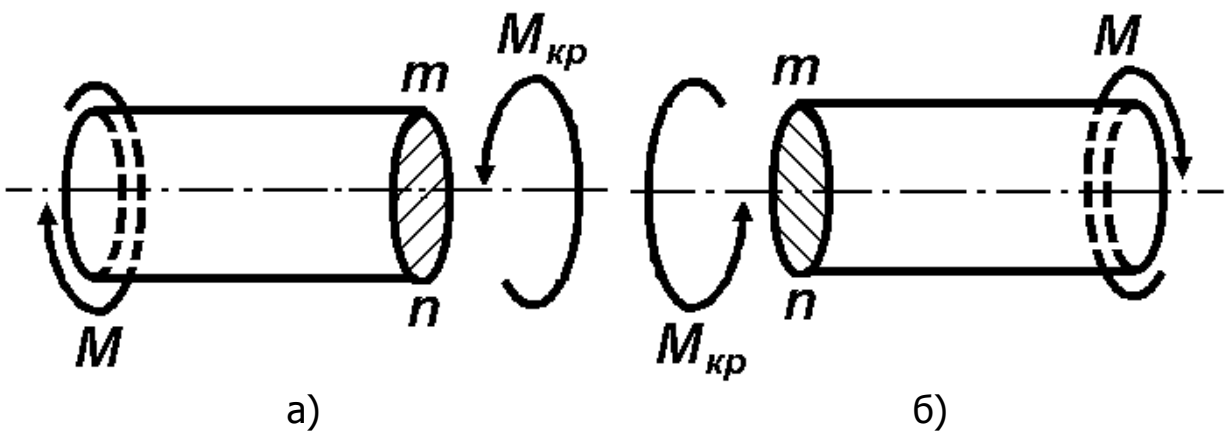


Рисунок 5.2.

При крученні в поперечних перерізах стержня діють тільки дотичні напруження τ , тобто напружений стан в точках стержня, який скручується, є чисти зсувом.

Умова статичної міцності вала при крученні має вигляд

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (5.1)$$

де $M_{кр max}$ - максимальний крутильний момент, W_p - полярний момент опору або момент опору при крученні, $[\tau]$ - допустиме напруження. Полярний момент опору W_p пов'язаний з полярним моментом інерції перерізу I_p і відстанню від полюса переріза до найбільш віддаленої точки переріза. Для круглого перерізу полюсом є його центр, а вказана відстань є радіусом. Тому для цього перерізу з урахуванням $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ і

$$r = \frac{d}{2} \text{ маємо}$$

$$W_P = \frac{I_P}{r} = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (5.2)$$

Якщо крутильний момент $M_{\text{КР}}$, матеріал вала з модулем пружності другого роду (або модулем зсуву) G та поперечний переріз з полярним моментом інерції I_P є постійними, то для вала довжиною l його деформація (взаємний кут повороту перерізів φ) дорівнює

$$\varphi = \frac{M_{\text{КР}} l}{GI_P}. \quad (5.3)$$

Ця формула за своєю структурою з точністю до позначень аналогічна формулі (1.4) для визначення деформацій при розтяганні-стисканні. Для вала, на якому можна виділити окремі ділянки довжиною l_i зі своїм навантаженням і геометричним розміром, кут повороту φ_i і загальний кут закручування всього валу φ відповідно дорівнює

$$\varphi = \frac{M_{\text{КР}i} l_i}{GI_{Pi}}, \quad \varphi = \sum_{i=1} \frac{M_{\text{КР}i} l_i}{GI_{Pi}}. \quad (5.4)$$

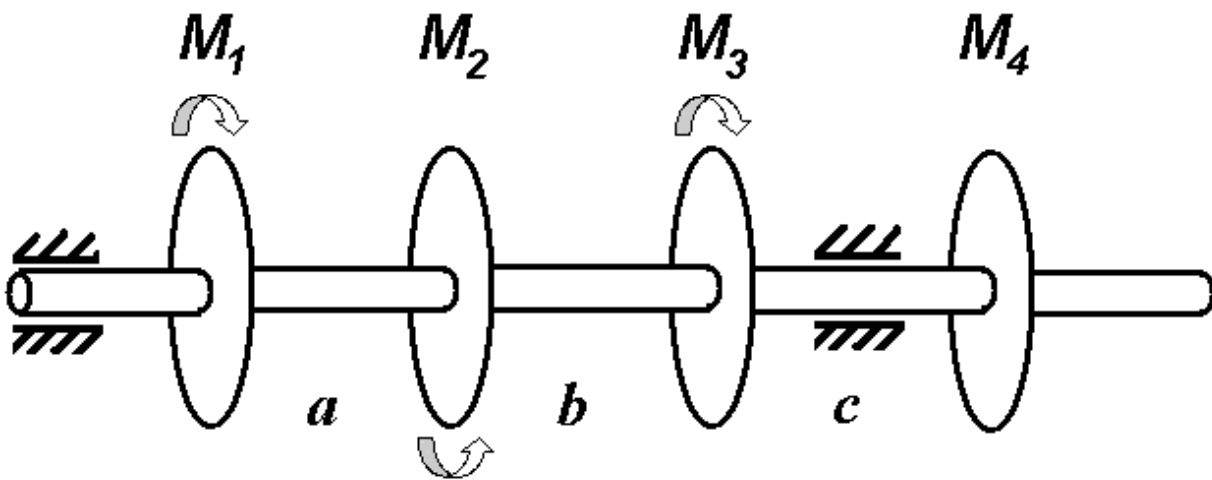
Кут φ може бути додатним, від'ємним і в окремому випадку дорівнювати нулю. За наявності побудованої епюри крутильних моментів та знання умов закріплення стержня визначення кутових переміщень перерізів стержня та побудова їхньої епюри не є складним. Якщо для вала немає нерухомих перерізів, то для побудови епюри кутових переміщень приймають будь-який переріз умовно нерухомим.

При аналізі правильності побудови вказаної епюри та її відповідності епюрі крутильних моментів існують певні правила.

1. Якщо на ділянці епюри $M_{\text{КР}}$ є горизонтальною лінією, то епюра φ є нахиленою лінією.
2. Якщо $M_{\text{КР}} > 0$, то φ зростатиме, якщо $M_{\text{КР}} < 0$, то φ зменшується.
3. В місцях прикладення зовнішніх моментів на епюрі $M_{\text{КР}}$ є стрибки, а на епюрі φ присутній злам.
4. Кожний наступний кут φ_i для i -ї ділянки відкладається відносно суми кутів закручування попередніх ділянок.

7.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 5

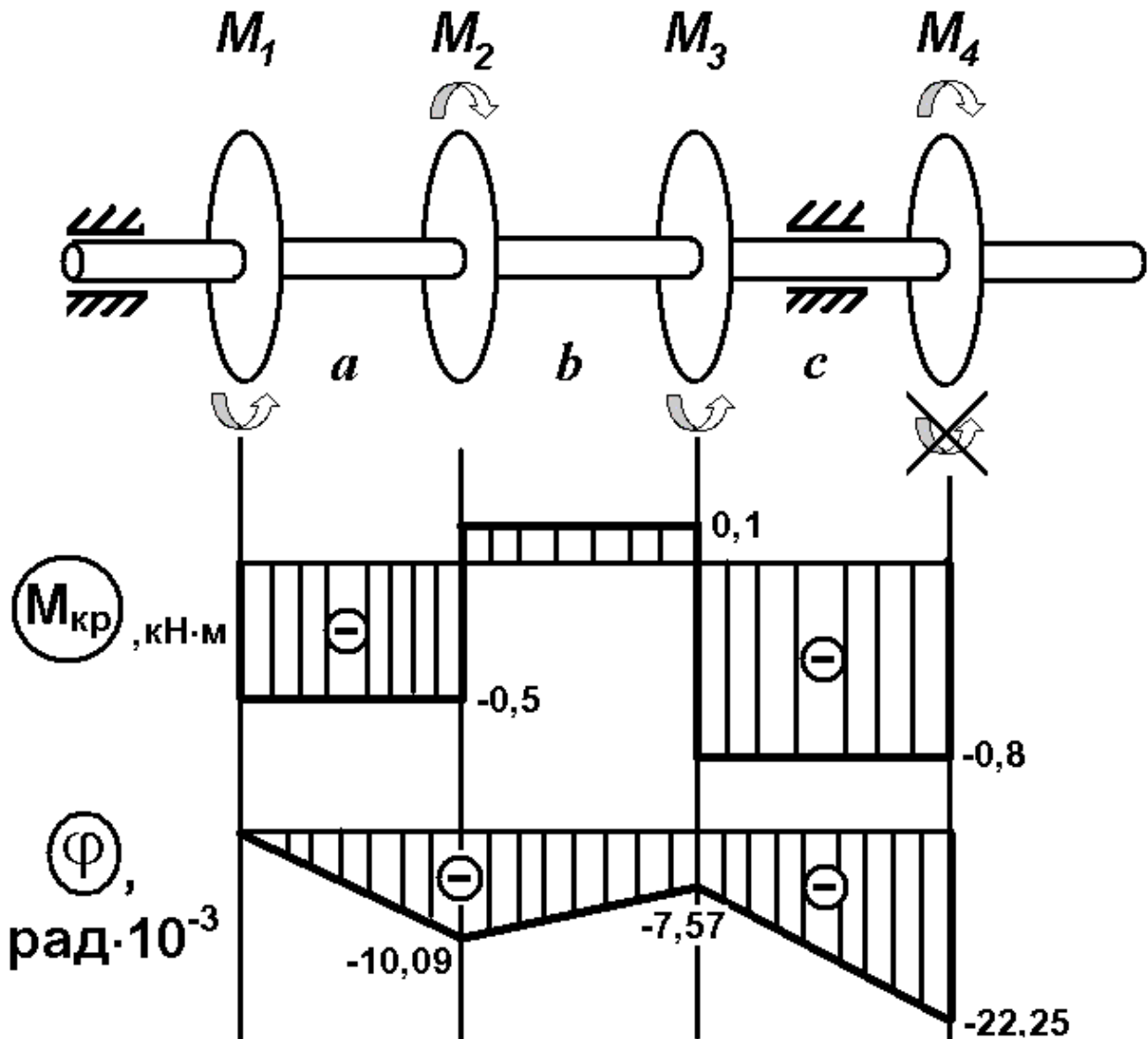
На сталевий вал, що має суцільний переріз із постійним діаметром, насаджено чотири шківів, до яких прикладені моменти M_1 , M_2 , M_3 , M_4 . Побудувати епюру крутильних моментів $M_{кр}$. З умови міцності потрібно визначити діаметр валу d . Побудувати епюру кутів закручування φ . Допустимі дотичні напруження при крученні для матеріалу валу $[\tau] = 60$ МПа, модуль пружності другого роду (при зсуві) $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.



№	$M_1, \text{кН}\cdot\text{м}$	$M_2, \text{кН}\cdot\text{м}$	$M_3, \text{кН}\cdot\text{м}$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$	$c, \text{м}$
1	0,1	-0,6	1,5	0,45	0,55	0,31
2	0,2	0,7	-1,4	0,46	0,75	0,32
3	0,3	-0,8	1,3	0,47	0,65	0,33
4	0,4	0,9	-1,2	0,48	0,85	0,34
5	0,5	-1,0	1,1	0,49	1,00	0,35
6	-0,1	1,1	-0,5	0,50	0,95	0,36
7	-0,2	-1,2	0,6	0,41	1,10	0,37
8	-0,3	1,3	-0,7	0,42	0,70	0,38
9	-0,4	-1,4	0,8	0,43	0,60	0,39
0	-0,5	1,5	-0,9	0,44	0,50	0,40
	Е	Г	Д	Е	Г	Д

7.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

РОЗВ'ЯЗАННЯ



Вихідні дані: $M_1 = -0,50$ кН·м, $M_2 = -0,60$ кН·м, $M_3 = -0,90$ кН·м,
 $a = 0,44$ м, $b = 0,55$ м, $c = 0,40$ м;

Числові дані: $M_1 = 0,50$ кН·м, $M_2 = 0,60$ кН·м, $M_3 = 0,90$ кН·м
 (знаки враховано зміною напрямів дії відповідних крутильних момен-
 тів);

На схемі наведено напрям дії моментів M_1 , M_2 , M_3 , який відпо-
 відає додатним величинам цих моментів, узятих з таблиці. Якщо таблич-
 ні дані дають величини будь-якого з зазначених моментів зі знаком «-»,
 необхідно замінити напрям дії відповідного моменту на протилежний,
 узявши його значення після цього за модулем. При побудові епюри кру-

тильних моментів $M_{\text{кр}}$ (рух справа наліво, від 4-го шківа до 1-го) користуємось правилом знаків.

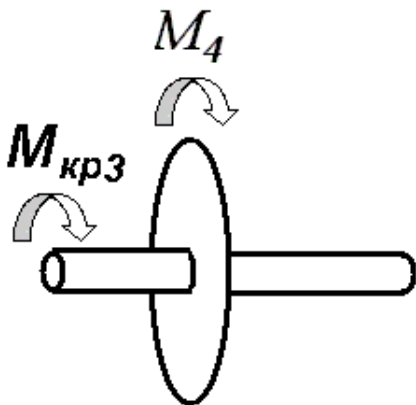
Для визначення напрямку та величини зовнішнього моменту M_4 обираємо (попередньо) напрям його дії проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку перерізу на ділянці c і записуємо умову рівноваги конструкції:

$$M_4 + M_3 - M_2 + M_1 = 0, \text{ тому}$$

$$M_4 = -M_3 + M_2 - M_1 = -0,9 + 0,6 - 0,5 = -0,8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Знак « $-$ » показує, що обраний (попередньо) напрям дії зовнішнього моменту M_4 був помилковий, тому треба змінити цей напрям на протилежний, залишивши абсолютну величину моменту без змін (на рисунку показані обидва варіанти, попередній закреслено).

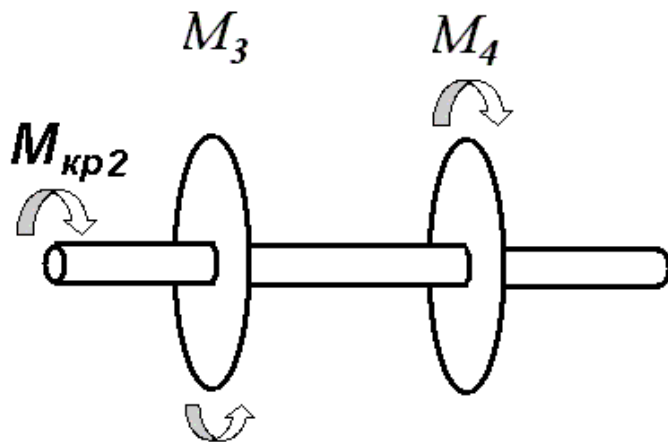
По кожній ділянці визначаємо $M_{\text{кр}}$ за допомогою методу перерізів. Внутрішній момент $M_{\text{кр}}$ спрямовуємо таким чином (відповідно до Рис. 5.1,б), щоб одразу було зрозуміло його знак. Якщо за умов рівноваги при обраному напрямі в перерізі $M_{\text{кр}}$ отримує певний знак « $+$ » або « $-$ », саме такий знак буде на епюрі.



Ділянка c :

$$-M_{\text{кр}3} - M_4 = 0. \text{ Тому}$$

$$M_{\text{кр}3} = -M_4 = -0,8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

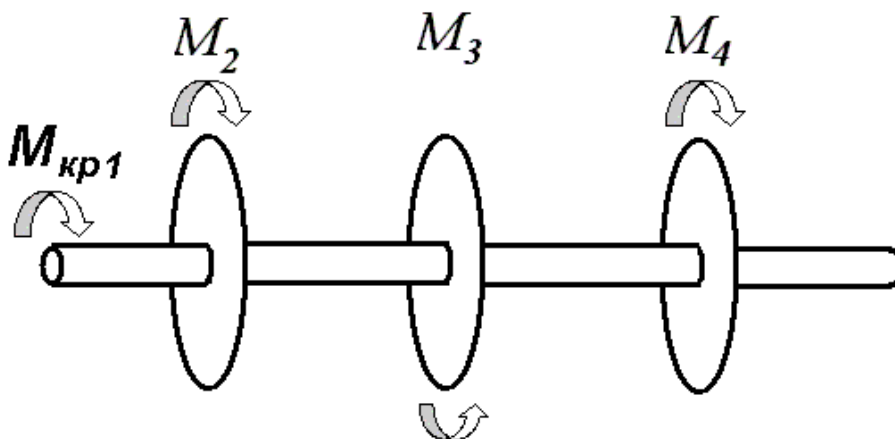


Ділянка b :

$$-M_{\text{кр}2} + M_3 - M_4 = 0. \text{ Тому}$$

$$M_{\text{кр}2} = -M_4 + M_3 = -0,8 + 0,9 = 0,1 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

В даній задачі доцільно починати побудову епюри $M_{\text{кр}}$ саме з четвертого шківа, рухаючись від нього до першого, тому що з позиції спостерігача в місці зробленого умовного перерізу (наприклад, на ділянці c) напрям дії зовнішнього крутильного моменту є очевидним.



Ділянка a:

$-M_{кр1} - M_2 + M_3 - M_4 = 0$. Тому

$$M_{кр1} = -M_4 + M_3 - M_2 = -0,8 + 0,9 - 0,6 = -0,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Фактично, останнім перевірочним кроком є перехід ліворуч за перший шків, визначення крутильного моменту, який має дорівнювати нулю. У нашому випадку це фактично приводить до рівняння $M_1 + M_{кр1} = 0,5 - 0,5 = 0$ (проекція моменту M_1 є додатною). Тобто сталевий вал навантажений на ділянках *a*, *b*, *c*, а за межами першого та четвертого шківів навантаження відсутнє.

Максимальний крутильний момент (за абсолютною величиною) визначається з побудованої епюри $M_{кр}$, а саме з величин $|M_{кр1}|$, $|M_{кр2}|$, $|M_{кр3}|$: $M_{max} = 0,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

За умов міцності $\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{W_p} \leq [\tau]$, тому полярний момент

опору перерізу $W_p \geq \frac{M_{кр max}}{[\tau]}$, з урахуванням $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ визначаємо

діаметр сталевого валу:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} \approx 0,0408 \text{ м}.$$

Полярний момент опору перерізу визначається за формулою:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,0408^4}{32} \approx 2,72 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4.$$

В межах кожної ділянки вала епюра є лінійною, тому достатньо обчислити кути повороту тільки для граничних перерізів. Кути закручування кожної *i*-ої з трьох ділянок

(нумерація зліва направо) визначаємо за формулою $\varphi_i = \frac{M_{\text{КР}i} \cdot l_i}{G \cdot I_P}$, тому

запишемо:

$$\varphi_1 = \frac{-0,5 \cdot 10^3 \cdot 0,44}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 2,72 \cdot 10^{-7}} \approx -10,09 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

(кут повороту переріза другого шківа відносно першого);

$$\varphi_2 = \frac{0,1 \cdot 10^3 \cdot 0,55}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 2,72 \cdot 10^{-7}} \approx 2,52 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

(кут повороту переріза третього шківа відносно другого, відносно першого кут дорівнює $\varphi_1 + \varphi_2$);

$$\varphi_3 = \frac{-0,8 \cdot 10^3 \cdot 0,40}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 2,72 \cdot 10^{-7}} \approx -14,68 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

(кут повороту переріза четвертого шківа відносно третього, відносно першого кут дорівнює $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$).

За визначеними кутами будуюмо епюру φ , умовно вважаючи нерухомим перший шків. Кут закручування 4-го шківа визначається за формулою $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -22,25 \cdot 10^{-3}$ рад.

8. ЗАДАЧА № 6. КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Всі теоретичні відомості, наведені при вирішенні задачі №4, залишаються незмінними і для поточної задачі. Певні відмінності, які мають бути враховані, пов'язані з наявністю по довжині бруса ділянок змінного перерізу, а саме кільцевого. Епюра крутильних моментів будується, незважаючи на це, а визначення найнебезпечніших перерізів необхідно проводити для кожного типу перерізу в брусі. Звичайно, що і при побудові епюри кутів повороту перерізів через різні полярні моменти інерції теж враховується цей факт.

Для кожного j -го типу перерізу визначається свій полярний момент опору W_p . Наприклад, для кола він визначається за формулою

(5.2), для кільцевого перерізу за умов відомого співвідношення $n = \frac{D}{d}$

між зовнішнім діаметром D і внутрішнім d (в цьому випадку в точках

на контурі перерізу, розташованих на відстані $\frac{D}{2} = \frac{nd}{2}$ від полюса пе-

рерізу, дотичні напруження будуть найбільші) полярний момент опору з

урахуванням $I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$ має вираз

$$W_p = I_p \cdot \frac{2}{D} = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \cdot \frac{2}{D} = \frac{\pi n^4}{32}(d^4 - 1) \cdot \frac{2}{nd} = \frac{\pi n^3}{16} \left(d^3 - \frac{1}{d} \right). \quad (6.1)$$

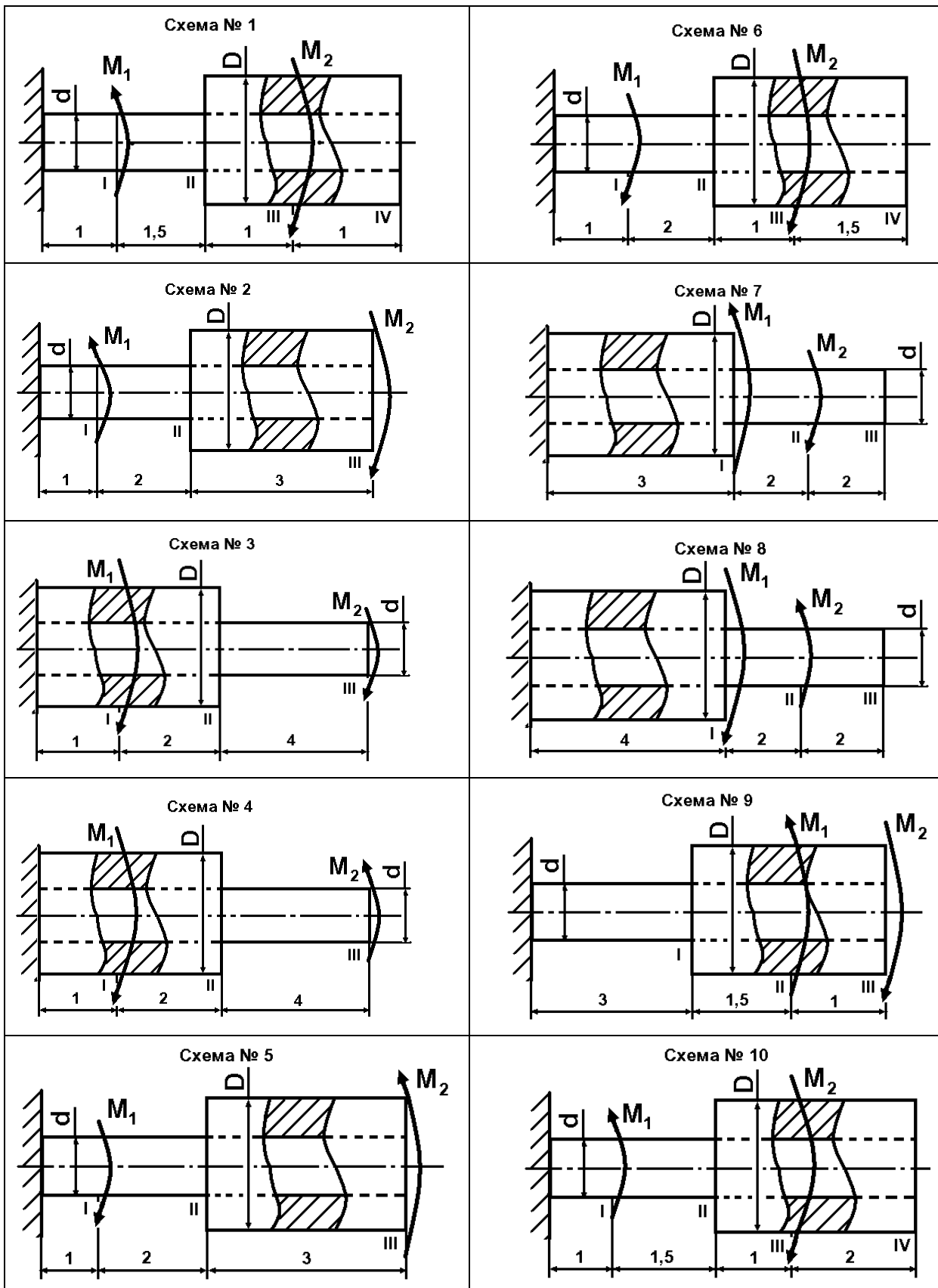
В потенційно небезпечних перерізах (для кожного j -го типу) за формулою, аналогічною (5.1), мають визначатися максимальні напруження

$$\tau_{max j} = \frac{M_{KP max j}}{W_{pj}} \leq [\tau]. \quad (6.2)$$

За цим співвідношенням або робиться перевірка умов міцності бруса, або здійснюється підбір відповідного перерізу.

Кути повороту визначаються за формулою (5.4) з урахуванням відповідного полярного моменту інерції I_{pj} для перерізу j -го типу.

8.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 6



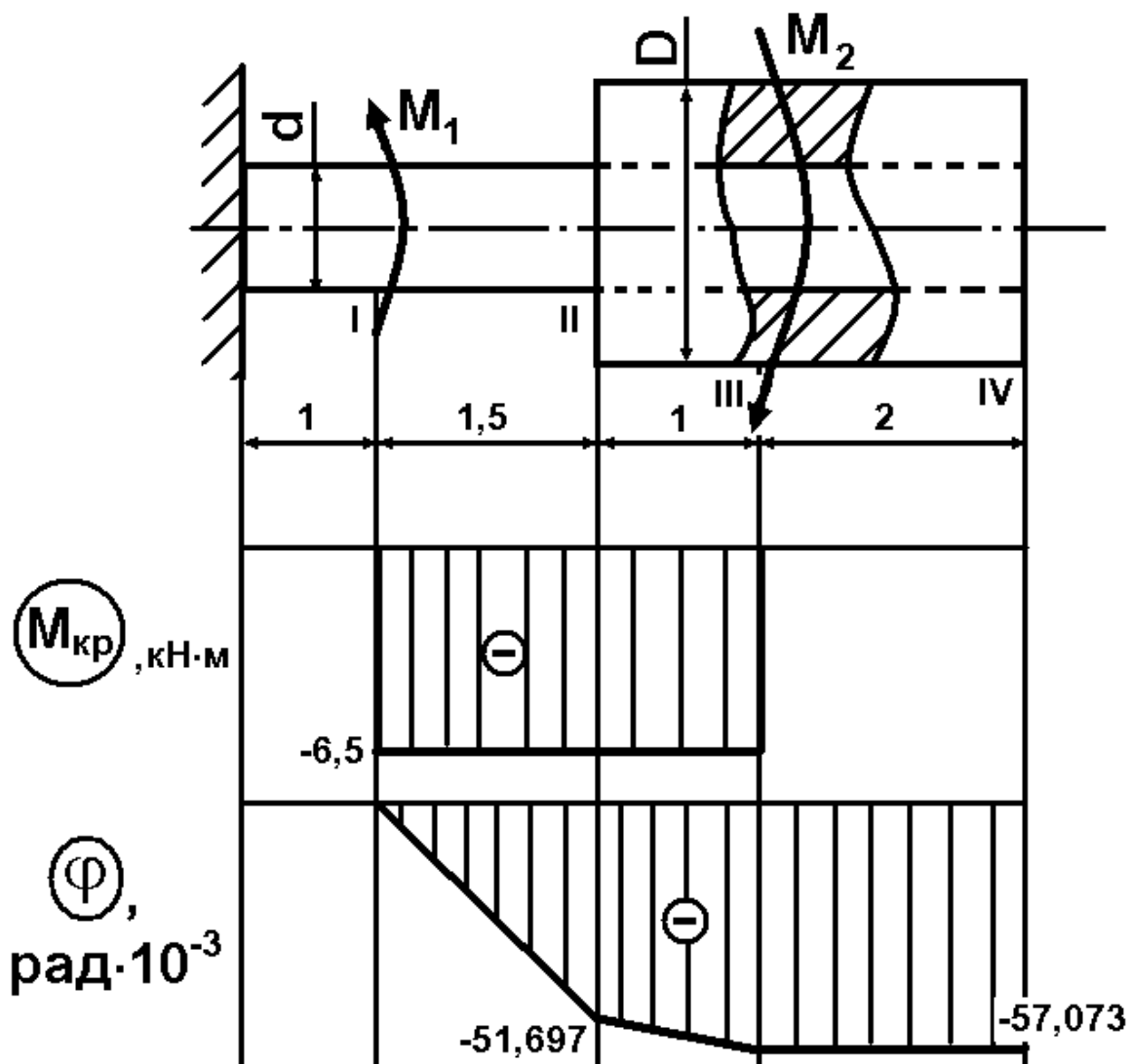
До сталевого валу прикладені моменти M_1 , M_2 . Побудувати епюру крутильних моментів $M_{\text{кр}}$. З умови міцності потрібно визначити діаметри валу D та d , якщо їхнє співвідношення дорівнює n . Побудувати епюру кутів закручування φ , визначити кут закручування вільного кінця валу. Допустимі дотичні напруження при крученні для матеріалу вала $[\tau] = 100$ МПа, модуль пружності другого роду (при зсуві) $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа. Довжина ділянок валу вказана в метрах.

№	№ схеми	$M_1, \text{кН}\cdot\text{м}$	$M_2, \text{кН}\cdot\text{м}$	n
1	1	2,0	6,5	1,20
2	2	2,5	6,0	1,25
3	3	3,0	5,5	1,30
4	4	3,5	5,0	1,35
5	5	4,0	4,5	1,40
6	6	4,5	4,0	1,45
7	7	5,0	3,5	1,50
8	8	5,5	3,0	1,55
9	9	6,0	2,5	1,60
0	10	6,5	2,0	1,65
	Е	Д	Г	Е

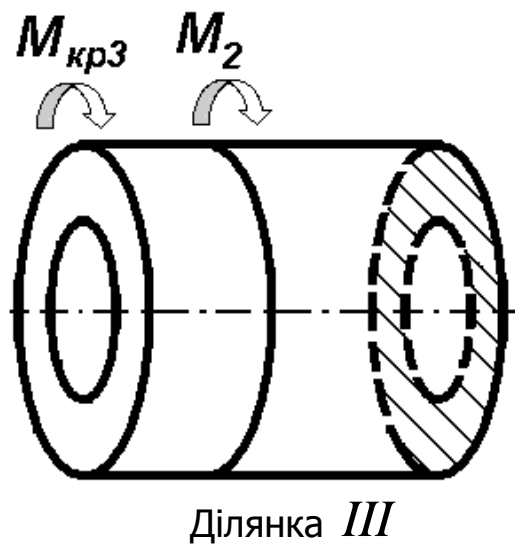
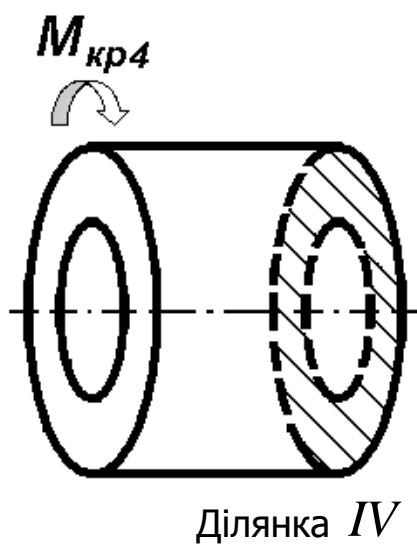
8.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

РОЗВ'ЯЗАННЯ

При побудові епюри крутильних моментів $M_{\text{кр}}$ (рух справа наліво) користуємось правилами знаків. Рух вздовж стержня починаємо від вільного кінця до жорсткого закладення. По кожній ділянці визначаємо $M_{\text{кр}}$ за допомогою методу перерізів. Внутрішній момент $M_{\text{кр}}$ спрямовуємо таким чином (відповідно до Рис. 5.1,б), щоб одразу було зрозуміло його знак. Якщо за умов рівноваги при обраному напрямі в перерізі $M_{\text{кр}}$ отримує певний знак «+» або «-», саме такий знак буде на епюрі.

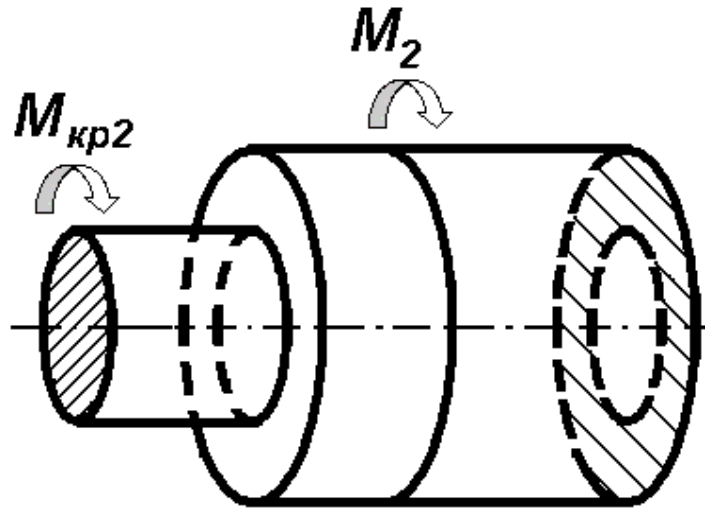


Числові дані: $M_1 = 6,50$ кН·м, $M_2 = 6,50$ кН·м, $n = 1,65$.



Ділянка *IV* : $M_{\text{кр}4} = 0$ кН·м (зовнішній момент відсутній);

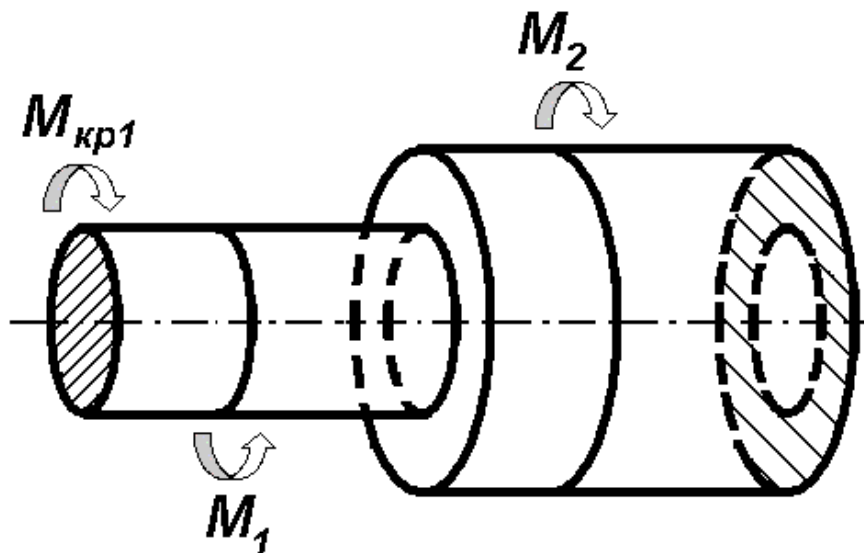
Ділянка *III* : За умов рівноваги $-M_{\text{кр}3} - M_2 = 0$, тому $M_{\text{кр}3} = -M_2 = -6,5$ кН·м;



Ділянка *II*

Ділянка *II* : За умов рівноваги $-M_{\text{кр}2} - M_2 = 0$, $M_{\text{кр}2} = -M_2 = -6,5$ кН·м;

Ділянка *I* : За умов рівноваги $-M_{\text{кр}1} + M_1 - M_2 = 0$, $M_{\text{кр}1} = -M_2 + M_1 = -6,5 + 6,5 = 0$ кН·м.



Ділянка *I*

Максимальний крутильний момент (за абсолютною величиною) визначається з побудованої епюри $M_{\text{КР}}$ для кожного з видів перерізів:

для суцільного вала $M_{\text{КР max1}} = 6,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$

для вала кільцевого перерізу $M_{\text{КР max2}} = 6,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

За умов міцності $\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{КР max}}}{W_{\text{P}}} \leq [\tau],$ тому $W_{\text{P}} \geq \frac{M_{\text{КР max}}}{[\tau]},$

полярний момент опору суцільного перерізу $W_{\text{P}} = \frac{\pi d^3}{16},$ з урахуванням

цього отримаємо діаметр сталевго вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{кр max1}}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}} \approx 0,0692 \text{ м};$$

полярний момент опору кільцевого перерізу $W_{\text{P}} = \frac{\pi d^3}{16} \left(n^3 - \frac{1}{n} \right),$ з ура-

хуванням цього отримаємо діаметр сталевго вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{кр max2}}}{\pi \cdot [\tau] \cdot \left(n^3 - \frac{1}{n} \right)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot \left(1,65^3 - \frac{1}{1,65} \right)}} \approx 0,044 \text{ м}.$$

Внаслідок того, що величина d є визначальною для обох типів перерізів, з двох отриманих значень діаметра d беремо найбільше, яке здатне забезпечити виконання умови міцності конструкції в цілому. Отримане значення округляємо до $0,07 \text{ м}.$

Полярний момент опору суцільного перерізу (з індексом 1) визначається: $I_{\text{P1}} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,07^4}{32} \approx 2,357 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$ Полярний момент

опору кільцевого перерізу (з індексом 2) визначається:

$$I_{\text{P2}} = \frac{\pi d^4}{32} (n^4 - 1) = \frac{3,14 \cdot 0,07^4}{32} (1,65^4 - 1) \approx 15,114 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Кути закручування кожної i -ої з чотирьох ділянок (нумерація зліва направо) визначаємо за формулою $\varphi_i = \frac{M_{\text{КР}i} \cdot l_i}{G \cdot I_{\text{P}j}}$, ($j = 1$ або $j = 2$ залежно від типу перерізу), враховуючи вигляд перерізу, тому запишемо:

$$\varphi_1 = 0 \text{ рад,}$$

$$\varphi_2 = \frac{-6,5 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 2,357 \cdot 10^{-6}} \approx -51,697 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

(кут повороту переріза, що відповідає лівій границі другої ділянки відносно першої, відносно нерухомого перерізу кут дорівнює $\varphi_1 + \varphi_2$);

$$\varphi_3 = \frac{-6,5 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 12,091 \cdot 10^{-6}} \approx -5,376 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

(кут повороту переріза, що відповідає лівій границі третьої ділянки відносно другої, відносно нерухомого перерізу кут дорівнює $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$);

$$\varphi_4 = 0 \text{ рад,}$$

(кут повороту переріза, що відповідає лівій границі четвертої ділянки відносно третьої, відносно нерухомого перерізу кут дорівнює $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$);

За визначеними кутами будемо епюру φ з нерухомим перерізом в жорсткому закладенні. Кут закручування вільного кінця валу дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування кожної з ділянок $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = -57,073 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$

9. ЗАДАЧА № 7. ПОПЕРЕЧНЕ ЗГИНАННЯ МЕТАЛЕВИХ БАЛОК

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

Поперечний вигин – це вид деформування, коли в поперечних перерізах стержня виникають згинальні моменти та поперечні сили. Навантаження стержня (балки, бруса) в загальному випадку складається з моменту M , сили F і розподіленого навантаження з інтенсивністю q (Рис. 7.1). Останні два фактори спрямовані за нормаллю до осі стержня. Звичайно, що комбінація, напрям дії та кількість цих факторів є довільними.

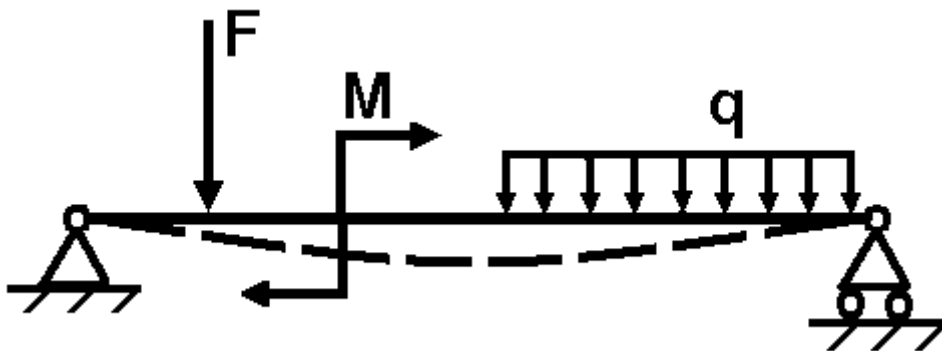


Рисунок 7.1.

Опори балок, які розглядаються як плоскі системи, бувають трьох основних типів.

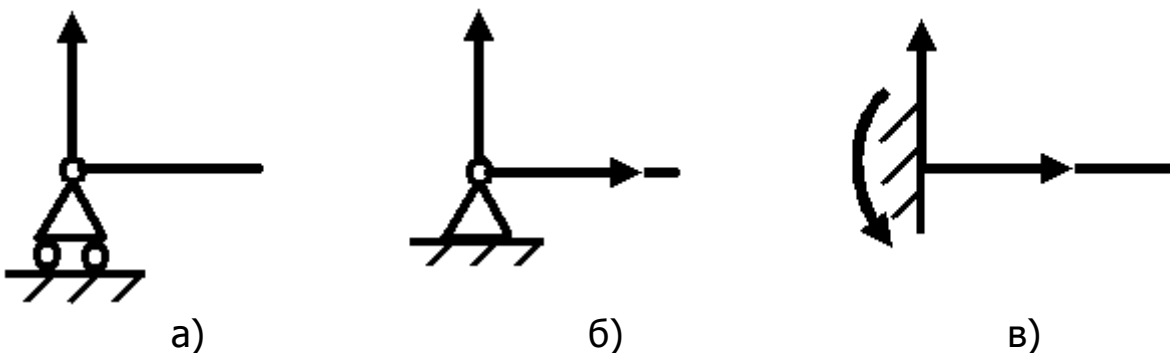


Рисунок 7.2.

1. Рухома шарнірна опора (Рис. 7.2,а). Така опора не заважає обертанню кінця балки та його переміщенню вздовж площини кочення. В ній виникає тільки одна реакція, яка перпендикулярна площині кочення та проходить через центр катка.
2. Нерухома шарнірна опора (Рис. 7.2.,б). Така опора допускає обертання кінця балки, але усуває її поступове переміщення в будь-якому на-

прямі. Реакцію, що виникає в неї, можна розкласти на дві складові – горизонтальну та вертикальну.

3. Жорстке закладення, або защемлення (Рис. 7.2.,в). Таке закріплення не допускає ані лінійних, ані кутових переміщень опорного перерізу. В цій опорі в загальному випадку може виникати реакція, котру зазвичай розкладають на дві складові (вертикальну та горизонтальну) і момент защемлення (реактивний момент).

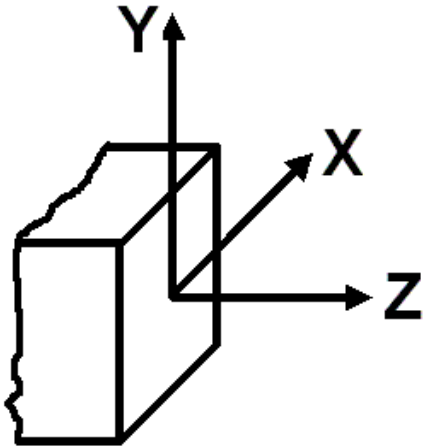


Рисунок 7.3.

Декартова система координат, яка прив'язується до центра ваги поперечного перерізу балки, показана на Рис. 7.3.

Якщо всі силові фактори спрямовані за нормаллю до поздовжньої осі балки (випадок прямого поперечного вигину), то горизонтальні складові опорних реакцій відсутні, а залишають тільки вертикальні. В поперечному перерізі балки виникає поперечна сила Q_Y , яка спрямована вздовж осі Y , та згинальний момент M_X , який діє в площині YZ .

При визначенні опорних реакцій необхідно користуватися для моментів і сил правилами знаків, які відомі з курсу теоретичної механіки (для обраної системи координат проекція сили у позитивному напрямку є додатною зі знаком «+», у негативному – є від'ємною зі знаком «-», дія моменту відносно обраного перерізу за годинниковою стрілкою робить його від'ємним, проти годинникової стрілки – додатним).

Для прямого поперечного вигину існують такі правила для обчислення поперечних сил і згинальних моментів.

Поперечна сила Q_Y в довільному поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, прикладених до її відсіченої частині (діючих по один бік від перерізу).

Згинальний момент M_X в довільному поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх сил, прикладених до її відсіченої частини та обчислених відносно центра ваги перерізу, який розглядається (діючих по один бік від перерізу).

Графічне відображення внутрішніх силових факторів вздовж осі балки за величиною та знаком надається у вигляді відповідних епюр. Для визначеності під час побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів встановлені правила знаків.

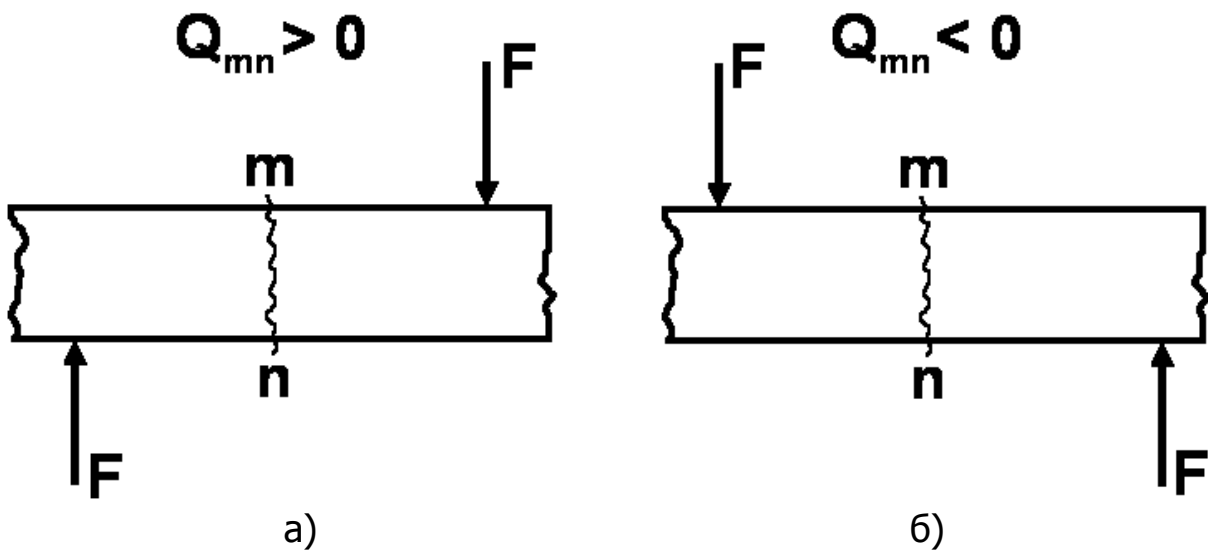


Рисунок 7.4.

Поперечна сила в перерізі балки $m-n$ (Рис. 7.4) вважається додатною, якщо рівнодіюча зовнішніх сил ліворуч від перерізу спрямована знизу догори, а праворуч – навпаки (Рис. 7.4,а). У протилежному випадку (Рис. 7.4,б) поперечна сила вважається від'ємною. Існує ще один варіант трактування правила знаків для поперечної сили: поперечна сила вважається додатною, якщо вона намагається повернути відсічену частину балки за годинниковою стрілкою (Рис. 7.5,а), і від'ємною, якщо вона намагається повернути відсічену частину балки проти годинникової стрілки (Рис. 7.5,б).

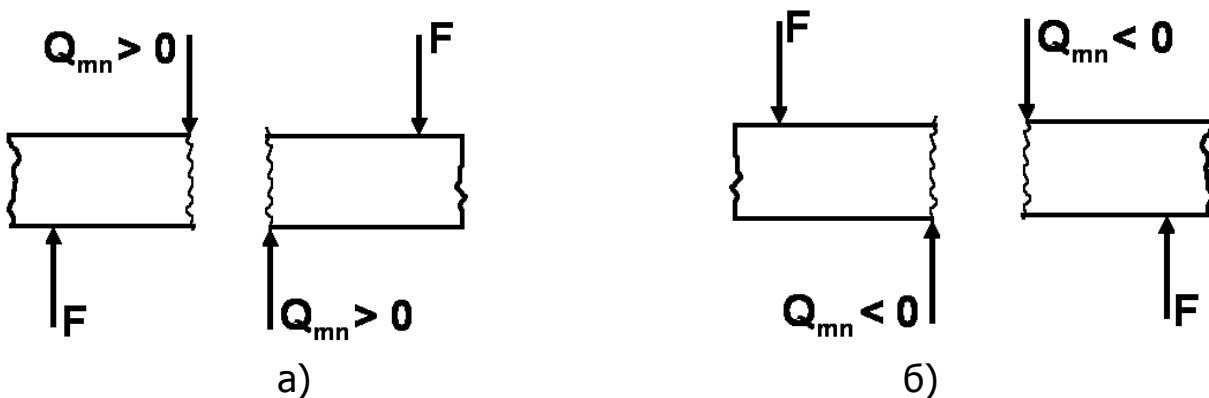


Рисунок 7.5.

Згинальний момент в перерізі балки $m-n$ (Рис. 7.6) вважається додатним, якщо рівнодіючий момент зовнішніх сил ліворуч від перерізу спрямований за годинниковою стрілкою, а праворуч – навпаки (Рис. 7.6,а). У протилежному випадку (Рис. 7.6,б) згинальний момент вважається від'ємним. Моменти, що зображені на Рис. 7.6,а, згинають балку випуклістю вниз, а моменти, що зображені на Рис. 7.6,б, згинають балку

випуклістю догори. Звідси слідує інше, більш зручне для розуміння правило знаків для згинального моменту.

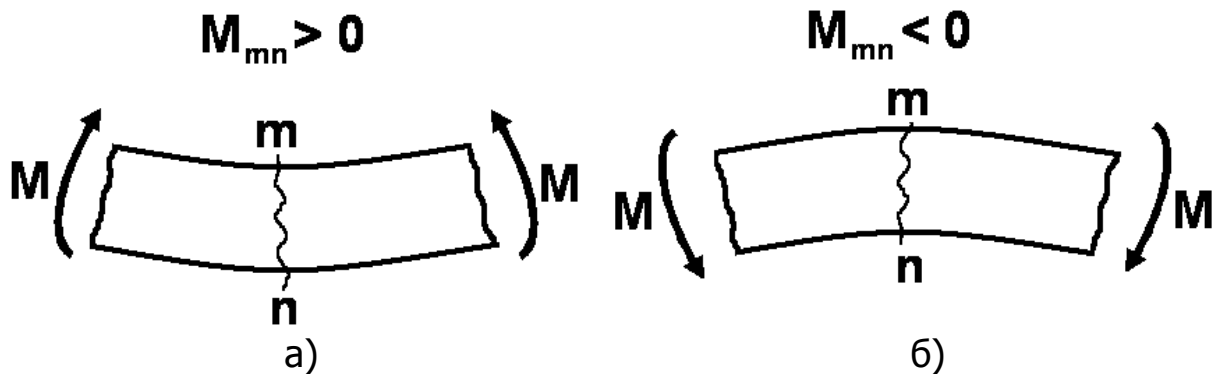


Рисунок 7.6.

Згинальний момент вважається додатним, якщо в перерізі, що розглядається, балка згинається випуклістю вниз. Волокна балки, які розташовані на увігнутій частині, є стиснутими, а на випуклій - розтягання. Таким чином, за домовленості відкладати позитивні ординати епюри згинальних моментів догори від осі ми отримуємо побудову епюри з боку стиснутих волокон балки.

Між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження легко встановлюються певні залежності - похідна від поперечної сили по довжині балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження, похідна від згинального моменту по довжині балки дорівнює поперечній силі, інтенсивність розподіленого навантаження дорівнює другій похідній від згинального моменту по довжині балки, - які записуються у вигляді

$$q = \frac{dQ_Y}{dz}, \quad Q_Y = \frac{dM_X}{dz}, \quad q = \frac{dQ_Y}{dz} = \frac{d^2M_X}{dz^2}.$$

Правильність побудови епюр Q_Y і M_X перевіряється при умовному русі вздовж осі балки тільки зліва направо за допомогою низки правил, що витікає з наведених залежностей або безпосередньо з методу перерізів. Слід пам'ятати, що горизонтальна пряма є лінією нульового порядку, нахилена пряма - лінією першого порядку, а парабола - кривою другого порядку. Взагалі, порядок функції, що описує закон зміни поперечної сили Q_Y , на одиницю менше порядку функції, що описує закон зміни згинального моменту M_X .

1. Якщо на деякій ділянці балки відсутнє розподілене навантаження ($q = 0$), то епюра Q_Y - пряма, паралельна осі балки, тобто

$Q_Y = const$. В даному випадку похідна дорівнює нулю, отже, функція зберігає постійне значення. З останнього витікає, що еюра моментів на цій ділянці – нахилена пряма, тобто функція M_X є лінійною.

2. Якщо на деякій ділянці балки є розподілене навантаження ($q \neq 0$), то еюра Q_Y - нахилена пряма, а еюра M_X - парабола (крива другого порядку). В даному випадку похідна (q) постійна, отже, функція (Q_Y) лінійна. З останнього витікає, що функція M_X є квадратичною.

3. Якщо на деякій ділянці $Q_Y > 0$, то згинальний момент зростає, якщо $Q_Y < 0$, то згинальний момент зменшується, якщо $Q_Y = 0$, то згинальний момент є постійним (чистий вигин).

4. Якщо поперечна сила, змінюючись безперервно, проходить через нульове значення, то у відповідному перерізі згинальний момент має екстремум (максимум або мінімум). У випадку зміни знаку сили Q_Y з «-» на «+» згинальний момент досягає мінімуму, у випадку зміни знаку сили Q_Y з «+» на «-» згинальний момент досягає максимуму.

5. За наявності зосередженої сили на еюрі Q_Y відбувається стрибок у напрямку прикладення цієї сили, який за величиною дорівнює їй.. На еюрі M_X відбувається різка зміна кута нахилу (злам еюри) суміжних ділянок еюри.

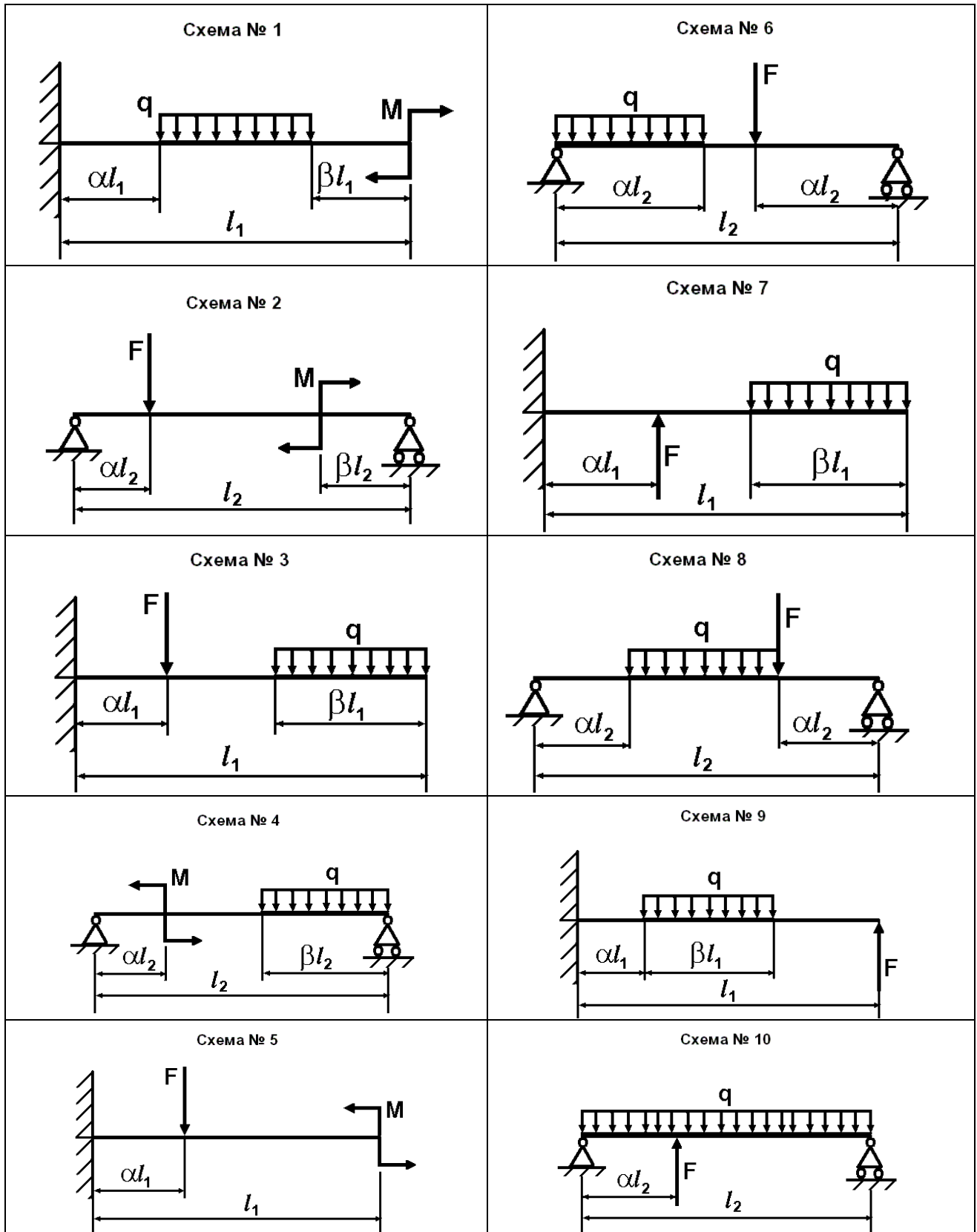
6. Якщо розподілене навантаження спрямовано вниз, то парабола, яка представляє еюру M_X , спрямована випуклістю догори, тобто назустріч навантаженню. Справедливе й зворотне правило, тобто напрям дії розподіленого навантаження та випуклості параболи завжди протилежний.

7. В перерізі на вільному або шарнірно-опертому кінці балки згинальний момент M_X дорівнює нулю, якщо там не прикладений зовнішній момент.

8. Поперечна сила Q_Y на лівій опорі дорівнює за величиною та знаком зовнішній силі (активній або реактивній), на правій - дорівнює за величиною та протилежна за знаком зовнішній силі (активній або реактивній).

9. Якщо до балки прикладений зовнішній момент, то на еюрі M_X відбувається стрибок, який дорівнює за величиною цьому моменту. На еюру Q_Y це ніяк не впливає, тобто ніяких змін не відбувається.

9.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 7

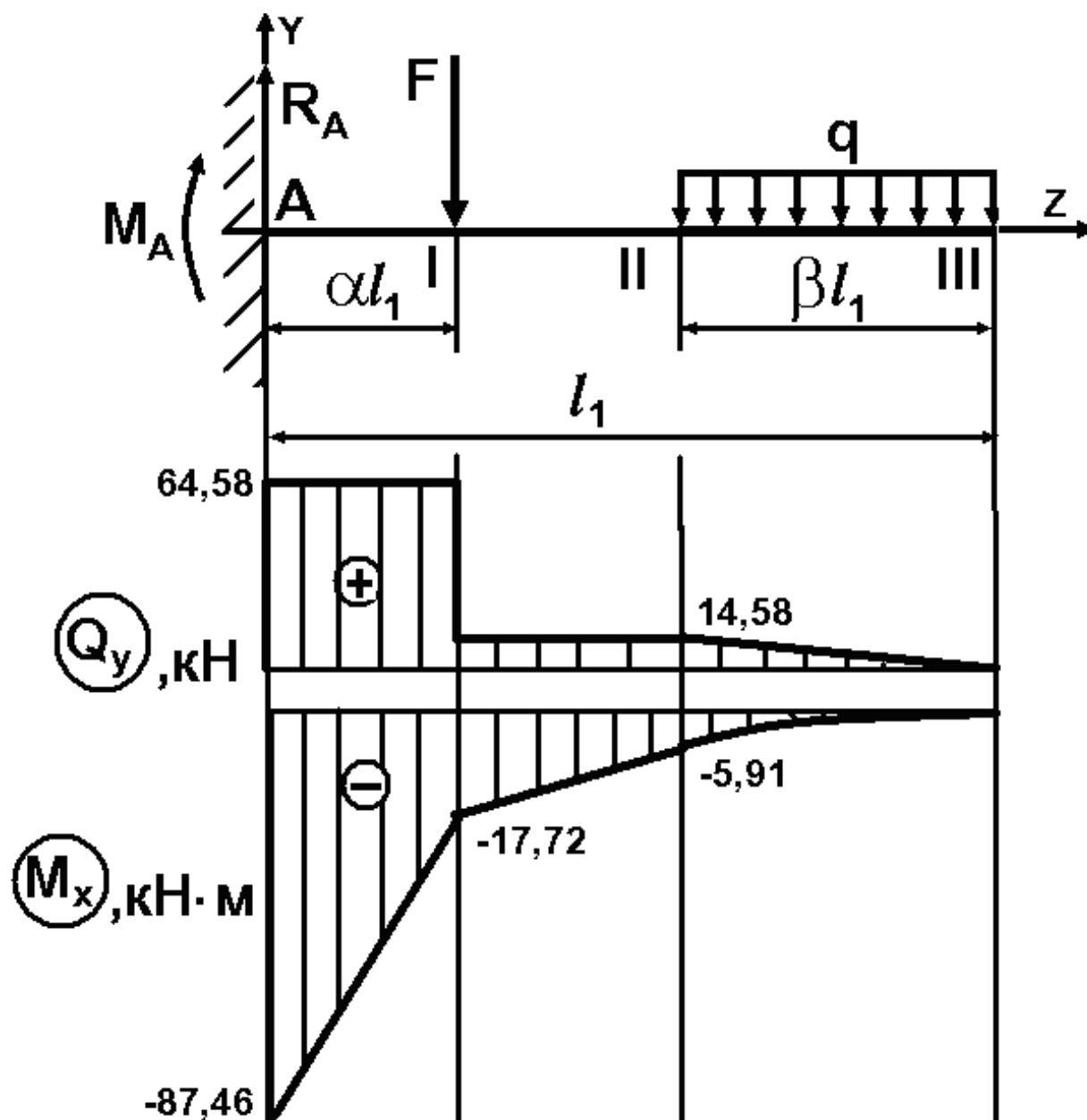


Для бруса, зображеного на схемі та навантаженого зовнішніми факторами, побудувати епюру поперечних сил Q_Y та згинальних моментів M_X .

№	№ схеми	$l_1,$ м	$l_2,$ м	α	β	$M,$ кН·м	$q,$ кН/м	$F,$ кН
1	1	2,5	6,0	0,44	0,26	4,0	20	60
2	2	2,6	6,2	0,42	0,28	4,5	19	55
3	3	2,7	6,3	0,40	0,30	5,0	18	50
4	4	2,8	6,4	0,38	0,32	5,5	17	45
5	5	2,9	6,6	0,36	0,34	6,0	16	40
6	6	3,0	6,8	0,34	0,36	6,5	15	35
7	7	3,1	7,0	0,32	0,38	7,0	14	30
8	8	3,2	7,2	0,30	0,40	7,5	13	25
9	9	3,3	7,4	0,28	0,42	6,0	12	20
0	10	3,4	7,6	0,26	0,44	8,5	11	15
	Е	Д	Г	Е	Д	Г	Е	Д

Зважаючи на те, що вихідні дані в таблиці зведені для двох варіантів завдання – консольної та шарнірно-опертої балок, потрібно брати для розв'язання задачі тільки необхідні.

9.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ - КОНСОЛЬНА БАЛКА



Числові дані: $l_1 = 2,70$ м, $\alpha = 0,40$, $\beta = 0,30$, $F = 50,0$ кН, $q = 18,0$ кН/м.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

На рисунку позначаємо опору A , в якій існують опорна реакції R_A та згинальний момент M_A . Спрямуємо R_A у позитивному напрямку осі Y та момент M_A за годинниковою стрілкою відносно точки A , а вели-

чини будемо визначати з умов рівноваги: сума проекцій сил на вісь Y дорівнює нулю та сума моментів сил та зосереджених моментів відносно точки A дорівнює нулю:

$$\sum_i F_i = 0, \quad R_A - F - q \cdot \beta l_1 = 0, \text{ звідки}$$

$$R_A = F + q \cdot \beta l_1 = 50 + 18 \cdot 2,7 \cdot 0,30 = 64,58 \text{ кН.}$$

$$\sum_i M_{iA} = 0, \quad -M_A - F \cdot \alpha l_1 - q \cdot \beta l_1 \left(l_1 - \frac{\beta l_1}{2} \right) = 0,$$

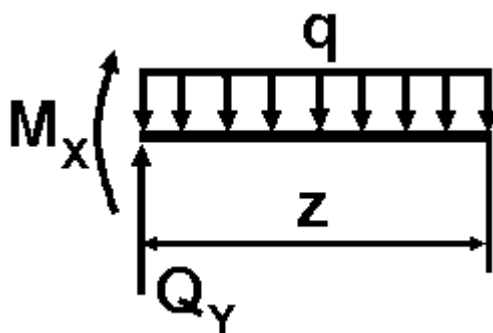
$$M_A = -F \cdot \alpha l_1 - q \cdot \beta l_1 \left(l_1 - \frac{\beta l_1}{2} \right) = -F \cdot \alpha l_1 - q \cdot \beta l_1^2 \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= -50 \cdot 0,4 \cdot 2,7 - 18 \cdot 2,7^2 \cdot 0,30 \cdot (1 - 0,15) = -87,46 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Знак «+» показує, що напрям дії опорних реакцій обрано вірно, знак «-» навпаки. У випадку, коли будь-яка опорна реакція після визначення є від'ємною, необхідно змінити її напрям дії на протилежний, залишаючи числове значення за модулем.

Але визначення опорних реакцій для випадку консольної балки не є необхідним. У нас є вичерпна інформація щодо зовнішнього навантаження (дії активних і реактивних сил) для початку розрахунків внутрішніх факторів. Аналіз напруженого стану балки здійснюємо по ділянках, рухаючись від вільного краю до жорсткого закладення - опори A . Зважаючи на визначені напрями дії опорних реакцій, можна вже стверджувати, що в лівому перерізі на епюрах поперечна сила буде додатною, а згинальний момент від'ємним.

Напрямок дії поперечної сили та згинального моменту в довільному перерізі на будь-якій ділянці обираємо з урахуванням правил знаку. Якщо після розрахунку Q_Y є додатною, то і на епюрі вона буде такою. Те ж саме стосується і згинального моменту M_X .



Ділянка III: $0 \leq z \leq \beta l_1$

В перерізі діють поперечна сила Q_Y та згинальний момент M_X . Для їхнього визначення запишемо умови рівноваги відносно точки перерізу.

Поперечна сила:

$$Q_Y - q \cdot z = 0, \text{ звідки } Q_Y = q \cdot z.$$

При $z = 0$ маємо $Q_Y = 0$ кН;

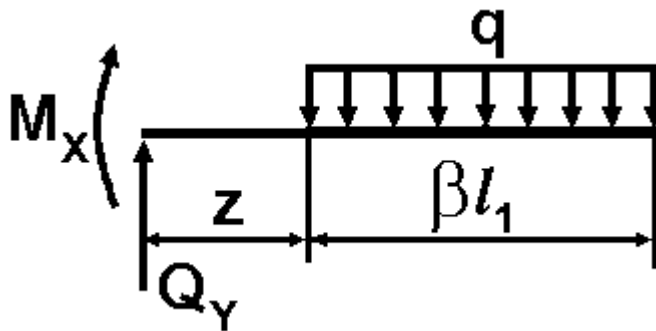
при $z = \beta l_1$ маємо $Q_Y = q \cdot \beta l_1 = 18 \cdot 0,30 \cdot 2,7 = 14,58$ кН.

Згинальний момент:

$$-M_X - q \cdot \frac{z^2}{2} = 0, \text{ звідки } M_X = -q \cdot \frac{z^2}{2}.$$

При $z = 0$ маємо $M_X = 0$ кН·м,

при $z = \beta l_1$ $M_X = -q \cdot \frac{(\beta l_1)^2}{2} = -18 \cdot \frac{0,30^2 \cdot 2,7^2}{2} = -5,91$ кН·м.



Ділянка II:

$$0 \leq z \leq l_1(1 - \alpha - \beta)$$

В перерізі діють поперечна сила Q_Y та згинальний момент M_X . Для їхнього визначення запишемо умови рівноваги відносно точки перерізу.

Поперечна сила:

$$Q_Y - q \cdot \beta l_1 = 0, \text{ звідки } Q_Y = q \cdot \beta l_1.$$

При $z = 0$ маємо $Q_Y = q \cdot \beta l_1 = 18 \cdot 0,30 \cdot 2,7 = 14,58$ кН,

при $z = l_1(1 - \alpha - \beta)$ $Q_Y = q \cdot \beta l_1 = 18 \cdot 0,30 \cdot 2,7 = 14,58$ кН.

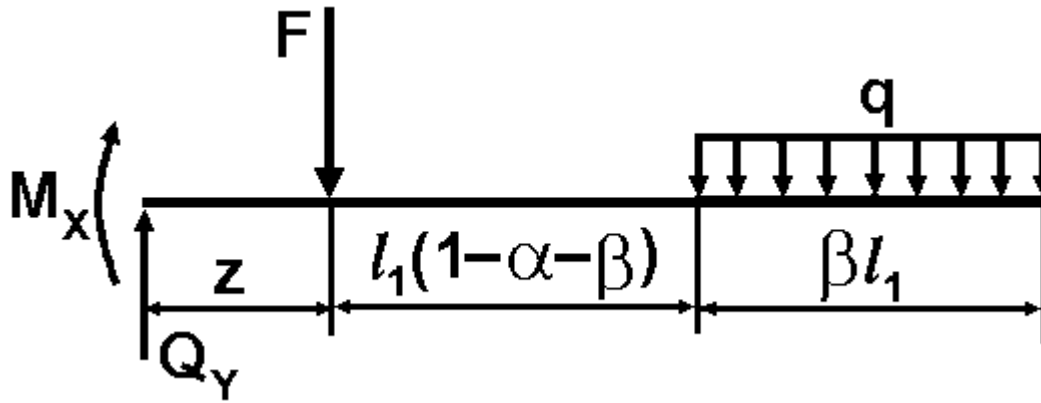
Згинальний момент:

$$-M_X - q \cdot \beta l_1 \cdot \left(\frac{\beta l_1}{2} + z \right) = 0, \text{ звідки } M_X = -q \cdot \beta l_1 \cdot \left(\frac{\beta l_1}{2} + z \right).$$

При $z = 0$ $M_X = -q \cdot \frac{(\beta l_1)^2}{2} = -18 \cdot \frac{0,30^2 \cdot 2,7^2}{2} = -5,91$ кН·м,

при $z = l_1(1 - \alpha - \beta)$ маємо

$$\begin{aligned} M_X &= -q \cdot \beta l_1 \cdot \left(\frac{\beta l_1}{2} + l_1(1 - \alpha - \beta) \right) = -q \cdot \beta l_1^2 \cdot \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2} \right) = \\ &= -18 \cdot 0,30 \cdot 2,7^2 \cdot (1 - 0,40 - 0,15) = -17,72 \text{ кН·м.} \end{aligned}$$



Ділянка I: $0 \leq z \leq \alpha l_1$

В перерізі діють поперечна сила Q_Y та згинальний момент M_X . Для їхнього визначення запишемо умови рівноваги відносно точки перерізу.

Поперечна сила:

$$Q_Y - F - q \cdot \beta l_1 = 0, \text{ звідки } Q_Y = F + q \cdot \beta l_1.$$

$$\text{При } z = 0 \quad Q_Y = F + q \cdot \beta l_1 = 50 + 18 \cdot 0,30 \cdot 2,7 = 64,58 \text{ кН,}$$

$$\text{при } z = \alpha l_1 \quad Q_Y = F + q \cdot \beta l_1 = 50 + 18 \cdot 0,30 \cdot 2,7 = 64,58 \text{ кН.}$$

Згинальний момент:

$$-M_X - F \cdot z - q \cdot \beta l_1 \cdot \left(l_1 \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2} \right) + z \right) = 0, \text{ звідки}$$

$$M_X = -F \cdot z - q \cdot \beta l_1 \cdot \left(l_1 \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2} \right) + z \right).$$

При $z = 0$ маємо

$$M_X = -q \cdot \beta l_1^2 \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2} \right) = -18 \cdot 0,30 \cdot 2,7^2 \cdot (1 - 0,40 - 0,15) = -17,72$$

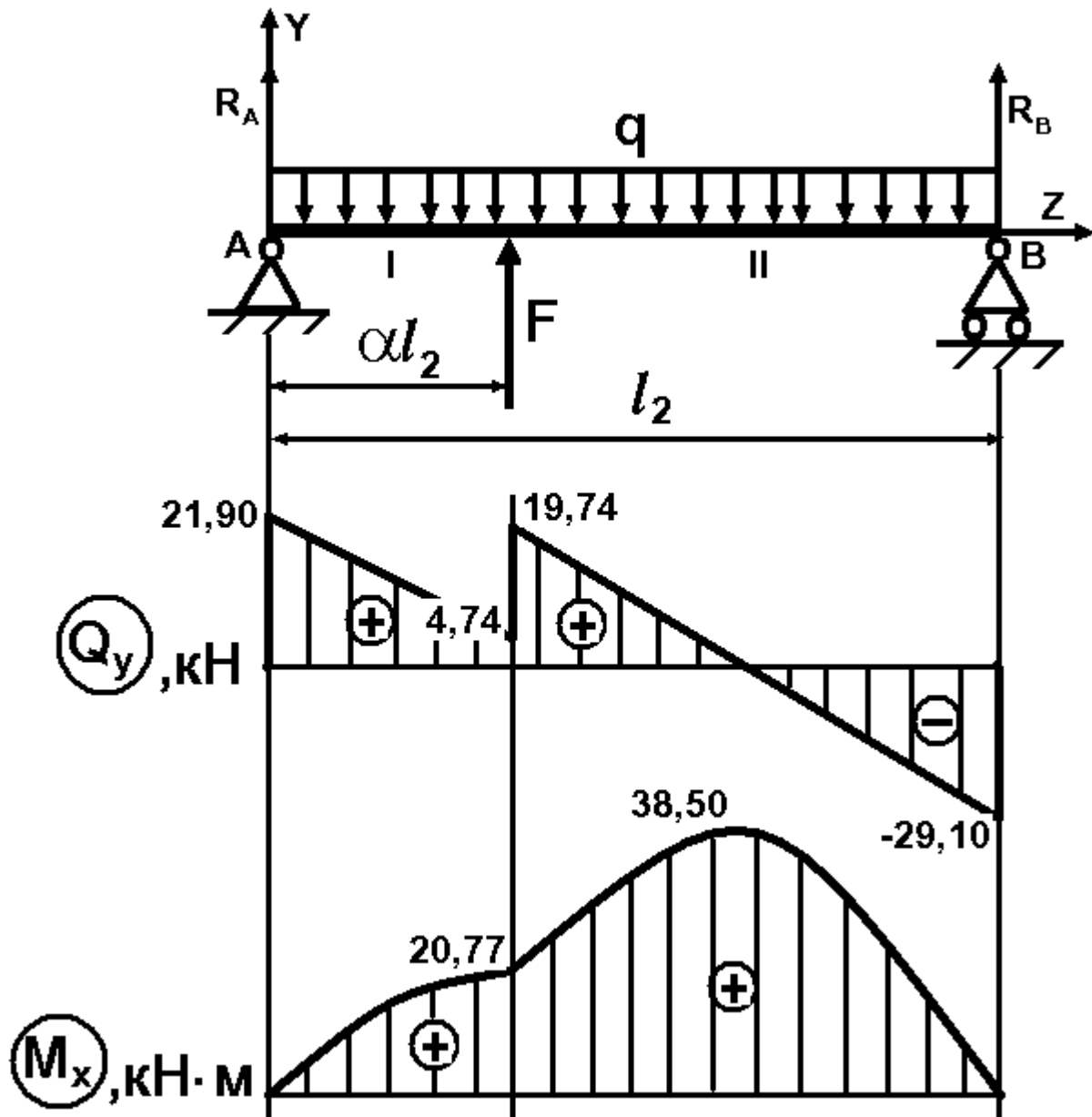
кН·м, при $z = \alpha l_1$ маємо

$$M_X = -F \cdot \alpha l_1 - q \cdot \beta l_1^2 \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= -50 \cdot 0,4 \cdot 2,7 - 18 \cdot 2,7^2 \cdot 0,30 \cdot (1 - 0,15) = -87,46 \text{ кН·м.}$$

Максимальний згинальний момент (за абсолютною величиною) для цієї конструкції дорівнює $M_{max} = 87,46$ кН·м, а максимальна поперечна сила (за абсолютною величиною) $Q_{max} = 64,58$ кН. Ці дані будуть використані під час вирішення Задачі № 8.

7.3. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ – ШАРІРНО-ОПЕРТА БАЛКА



Числові дані: $l_2 = 6,00$ м, $\alpha = 0,26$, $F = 15,0$ кН, $q = 11,0$ кН/м.

На рисунку позначаємо опори A та B , в яких існують відповідні опорні реакції R_A та R_B . Спрямуємо їх у позитивному напрямку осі Y , а величини будемо визначати з умов рівноваги балки: сума проєкцій сил на вісь Y дорівнює нулю та сума моментів сил та зосереджених моментів відносно точки A дорівнює нулю:

$$\sum_i F_i = 0, \quad R_A + R_B + F - q \cdot l_2 = 0$$

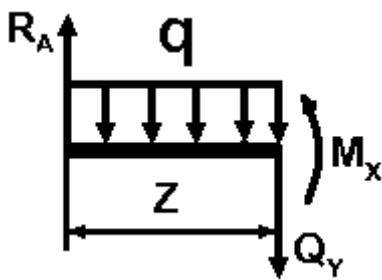
$$\sum_i M_{iA} = 0, R_B \cdot l_2 - q \cdot l_2 \cdot \frac{l_2}{2} + F \cdot \alpha l_2 = 0.$$

$$R_B = \frac{1}{l_2} \left(q \cdot \frac{l_2^2}{2} - F \cdot \alpha l_2 \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{11 \cdot 6^2}{2} - 15 \cdot 0,26 \cdot 6 \right) = 29,10 \text{ кН};$$

$$R_A = q \cdot l_2 - R_B - F = 11 \cdot 6 - 29,10 - 15 = 21,90 \text{ кН}.$$

Знак «+» для визначених опорних реакцій R_A та R_B показує, що напрям їхньої дії обрано вірно. Як завжди, при отриманні від'ємного значення для будь-якої реакції необхідно змінити напрям її дії на протилежний, беручи в подальших розрахунках отриману величину за модулем. Аналіз напруженого стану балки здійснюємо по ділянках, рухаючись від опори A до опори B .

Знову наголошуємо на тому, що напрям дії поперечної сили та згинального моменту в довільному перерізі на будь-якій ділянці обираємо з урахуванням правил знаку. Якщо після розрахунку Q_Y є додатною, то і на епюрі вона буде такою. Те ж саме стосується і згинального моменту M_X .



Ділянка I: $0 \leq z \leq \alpha l_2$

В перерізі діють поперечна сила Q_Y та згинальний момент M_X . Для їхнього визначення запишемо умови рівноваги відносно точки перерізу.

Поперечна сила:

$$-Q_Y + R_A - q \cdot z = 0, \text{ звідки } Q_Y = R_A - q \cdot z.$$

При $z = 0$ маємо $Q_Y = R_A = 21,90 \text{ кН}$,

при $z = \alpha l_2$ $Q_Y = R_A - q \cdot \alpha l_2 = 21,90 - 11 \cdot 0,26 \cdot 6 = 4,74 \text{ кН}$.

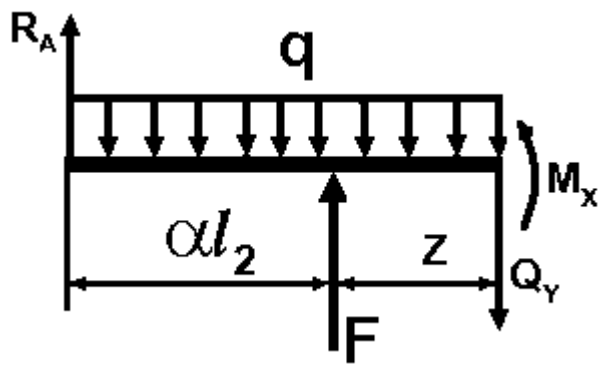
Згинальний момент:

$$M_X - R_A \cdot z + q \cdot \frac{z^2}{2} = 0, \text{ звідки } M_X = R_A \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2}.$$

При $z = 0$ маємо $M_X = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}$, при $z = \alpha l_2$

$$M_X = R_A \cdot \alpha l_2 - q \cdot \frac{(\alpha l_2)^2}{2} = 21,90 \cdot 0,26 \cdot 6 - 11 \cdot \frac{(0,26 \cdot 6)^2}{2} = 20,77$$

кН·м.



Ділянка II: $0 \leq z \leq l_2 - \alpha l_2$

В перерізі діють поперечна сила Q_Y та згинальний момент M_X . Для їхнього визначення запишемо умови рівноваги відносно точки перерізу.

Поперечна сила:

$$-Q_Y + R_A + F - q \cdot (\alpha l_2 + z) = 0,$$

$$\text{звідки } Q_Y = R_A + F - q \cdot (\alpha l_2 + z).$$

При $z = 0$ маємо

$$Q_Y = R_A + F - q \cdot \alpha l_2 = 21,90 + 15 - 11 \cdot 0,26 \cdot 6 = 19,74 \text{ кН},$$

при $z = l_2(1 - \alpha)$ маємо

$$Q_Y = R_A + F - q \cdot l_2 = 21,90 + 15 - 11 \cdot 6 = -29,10 \text{ кН}.$$

Згинальний момент:

$$M_X - R_A \cdot (\alpha l_2 + z) - F \cdot z + q \cdot \frac{(\alpha l_2 + z)^2}{2} = 0,$$

$$\text{звідки } M_X = R_A \cdot (\alpha l_2 + z) + F \cdot z - q \cdot \frac{(\alpha l_2 + z)^2}{2}.$$

При $z = 0$ маємо

$$M_X = R_A \cdot \alpha l_2 - q \cdot \frac{(\alpha l_2)^2}{2} = 21,90 \cdot 0,26 \cdot 6 - 11 \cdot \frac{(0,26 \cdot 6)^2}{2} = 20,77$$

кН·м,

$$\text{при } z = l_2(1 - \alpha) \text{ маємо } M_X = R_A \cdot l_2 + F \cdot l_2(1 - \alpha) - q \cdot \frac{l_2^2}{2} =$$

$$= 21,90 \cdot 6 + 15 \cdot 6 \cdot 0,74 - 11 \cdot \frac{6^2}{2} = 0 \text{ кН·м}.$$

Максимальний згинальний момент в конструкції діє в тому перерізі, де поперечна сила $Q_Y = 0$. На ділянці II поперечна сила змінює знак з «+» на «-», тому на цій ділянці треба визначити величину z_* , при якій $Q_Y = 0$. Застосовуючи загальний вираз для поперечної сили на цієї ді-

лянці $Q_Y = R_A + F - q \cdot (\alpha l_2 + z)$ і підставляючи до нього замість z невідому z_* , маємо:

$$Q_Y = R_A + F - q \cdot (\alpha l_2 + z_*) = 0, \text{ звідки}$$

$$z_* = \frac{R_A + F - q \cdot \alpha l_2}{q} = \frac{21,90 + 15 - 11 \cdot 0,26 \cdot 6}{11} = 1,79 \text{ м. Тому}$$

$$M_{max} = R_A \cdot (\alpha l_2 + z_*) + F \cdot z_* - q \cdot \frac{(\alpha l_2 + z_*)^2}{2} =$$

$$21,90 \cdot (0,26 \cdot 6 + 1,79) + 15 \cdot 1,79 - 11 \cdot \frac{(0,26 \cdot 6 + 1,79)^2}{2} = 38,50 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Для перевірки правильності побудови епюр поперечної сили Q_Y та згинального моменту M_X скористаємось наведеними вище правилами. Шарнірне обпирання балки за відсутності зосередженого моменту в опорах дає в лівому та правому перерізах $M_A = M_B = 0$ кН·м. Епюра Q_Y є нахиленою прямою через наявність на всій довжині балки розподіленого навантаження $q = const$. Його напрям дії вниз визначає характер епюри M_X , яка є параболою, спрямованою випуклістю догори, назустріч дії q . В місці прикладення зосередженої сили на епюрі Q_Y з'являється стрибок на величину сили F у напрямку її дії. В цьому перерізі на епюрі M_X з'являється злам. По краях балки на лівому перерізі $Q_Y = R_A$, а на правому $Q_Y = -R_B$. На частині конструкції, де $Q_Y > 0$, момент M_X зростає, на частині конструкції, де $Q_Y < 0$, момент M_X зменшується. При зміні знаку з «+» на «-» на епюрі M_X визначається максимум.

Аналіз побудованих епюр дає наступні числові дані $M_{max} = 38,50$ кН·м, $Q_{max} = 29,10$ кН. Ці дані є вихідними для задачі № 8 і приклад розв'язання задачі дається саме для них. Насправді, потрібно аналізувати певний переріз, в якому діє максимальний згинальний момент, але поперечна сила там може бути не максимальною. Беручи максимальне значення Q_{max} в іншому перерізі, ми певним чином погіршуємо реальну ситуацію, але, якщо в цьому випадку, виконується умова міцності, це означатиме, що в решті перерізів вона гарантовано буде виконуватися.

10. ЗАДАЧА № 8. ВИБІР ДВОТАВРОВОГО ПЕРЕРІЗУ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Найбільш вигідними перерізами балок з точки зору втрат матеріалу є такі, в яких найбільша частка матеріалу розташована у верхній та нижній частинах перерізу, де напруження є найбільшими і саме тому матеріал використовується найповніше. Велике практичне значення має питання про раціональний вибір двотаврового перерізу, тому що цей профіль є основним балочним профілем.

При поперечному вигині балок разом з нормальними σ , як відомо, виникають і дотичні напруження τ . Взагалі, умова міцності має бути записана для так званої небезпечної точки перерізу балки. Цією точкою буде одна з трьох точок: 1) точка, де нормальні напруження досягають найбільшої величини; 2) точка, де дотичні напруження досягають найбільшої величини; 3) точка, де σ і τ , хоча й не приймають максимальних значень, але в своїй комбінації створюють найбільш невідповідне сполучення, тобто найбільше еквівалентне напруження за прийнятою для розрахунку теорією міцності.

Перша точка розташована у крайніх волокнах того перерізу, де згинальний момент має найбільше значення. Напружений стан в такій точці є лінійним і умова міцності записується у вигляді

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (8.1)$$

В наведеній формулі ключовим є визначення моменту опору перерізу W_x відносно нейтральної лінії перерізу, за цими даними для стандартних профілів визначається решта геометричних характеристик.

Друга точка знаходиться на нейтральній лінії того перерізу, де поперечна сила є найбільшою. В такій точці спостерігається чистий зсув (відсутність нормальних напружень) і умова міцності записується у вигляді

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{d \cdot I_x} \leq [\tau]. \quad (8.2)$$

Стосовно положення третьої точки немає повної визначеності. Тому використовують так звані теорії міцності, що враховують і нормальні, і дотичні напруження. За четвертою теорією міцності еквівалентне напруження визначається за формулою

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]. \quad (8.3)$$

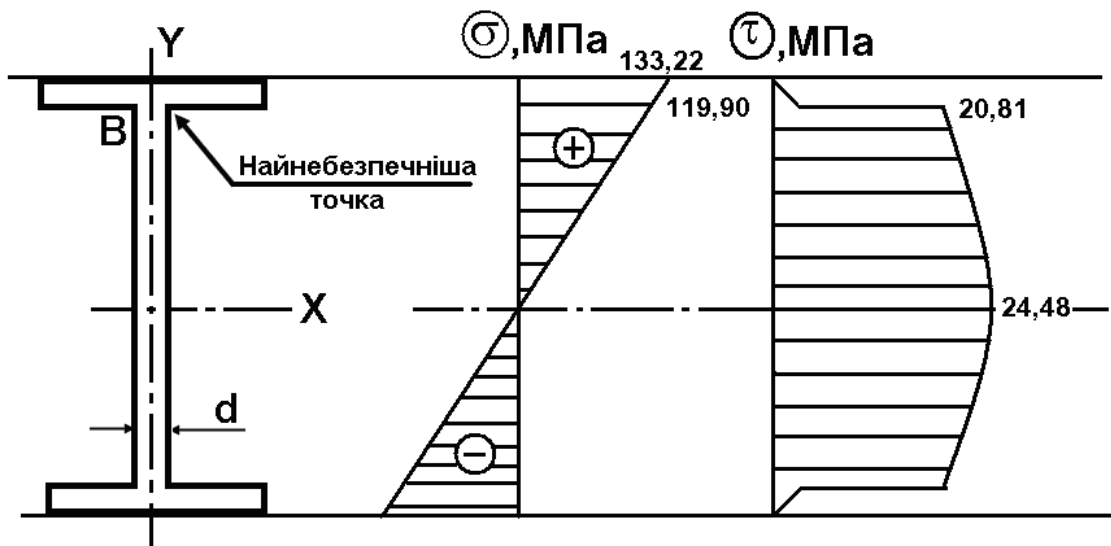
Практика застосування та розрахунків балок показала доцільність розрахунків на міцність по найбільших нормальних напруженнях (це вважається основною умовою міцності), які виникають в їхніх поперечних перерізах. Незважаючи на це, в запропонованій задачі необхідно провести розрахунки на міцність по всіх критеріях.

10.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 8

Для бруса, зображеного на схемі та навантаженого зовнішніми факторами (задача 6), підібрати за умов міцності сталеву балку двотаврового поперечного перерізу за умов побудови епюри поперечних сил Q_y та згинальних моментів M_x у попередній задачі. Матеріал бруса – сталь Ст3, допустимі нормальні напруження $[\sigma]=160$ МПа, допустимі дотичні напруження $[\tau] \approx 0,58 \cdot [\sigma] \approx 90$ МПа, модуль пружності $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

10.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

РОЗВ'ЯЗАННЯ



Числові дані: $M_{max} = 38,50$ кН·м, $Q_{max} = 29,10$ кН.

За умови міцності (8.1) по нормальних напруженнях

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_X} \leq [\sigma],$$

за даними, що були отримані під час вирішення задачі №6 для шарнірно-опертої балки ($M_{max} = 38,50$ кН·м), визначаємо момент опору поперечного перерізу відносно осі X , беручи величини у відповідній розмірності:

$$W_X \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{38,50 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 240,63 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 240,63 \text{ см}^3.$$

За цією величиною за ГОСТ 8239-89 (див. Додаток) обираємо двотавр № 24, у якого величина $W_X^{ДТ} = 289,0 \text{ см}^3 = 289,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ є найближчою більшою порівняно з отриманою ($W_X^{ДТ} \geq W_X$).

Проводимо уточнений розрахунок по нормальних напруженнях

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_X^{ДТ}} = \frac{38,50 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 133,22 \text{ МПа} \leq [\sigma].$$

Для цього двотавра за даними ГОСТ визначаємо також такі величини:

- площа перерізу $A = 34,8 \text{ см}^2 = 34,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$;
- статичний момент напівперерізу $S_X = 163 \text{ см}^3 = 163 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$;
- момент інерції $I_X = 3460 \text{ см}^4 = 3460 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$;
- товщина стінки $d = 5,6 \text{ мм} = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

За умовою міцності по дотичних напруженнях (3.4.2)

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_X}{d \cdot I_X} \leq [\tau]$$

проводимо перевірку для перерізу, де діє найбільша поперечна сила $Q_Y = Q_{max}$:

$$\tau_{max} = \frac{29,1 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{5,6 \cdot 10^{-3} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 24,48 \text{ МПа} \leq [\tau].$$

Отже, умова міцності по дотичних напруженнях виконується.

При перевірці міцності за 4-ою теорією міцності треба враховувати як нормальні, так і дотичні напруження в перерізі:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]. \text{ Задача ускладнюється двома факторами:}$$

- 1) в перерізі максимальні нормальні напруження виникають там, де дотичні напруження дорівнюють нулю, а максимальні дотичні – там, де нормальні дорівнюють нулю (див. Рисунок до задачі);
- 2) вздовж балки переріз, де діє максимальний згинальний момент, не збігається з тим, де діє найбільша поперечна сила.

Для двотавра, долаючи проблеми п.1, напруження перевіряють в точці B , де з'єднується полиця та стінка, де нормальні та дотичні напруження водночас близькі до максимальних, причому приймаються такі співвідношення: $\sigma_B \approx 0,9\sigma_{max}$, $\tau_B \approx 0,85\tau_{max}$.

Для подолання проблем за п.2 необхідно визначити переріз, де водночас мають великі значення згинальний момент і поперечна сила. Для розрахунків беремо найгірший варіант, перевіряємо для максимальних згинального моменту та поперечної сили. Якщо в цьому випадку умова міцності виконується, автоматично для решти випадків це теж має місце. Остаточоно:

$$\sigma_B \approx 0,9\sigma_{max} = 0,9 \cdot 133,22 = 119,90 \text{ МПа,}$$

$$\tau_B \approx 0,85\tau_{max} = 0,85 \cdot 24,48 = 20,81 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_B^2 + 3 \cdot \tau_B^2} = \sqrt{119,90^2 + 3 \cdot 20,81^2} = 125,21 \text{ МПа} \leq [\sigma].$$

11. ЗАДАЧА № 9. ВИБІР ГЕОМЕТРИЧНО ПРОСТИХ ПЕРЕРІЗІВ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Під час вирішення попередньої задачі здійснювалися підбір і перевірка двотаврового перерізу балки, що працює в умовах поперечного вигину. Найбільш вигідними є перерізи у формі двотавра, швелера (за умов виключення можливості закручування балки), коробчасті. Безумовно, існують багато різних форм перерізів, які потенційно могли також використовуватися в конструкції, тому що визначальним є момент опору перерізу W_X – геометрична характеристика міцності балки, що згинається. Але різні перерізи мають різну площу, яка забезпечує необхідну величину W_X . Зважаючи не те що, витрата матеріалу при заданій довжині балки прямо пропорційна площі поперечного перерізу, отже, при визначеному за умов міцності W_X переріз з меншою площею буде більш раціональним.

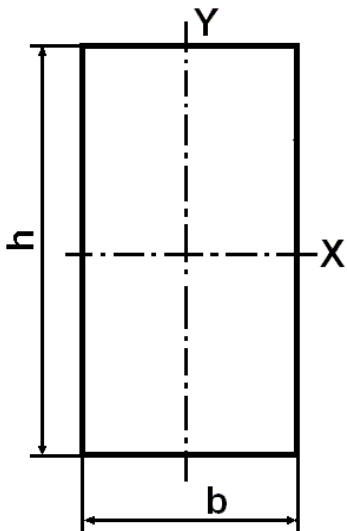
11.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 9

Для бруса, зображеного на схемі та навантаженого зовнішніми факторами (задача 6), підібрати за умов міцності по нормальних напруженнях сталеву балку квадратного (зі стороною b), прямокутного (зі сторонами h і b , та їхнім співвідношенням $h/b=2$), круглого (з діаметром d) та кільцевого (із зовнішнім D і внутрішнім d діаметрами та їхнім співвідношенням $D/d=1,25$) поперечних перерізів. Порівняти їх за матеріалоемністю між собою та балкою двотаврового поперечного перерізу. Дані для розрахунків потрібно взяти з розв'язання задач 7, 8.

11.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Враховуючи, що нижче вказані профілі не є стандартизованими, для вирішення задачі використовуємо отриману за умови міцності по нормальних напруженнях величину W_X , що було в принципі неможливо при виборі двотаврового перерізу – необхідно було міркувати над вибором найближчого меншого двотавра (і як наслідок, робота в умовах певного перевантаження) або найближчого більшого (і як наслідок, робота в умовах певного недовантаження).



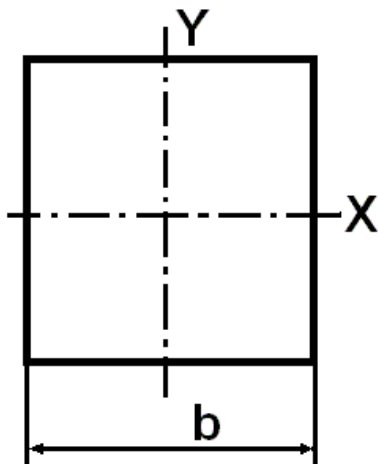
Для прямокутного поперечного перерізу:
осьовий момент опору перерізу (за умови

$$h = 2b) \quad W_X = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3}b^3, \quad \text{відповідно}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot W_X} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 240,63} = 7,12 \text{ см.}$$

Площа перерізу дорівнює

$$A = hb = 2b^2 = 2 \cdot 7,12^2 = 101,39 \text{ см}^2.$$



Для квадратного поперечного перерізу:

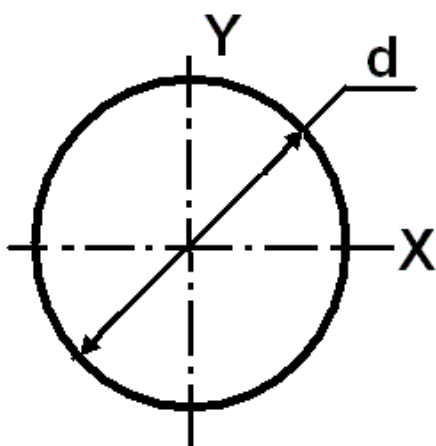
$$\text{осьовий момент опору перерізу } W_X = \frac{b^3}{6}, \text{ відповідно}$$

відповідно

$$b = \sqrt[3]{6 \cdot W_X} = \sqrt[3]{6 \cdot 240,63} = 11,30 \text{ см.}$$

Площа перерізу дорівнює

$$A = b^2 = 11,30^2 = 127,74 \text{ см}^2.$$



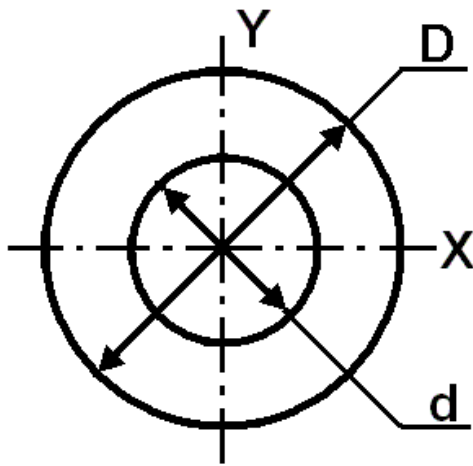
Для круглого поперечного перерізу:
осьовий момент опору перерізу $W_X = \frac{\pi d^3}{32}$,

$$\text{відповідно} \quad d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \cdot W_X} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \cdot 240,63} = 13,48 \text{ см.}$$

Площа перерізу дорівнює

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 13,48^2 = 142,78 \text{ см}^2.$$



Для кільцевого поперечного перерізу: осьовий момент опору перерізу (за умови $\frac{D}{d} = n = 1,25$) $W_x = \frac{\pi d^3}{32} \left(n^3 - \frac{1}{n} \right)$, відповідно (за умов $\left(n^3 - \frac{1}{n} \right) = 1,153$, $(n^2 - 1) = 0,563$)

$$d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \cdot \left(n^3 - \frac{1}{n} \right)} \cdot W_x} = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \cdot 1,153} \cdot 240,63} = 12,86 \text{ см.}$$

Площа перерізу дорівнює

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 (n^2 - 1) = \frac{\pi}{4} \cdot 12,86^2 \cdot 0,563 = 73,13 \text{ см}^2.$$

Отже, при порівнянні площин поперечних перерізів найкращим (тобто з найменшою площею, яка забезпечує виконання умов міцності) є кільце. Далі в порядку погіршення поперечні перерізи розташовані таким чином: прямокутник, квадрат, коло. Останні визначення формулюють правило під час обирання раціонального перерізу – слід прагнути, щоб вигин балки відбувався в площині її найбільшої жорсткості, або, іншими словами, щоб вісь, відносно якої момент інерції максимальний, була нейтральною віссю перерізу.

12. ЗАДАЧА № 10. СТІЙКІСТЬ СТЕРЖНІВ ПРИ ПОЗДОВЖНЬОМУ ЗГИНАННІ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

При осьовому стисканні стержня постійного поперечного переріза в межах пропорційності величину критичної сили $F_{\text{кр}}$ визначають за формулою Ейлера

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{l_{\text{пр}}^2} = \frac{\pi^2 EI}{(\nu l)^2}, \quad (10.1)$$

де E - модуль поздовжньої пружності матеріалу стержня; I - мінімальний момент інерції бруто площини A поперечного перерізу стержня; $l_{\text{пр}} = \nu l$ - приведена (вільна) довжина стержня (довжина, яка при заданому закріпленні стержня еквівалентна за стійкістю довжині стержня з шарнірно закріпленими кінцями); l - дійсна довжина стержня; ν - коефіцієнт довжини, що залежить від способу закріплення та навантаження стержня.

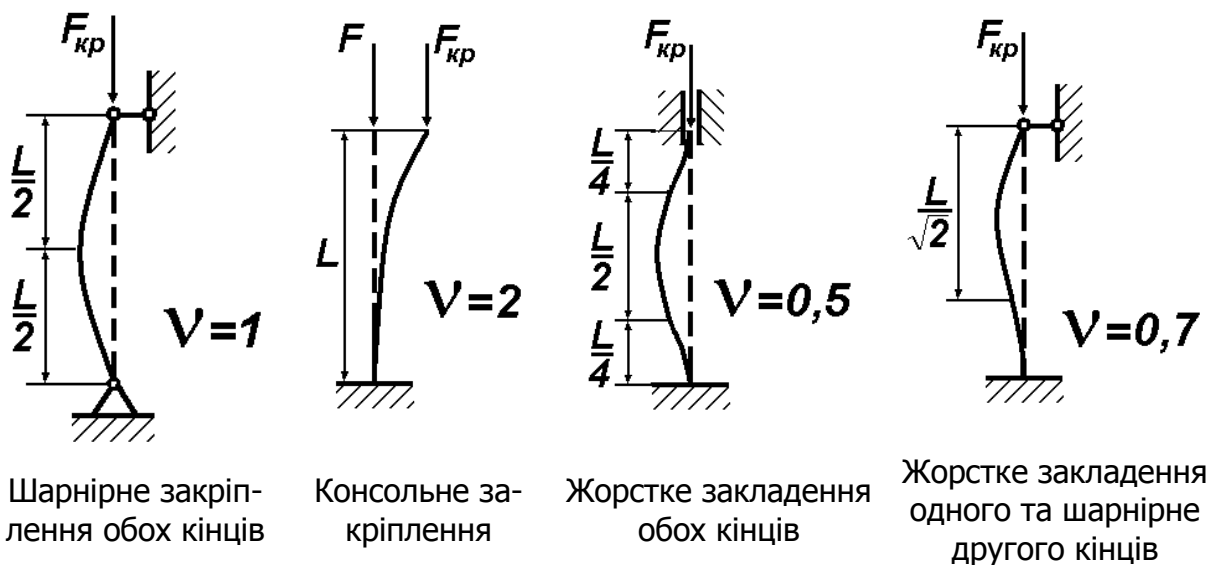


Рисунок 10.1.

На Рис. 10.1 наведені найпростіші випадки стискання стержнів і відповідні до них значення коефіцієнта ν .

Критичне напруження $\sigma_{\text{кр}}$ визначається за формулою

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (10.2)$$

де $\lambda = \frac{l_{\text{ГПР}}}{i}$ - гнучкість стержня (характеризує здатність стержня опиратися вигину залежно від розмірів і способу закріплення кінців). В наведеному виразі $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ мінімальний радіус інерції площі A поперечного перерізу стержня. Наведена формула (10.2) справедлива тільки для стержнів великої гнучкості при $\lambda \geq \lambda_{\text{ГР}}$, де $\lambda_{\text{ГР}}$ - гранична гнучкість матеріалу стержня. В разі $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{\text{ГР}}$ для стержнів середньої гнучкості розрахунки проводять за формулою Ф.С.Ясинського

$$\sigma_{\text{КР}} = a - b\lambda, \quad (10.3)$$

де коефіцієнти a , b , а також інтервал застосування наведеної формули зведені в Таблицю 10.1.

Таблиця 10.1.

Матеріал	a , МПа	b , МПа	λ_0	$\lambda_{\text{ГР}}$
Ст2	264	0,70	60	105
Ст3	310	1,14	60	100
20, Ст4	328	1,15	60	96
45	449	1,67	52	85

Стержні малої гнучкості $\lambda < \lambda_0$ розраховують не на стійкість, а на міцність.

Для отримання допустимого напруження на стійкість, необхідно обрати коефіцієнт запасу $n_{\text{СТ}}$. Тоді

$$[\sigma]_{\text{СТ}} = \frac{\sigma_{\text{КР}}}{n_{\text{СТ}}}. \quad (10.4)$$

Коефіцієнт запасу на стійкість завжди приймають трішки більше основного коефіцієнту запасу на міцність, для сталей його вибирають в межах 1,8...3,0. Допустиме напруження на стійкість $[\sigma]_{\text{СТ}}$ і допустиме напруження на міцність при стисканні $[\sigma_-]$ пов'язані співвідношенням

$$[\sigma]_{\text{СТ}} = \varphi[\sigma_-], \quad (10.5)$$

де φ - коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при розрахунках на стійкість. Значення цього коефіцієнту залежно від мате-

ріалу та величини λ для сталей наведено в Таблиці 10.2. (для $\lambda=0$ $\varphi=1,00$)

Таблиця 10.2.

λ	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ , Ст2, Ст3, Ст4	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60
φ , Ст5	0,98	0,95	0,92	0,89	0,86	0,82	0,76	0,70	0,62	0,51
λ	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
φ , Ст2, Ст3, Ст4	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19
φ , Ст5	0,43	0,36	0,33	0,29	0,26	0,24	0,21	0,19	0,17	0,16

Перевірочний розрахунок стиснутих стержнів при використанні таблиці коефіцієнтів φ проводиться за наступною схемою:

1) виходячи з відомих розмірів і форми поперечного перерізу визначаємо осьовий момент інерції I , площу A , мінімальний радіус інерції

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \text{ і гнучкість } \lambda = \frac{l_{\text{ГП}}}{i};$$

2) за Таблицею 10.2 знаходимо коефіцієнт φ і розраховуємо допустиме напруження на стійкість $[\sigma]_{\text{СТ}} = \varphi[\sigma_-]$, для Ст2, Ст3, Ст4 величина $[\sigma_-]$ знаходиться в діапазоні 140...160 МПа;

3) порівнюємо дійсне значення $\sigma = \frac{F}{A}$ з допустимим напруженням $[\sigma]_{\text{СТ}}$ на стійкість $\sigma \leq [\sigma]_{\text{СТ}}$;

4) критичне напруження $\sigma_{\text{КР}}$ визначаємо відповідно до визначеного λ у порівнянні з $\lambda_{\text{ГП}}$ або за формулою (10.2), або (10.3);

5) визначаємо критичну силу $F_{\text{КР}} = \sigma_{\text{КР}} A$;

6) коефіцієнт запасу на стійкість $n_{\text{СТ}} = \frac{F_{\text{КР}}}{F} = \frac{\sigma_{\text{КР}}}{\sigma}$.

Наведений метод розрахунку є універсальним в тому сенсі, що він не пов'язаний з межами застосування формули Ейлера та може бути використаним при всіх значеннях гнучкості, для яких існують табличні значення коефіцієнту φ .

В Таблиці 10.2 наведені дані φ відповідно до λ через 10 одиниць. Для розрахунку φ , яке відповідає довільному λ , пропонується наступна схема:

1) визначається діапазон, якому належить визначене λ , границі цього діапазону позначаємо як: ліва границя діапазону $\lambda_{\text{ЛГР}}$, права границя $\lambda_{\text{ПГР}}$, тоді $\lambda_{\text{ЛГР}} < \lambda < \lambda_{\text{ПГР}}$;

2) визначається величина $\Delta = \lambda - \lambda_{\text{ЛГР}} > 0$;

3) визначаємо за Таблицю 10.2 коефіцієнти φ_1 , який відповідає $\lambda_{\text{ЛГР}}$, та φ_2 , який відповідає $\lambda_{\text{ПГР}}$, $\varphi_1 > \varphi_2$;

4) остаточно для розрахункового λ за лінійною інтерполяцією табличних даних

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{10} \cdot \Delta. \quad (10.6)$$

12.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 10

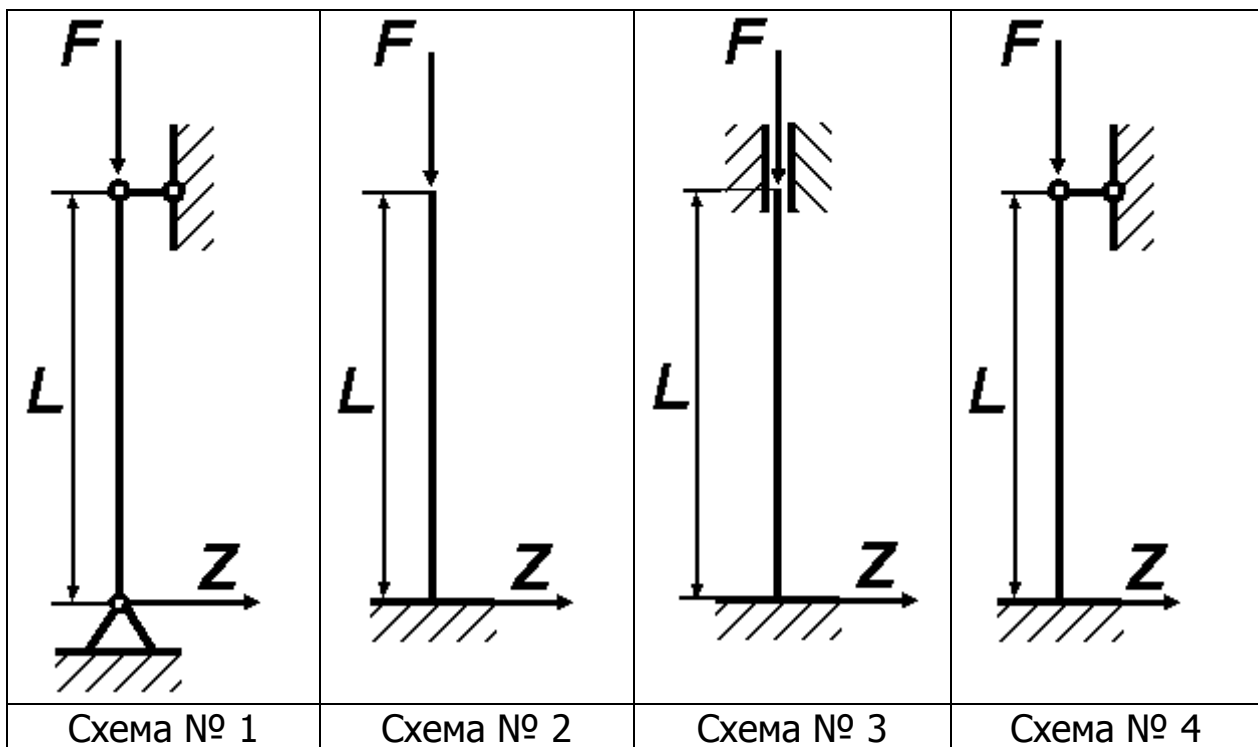
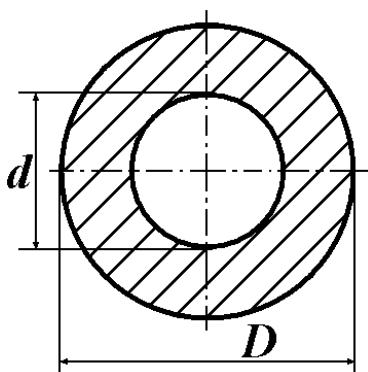


Рисунок 10.2

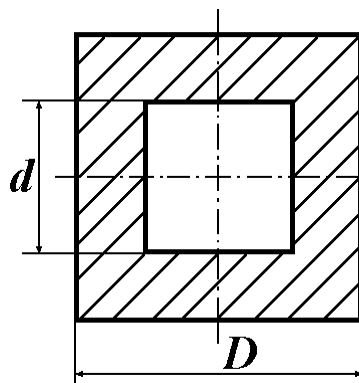
Для колони, що має певні умови закріплення (Рис. 10.2) та форму поперечного перерізу (Рис. 10.3), визначити критичну силу $F_{кр}$ та коефіцієнт запасу на стійкість $n_{ст}$. Матеріал колони Ст3.

№	Схема закріплення	Поперечний переріз	D/d	d , см	F , кН	l , м
1	1	1	1,50	10	400	6,1
2	2	2	1,55	11	450	6,2
3	3	2	1,60	12	500	6,3
4	4	1	1,65	13	550	6,4
5	1	2	1,70	14	600	6,5
6	2	3	1,75	15	650	6,6
7	3	1	1,80	16	700	6,7
8	4	2	1,85	17	750	6,8
9	1	3	1,90	18	800	6,9
0	2	1	1,95	19	850	7,0
	Е	Е	Д	Е	Д	Г

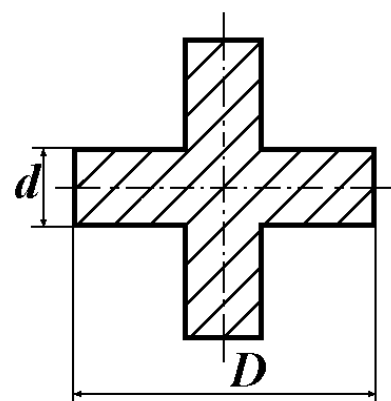
Для перерізів, показаних на Рис. 10.3 з відповідними позначеннями розмірів, в Таблиці 10.3. наведено розрахункові формули.



Кільце
(Переріз № 1)



Квадратний трубчастий
(Переріз № 2)
Рисунок 10.3



Хрест (Переріз № 3)

Таблиця 10.3.

Вид перерізу	Площа перерізу A	Осьовий момент інерції I
Кільце	$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$	$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$
Квадратний трубчастий	$A = D^2 - d^2$	$I = \frac{1}{12}(D^4 - d^4)$
Хрест	$A = Dd + (D - d)d$	$I = \frac{dD^3}{12} + \frac{(D - d)d^3}{12}$

12.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Числові дані: Схема закріплення № 3, поперечний переріз № 3 – хрест, співвідношення $D/d = 1,95$, $d = 10$ см, сила $F = 850$ кН, довжина стержня $l = 7,0$ м.

Для схеми закріплення № 3 коефіцієнт довжини $\nu = 0,5$, з урахуванням якого $l_{\text{ПР}} = \nu l = 0,5 \cdot 7,0 = 3,5$ м.

Для зазначеного поперечного перерізу $D = 1,95 \cdot d = 1,95 \cdot 10 = 19,5$ см. Тоді його площа $A = Dd + (D - d)d = 19,5 \cdot 10 + (19,5 - 10) \cdot 10 = 290$ см², осьовий момент інерції $I = \frac{dD^3}{12} + \frac{(D - d)d^3}{12} = 10 \cdot 19,5^3 / 12 + (19,5 - 10) \cdot 10^3 / 12 \approx 6179,06 + 791,67 = 6970,73$ см⁴.

Радіус інерції (площі A) $i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{6970,73}{290}} \approx 4,90$ см, гнучкість

$\lambda = \frac{l_{\text{ПР}}}{i} = 350 / 4,90 \approx 71,4$. Слід зазначити, що в останній формулі обидві

величини мають однакову розмірність – сантиметр. Отримана величина відповідає стержням середньої гнучкості, тому для величини λ і матеріалу колони підтверджуємо за Таблицею 10.1 інтервал застосування формули Ф.С.Ясинського (10.3), за яким $60 \leq 71,4 < 100$.

За даними Таблиці 10.2 визначаємо коефіцієнт φ . Найближчими значеннями для $\lambda = 71,4 \in \lambda_{\text{ЛГР}} = 70$ і $\lambda_{\text{ПГР}} = 80$, яким відповідають $\varphi_1 =$

0,81 і $\varphi_2 = 0,75$, $\Delta = \lambda - \lambda_{\text{ЛТР}} = 71,4 - 70 = 1,4$. Тоді за формулою (10.6)

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{10} \cdot \Delta = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 1,4 = 0,8016$$
, а допустиме напруження на стійкість $[\sigma]_{\text{СТ}} = \varphi[\sigma_-] = 0,8016 \cdot 160 = 128,256 \text{ МПа} \approx 128,3 \text{ МПа}$.

Дійсне значення $\sigma = \frac{F}{A} = 850 \cdot 10^3 / 290 \cdot 10^{-4} = 29,31 \text{ МПа}$ (для отримання цього результату слід підставляти величини в розмірності *SI*). Перевіряємо $\sigma \leq [\sigma]_{\text{СТ}}$ для переконання $29,31 < 128,3$. Критичне напруження за формулою $\sigma_{\text{КР}} = a - b\lambda$ остаточно $\sigma_{\text{КР}} = 310 - 1,14 \cdot 71,4 = 228,604 \text{ МПа} \approx 228,6 \text{ МПа}$.

Критична сила $F_{\text{КР}} = \sigma_{\text{КР}} A = 228,6 \cdot 10^6 \cdot 290 \cdot 10^{-4} = 6629400 \text{ Н} = 6629,4 \text{ кН}$, що значно перевищує прикладене за умов задачі навантаження до колони.

Коефіцієнт запасу на стійкість $n_{\text{СТ}} = \frac{F_{\text{КР}}}{F} = \frac{\sigma_{\text{КР}}}{\sigma} = 7,8$.

ДОДАТОК

Геометричні характеристики двотаврів сталєних за ГОСТ 8239-89

Номер	h , мм	d , мм	A , CM^2	I_x , CM^4	W_x , CM^3	i_x , CM	S_x , CM^3	I_y , CM^4	W_y , CM^3	i_y , CM
10	100	4,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	4,8	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	4,9	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	5,0	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	5,1	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	200	5,2	26,8	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
22	220	5,4	30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	240	5,6	34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	270	6,0	40,2	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	300	6,5	46,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	330	7,0	53,8	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	7,5	61,9	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	8,3	72,6	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	9,0	84,7	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	10,0	100,0	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	11,0	118,0	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	12,0	138,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ицкович, Г.М. Сопротивление материалов / Г.М.Ицкович.-М.: Высшая школа, 1986. - 352 с.
2. Писаренко, Г.С. Опір матеріалів : підручник / Г.С.Писаренко, О.Л.Квітка, Е.С. Уманський.-К. : Вища школа, 2004. - 655 с.
3. Прикладна механіка. Розділ «Опір Матеріалів» : курс лекцій / О.П.Євсюков, В.П.Садковий, О.М.Ларін та ін.-Х. : АЦЗУ, 2006. - 220 с.
4. Прикладна механіка. Розділ «Опір Матеріалів» : конспект лекцій / В.І.Лавінський, С.О.Вамболь, В.М.Халипа та ін.-Х. : АЦЗУ, 2006. - 112 с.
5. Сопротивление материалов / под ред. Г.С.Писаренко.-К.: Вища школа. Головное изд-во, 1986. - 775 с.
6. Степин, П.А. Сопротивление материалов / П.А.Степин.-М.: Высшая школа, 1983. - 303 с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
1. ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ МОДУЛЬНОЇ РОБОТИ.....	4
ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ	5
РОЗМІРНОСТІ ТА ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ В ОПОРІ МАТЕРІАЛІВ.....	6
НАЙМЕНУВАННЯ ПРИСТАВОК ДЛЯ КРАТНИХ ТА ЧАСТКОВИХ ОДИНИЦЬ ВИМІРЮВАНЬ (В ДІАПАЗОНІ 10^{-12} - 10^{12})	7
2. ОСНОВНІ ПЕРЕДУМОВИ НАУКИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»	8
3. ЗАДАЧА № 1. РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ МЕТАЛЕВИХ СТЕРЖНІВ ПОСТІЙНОГО ПЕРЕРІЗУ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ	9
3.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 1.....	11
3.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ	13
4. ЗАДАЧА № 2. РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ МЕТАЛЕВИХ СТЕРЖНІВ ПОСТІЙНОГО ПЕРЕРІЗУ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ ТА РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ	17
4.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 2.....	17
4.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ	18
5. ЗАДАЧА № 3. РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ МЕТАЛЕВИХ СТЕРЖНІВ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ.....	23
5.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 3.....	23
5.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ	25
6. ЗАДАЧА № 4. РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ МЕТАЛЕВИХ СТЕРЖНІВ З УРАХУВАННЯМ ВЛАСНОЇ ВАГИ	29
6.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 4.....	30
6.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ	32
7. ЗАДАЧА № 5. КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ ПОСТІЙНОГО ПЕРЕРІЗУ	36
7.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 5.....	39
7.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ	40
8. ЗАДАЧА № 6. КРУЧЕННЯ СТЕРЖНІВ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ	44
8.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 6.....	45
8.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ	46
9. ЗАДАЧА № 7. ПОПЕРЕЧНЕ ЗГИНАННЯ МЕТАЛЕВИХ БАЛОК	51
9.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 7.....	56

7.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ - КОНСОЛЬНА БАЛКА	58
7.3. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ – ШАРНІРНО-ОПЕРТА БАЛКА..	62
10. ЗАДАЧА № 8. ВИБІР ДВОТАВРОВОГО ПЕРЕРІЗУ	66
10.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 8	67
10.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ	67
11. ЗАДАЧА № 9. ВИБІР ГЕОМЕТРИЧНО ПРОСТИХ ПЕРЕРІЗІВ	70
11.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 9	70
11.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ	70
12. ЗАДАЧА № 10. СТІЙКІСТЬ СТЕРЖНІВ ПРИ ПОЗДОВЖНЬОМУ ЗГИНАННІ	73
12.1. ЗАВДАННЯ ДО ЗАДАЧІ № 10	76
12.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ	78
ДОДАТОК	80
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	81

Навчальне видання

Укладачі: **Міщенко** Ігор Вікторович
Халипа Віктор Маркович
Чернобай Геннадій Олександрович

Прикладна механіка. Розділ «Опір матеріалів».

Методичні вказівки до виконання контрольної (модульної) роботи

Відповідальний за випуск І.В.Міщенко

Підп. до друку 31.10.2014 р. Формат 60x84 1/16
Папір 80 г/см². Друк ризограф. Умовн.-друк. арк. 5,3
Тираж 50 прим. Вид № /14 Зам № /14

**Сектор редакційно-видавничої діяльності
Національного університету цивільного захисту України
61023, Харків, вул. Чернишевська, 94**