

**Кафедра прикладної механіки  
факультету техногенно-екологічної безпеки**

**Національного університету цивільного  
захисту України**

# **ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА**

**РОЗДІЛ  
«ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН»**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ОРГАНІЗАЦІЇ  
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ  
ПРИ ВИВЧЕННІ ДИСЦИПЛІНИ**

**Харків 2012**

Друкується за рішенням кафедри  
прикладної механіки НУЦЗУ  
Протокол від 14.05.2012 р. № 29

**Укладачі:** С.О.Вамболь, І.В.Міщенко, Г.О.Чернобай

**Рецензенти:** Трубаєв О.І. – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри динаміки та міцності машин Національного технічного університету «ХПІ»;

Коханенко В.Б. – кандидат технічних наук, доцент кафедри інженерної та аварійно-рятувальної техніки Національного університету цивільного захисту України.

**Прикладна механіка.** Розділ «Теорія механізмів і машин». Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів при вивченні дисципліни. Друге видання, виправлене та доповнене /Уклад. С.О.Вамболь, І.В.Міщенко, Г.О.Чернобай.-Х.: НУЦЗУ, 2012.-52 с.

Викладено методику виконання розрахунково-графічної роботи «Аналіз руху плоского важільного механізму». Наведено приклад числових розрахунків і графічних побудов для кулісного та кривошипно-повзункового (кривошипно-шатунного) механізмів.

Для курсантів, студентів і слухачів відповідно до програми вищої освіти у напрямках «Пожежна безпека», «Цивільний захист», «Охорона праці», «Хімічна технологія». Може бути корисним під час аудиторних занять та для самостійної роботи.

Відповідальний за випуск І.В.Міщенко

© Національний університет цивільного захисту України, 2012

## ВСТУП

«Прикладна механіка. Розділ «Теорія механізмів і машин». Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів при вивченні дисципліни» використовуються під час модульної розрахунково-графічної роботи щодо аналізу руху (проведення структурного і кінематичного аналізу) плоского важільного механізму. В них розглянуть наступні питання: структурний аналіз механізму, визначення швидкостей і прискорень окремих точок і ланок механізму, які виконуються в графоаналітичний і графічний способи.

### 1. Завдання на розрахунково-графічну роботу.

Завдання на розрахунково-графічну роботу складається з наступного:

1. Схема механізму (Рис. 1.1) – А і В – кулісний механізм, Б і Г – кривошипно-повзунковий (або кривошипно-шатунний) механізм.
2. Геометричні розміри ланок механізму.
3. Початкове положення кривошипу  $\varphi_{кр}$ , рад.
4. Кутова швидкість кривошипу  $\omega_1$ ,  $c^{-1}$ .

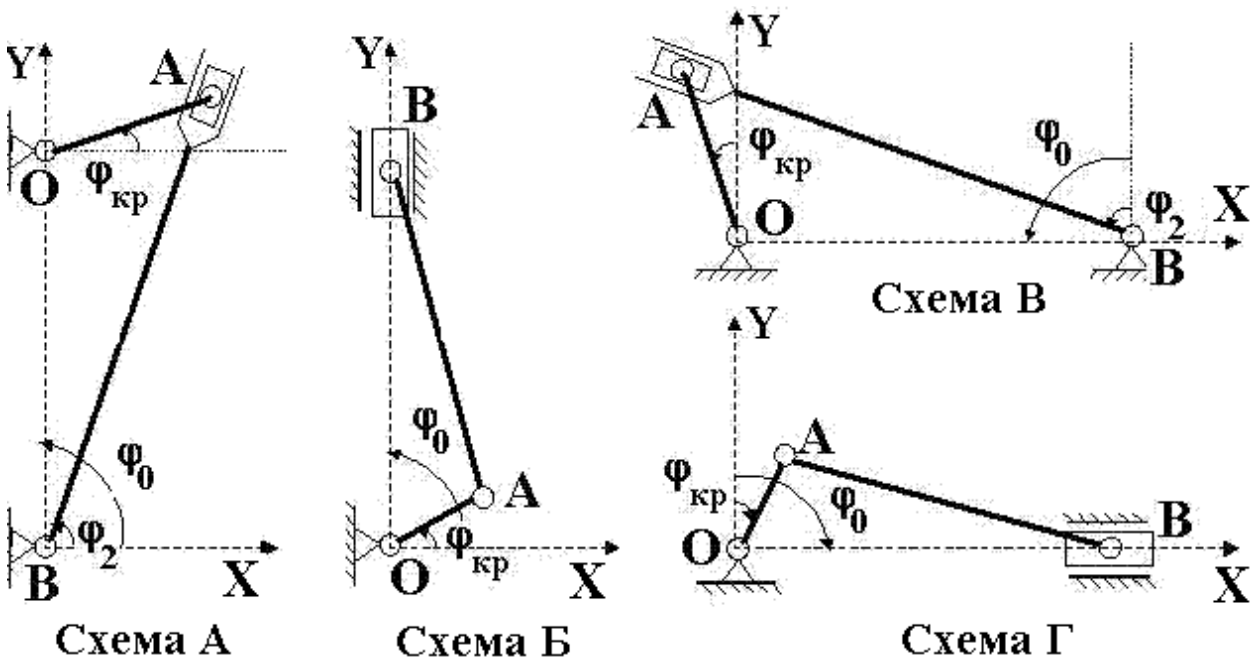


Рисунок 1.1.

Варіанти завдань наведені в Таблиці 1.1. Відлік початкового кута  $\varphi_{кр}$  від певної осі показано на кожній схемі.

Таблица 1.1.

Схема А	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ОА, м	0,2	0,3	0,2	0,25	0,3	0,4	0,35	0,25	0,3	0,35
ОВ, м	1,0	1,2	0,9	1,0	1,3	1,4	1,4	1,1	1,2	1,3
$\varphi_{кр}$ , рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\omega_1$ , с <sup>-1</sup>	4,0	6,0	5,0	6,0	4,0	3,0	4,0	6,0	5,0	6,0
Схема Б	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ОА, м	0,3	0,25	0,3	0,35	0,2	0,3	0,25	0,35	0,4	0,25
АВ, м	1,2	1,1	1,3	1,4	1,1	1,4	1,4	1,3	1,5	1,3
$\varphi_{кр}$ , рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\omega_1$ , с <sup>-1</sup>	20,0	10,0	30,0	20,0	15,0	10,0	20,0	10,0	30,0	20,0
Схема В	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ОА, м	0,1	0,2	0,3	0,25	0,2	0,3	0,45	0,35	0,2	0,25
ОВ, м	0,8	0,9	1,1	1,2	1,1	1,2	1,8	1,4	1,0	1,4
$\varphi_{кр}$ , рад	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\omega_1$ , с <sup>-1</sup>	3,0	4,0	6,0	4,0	5,0	2,0	2,0	4,0	5,0	6,0
Схема Г	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ОА, м	0,4	0,3	0,25	0,35	0,4	0,3	0,25	0,2	0,3	0,35
АВ, м	1,8	1,2	1,1	1,4	1,4	1,5	1,2	1,1	1,6	2,0
$\varphi_{кр}$ , рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\omega_1$ , с <sup>-1</sup>	40,0	20,0	20,0	60,0	40,0	30,0	40,0	60,0	50,0	60,0

## 2. Структурний аналіз механізму.

Основною задачею структурного аналізу механізму є визначення параметрів структури заданого механізму – кількості ланок і структурних груп, кількості та виду кінематичних пар, кількості рухливостей, визначення його класу і порядку.

### 2.1. Основні поняття та визначення.

**Механізм** – це система тіл, призначена для перетворення руху одного або декількох твердих тіл в потрібні рухи інших твердих тіл. Структуру механізму характеризують ланками, кінематичними парами, специфічними кінематичними ланцюгами – групами Ассура, що входять до складу механізму, а також ступенем рухливості або класом.

**Ланкою** називають деталь або групу жорстко з'єднаних між собою деталей.

Ланка механізму, нерухома в обраній системі координат, називається **стояком**. Рухомі ланки з'єднуються зі стояком і між собою через кінематичні пари.

**Кінематична пара** – це сполучення двох ланок, які торкаються, що взаємно обмежує їхній відносний рух.

**Кінематичним ланцюгом** називається зв'язана система ланок, з'єднаних між собою кінематичними парами.

**Група Ассура** – це кінематичний ланцюг з нульовим ступенем рухливості відносно своїх зовнішніх кінематичних пар. Група Ассура не може бути розділена на більш прості групи, що мають цю ознаку. Залежно від складності побудови групам Ассура присвоюється клас – ціле додатне число, тим більше, чим складніше група. Аналогічно механізм в цілому характеризують класом.

**Клас механізму** дорівнює найбільшому з класів груп Ассура, які входять до його складу.

**Ступінь рухливості** механізму дорівнює кількості його узагальнених координат в системі координат, пов'язаної зі стояком.

**Вхідна (ведуча) ланка** – це ланка механізму, яка отримує рух від іншого механізму або двигуна.

**Вихідна (ведена) ланка** – це ланка, яка здійснює рух, для виконання якого призначений механізм.

Залежно від характеру їхнього руху в механізмі або особливостей конструкції ланки мають такі назви:

**кривошип** – ланка, яка здійснює повний оберт за цикл руху механізму;

**шату́н** – ланка, яка виконує складний (плоско-паралельний) рух;

**повзу́н** (або поршень) – ланка, яка поступально переміщується по нерухомій напрямній відносно стояка;

**куліса́** – рухома ланка механізму, яка має напрямну для поступального руху іншої ланки – кулісного каменя;

**коромисло́** – ланка, що здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі в обмежених границях (неповнообертальний рух).

Кінематичні пари бувають нижчими та вищими.

**Нижча́** – кінематична пара, в якій контакт між ланками відбувається по поверхні. Механізм, в якому ланки з'єднані між собою тільки нижчими кінематичними парами, називається **важільним**.

**Вища́** – кінематична пара, в якій контакт між ланками відбувається по лінії або в точці.

Залежно від руху розрізняють обертальні та поступальні пари.

Кінематичні пари класифікуються за числом в'язей, які накладаються їх елементами на відносний рух ланок. Під **в'язями** в механіці розуміють обмеження, що накладаються на положення і швидкості точок механічної системи, які виконуються за будь-яких діючих на систему сил. Положення тіла в просторі визначається шістьма незалежними координатами (три координати та три кута), в площині - трьома (дві координати та кут). Тому при забороні 5-ти переміщень з 6-и можливих кінематична пара є парою 5-го класу, при забороні 4-ох переміщень з 6-и можливих кінематична пара є парою 4-го класу тощо.

Координати, які повністю визначають положення механічної системи в просторі, називаються **узагальненими координатами**.

**Початковою** є ланка, з якої починають визначати положення всього механізму. Кількість початкових ланок дорівнює кількості узагальнених координат.

**Ступінь рухливості** механізму визначають відносно нерухомої ланки – стояка, з яким пов'язують систему координат. При геометричних в'язях ступінь рухливості визначають як різницю між загальним числом можливих узагальнених координат рухомих ланок та числом рівнянь в'язей, якщо ці рівняння незалежні.

Для плоского механізму, де площина автоматично накладає три обмеження на можливі рухи ланок, можливі лише два типи кінематичних пар – 5-го і 4-го класів. Тоді для нього  $3n$  - можлива кількість узагальнених координат,  $2p_5$  - кількість обмежень, що накладаються на ланки механізму парами 5-го класу ( $p_5$  - число пар 5-го класу),

$p_4$  - кількість обмежень, що накладаються на ланки механізму пара-ми 4-го класу ( $p_4$  - число пар 4-го класу).

Клас групи та порядок групи визначається за класифікацією І.І.Артоболевського, якою переважно користуються в теперішній час. За нею:

**клас групи** визначається кількістю шарнірів в найскладнішому замкненому контурі;

**порядок групи** визначається кількістю шарнірів, якими група приєднується до механізму. Групи II-го класу 2-го порядку І.І.Артоболевський запропонував поділити на п'ять видів. На Рис.2.1. Представлені п'ять можливих модифікацій (видів) груп Ассур II класу та приклади схем механізмів, які мають такі групи. Перша група має три обертальні пари й умовно позначена ООО. Всі наступні модифікації отримані через заміну окремих обертальних пар на поступальні. Механізми, що наведені на Рис.2.1, мають такі назви: а) шарнірний (всі пари обертальні); б) кривошипно-повзунковий; в) кулісний (кривошипно-кулісний); г) тангенційний; д) синусний (механізм подвійного повзуна). Всі вони мають нульовий ступінь рухливості  $W = 0$

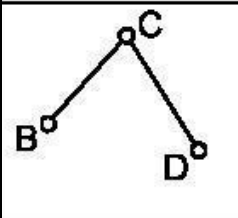
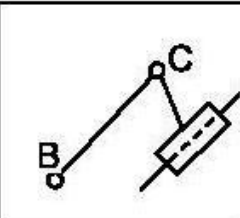
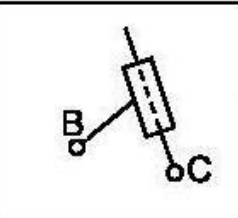
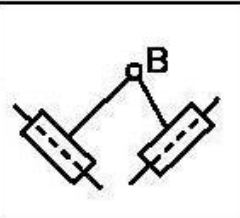
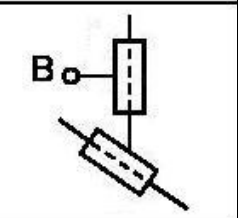
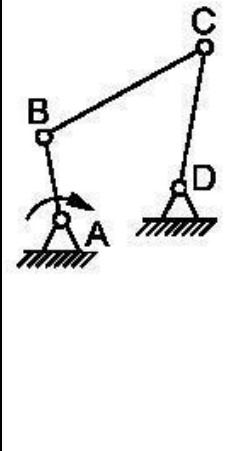
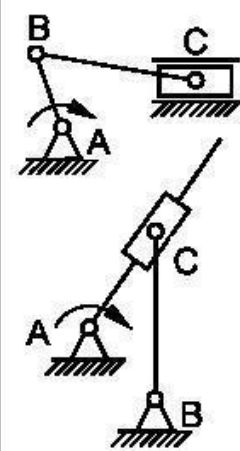
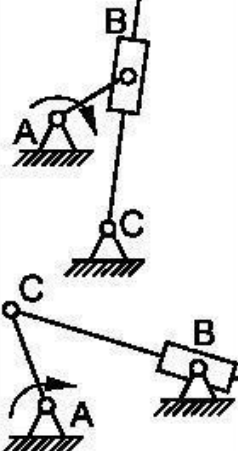
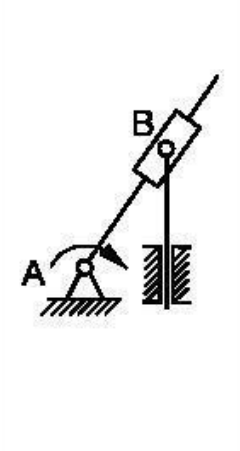
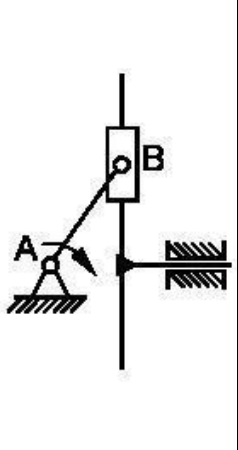
ООО	ООП	ОПО	ПОП	ОПП
Обертальна Обертальна Обертальна	Обертальна Обертальна Поступальна	Обертальна Поступальна Обертальна	Поступальна Обертальна Поступальна	Обертальна Поступальна Поступальна
				
				
а)	б)	в)	г)	д)

Рисунок 2.1.

Під час проведення структурного аналізу слід пам'ятати про наступне:

1. Одну й ту ж ланку не можна включати до різних груп Ассура.
2. Стояк не може входити як ланка до групи Ассура.
3. Починати аналіз слід з останньої, по відношенню до початкового механізму, приєднаної групи Ассура.

## 2.2. Структурна схема механізму.

Структура будь-якої технічної системи визначається функціонально пов'язаною сукупністю елементів і відношень між ними, тобто сукупністю ланок, груп або типових механізмів і рухомих чи нерухомих сполучень. Геометрична структура механізму повністю описується завданням геометричної форми його елементів, їхнього розташування, указанням виду в'язів між ними.

Розглянемо структурну схему кулісного механізму (Рис. 2.2), який складається з наступних ланок: 0 – стояк (точки O та B), 1 – кривошип, 2 – куліса, 3 – повзун (кулісний камінь). За винятком стояка, який є нерухливою ланкою, решта – рухливі, загалом кількість рухливих ланок  $n = 3$ .

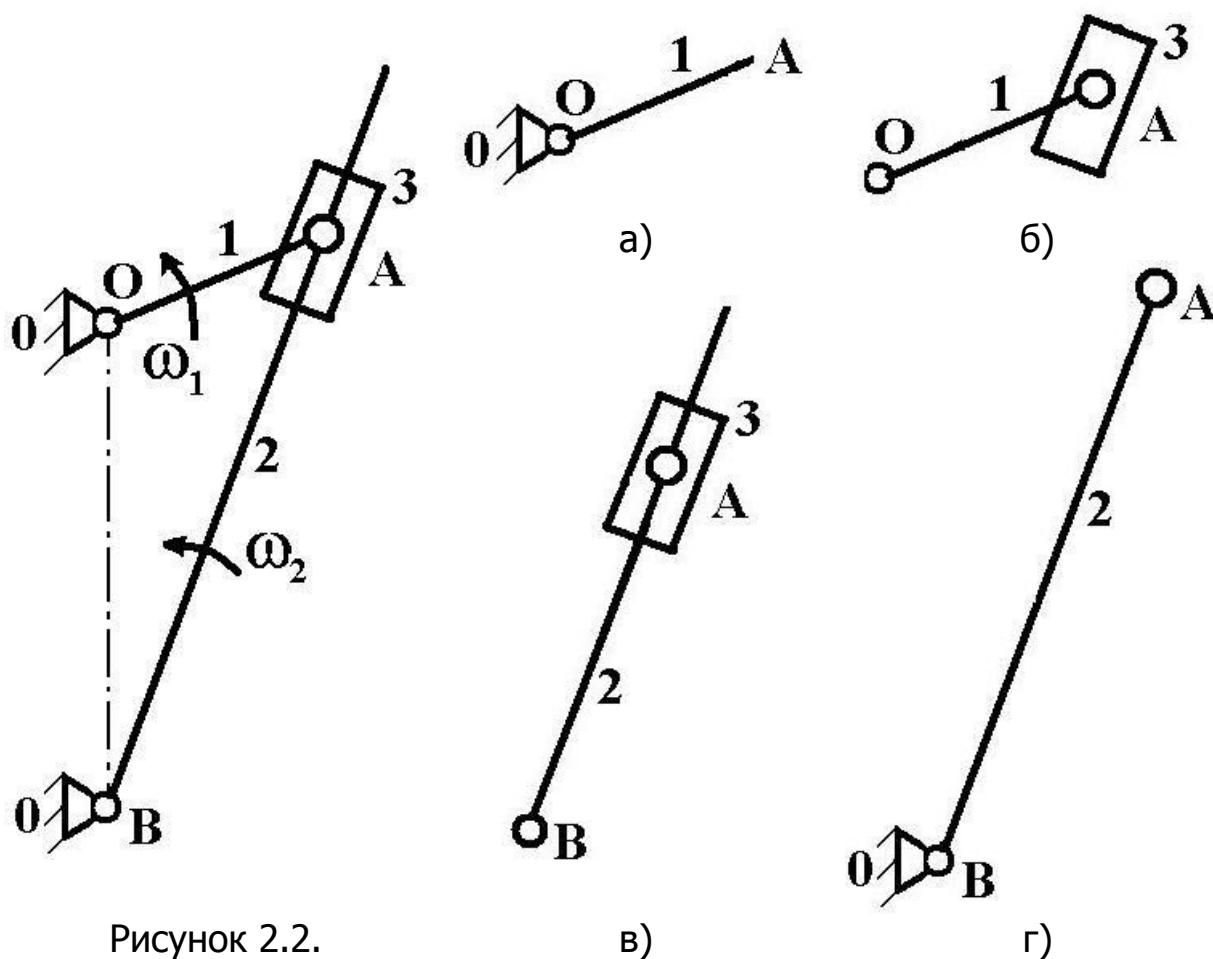


Рисунок 2.2.



### 2.3. Кінематичні пари.

Проаналізуємо всі кінематичні пари механізму, наведені на Рис.2.3., узагальнена інформація про які зведена в Таблиці 2.1. Таким чином, кількість однорухливих кінематичних пар  $p_5 = 4$ , кількість дворухливих кінематичних пар  $p_4 = 0$ .

Таблиця 2.1.

№	Позначення на структурній схемі	Ланки, що поєднуються	Вид руху	Тип кінематичної пари	
				Характер контакту	Ступінь рухливості
1.	О	0,1	Обертальний	Нижча	Однорухлива
2.	А	1,3	Обертальний	Нижча	Однорухлива
3.	А	2,3	Поступовий	Нижча	Однорухлива
4.	В	0,2	Обертальний	Нижча	Однорухлива

### 2.4. Ступінь рухливості механізму.

Ступінь рухливості плоского механізму визначається за формулою Чебишева

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 - p_4, \quad (2.1)$$

після підстановки в яку визначених в розділах 2.2 та 2.3 величин маємо

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Величина  $W = 1$  свідчить, що загалом механізм є однорухливим, тобто має одну узагальнену координату, яка однозначно визначає положення всіх ланок механізму. Такою координатою є кут повороту початкової ланки - кривошипу  $\varphi_{\text{КР}}$ .

### 2.5. Побудова груп Ассура.

Основний принцип створення плоских механізмів був сформульований російським вченим Л.В.Ассуром і полягає в наступному: довільний механізм з одним ступенем свободи може бути створений шляхом послідовного або паралельного приєднання до ведучої ланки і стояку кінематичних ланцюгів, які мають нульовий ступінь рухливості. Аналіз вказаних груп починається з останньої до початкового механізму.

### 2.5.1. Остання група Ассура.

На Рис. 2.3. в) показана група Ассура, що складається з 2-х рухливих ланок  $n = 2$  – куліси та кулісного каменя, та має три однорухливі кінематичні пари  $p_5 = 3$  – дві обертальні (точки А і В) та одну поступальну (точка А – рух кулісного каменя вздовж куліси). За класифікацією це група II класу. Ступінь рухливості цієї групи

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 0 = 0.$$

### 2.5.2. Початковий механізм.

На Рис. 2.3. а) показаний початковий механізм, який складається з однієї рухливої ланки  $n = 1$  - кривошипу, та має одну однорухливу кінематичну пару  $p_5 = 1$  – обертальну (точка О). За класифікацією це група I класу. Ступінь рухливості цієї групи

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 - p_4 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 0 = 1.$$

Механізм I-го класу є рухомою ланкою, що утворює зі стояком кінематичну пару 5-го класу. Залежно від того, яка це пара - обертальна чи поступальна, ланка здійснює відносно стояка обертальний або поступальний рух.

Механізм I-го класу широко використовується в машинобудуванні. Так, механізм з обертальною парою є головним механізмом в роторних машинах і пристроях – турбінах, електродвигунах, насосах, вентиляторах тощо. Механізм з поступальною парою є головним механізмом в двигунах внутрішнього згоряння, дизелях, парових машинах тощо.

Клас всього механізму II, як найвищий клас групи Ассура, що входить в загальний механізм.

### 3. Кінематичний аналіз кулісного механізму.

При кінематичному аналізі механізмів вивчається рух точок ланок механізму без урахування сил, які викликають цей рух. Через те, що під аналізом розуміють кінематичне дослідження вже існуючого механізму, схема механізму, розміри його ланок і закони руху ведучих ланок мають бути відомими.

При кінематичному дослідженні механізмів можна використовувати різні методи аналізу, що розроблені в теоретичній і прикладній механіці. Аналітичний метод полягає у встановленні залежності шляху веденої ланки від переміщення (шляху або куту повороту) початкової ланки механізму. Диференційні співвідношення дозволяють визначити швидкість та прискорення.

Широке розповсюдження мають графоаналітичні методи – метод планів і метод кінематичних діаграм, які дозволяють визначити швидкості та прискорення точок і ланок механізму для будь-якого положення ведучої ланки через побудову планів швидкостей і прискорень. Вирішення векторних рівнянь швидкостей і прискорень виконується в графічний спосіб, частина невідомих визначається за рівняннями кінематики плоского руху аналітично.

В теорії механізмів і машин використовуються масштаби, які показують скільки одиниць тієї чи іншої величини містить один міліметр відрізка, що зображує дану величину. Масштаб позначається літерою  $\mu$  і визначається як відношення дійсної величини до довжини відрізка,

що зображує цю величину. Для довжин  $\mu_l$ , розмірність  $\frac{м}{мм}$ , пе-

реміщень  $\mu_s$ , розмірність  $\frac{м}{мм}$ , швидкості  $\mu_v$ , розмірність  $\frac{м/с}{мм}$ ,

прискорення  $\mu_a$ , розмірність  $\frac{м/с^2}{мм}$ . Для аналізу обертального руху

слід замінити відповідні параметри на кут, кутову швидкість і кутове прискорення, провівши певні зміни в розмірностях масштабів.

При виборі масштабів слід дотримуватися рекомендованої низки масштабів у відповідності до стандарту ГОСТ 2.302-68 «Единая система конструкторской документации. Масштабы», який є міждержавним стандартом. Згідно зі стандартом масштаб зображення має бути обраним з наступної низки: 1) Масштаб зменшення: 0,5; 0,4; 0,25; 0,2; 0,1; 1:15; 0,05; 0,04; 0,025; 0,02; 1:75; 0,01; 0,005; 0,0025; 0,002; 0,00125; 0,001; 2) Натуральна величина 1:1; 3) Масштаб збільшення: 2; 2,5; 4; 5; 10; 20; 40; 50; 100.

Розглянемо кінематичний аналіз механізму на прикладі схеми А з наступними вихідними даними:

$$OA = 0,45 \text{ м} = 45 \text{ см}, OB = 1,0 \text{ м} = 100 \text{ см}, \varphi_{\text{кр}} = \frac{\pi}{8} \text{ рад}, \omega_1 = 7 \text{ с}^{-1},$$

згідно з якими будемо кінематичну схему механізму в масштабі  $\mu_l = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$  (якщо розміри механізму визначаються в метрах) або

$$\mu_l = 1 \frac{\text{см}}{\text{мм}}$$
 (якщо розміри механізму визначаються в сантиметрах).

Цей масштаб показує, скільком одиницям розміру механізму відповідає відрізок 1 мм на кінематичній схемі. Довжина ланки  $BA_1 = |BA_1| \cdot \mu_l$ , де  $|BA_1|$ , мм, - довжина певного відрізка на схемі. З урахуванням обраного масштабу відповідь буде в сантиметрах або метрах. На схемі  $|BA_1| = 124 \text{ мм}$ ,  $BA_1 = |BA_1| \cdot \mu_l = 124 \cdot 1 = 124 \text{ см} = 1,24 \text{ м}$ .

### **3.1. Визначення швидкостей точок ланок і кутових швидкостей ланок.**

Необхідно визначити види руху ланок. У Додатку 2 наведені відомі з курсу теоретичної механіки основні формули для визначення швидкостей і прискорень точок ланок при поступальному, обертальному, плоско-паралельному русі. Довжини відрізків на плані швидкостей потрібно визначати за можливістю з точністю до десятих міліметра.

#### **3.1.1. Загальні відомості про побудову плану швидкостей.**

Для механізмів з твердими та жорсткими ланками план швидкостей будують на основі теорії плоско-паралельного руху твердого тіла та теорії складного руху. Палець кривошипну, входячи в прорізь куліси, призводить до її руху. Як деталь, що належить водночас і кривошипну, і кулісі, він здійснює складний рух – переміщується вздовж прорізі куліси та обертається разом з нею. Переносний рух здійснює куліса, відносний рух є прямолінійний рух кулісного каменя по напрямній куліси. Під переносною швидкістю розуміють швидкість тієї точки переносної системи, яка лежить під точкою А і позначається  $A_1$ . Точки А (належить кривошипну) і  $A_1$  (належить кулісі) в кожний мо-

мент руху є тотожними, тобто їхнє положення в певний момент збігається. Під відносною швидкістю розуміють швидкість точки  $A$  відносно точки  $A_1$ . Вектор відносної швидкості  $\vec{V}_r$  спрямований вздовж куліси, вектор переносної швидкості  $\vec{V}_{A_1}$  спрямований перпендикулярно до куліси  $BA_1$  у бік кутової швидкості  $\omega_2$ . Швидкість точки в складному русі визначається на основі теореми про додавання швидкостей: швидкість точки дорівнює геометричній сумі переносної і відносної швидкості. План швидкостей будемо за рівнянням

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{A_1} + \vec{V}_r, \quad (3.1)$$

в якому  $\vec{V}_A$  є швидкість точки  $A$  (в якості полюса можна обрати будь-яку точку твердого тіла).

Всі побудови мають бути прив'язані до полюса плану швидкостей  $P_V$ . При побудові плану швидкостей механізму будемо використовувати наступні правила:

1. Кожний з відрізків, який з'єднує вершини плану швидкостей геометрично дорівнює обертальній швидкості відповідної точки фігури навколо іншої точки як навколо полюса.
2. Вектори, що йдуть від полюса  $P_V$ , виражають абсолютні швидкості відповідних точок. Вектори, що не проходять через полюс  $P_V$ , виражають відносні швидкості відповідних точок.
3. Швидкість обертання ланки механізму спрямована перпендикулярно до відрізка, що зображує відповідну ланку, в бік обертання цієї ланки.

### 3.1.2. Визначення швидкості $\vec{V}_A$ точки $A$ .

Точка  $A$  здійснює обертальний рух, тому

$$V_A = \omega_1 \cdot OA = 7,0,45 = 3,15 \text{ м/с.} \quad (3.2)$$

Вектор  $\vec{V}_A$  спрямований перпендикулярно до відрізка  $OA$ , у бік кутової швидкості  $\omega_1$ ,  $\vec{V}_A \perp OA$ . Обираємо масштаб плану швидкості

тей  $\mu_V = 0,05 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$ , який показує, скільком одиницям швидкості певної точки відповідає відрізок 1 мм на плані швидкостей.

Знаходимо довжину відрізка ( $P_V a$ ), який зображує вектор швидкості  $\vec{V}_A$  на плані:

$$|P_V a| = \frac{V_A}{\mu_V} = \frac{3,15}{0,05} = 63 \text{ мм.} \quad (3.3)$$

З полюса плану швидкостей  $P_V$  відкладаємо даний відрізок перпендикулярно до  $OA$  в напрямі кутової швидкості  $\omega_1$ .

### 3.1.3. Визначення відносної швидкості $\vec{V}_r$ та переносної швидкості $\vec{V}_{A_1}$ .

Напрями дії та величини швидкостей  $\vec{V}_r$  і  $\vec{V}_{A_1}$  невідомі. Єдиною достовірною інформацією є лінія дії вказаних векторів – вектор  $\vec{V}_r$  діє вздовж лінії  $BA_1$ , а вектор  $\vec{V}_{A_1}$  за нормаллю до ланки  $BA_1$  – куліси, проходячи через точку  $A_1$ . Відрізки ( $P_V a_1$ ) і ( $a_1 a$ ), які зображують відповідно вектори швидкостей  $\vec{V}_{A_1}$  та  $\vec{V}_r$ , знаходимо безпосередньо з плану швидкостей. Через полюс  $P_V$  проводимо лінію I – I, паралельну вектору  $\vec{V}_{A_1}$ , через точку  $a$  проводимо лінію II – II, паралельну вектору  $\vec{V}_r$ . На перетині двох проведених ліній отримуємо точку  $a_1$ . Вимірюючи довжину відрізків  $|P_V a_1| = 42$  мм і  $|a_1 a| = 47$  мм, помножаємо на масштаб  $\mu_V$  та обчислюємо відповідні швидкості

$$V_{A_1} = |P_V a_1| \cdot \mu_V = 42 \cdot 0,05 = 2,10 \text{ м/с,} \quad (3.4)$$

$$V_r = |a_1 a| \cdot \mu_V = 47 \cdot 0,05 = 2,35 \text{ м/с.} \quad (3.5)$$

### 3.1.4. Визначення кутової швидкості $\omega_2$ куліси $BA_1$ .

Куліса здійснює неповнообертальний рух, тому кутова швидкість переносної системи

$$\omega_2 = \frac{V_{A_1}}{BA_1} = \frac{2,10}{1,24} = 1,694 \text{ c}^{-1}, \quad (3.5)$$

Таблиця 3.1.

Величина, що досліджується	Відрізок на плані	Напрямок	Величина відрізка на плані, мм	Масштаб	Величина, м/с
$V_A$	$(P_V a)$	$\vec{V}_A \perp OA$	$ P_V a  = 63$	$\mu_V = 0,05 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$	3,15
$V_{A_1}$	$(P_V a_1)$	$\vec{V}_{A_1} \perp BA_{A_1}$	$ P_V a_1  = 42$		2,10
$V_r$	$(a_1 a)$	$\vec{V}_r \parallel BA_{A_1}$	$ a_1 a  = 47$		2,35
$\omega_2$	Проти годинникової стрілки				1,694 $\text{c}^{-1}$

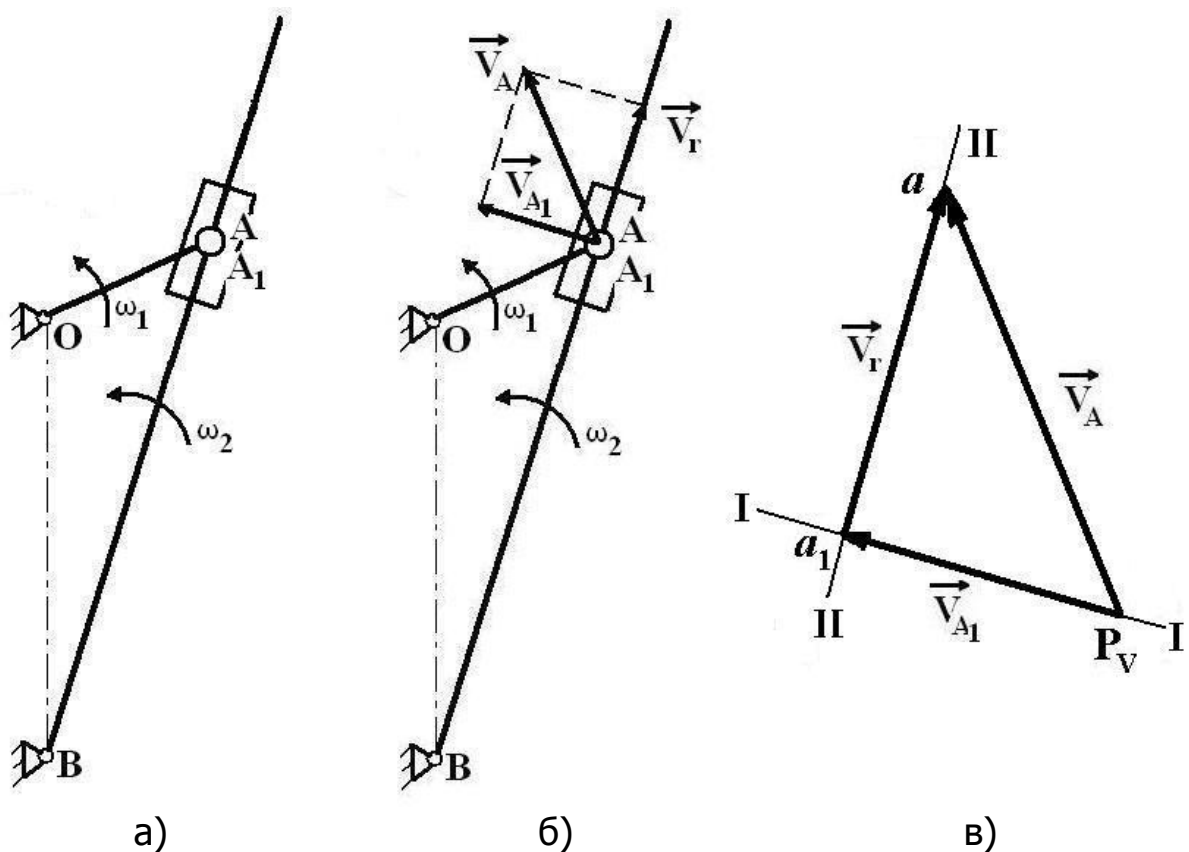


Рисунок 3.1.

Для визначення напрямку  $\omega_2$  переносимо вектор  $\vec{V}_{A_1}$  в точку  $A_1$  куліси та дивимось, як вона рухається відносно точки B. Напрямок цього руху відповідає  $\omega_2$ . При напрямі кутової швидкості  $\omega_1$  проти

годинникової стрілки (Рис. 3.1, б) напрям кутової швидкості  $\Omega_2$  буде аналогічним. Отримані значення необхідно звести до Таблиці 3.1.

### 3.2. Визначення прискорень точок ланок і кутових прискорень ланок.

Для побудови плану прискорень використовують план швидкостей і вихідні дані. Довжини відрізків на плані прискорень потрібно визначати за можливістю з точністю до десятих міліметра.

#### 3.2.1. Загальні відомості про побудову плану прискорень.

Для механізмів з твердими та жорсткими ланками план прискорень будують на основі теорії плоско-паралельного руху твердого тіла та теорії складного руху. План прискорень будуємо за рівнянням (відповідно до теореми Коріоліса про абсолютне прискорення точки

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A_1} + \vec{a}_r + \vec{a}_{\text{КОР}}. \quad (3.6)$$

В цьому рівнянні позначаються наступні прискорення:  $\vec{a}_A$  - точки А (в якості полюса можна обрати будь-яку точку твердого тіла),  $\vec{a}_{A_1}$  - переносне (прискорення точки  $A_1$  - тієї точки середовища, з якою в певний момент знаходиться в контакті точка, що здійснює складний рух),  $\vec{a}_r$  - відносне,  $\vec{a}_{\text{КОР}}$  - коріолісове (поворотне). З урахуванням  $\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^\tau$  ( $\vec{a}^n \perp \vec{a}^\tau$ ), запишемо

$$\vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau = \vec{a}_{A_1}^n + \vec{a}_{A_1}^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_{\text{КОР}}. \quad (3.7)$$

Відзначимо, що коріолісове прискорення точки при непоступальному переносному русі характеризує зміну одразу двох швидкостей – відносної за напрямом і переносної за величиною. Ці зміни є наслідком обертання рухомої системи координат і переміщення точки відносно осі обертання. Всі побудови мають бути прив'язані до полюса плану прискорень  $P_a$ . При побудові плану прискорень механізму будемо використовувати наступне правило:

Прискорення довільної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса та прискорення цієї точки в її обертанні разом з плоскою фігурою навколо полюса.



Вихідними даними для побудови плану прискорень механізму є відомі геометричні розміри ланок механізму, кінематичні параметри, що задані або визначені в розділі 3.1.

### 3.2.2. Визначення прискорення $\vec{a}_A$ точки A.

В загальному вигляді прискорення  $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$ , де  $\vec{a}_A^n$  - нормальне, а  $\vec{a}_A^\tau$  - дотичне (тангенційне) прискорення. Перше з вказаних відповідає за зміну напрямку руху тіла, а друге - за зміну величини швидкості. Через постійність  $\omega_1 = const$  тангенційна складова відсутня  $a_A^\tau = 0$ , тому  $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n$ .

Нормальне прискорення  $a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA$ , вектор  $\vec{a}_A^n$  спрямований за радіусом  $AO$  до центру обертання  $O$   $\vec{a}_A^n \parallel OA$ .

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA = 7^2 \cdot 0,45 = 22,05 \text{ м/с}^2. \quad (3.8)$$

Обираємо масштаб плану прискорень  $\mu_a = 0,25 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$ . Знайдемо довжину відрізка ( $P_a a$ ), який зображує вектор прискорення  $\vec{a}_A$  на плані:

$$|P_a a| = \frac{a_A}{\mu_a} = \frac{22,05}{0,25} = 88,2 \text{ мм}. \quad (3.9)$$

З полюса плану прискорень  $P_a$  відкладаємо вказаний відрізок у напрямі, паралельному  $AO$ .

### 3.2.3. Визначення коріолісова прискорення $\vec{a}_{КОР}$ .

Коріолісове прискорення викликано з одного боку зміною напрямку вектора відносної швидкості через поворот переносної системи, а з іншого – зміною величини вектору переносної швидкості через переміщення точки  $A_1$  в результаті відносного руху. Величина коріолісова прискорення визначається за формулою

$$a_{КОР} = 2\omega_2 \cdot V_r = 2 \cdot 1,694 \cdot 2,35 = 7,962 \text{ м/с}^2. \quad (3.10)$$

На плані прискорень це прискорення зображує відрізок  $(a_1''a)$ , довжина якого визначається

$$|a_1''a| = \frac{a_{\text{КОР}}}{\mu_a} = \frac{7,962}{0,25} = 31,85 \text{ мм.} \quad (3.11)$$

Напрямок вектора  $\vec{a}_{\text{КОР}}$  отримуємо, повертаючи вектор  $\vec{V}_r$  навколо точки  $A_1$  по напрямку обертання куліси на кут  $90^\circ$ . З формули (3.10) бачимо, що  $a_{\text{КОР}} = 0$ , якщо  $\Omega_2 = 0$  або  $V_r = 0$ .

### 3.2.4. Визначення прискорення $\vec{a}_{A_1}$ точки $A_1$ та відносного прискорення $\vec{a}_r$ .

Вектор переносного прискорення розкладаємо на нормальну та дотичну складові  $\vec{a}_{A_1} = \vec{a}_{A_1}^n + \vec{a}_{A_1}^\tau$  ( $\vec{a}_{A_1}^n \perp \vec{a}_{A_1}^\tau$ ). Нормальне переносне прискорення дорівнює

$$a_{A_1}^n = \omega_2^2 \cdot BA_1 = 1,694^2 \cdot 1,24 = 3,558 \text{ м/с}^2. \quad (3.12)$$

Визначимо довжину відрізка  $(P_a a_1')$ , який зображує вектор прискорення  $\vec{a}_{A_1}^n$  на плані

$$|P_a a_1'| = \frac{a_{A_1}^n}{\mu_a} = \frac{3,558}{0,25} = 14,2 \text{ мм.} \quad (3.13)$$

Вектор дотичного переносного прискорення  $\vec{a}_{A_1}^\tau$  спрямований через точку  $A_1$ . Його величина невідома, лінія дії проходить через точку  $A_1$  перпендикулярно до осі куліси  $BA_1$ , тому на плані прискорень проводимо через точку  $a_1'$  лінію I – I, перпендикулярну відрізку  $(P_a a_1')$ .

Величина відносного прискорення  $a_r$  невідома, лінія дії вектора  $\vec{a}_r$  спрямована вздовж куліси, через точку  $a_1''$  проводимо лінію II – II, паралельну осі куліси. Перетин прямих I – I та II – II визначає точку  $a_1$ , відрізок  $(a_1' a_1)$  зображує в прийнятому масштабі до-

тичне прискорення точки  $A_1$ , відрізок  $(a_1 a_1'')$  - відносне прискорення. Їхні довжини  $|a_1' a_1| = 34$  мм,  $|a_1 a_1''| = 45$  мм. Напрямок відносного прискорення протилежний напрямку швидкості  $V_r$ , тому в дійсності величина  $a_r$  є від'ємною, тобто рух сповільнений.

Для знаходження величин невідомих прискорень необхідно довжини відповідних відрізків помножити на масштаб

$$a_{A_1}^\tau = |a_1' a_1| \cdot \mu_a = 34 \cdot 0,25 = 8,50 \text{ м/с}^2, \quad (3.14)$$

$$a_r = |a_1 a_1''| \cdot \mu_a = 45 \cdot 0,25 = 11,25 \text{ м/с}^2. \quad (3.15)$$

Повне прискорення точки  $A_1$   $a_{A_1} = \sqrt{(a_{A_1}^n)^2 + (a_{A_1}^\tau)^2} = \sqrt{3,558^2 + 8,50^2} = 9,215 \text{ м/с}^2$ , на Рис.3.2 зображує відрізок  $(P_a a_1)$ .

### 3.2.5. Визначення кутового прискорення $\varepsilon_2$ куліси $BA_1$ .

За планом прискорень можна визначити кутове прискорення ланки. Для цього слід скористатися відомими співвідношеннями між дотичним і кутовим прискореннями

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{A_1}^\tau}{BA_1} = \frac{8,50}{1,24} = 6,85 \text{ с}^{-2}. \quad (3.16)$$

Таблиця 3.2.

Величина, що досліджується	Відрізок на плані	Напрямок	Величина відрізка на плані, мм	Масштаб	Величина, м/с <sup>2</sup>
$a_A$	$(P_a a)$	$\vec{a}_A \parallel OA$	$ P_a a  = 88,2$	$\mu_a = 0,25 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$	22,05
$a_{A_1}$	$a_{A_1}^n$	$\vec{a}_{A_1}^n \parallel BA_1$	$ P_a a_1'  = 14,2$		3,558
	$a_{A_1}^\tau$	$\vec{a}_{A_1}^\tau \perp BA_1$	$ a_1' a_1  = 34$		8,50
$a_r$	$(a_1 a_1'')$	$\vec{a}_r \parallel BA_1$	$ a_1 a_1''  = 45$		11,25
$a_{\text{КОР}}$	$(a_1'' a)$	$\vec{a}_{\text{КОР}} \perp BA_1$	$ a_1'' a  = 31,85$		7,962
$\varepsilon_2$	Проти годинникової стрілки				6,85 с <sup>-2</sup>

Для визначення напрямку  $\varepsilon_2$  переносимо вектор  $\vec{a}_{A_1}^\tau$  в точку  $A_1$  куліси і дивимось напрям руху куліси відносно точки  $B$ . В даному випадку кутове прискорення  $\varepsilon_2$  спрямовано проти годинникової стрілки. Отримані значення необхідно звести до Таблиці 3.2.

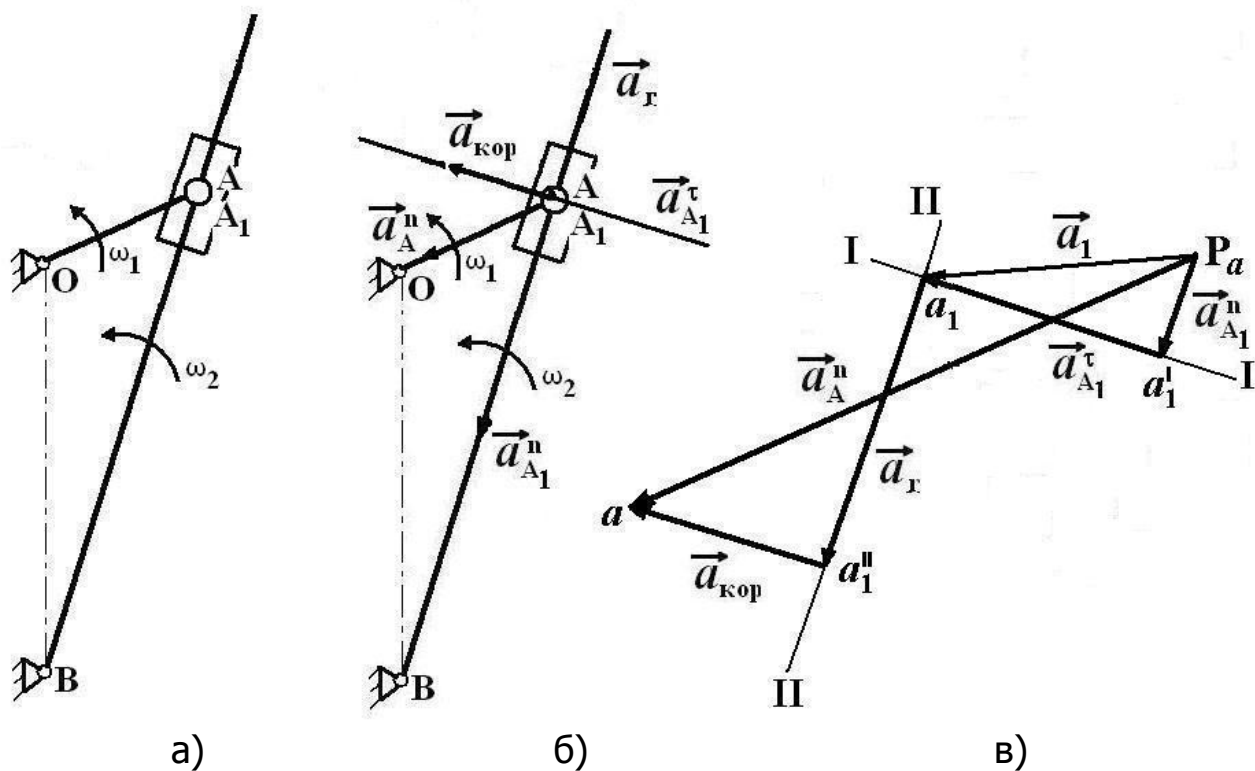


Рисунок 3.2.

Слід зазначити, що в побудовах плану швидкостей і плану прискорень напрями векторів, які визначаються безпосередньо з них, мають бути такими, що задовольняють векторним рівнянням швидкостей і прискорень.

#### 4. Кінематичний аналіз кривошипно-повзункового механізму.

Розглянемо кінематичний аналіз кривошипно-повзункового механізму на прикладі схеми Б з наступними вихідними даними:

$$OA = 0,5 \text{ м} = 50 \text{ см}, AB = 0,9 \text{ м} = 90 \text{ см}, \varphi_{\text{кр}} = \frac{\pi}{3} \text{ рад}, \omega_1 = 35 \text{ с}^{-1}.$$

Будуємо кінематичну схему механізму згідно з вихідними даними (певна схема, числові дані відповідно до варіанта) в масштабі

$$\mu_l = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{мм}} \text{ (якщо розміри механізму визначаються в метрах) або}$$

$$\mu_l = 1 \frac{\text{см}}{\text{мм}} \text{ (якщо розміри механізму визначаються в сантиметрах).}$$

Цей масштаб показує, скільком одиницям розміру механізму відповідає відрізок 1 мм на кінематичній схемі. Довжини відповідних ланок з урахуванням масштабу  $\mu_l$  знаходимо за формулами  $OA = |OA| \cdot \mu_l$ ,  $AB = |AB| \cdot \mu_l$ , де  $|OA|$ , мм, та  $|AB|$ , мм, - довжини певних відрізків на схемі.

#### 4.1. Визначення швидкостей точок ланок і кутових швидкостей ланок.

Необхідно визначити види руху ланок. У Додатку 2 наведені відомі з курсу теоретичної механіки основні формули для визначення швидкостей і прискорень точок ланок при поступальному, обертальному, плоско-паралельному русі. Довжини відрізків на плані швидкостей потрібно визначити за можливістю з точністю до десятих міліметра.

##### 4.1.1. Загальні відомості про побудову плану швидкостей.

Для механізмів з твердими та жорсткими ланками план швидкостей будують на основі теорії плоско-паралельного руху твердого тіла та теорії складного руху. Кривошип здійснює обертальний рух, повзун – поступальний, шатун - плоско-паралельний рух. План швидкостей кривошипно-повзункового механізму будується аналогічно до відповідної побудови для кулісного механізму. Визначальною при цьому є швидкість повзуна. Вона дорівнює геометричній сумі швидкості  $\vec{V}_A$

точки  $A$  кривошипу  $OA$  та швидкості  $\vec{V}_{BA}$  точки  $B$  шатуна  $AB$  відносно точки  $A$  і визначається за формулою

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (4.1),$$

за якою і здійснюють вказану побудову. В якості полюса плану швидкостей  $P_V$  можна взяти будь-яку точку твердого тіла, до якого мають бути прив'язані всі побудови. Як і в Розділі 3 будемо використовувати наступні правила:

1. Кожний з відрізків, який з'єднує вершини плану швидкостей геометрично дорівнює обертальній швидкості відповідної точки фігури навколо іншої точки як навколо полюса.
2. Вектори, що йдуть від полюса  $P_V$ , виражають абсолютні швидкості відповідних точок. Вектори, що не проходять через полюс  $P_V$ , виражають відносні швидкості відповідних точок.
3. Швидкість обертання ланки механізму спрямована перпендикулярно до відрізка, що зображує відповідну ланку, в бік обертання цієї ланки.

#### 4.1.2. Визначення швидкості $\vec{V}_A$ точки $A$ .

Точка  $A$  здійснює обертальний рух, тому

$$V_A = \omega_1 \cdot OA = 35 \cdot 0,5 = 17,5 \text{ м/с}. \quad (4.2)$$

Вектор  $\vec{V}_A$  спрямований перпендикулярно до відрізка  $OA$ , у бік кутової швидкості  $\omega_1$ ,  $\vec{V}_A \perp OA$ . Обираємо масштаб плану швидкостей  $\mu_V = 0,2 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$  (або  $\mu_V = 20 \frac{\text{см/с}}{\text{мм}}$ ), який показує, скільком одиницям швидкості певної точки відповідає відрізок 1 мм на плані швидкостей.

Знаходимо довжину відрізка ( $P_V a$ ), який зображує вектор швидкості  $\vec{V}_A$  на плані:

$$|P_V a| = \frac{V_A}{\mu_V} = \frac{17,5}{0,2} = 87,5 \text{ мм}. \quad (4.3)$$

З полюса плану швидкостей  $P_V$  відкладаємо даний відрізок перпендикулярно до  $OA$  в напрямі кутової швидкості  $\omega_1$ .

#### 4.1.3. Визначення обертальної швидкості $\vec{V}_{BA}$ та швидкості $\vec{V}_B$ .

Напрями та величини швидкостей  $\vec{V}_{BA}$  і  $\vec{V}_B$  невідомі. Єдиною достовірною інформацією є лінія дії вказаних векторів – вектор  $\vec{V}_B$  діє вздовж лінії  $OB$ , а вектор  $\vec{V}_{BA}$  за нормаллю до ланки  $AB$ , проходячи через точку  $B$ . Відрізки  $(P_V a)$  і  $(ab)$ , які зображують відповідно вектори швидкостей  $\vec{V}_{BA}$  та  $\vec{V}_B$ , знаходимо безпосередньо з плану швидкостей. Через полюс  $P_V$  проводимо лінію II-II, паралельну лінії дії вектора  $\vec{V}_B$ , через точку  $a$  проводимо лінію I-I, паралельну лінії дії вектора  $\vec{V}_{BA}$ . На перетині двох проведених ліній отримуємо точку  $b$ . Вимірюючи довжину відрізків  $|P_V b|=67$  мм і  $|ab|=78,5$  мм, помножаємо на масштаб  $\mu_V = 0,2 \frac{м/с}{мм}$  та обчислюємо швидкості

$$V_{BA} = |ab| \cdot \mu_V = 78,5 \cdot 0,2 = 15,7 \text{ м/с}, \quad (4.4)$$

$$V_B = |P_V b| \cdot \mu_V = 67 \cdot 0,2 = 13,4 \text{ м/с}. \quad (4.5)$$

Вектор  $\vec{V}_{BA}$  спрямований так, що шатун обертається навколо точки  $A$  за годинниковою стрілкою.

#### 4.1.4. Визначення кутової швидкості $\omega_2$ шатуна $AB$ .

Шатун обертається навколо точки  $A$ , тому кутова швидкість цієї ланки

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{15,7}{0,9} = 17,45 \text{ с}^{-1}, \quad (4.6)$$

Для визначення напрямку  $\omega_2$  переносимо вектор  $\vec{V}_{BA}$  в точку  $B$  шатуна та дивимось, як вона рухається відносно точки  $A$ . Напрямок

цього руху відповідає  $\omega_2$ . При напрямі кутової швидкості  $\omega_1$  проти годинникової стрілки (Рис. 4.1, б) напрям кутової швидкості  $\omega_2$  буде протилежним. Отримані значення необхідно звести до Таблиці 4.1.

Таблиця 4.1.

Величина, що досліджується	Відрізок на плані	Напрямок	Величина відрізка на плані, мм	Масштаб	Величина, м/с
$V_A$	$(P_V a)$	$\vec{V}_A \perp OA$	$ P_V a  = 87,5$	$\mu_V = 0,2 \frac{м/с}{мм}$	17,5
$V_{BA}$	$(ab)$	$\vec{V}_{BA} \perp AB$	$ ab  = 78,5$		15,7
$V_B$	$(P_V b)$	$\vec{V}_B \parallel OB$	$ P_V b  = 67$		13,4
$\omega_2$	За годинниковою стрілкою				$17,45 \text{ с}^{-1}$

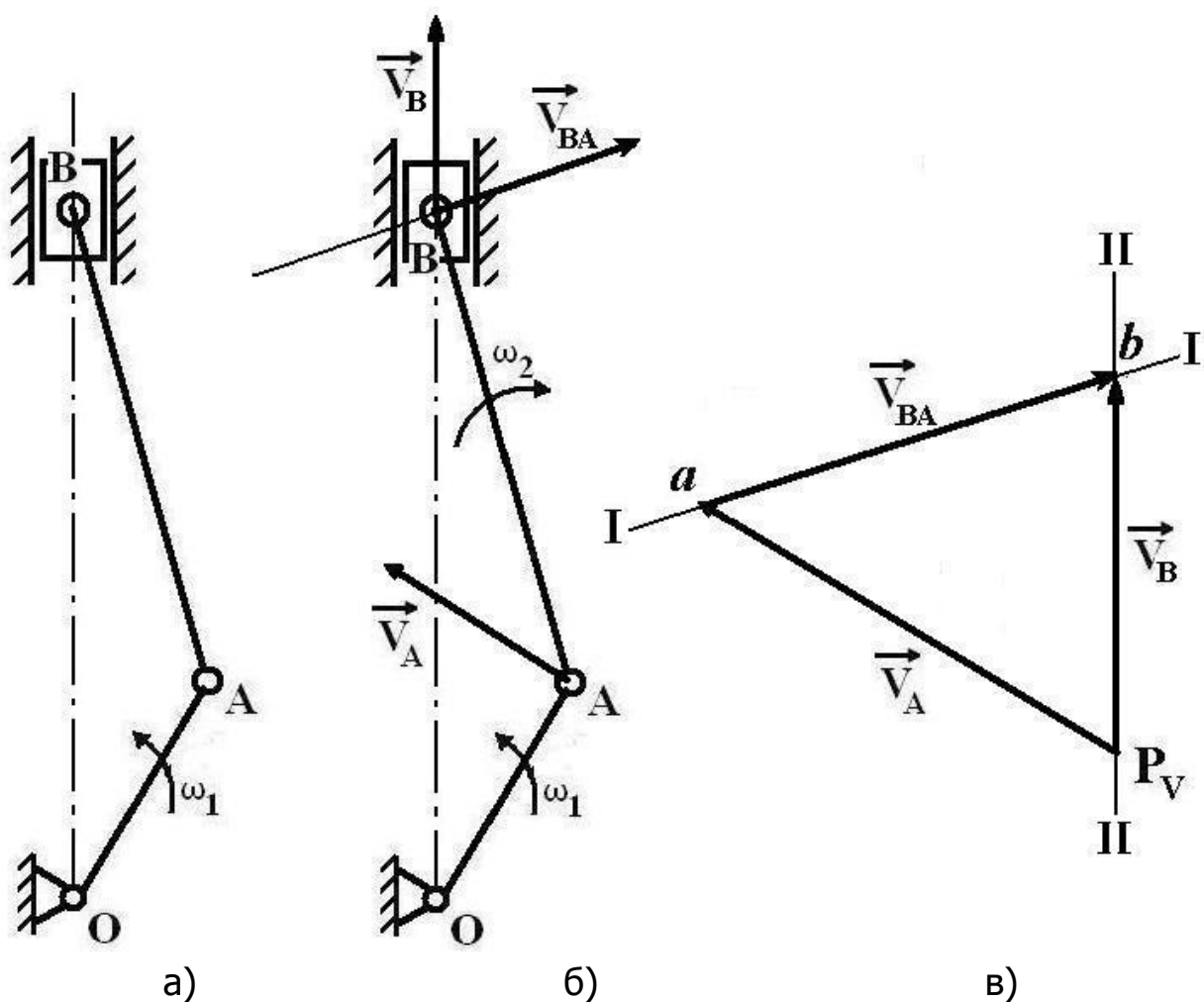


Рисунок 4.1.



## 4.2. Визначення прискорень точок ланок і кутових прискорень ланок.

Для побудови плану прискорень використовують план швидкостей і вихідні дані. У порівнянні з кулісним механізмом план прискорень для кривошипно-повзункового механізму за умов незмінності довжин ланок і, як наслідок, відсутності коріолісова прискорення будується простіше. Довжини відрізків на плані прискорень потрібно визначати за можливістю з точністю до десятих міліметра.

### 4.2.1. Загальні відомості про побудову плану прискорень.

Для механізмів з твердими та жорсткими ланками план прискорень будують на основі теорії плоско-паралельного руху твердого тіла та теорії складного руху. План прискорень будують за рівнянням з урахуванням  $\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^\tau$  ( $\vec{a}^n \perp \vec{a}^\tau$ )

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau, \quad (4.7)$$

де  $\vec{a}_B$  - прискорення повзуна,  $\vec{a}_A$  - прискорення точки А (в якості полюса можна обрати будь-яку точку твердого тіла),  $\vec{a}_{BA}^n$  і  $\vec{a}_{BA}^\tau$  - відповідно нормальне та дотичне (тангенційне) прискорення точки В відносно точки А. Всі побудови мають бути прив'язані до полюса плану прискорень  $P_a$ . При побудові плану прискорень механізму будемо використовувати наступне правило:

Прискорення довільної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса та прискорення цієї точки в її обертанні разом з плоскою фігурою навколо полюса.

Вихідними даними для побудови плану прискорень механізму є відомі геометричні розміри ланок механізму, кінематичні параметри, що задані або визначені в розділі 4.1.

### 4.2.2. Визначення прискорення $\vec{a}_A$ точки А.

В загальному вигляді прискорення  $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$ , де  $\vec{a}_A^n$  - нормальне, а  $\vec{a}_A^\tau$  - дотичне (тангенційне) прискорення. Перше з вказаних відповідає за зміну напрямку руху тіла, а друге - за зміну величини

швидкості. Через постійність  $\omega_1 = const$  тангенційна складова відсутня  $a_A^\tau = 0$ , тому  $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n$ .

Нормальне прискорення  $a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA$ , вектор  $\vec{a}_A^n$  спрямований за радіусом  $AO$  до центру обертання  $O$  і  $\vec{a}_A^n \parallel OA$ .

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA = 35^2 \cdot 0,5 = 428,75 \text{ м/с}^2. \quad (4.8)$$

Обираємо масштаб плану прискорень  $\mu_a = 5 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$ . Знайдемо довжину відрізка  $(P_a a)$ , який зображує вектор прискорення  $\vec{a}_A$  на плані:

$$|P_a a| = \frac{a_A}{\mu_a} = \frac{428,75}{5} = 85,75 \text{ мм.} \quad (4.9)$$

З полюса плану прискорень  $P_a$  відкладаємо вказаний відрізок у напрямі, паралельному  $AO$ .

#### 4.2.3. Визначення прискорення $\vec{a}_B$ повзуна та прискорення $\vec{a}_{BA}$ точки $B$ шатуна $AB$ .

Вектор прискорення  $\vec{a}_{BA}$  розкладаємо на нормальну та дотичну складові  $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$  ( $\vec{a}_{BA}^n \perp \vec{a}_{BA}^\tau$ ). Нормальне прискорення дорівнює

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 17,45^2 \cdot 0,9 = 274,05 \text{ м/с}^2. \quad (4.10)$$

і спрямовано від точки  $B$  до точки  $A$  вздовж лінії шатуна  $AB$ . Визначимо довжину відрізка  $(an)$ , який зображує вектор прискорення  $\vec{a}_{BA}^n$  на плані

$$|an| = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{274,05}{5} = 54,8 \text{ мм.} \quad (4.11)$$

Від точки  $a$  у напрямі, паралельному лінії  $AB$ , відкладаємо відрізок  $(an)$ .

Величина дотичного прискорення  $\vec{a}_{BA}^\tau$  невідома, лінія дії проходить через точку  $B$  перпендикулярно до шатуна  $AB$ , тому на плані прискорень проводимо через точку  $n$  лінію  $I-I$ , перпендикулярну відрітку  $(an)$ .

Величина прискорення повзуна невідома, лінія дії вектора  $\vec{a}_B$  спрямована вздовж лінії  $OB$ , через полюс плану  $P_a$  проводимо лінію  $II-II$ , паралельну вказаній лінії. Перетин прямих  $I-I$  та  $II-II$  визначає точку  $b$ , відрізок  $(nb)$  зображує в прийнятому масштабі дотичне прискорення  $\vec{a}_{BA}^\tau$  точки  $B$ , відрізок  $(P_a b)$  - прискорення  $\vec{a}_B$ . Їхні довжини  $|nb|=29$  мм,  $|P_a b|=117$  мм. Напрямок прискорення повзуна протилежний напрямку швидкості  $\vec{V}_B$ , тому в дійсності величина  $a_B$  є від'ємною, тобто рух сповільнений.

Для знаходження величин невідомих прискорень необхідно довжини відповідних відрізків помножити на масштаб

$$a_{BA}^\tau = |nb| \cdot \mu_a = 29 \cdot 5 = 145 \text{ м/с}^2. \quad (4.12)$$

$$a_B = |P_a b| \cdot \mu_a = 117 \cdot 5 = 585 \text{ м/с}^2. \quad (4.13)$$

Повне прискорення точки  $B$  відносно точки  $A$  визначається  $a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^\tau)^2} = \sqrt{274,05^2 + 145^2} = 310,05 \text{ м/с}^2$ , на Рис.4.2 його зображує відрізок  $(ab)$ .

#### 4.2.4. Визначення кутового прискорення $\varepsilon_2$ шатуна $AB$ .

За планом прискорень можна визначити кутове прискорення відповідної ланки. Для цього слід скористатися відомими співвідношеннями між дотичним і кутовим прискореннями

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{145}{0,9} = 161,1 \text{ с}^{-2}. \quad (4.14)$$

Для визначення напрямку  $\varepsilon_2$  переносимо вектор  $\vec{a}_{BA}^\tau$  в точку  $B$  шатуна і дивимось його напрям руху відносно точки  $A$ . В даному

випадку кутове прискорення  $\epsilon_2$  спрямовано за годинниковою стрілкою. Отримані значення необхідно звести до Таблиці 4.2.

Таблиця 4.2.

Величина, що досліджується	Відрізок на плані	Напрямок	Величина відрізка на плані, мм	Масштаб	Величина, м/с <sup>2</sup>
$a_A$	$(P_a a)$	$\vec{a}_A \parallel OA$	$ P_a a  = 85,75$	$\mu_a = 5 \frac{м/с^2}{мм}$	428,75
$a_{BA}$	$a_{BA}^n$	$\vec{a}_{BA}^n \parallel AB$	$ an  = 54,8$		274,05
	$a_{BA}^\tau$	$\vec{a}_{BA}^\tau \perp AB$	$ nb  = 29$		145
$a_B$	$(P_a b)$	$\vec{a}_B \parallel OB$	$ P_a b  = 117$		575
$\epsilon_2$	За годинниковою стрілкою				161,1 с <sup>-2</sup>

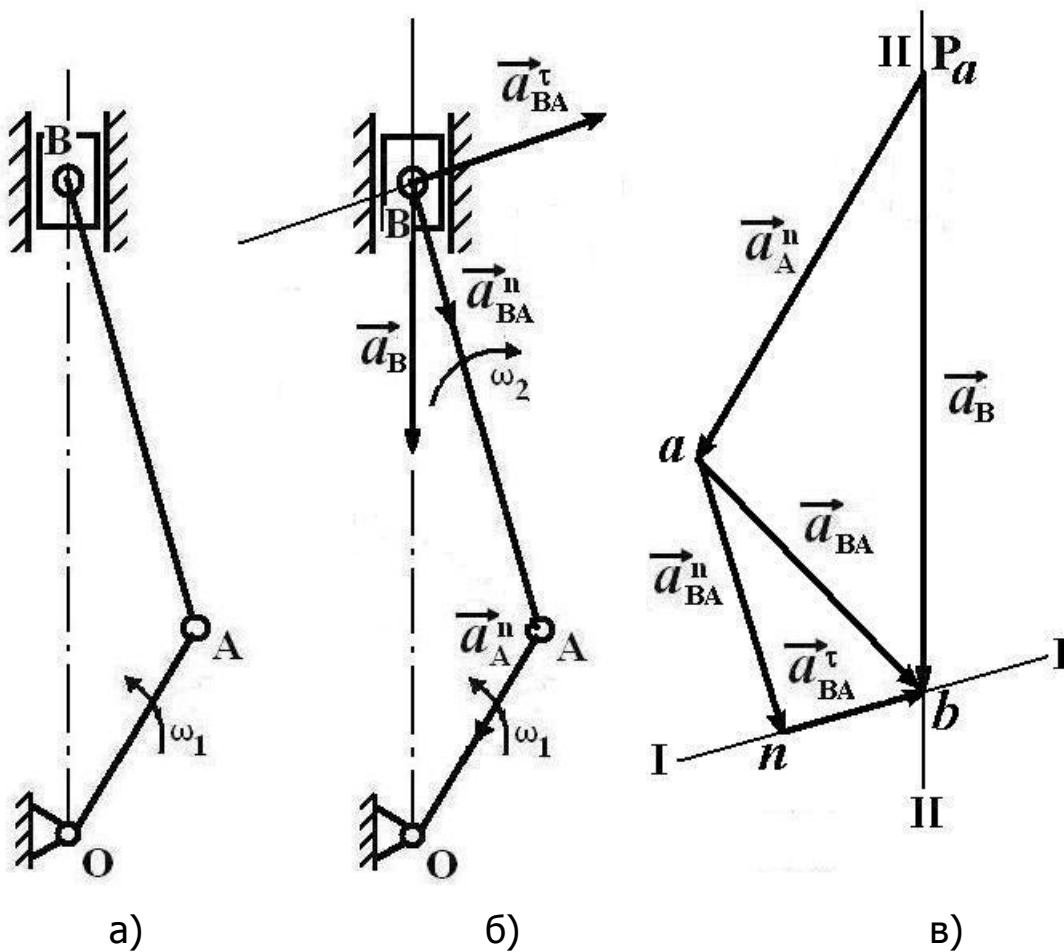


Рисунок 4.2.

## 5. Кінематичне дослідження механізму методом характеристик механізму.

### 5.1. Визначення характеристик механізму.

Сутність цього методу кінематичного аналізу механізму полягає в тому, що для механізму II-го класу з певною кінематичною схемою та заданими розмірами ланок завжди можна вивести рівняння залежності кутових і лінійних координат ланок від узагальненої координати.

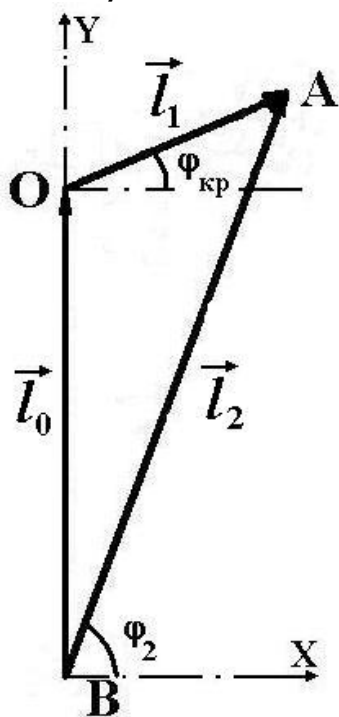


Рисунок 5.1.

В якості останньої для запропонованих схем беремо кут повороту кривошипу  $\varphi_{\text{кр}}$ .

Рівняння залежності лінійних і кутових координат ланок механізму від узагальненої координати в границях кінематичного циклу характеризують механізм з даними розмірами. Характеристики механізму не залежать від закону зміни узагальненої координати, тобто від закону руху ведучої ланки. Ці характеристики найбільш просто отримати з умови замкненості контуру механізму, які розглядаються як векторні багатокутники. Якщо кожен ланку механізму представити як вектор, то для схеми на Рис. 5.1. можна записати, увівши позначення  $l_0 = BO$ ,  $l_1 = OA$ ,  $l_2 = BA$ ,

$$\vec{l}_0 + \vec{l}_1 = \vec{l}_2. \quad (5.1)$$

Для схеми А у випадку  $0 \leq \varphi_{\text{кр}} \leq \frac{\pi}{2}$  споектуємо векторне рівняння (5.1) на осі X і Y, та отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_{\text{кр}} = l_2 \cos \varphi_2 \\ l_0 + l_1 \sin \varphi_{\text{кр}} = l_2 \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

в яких знаки при доданках визначаються знаками тригонометричних функцій. Система (5.2) має дві невідомі – довжину  $l_2$  і кут  $\varphi_2$ . В за-

гальному випадку через трансцендентність рівнянь відносно вказаних невідомих останні можуть бути визначені в численні способи.

Під час аналізу інших механізмів (шарнірного або кривошипно-шатунного) слід використовувати цей підхід, позначаючи довжини певних ланок і кути та проектуючи отримані векторні рівняння на осі  $X$  і  $Y$ .

Для знаходження співвідношень між лінійними та кутовими координатами можна скористатися геометричними співвідношеннями в кінематичних схемах механізмів. Для запропонованої схеми доцільно використати теореми косинусів (з урахуванням формул приведення для тригонометричних функцій)

$$l_2^2 = l_0^2 + l_1^2 - 2l_0l_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_{\text{КР}}\right) = l_0^2 + l_1^2 + 2l_0l_1 \sin \varphi_{\text{КР}} \quad (5.3)$$

і синусів

$$\frac{l_2}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_{\text{КР}}\right)} = \frac{l_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right)} \text{ або } \frac{l_2}{\cos \varphi_{\text{КР}}} = \frac{l_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right)}. \quad (5.4)$$

Після перетворень

$$l_2 = \sqrt{l_0^2 + l_1^2 + 2l_0l_1 \sin \varphi_{\text{КР}}}, \quad (5.5)$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{l_1}{l_2} \cos \varphi_{\text{КР}}\right). \quad (5.6)$$

З урахуванням вихідних даних  $l_0 = 1,0$  м;  $l_1 = 0,45$  м;  $\varphi_{\text{КР}} = \frac{\pi}{8}$  рад,

$$l_2 = \sqrt{1,0^2 + 0,45^2 + 2 \cdot 1,0 \cdot 0,45 \cdot \sin \frac{\pi}{8}} = 1,244 \text{ м;}$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{0,45}{1,244} \cos \frac{\pi}{8}\right) = 1,23 \text{ рад} = 70,48^\circ.$$

## 5.2. Визначення лінійних і кутових швидкостей.

Визначення лінійних і кутових швидкостей зводиться до диференціювання за часом складених характеристик механізму (5.2), які

розглядаються як складні функції. З виразу (5.5) з урахуванням

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_{\text{КР}}}{dt} \text{ і } l_2 = l_2(\varphi_{\text{КР}}) \text{ маємо}$$

$$\frac{dl_2(\varphi_{\text{КР}})}{dt} = \frac{\partial l_2(\varphi_{\text{КР}})}{\partial \varphi_{\text{КР}}} \cdot \frac{d\varphi_{\text{КР}}}{dt} = \frac{\partial l_2(\varphi_{\text{КР}})}{\partial \varphi_{\text{КР}}} \cdot \omega_1. \quad (5.7)$$

Далі отримуємо загальний вираз для похідної, яка визначає швидкість зміни довжини 2-ої ланки залежно від кута  $\varphi_{\text{КР}}$ . Але очевидно, що це є відносна швидкість  $V_r = V_r(\varphi_{\text{КР}})$ . З урахуванням цього

$$\frac{dl_2(\varphi_{\text{КР}})}{dt} = \frac{l_0 l_1 \omega_1 \cos \varphi_{\text{КР}}}{\sqrt{l_0^2 + l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_{\text{КР}}}} = V_2(\varphi_{\text{КР}}) = V_r(\varphi_{\text{КР}}). \quad (5.8)$$

Після диференціювання кожного з доданків рівнянь система (4.2) набуває вигляду

$$\begin{cases} -\omega_1 l_1 \sin \varphi_{\text{КР}} = -\omega_2 l_2 \sin \varphi_2 + V_r \cdot \cos \varphi_2 \\ \omega_1 l_1 \cos \varphi_{\text{КР}} = \omega_2 l_2 \cos \varphi_2 + V_r \cdot \sin \varphi_2 \end{cases}$$

або після приведення до канонічного вигляду рівнянь системи (всі доданки з невідомими в одній частині рівняння, з відомими - в іншій)

$$\begin{cases} \omega_2 l_2 \sin \varphi_2 = \omega_1 l_1 \sin \varphi_{\text{КР}} + V_r \cdot \cos \varphi_2 \\ -\omega_2 l_2 \cos \varphi_2 = -\omega_1 l_1 \cos \varphi_{\text{КР}} + V_r \cdot \sin \varphi_2 \end{cases}. \quad (5.9)$$

Узявши квадрат кожної частини обох рівнянь системи (5.9) і просумувавши обидва рівняння

$$\omega_2^2 \cdot l_2^2 = \omega_1^2 \cdot l_1^2 + V_r^2 + 2V_r \cdot \omega_1 l_1 (\sin \varphi_{\text{КР}} \cdot \cos \varphi_2 - \cos \varphi_{\text{КР}} \cdot \sin \varphi_2) \quad (5.10)$$

З урахуванням вихідних і отриманих даних  $l_0 = 1,0$  м;  $l_1 = 0,45$  м;

$$\varphi_{\text{КР}} = \frac{\pi}{8} \text{ рад, } \omega_1 = 7 \text{ с}^{-1}, \quad l_2 = 1,244 \text{ м; } \varphi_2 = 1,23 \text{ рад} = 70,48^\circ,$$

$$\sin \varphi_{\text{КР}} = 0,383; \cos \varphi_{\text{КР}} = 0,924; \sin \varphi_2 = 0,943; \cos \varphi_2 = 0,334, \text{ обчи-}$$

$$\text{слюємо швидкість } V_r = \frac{1,0 \cdot 0,45 \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot 7,0}{\sqrt{1,0^2 + 0,45^2 + 2 \cdot 1,0 \cdot 0,45 \cdot \sin \frac{\pi}{8}}} = 2,34 \text{ м/с за}$$

$$\text{виразом (5.8), і остаточно маємо } \omega_2 = \sqrt{\frac{4,445}{1,548}} = 1,695 \text{ с}^{-1}.$$

### 5.3. Визначення лінійних та кутових прискорень.

Величини лінійних та кутових прискорень визначаються аналогічно як для швидкостей. Розглядаючи рівняння системи (5.9) як складні функції, необхідно продиференціювати їх за часом, вирішення яких дає кутове прискорення  $\varepsilon_2$ . На жаль, отриманий вираз є надгроміздким, що є загальною перешкодою при визначенні прискорень. Зважаючи на це, розглянемо тільки визначення величини відносного прискорення  $a_r$ . Для економії місця в виразах не будемо показувати залежність  $l_2$  і  $V_r$  від кута  $\varphi_{\text{КР}}$ .

Введемо деякі позначення. З урахуванням (5.5)

$$l_2^2 = l_0^2 + l_1^2 + 2l_0l_1 \sin \varphi_{\text{КР}}, \quad \frac{d}{dt}(l_2^2) = 2l_0l_1 \cos \varphi_{\text{КР}} \cdot \omega_1.$$

Тоді вираз (5.8) можна записати

$$V_r = \frac{dl_2}{dt} = \frac{l_0l_1 \cos \varphi_{\text{КР}} \cdot \omega_1}{\sqrt{l_0^2 + l_1^2 + 2l_0l_1 \sin \varphi_{\text{КР}}}} = \frac{1}{2l_2} \cdot \frac{d}{dt}(l_2^2). \quad (5.10)$$

Похідна від  $V_r$  у вигляді (5.10) за часом дає відносне прискорення  $a_r$ ,

$$a_r = \frac{dV_r}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2}(l_2^2) - \frac{d}{dt}(l_2) \cdot \frac{d}{dt}(l_2^2)}{l_2^2}. \quad (5.11)$$

Визначаючи (за умов  $\frac{d\omega_1}{dt} = 0$  при постійній кутовій швидкості кривошипю)



$$\frac{d^2}{dt^2}(l_2^2) = -2l_0 l_1 \sin \varphi_{\text{КР}} \cdot \omega_1^2,$$

остаточно запишемо

$$a_r = \frac{-l_2 l_0 l_1 \sin \varphi_{\text{КР}} \cdot \omega_1^2 - V_r \cdot l_0 l_1 \cos \varphi_{\text{КР}} \cdot \omega_1}{l_2^2}. \quad (5.12)$$

Підставимо числові дані

$$a_r = \frac{-1,244 \cdot 1,0 \cdot 0,45 \cdot 0,383 \cdot 7^2 - 2,34 \cdot 1,0 \cdot 0,45 \cdot 0,924 \cdot 7}{1,244^2} = -11,19 \text{ м/с}^2.$$

В Таблиці 5.1. зведені дані про величини, визначені в графоаналітичний спосіб в підрозділах 3.1 та 3.2 та аналітичний в цьому розділі.

Таблиця 5.1.

Величина	$l_2, \text{ м}$	$\omega_2, \text{ с}^{-1}$	$V_r, \text{ м/с}$	$a_r, \text{ м/с}^2$
Графоаналітичний спосіб	1,24	1,694	2,35	-11,25
Аналітичний спосіб	1,244	1,695	2,34	-11,19

Аналізуючи отримані результати, зазначимо їхнє збігання, що забезпечується максимально точним виконанням графічних побудов кінематичної схеми, планів швидкостей і прискорень.

Після визначення кутових швидкостей і прискорень ланок задача визначення інших швидкостей і прискорень зводиться до аналітичного вирішення складених векторних рівнянь в розділі 3. Слід зазначити, що застосування методу характеристик при дослідженні кінематики механізмів доцільно тільки для простих механізмів, які мають у своїй структурі одну, максимум дві структурні групи. При цьому ланки механізму повинні мати просту геометричну форму.

Для механізмів з більш складною структурою, або ланки котрих мають складну геометричну форму, застосування методу характеристик менш доцільно у порівнянні з векторним методом. В цьому випадку різко зростає обсяг роботи щодо визначення співвідношень між лінійними та кутовими елементами схеми механізму, а також по диференціюванню та перетворенню рівнянь характеристик механізму.

## 6. Графічні засоби визначення кінематичних параметрів.

Для визначення кінематичних параметрів (прискорення, швидкості та переміщення) використовують графічні засоби – графічне диференціювання та графічне інтегрування. Використовуючи графік певної швидкості, визначають прискорення як першу похідну від швидкості за часом, та переміщення як інтеграл від швидкості. Між прискоренням (лінійним  $a$ , м/с<sup>2</sup>, та кутовим  $\varepsilon$ , с<sup>-2</sup>), швидкістю (лінійною  $V$ , м/с, та кутовою  $\omega$ , с<sup>-1</sup>), переміщенням (лінійним  $S$ , м, та кутом повороту  $\varphi$ , рад) існують відповідні диференційні залежності

$$V = \frac{dS}{dt}; \quad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}, \quad (6.1)$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (6.2)$$

Вказані параметри є функціями кута повороту кривошипну  $\varphi_{\text{КР}}$ , який визначається в діапазоні від початкового кута  $\varphi_0$  до кінцевого  $\varphi_{\text{К}} = \varphi_0 + 360^\circ$ ,  $\varphi_0 \leq \varphi_{\text{КР}} \leq \varphi_0 + 360^\circ$ , тобто аналізується повний оберт (цикл) вихідної ланки, і, як наслідок, рух інших ланок механізму в межах циклу.

В цій частині розрахунково-графічної роботи вихідними даними є отримані за допомогою програми ПМ-Лаб-№1 числові значення лінійної  $V$  (для схем Б і Г аналізується рух повзуна) та кутової  $\omega$  (для схем А і В аналізується рух куліси) швидкості (Таблиця 6.1). Як правило, необхідно брати 12 розрахункових точок з інтервалом  $\Delta\varphi = 30^\circ$ . Таким чином, ми маємо (залежно від типу важільного механізму), починаючи з  $\varphi_0$ , 13 значень певної швидкості

$$V_0 = V(\varphi_0), V_1 = V(\varphi_1 = \varphi_0 + 30^\circ), V_2 = V(\varphi_2 = \varphi_0 + 60^\circ), \dots, \quad (6.3)$$
$$V_{12} = V(\varphi_{12} = \varphi_0 + 360^\circ)$$

або

$$\omega_0 = \omega(\varphi_0), \omega_1 = \omega(\varphi_1 = \varphi_0 + 30^\circ), \omega_2 = \omega(\varphi_2 = \varphi_0 + 60^\circ), \dots,$$
$$\omega_{12} = \omega(\varphi_{12} = \varphi_0 + 360^\circ)$$

(6.4)

Всі побудови будуть розглянуті на прикладі руху повзуна, графік швидкості  $V(\varphi_{\text{кр}})$  якого показаний на Рис. 6.1. На цьому графіку на горизонтальній осі відкладаються відповідні значення кутів, а на вертикальній – значення швидкості. Останні зображені в певному масштабі, який недоцільно брати ані дрібним, ані крупним – він має бути розумним. Для цього визначаємо максимальне додатне та максимальне за модулем від’ємне значення швидкості, з аналізу яких і визначаємо певний масштаб побудови графіка. Гарантовано решта значень будуть знаходитися між цими двома крайніми за величинами точками.

Масштабний коефіцієнт  $K_V, \frac{м/с}{мм}$  (або  $\frac{см/с}{мм}$ ), показує скільки одиниць швидкості відповідає відрізку на вертикальній осі довжиною 1 мм.

Таблиця 6.1.

$\varphi_{\text{кр}}, \text{град}$	$V(\varphi_{\text{кр}}), \text{м/с}$
60,00	3,65
90,00	0,00
120,00	-3,65
150,00	-5,86
180,00	-6,00
210,00	-4,53
240,00	-2,35
270,00	0,00
300,00	2,35
330,00	4,53
360,00	6,00
390,00	5,86
420,00	3,65

Для будь-якої точки графіку з ординатою  $Y_V$  дійсна величина швидкості  $V = K_V \cdot Y_V, \text{м/с}$ , і навпаки, для будь-якої швидкості  $V$  відрізок, який зображує її на графіку, визначається  $Y_V = \frac{V}{K_V}, \text{мм}$ .

Для запропонованої задачі максимальне додатне значення дорівнює  $V(\varphi_{\text{кр}}) = 6,00 \text{ м/с}$ , максимальне за модулем від’ємне значення дорівнює  $V(\varphi_{\text{кр}}) = -6,00 \text{ м/с}$ . Перше (для  $\varphi_{\text{кр}} = 60^\circ$ ) і останнє (для  $\varphi_{\text{кр}} = 420^\circ$ ) значення збігаються через циклічність зміни величин кінематичних параметрів ланок механізму.

На Рис.6.1 показано дійсний графік функції  $V(\varphi_{\text{кр}})$  з урахуванням даних в Таблиці 6.1.

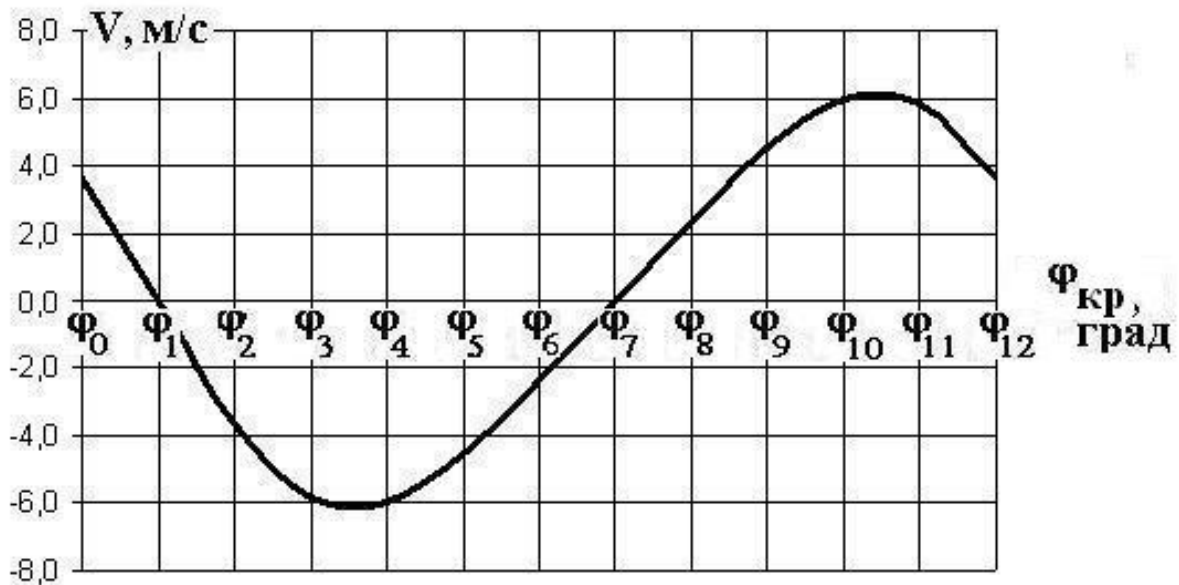


Рисунок 6.1.

### 6.1. Графічне диференціювання.

Задача графічного диференціювання полягає в побудові по заданому графіку функції  $f(\varphi_{кр})$  графіку її похідної  $f'(\varphi_{кр})$ . Ключовими точками є  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{12}$ . В нашій роботі в ролі функції  $f(\varphi_{кр})$  виступають  $V(\varphi_{кр})$  (або  $\omega(\varphi_{кр})$ ), в ролі похідної  $f'(\varphi_{кр})$  -  $a(\varphi_{кр})$  (або  $\varepsilon(\varphi_{кр})$ ).

Першим кроком є заміна кривої на кожному з інтервалів  $(\varphi_0, \varphi_1), (\varphi_1, \varphi_2), \dots, (\varphi_{11}, \varphi_{12})$  хордою – відрізком, який з'єднує дві крайні точки графіку на інтервалі. Наближено кожна хорду можна вважати паралельною дотичній до графіку функції в середній точці певного інтервалу  $\Delta\varphi = 30^\circ$  (Рис. 6.2).

Другим кроком на осі  $O\varphi$  обираємо полюс - точку  $P(-l, 0)$ , знак «-» в координаті показує розташування цієї точки ліворуч від вертикальної осі. З полюса проводимо лінії, паралельні відповідним хордам, до перетину з вертикальною віссю, точки нумеруємо від 1 до 12. Якщо деякі точки збігаються для різних інтервалів, положення цих точок супроводжується знаком «=». В результаті отримуємо відрізки  $(P1), (P2), \dots, (P12)$ , які показують нахил, а відрізки вертикальної осі  $(O1), (O2), \dots, (O12)$  є відповідно величинами, які пропорційні справжнім значенням похідної в обраних точках, тобто є ординатами графіку похідної.

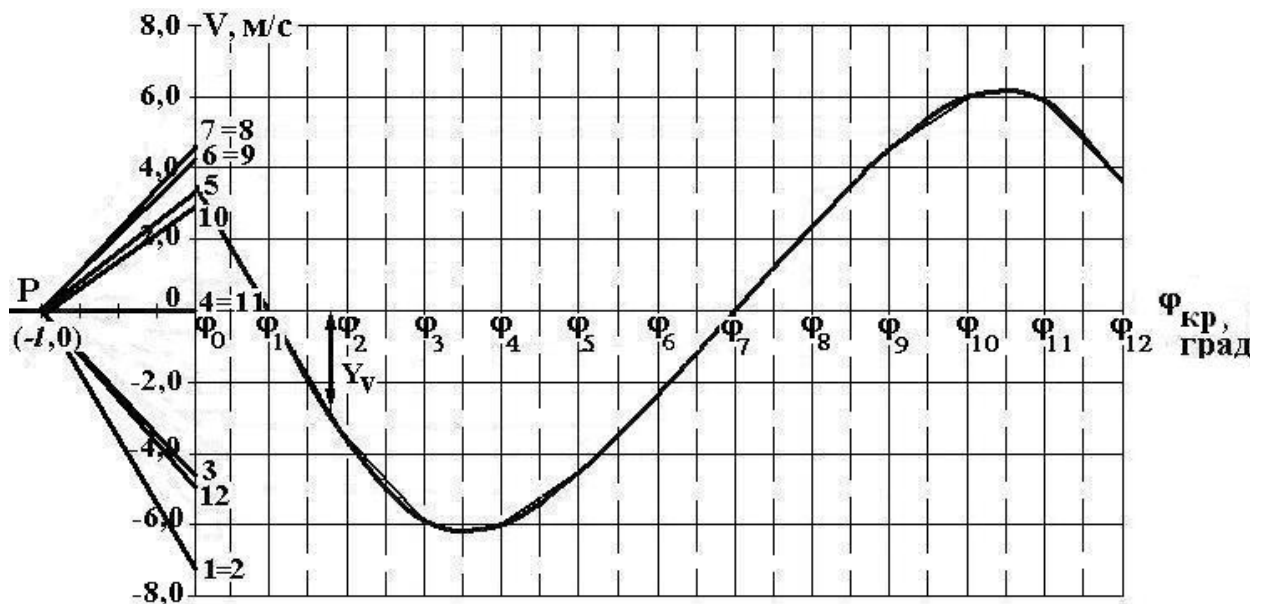


Рисунок 6.2

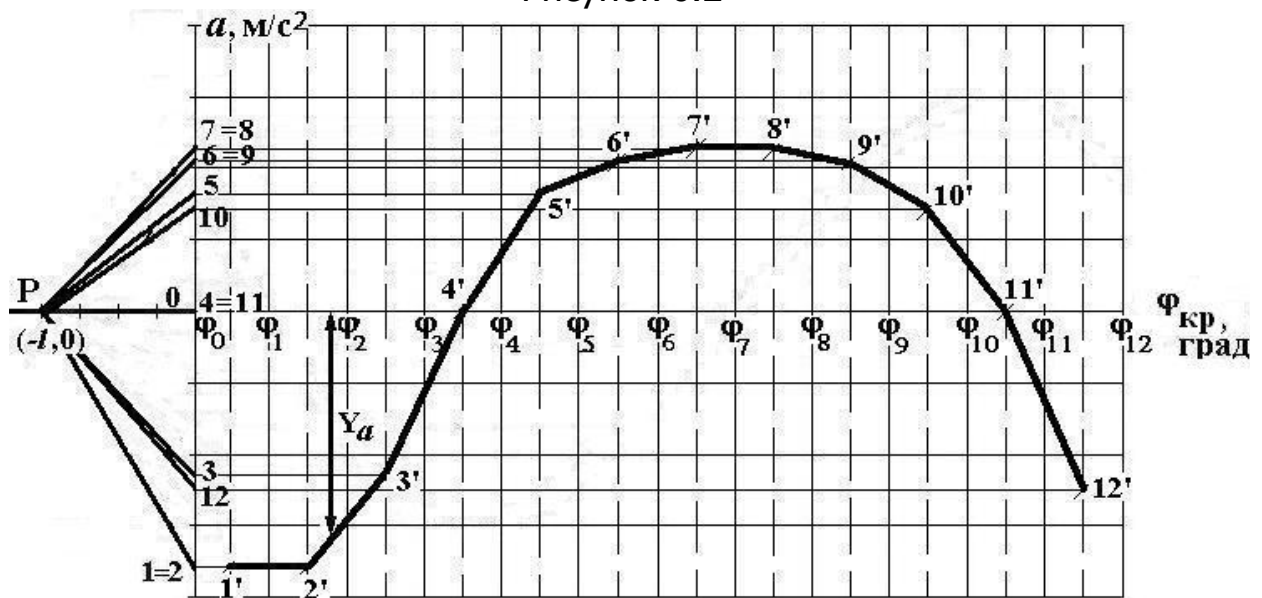


Рисунок 6.3

Далі будуємо графік похідної (Рис. 6.3). Масштаб горизонтальної осі не змінюється, дублюємо відрізки (P1), (P2),..., (P12). Зважаючи на аналогію між хордою та дотичною в середній точці інтервалу, проводимо вертикальні пунктирні лінії через середину кожного інтервалу. З точки 1 ведемо горизонтальну лінію до перетину зі вказаною лінією 1-го інтервалу – маємо точку 1', з точки 2 ведемо горизонтальну лінію до перетину зі вказаною лінією 2-го інтервалу – маємо точку 2', і так до останнього інтервалу з точкою 12'. Отримані точки послідовно з'єднуємо прямими лініями. Зважаючи на циклічність зміни кінематичних параметрів ланок механізму, ордината  $V(\varphi_0) = V(\varphi_{12})$ .

Положення точки полюса ніяким чином не впливає на поведінку графіку похідної, але впливає на масштаб. На Рис. 6.2. кожному інте-

рвалу  $\Delta\varphi = 30^\circ$  відповідають однакові відрізки  $(\Delta\varphi)$ , мм, -  $(\varphi_0, \varphi_1)$ ,  $(\varphi_1, \varphi_2), \dots, (\varphi_{11}, \varphi_{12})$ . Якщо  $l > (\Delta\varphi)$ , то графік похідної буде розтягнутим вздовж вертикальної осі, при  $l < (\Delta\varphi)$  - притиснутим до горизонтальної осі. У випадку  $l = (\Delta\varphi)$  вказаний графік отримуємо в натуральному масштабі. Для врахування положення полюса при визначенні дійсних значень прискорення вводимо безрозмірний коефіцієнт  $K_l = \frac{l}{(\Delta\varphi)}$ .

На останок необхідно враховувати, як швидко протягом інтервалу  $\Delta\varphi = 30^\circ$  змінюються за величиною кінематичні параметри ланок механізму. Безумовно, для однорухливого механізму ця швидкість залежить від кутової швидкості кривошипу  $\omega_1, \text{с}^{-1}$ , тому коефіцієнт

$$K_t = \frac{\Delta\varphi}{\omega_1} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{\omega_1}, \text{с.}$$

Чим менше цей коефіцієнт, тим за менший

проміжок часу відбуваються зміни величин кінематичних параметрів. Остаточно дійсна величина прискорення залежить від вказаних коефіцієнтів  $K_v, K_l, K_t$  та відстані  $Y_a(\varphi_{\text{КР}})$  від горизонтальної осі до будь-якої точки на графіку  $a = f(\varphi_{\text{КР}})$

$$a(\varphi_{\text{КР}}) = Y_a(\varphi_{\text{КР}}) \cdot \frac{K_v}{K_t \cdot K_l}. \quad (6.5)$$

Перевірка розмірності дає  $\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{мм} \cdot \frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \cdot \frac{1}{\text{с} \cdot 1}$ .

На точність визначення величин прискорень впливає точність визначення нахилу дотичної на графіку  $V(\varphi_{\text{КР}})$ , тому за необхідності повний оберт  $360^\circ$  можна розбити не на 12 інтервалів з  $\Delta\varphi = 30^\circ$ , а на 24 з  $\Delta\varphi = 15^\circ$ .

## 6.2. Графічне інтегрування.

Задачею графічного інтегрування є побудова по заданому графіку функції  $f(\varphi_{\text{КР}})$  графіку її первісної  $F(\varphi_{\text{КР}}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_{\text{К}}} f(\varphi_{\text{КР}}) d\varphi_{\text{КР}}$ , іншими словами, необхідно побудувати таку криву  $F(\varphi_{\text{КР}})$ , ордината

якої в кожній точці  $\varphi_{KP}$  чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції з основою  $\Delta\varphi$ , обмеженою даною кривою  $f(\varphi_{KP})$ . Відсутність константи в виразі для первісної показує, що побудова її графіку почнеться з нульової точки – початку координат. Дійсне значення залежить тільки від вибору точки відліку, при цьому загальний вигляд первісної залишається незмінним.

Для наближеної побудови графіка первісної функції  $S(\varphi_{KP})$  визначаємо на кожному інтервалі  $(\varphi_0, \varphi_1), (\varphi_1, \varphi_2), \dots, (\varphi_{11}, \varphi_{12})$  їхні середини, проводимо через них вертикальні лінії, отримані точки перетину з графіком функції  $V(\varphi_{KP})$  проектуємо на вертикальну вісь і позначаємо числами від 1 до 12 (Рис. 6.4). Далі обираємо полюс - точку  $P(-l, 0)$ , який може збігатися з полюсом для графічного диференціювання, а може бути іншим. Поєднуємо точку полюса з точками 1, 2, ..., 12 і отримуємо відрізки  $(P1), (P2), \dots, (P12)$ . Після цього на майбутньому графіку  $S(\varphi_{KP})$  дублюємо вказані відрізки. Технічно побудова графіка функції  $S(\varphi_{KP})$  здійснюється наступним чином (Рис. 6.5)– з точки  $O$  (центру координат) проводимо пряму  $(O1'')$ , паралельну відрізку  $(P1)$ , до перетину з вертикальною лінією, що проходить через точку  $\varphi_{KP} = \varphi_1$ , і отримуємо точку  $1''$ ; далі саме з цієї точки проводимо пряму  $(1''2'')$  паралельну відрізку  $(P2)$  до перетину з вертикальною лінією, що проходить через точку  $\varphi_{KP} = \varphi_2$ , і отримуємо точку  $2''$  і так до останньої точки  $12''$ . Таким чином на кожному інтервалі ми додаємо з відповідним знаком площу трапеції до попередньої суми. Зважаючи на циклічність зміни кінематичних параметрів ланок механізму, ордината  $S(\varphi_0) = S(\varphi_K) = 0$ .

Положення точки полюса ніяким чином не впливає на поведінку графіку первісної, але впливає на масштаб. Якщо  $l > (\Delta\varphi)$ , то графік первісної буде притиснутим до горизонтальної осі, при  $l < (\Delta\varphi)$  - розтягнутим вздовж вертикальної осі, тобто ситуація є зворотною у порівнянні з графіком похідної. У випадку  $l = (\Delta\varphi)$  вказаний графік отримуємо в натуральному масштабі. Для врахування положення полюса при визначенні дійсних значень прискорення вводимо безрозмірний коефіцієнт  $K_l = \frac{l}{(\Delta\varphi)}$ .

$$K_l = \frac{l}{(\Delta\varphi)}$$

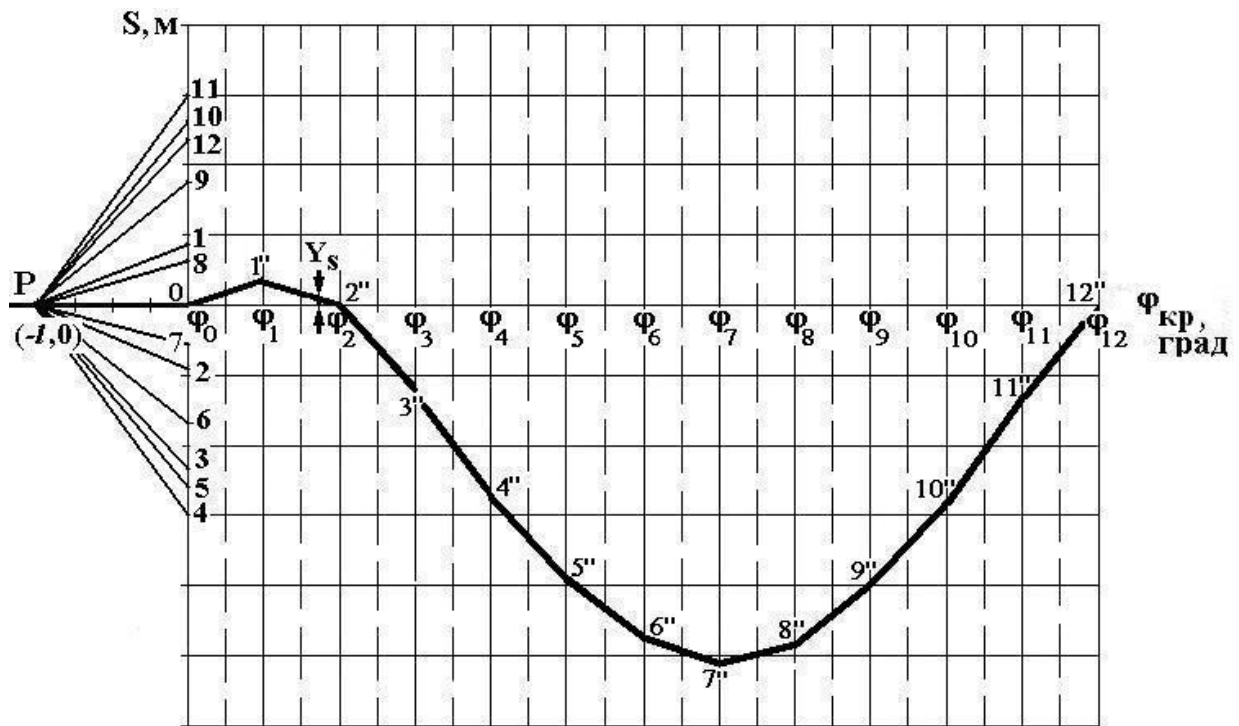


Рисунок 6.4.

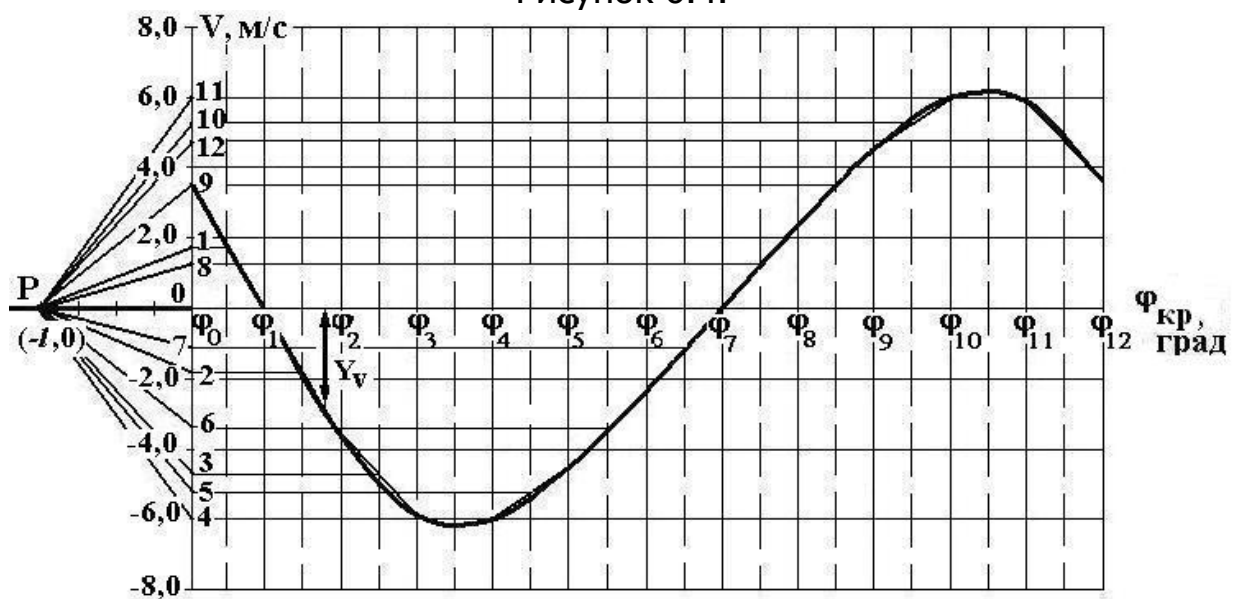


Рисунок 6.5.

Остаточно дійсна величина переміщення залежить від вказаних коефіцієнтів  $K_V$ ,  $K_l$ ,  $K_t$  та відстані  $Y_S(\varphi_{кр})$  від горизонтальної осі до будь-якої точки на графіку  $S = f(\varphi_{кр})$

$$S(\varphi_{кр}) = Y_S(\varphi_{кр}) \cdot K_V \cdot K_l \cdot K_t. \quad (6.6)$$

Перевірка розмірності дає  $m = мм \cdot \frac{м/с}{мм} \cdot с \cdot 1$ .



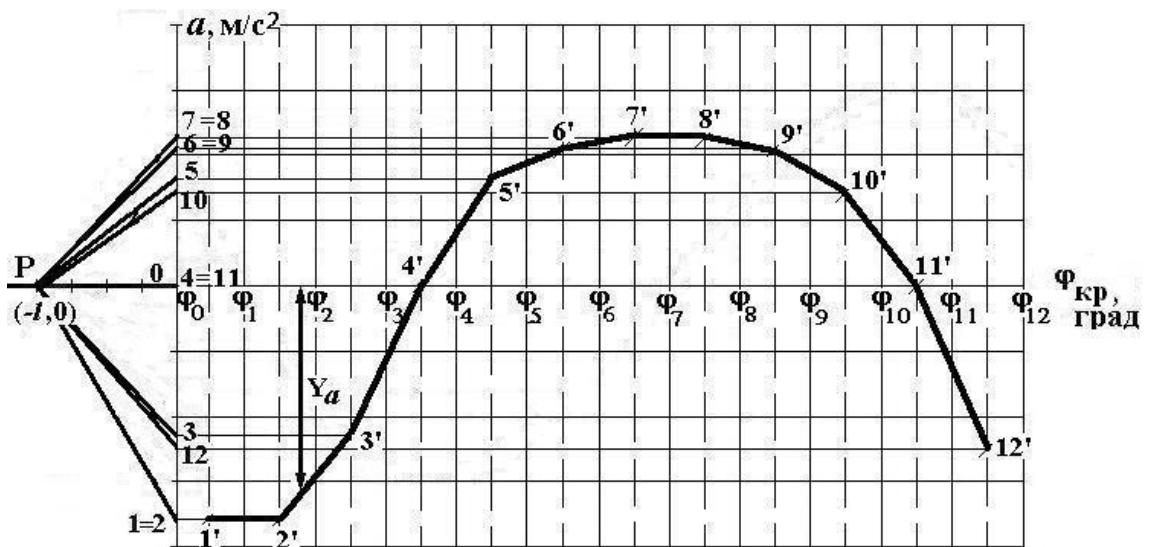
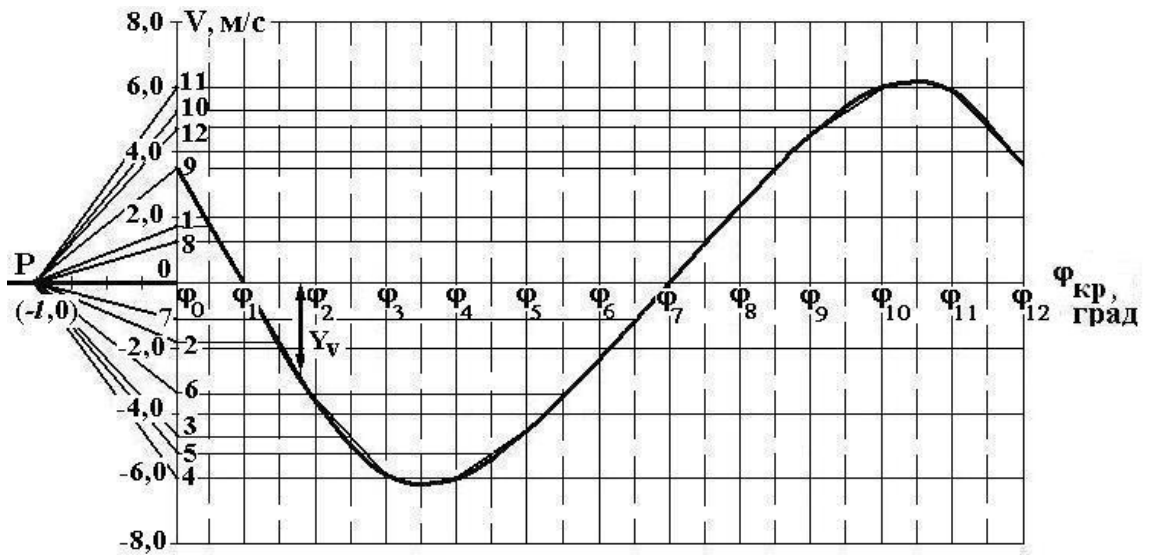
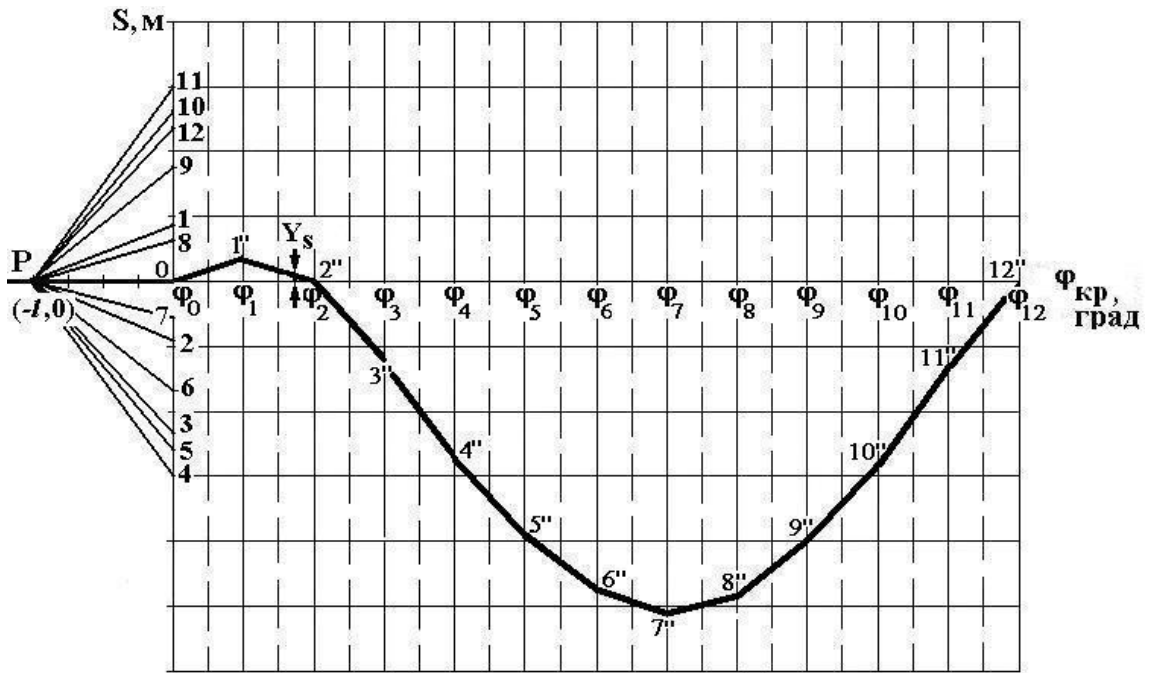


Рисунок 6.6.

Графічне інтегрування має малу точність, тому цей спосіб доцільно використовувати тоді, коли необхідно мати загальне уявлення про інтеграл функції або коли підінтегральна функція задана графічно та її аналітичний вигляд невідомий.

Все вищесказане для функцій  $S(\varphi_{\text{кр}})$ ,  $V(\varphi_{\text{кр}})$ ,  $a(\varphi_{\text{кр}})$  з точністю до позначень можна використовувати для побудови та аналізу графіків  $\varphi(\varphi_{\text{кр}})$ ,  $\omega(\varphi_{\text{кр}})$ ,  $\varepsilon(\varphi_{\text{кр}})$

Після побудови графіків функцій  $S(\varphi_{\text{кр}})$ ,  $V(\varphi_{\text{кр}})$ ,  $a(\varphi_{\text{кр}})$  доцільно розмістити їх один під одним (Рис. 6.6) для визначення відповідності у поведінці кожної функції з урахуванням співвідношень (6.1) або (6.2).

Якщо на графіку  $S(\varphi_{\text{кр}})$  для певного значення кута  $\varphi_{\text{кр}}$  маємо екстремальні точки, то на графіку  $V(\varphi_{\text{кр}})$  в цих точках швидкість дорівнює нулю. На графіку  $a(\varphi_{\text{кр}})$  в цих точках прискорення буде мати екстремуми, які відрізняються знаком у порівнянні з графіком  $S(\varphi_{\text{кр}})$ , наприклад,  $S(\varphi_{\text{кр}})$  досягає максимуму -  $a(\varphi_{\text{кр}})$  мінімуму,  $S(\varphi_{\text{кр}})$  досягає мінімуму -  $a(\varphi_{\text{кр}})$  максимуму (якщо  $f''(\varphi_{\text{кр}}) > 0$ , то в цій точці функція матиме мінімум, якщо  $f''(\varphi_{\text{кр}}) < 0$  - функція матиме максимум). Для графіку швидкості  $V(\varphi_{\text{кр}})$  графік прискорення  $a(\varphi_{\text{кр}})$  є графіком першої похідної. В точках, де  $V(\varphi_{\text{кр}})$  має екстремум,  $a(\varphi_{\text{кр}})$  дорівнює нулю. Поведінка функцій – їхнє зростання або зменшення на певних ділянках – теж має бути проаналізована відповідно до правил математичного аналізу.

## **7. Правила оформлення розрахунково-графічної роботи.**

### **7.1. Пояснювальна записка.**

Пояснювальна записка – документ, який містить опис досліджуваного механізму, обґрунтування всіх прийнятих методів дослідження, всі види розрахунків, схеми, таблиці, що пояснюють розрахунки та прийняті рішення. Пояснювальна записка виконується на аркушах формату А4 з однієї сторони і складається з наступних частин:

1. Титульний лист (Додаток 1) є сторінкою 1, номер якої не ставиться на аркуші.
2. Зміст є сторінкою 2, номер якої не ставиться на аркуші. Має містити назви розділів, підрозділів з указаними номерами сторінок.
3. Завдання на розрахунково-графічну роботу – сторінка 3, починаючи з якої послідовно проставляються номери всіх сторінок на всіх аркушах Пояснювальної записки.
4. Вступ.
5. Матеріал поділяється на Розділи, які нумерують однією цифрою. Черговий розділ починається з нової сторінки. Підрозділи мають подвійну нумерацію. В цій частині обов'язково мають бути наступні розділи: Структурний аналіз механізму, Кінематичний аналіз механізму, Графічні засоби визначення кінематичних параметрів. Розділи «Зміст», «Завдання», «Вступ» не нумерують.

В тексті Пояснювальної записки мають бути посилання на стандарти, довідники, підручники та інші документи. При посиланні вказують номер джерела, під яким він поставлений в Списку літератури, наведеного в Пояснювальній записці. Розрахункові формули записують спочатку в символічному вигляді, потім в них підставляються числові значення фізичних величин і остаточно записують відповідь з обов'язковим указанням розмірності.

### **7.2. Загальні правила виконання креслень.**

Креслення та графічні побудови виконуються на аркуші (або за необхідності аркушах) формату А3, який має бути оформленим згідно з «Межгосударственным стандартом ГОСТ 2.106-96 «Единая система конструкторской документации», який було введено 01.07.1997 р. На кресленні необхідно нанести внутрішню рамку суцільною основною лінією на відстані 20 мм від лівої сторони зовнішньої рамки та на відстані 5 мм від решти сторін. На Рисунку 7.1 приведений Основний надпис для креслень і схем за ГОСТ 2.104-2006. В позначених графах ос-

новного надпису указують (відповідно до нашої розрахунково-графічної роботи):

- 1 – найменування;
- 2 – позначення документа;
- 3 – графу заповнюють тільки на кресленнях деталей, записують позначення та номер ГОСТ матеріалу;
- 4 – в навчальних проектах в лівій клітинці пишуть Літеру У;
- 5 – маса виробу, кг (в навчальних проектах графу можна не заповнювати);
- 6 – масштаб (1:1);
- 7 – порядковий номер аркуша (якщо креслення складається з одного аркуша, графу не заповнюють);
- 8 – загальна кількість аркушів документа, вказаного в графі 2 (графа заповнюється тільки на першому аркуші);
- 9 – скорочена назва навчального закладу – НУЦЗУ, шифр групи курсанта або студента; в рядку «Розробив» вказують прізвище виконавця, його підпис і дата; в рядку «Перевір.» - прізвище керівника роботи, його підпис і дата; решта рядків залишається вільними.

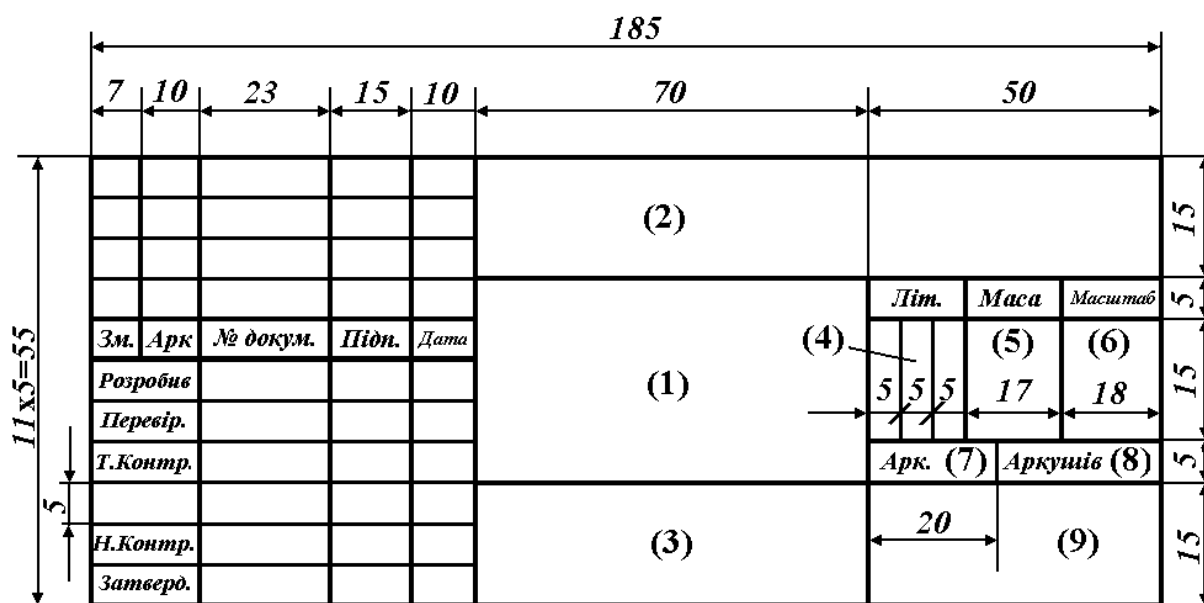


Рисунок 7.1.

Всі графічні побудови виконуються олівцем, супроводжуються відповідним надписом і масштабом. Масштаб обирається так, щоб площа аркуша була максимально заповненою. Кінці векторів швидкостей (прискорень) слід позначати малими літерами латинського алфавіту, напрям абсолютних і відносних швидкостей (прискорень) необхідно показувати стрілками.

**ДЕРЖАВНА СЛУЖБА УКРАЇНИ З  
НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ**

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО  
ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

ФАКУЛЬТЕТ ТЕХНОГЕННО-ЕКОЛОГІЧНОЇ БЕЗПЕКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ

**МОДУЛЬНА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА  
«АНАЛІЗ РУХУ ПЛОСКОГО ВАЖІЛЬНОГО  
МЕХАНІЗМУ»  
З ДИСЦИПЛІНИ «ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА»  
РОЗДІЛ «ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН»**

РОЗРОБИВ:

Курсант (студент) групи (номер)  
(прізвище, ім'я, по-батькові)

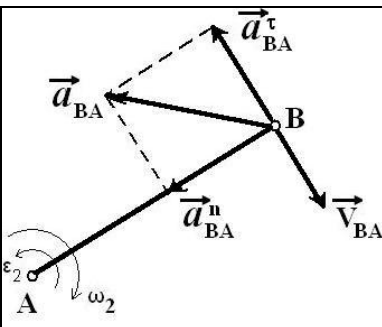
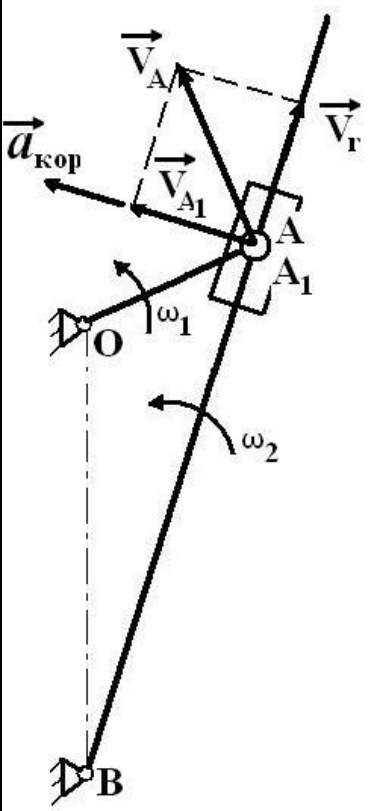
ПЕРЕВІРИВ:

(посада, вчений ступінь)  
(прізвище, ім'я, по-батькові)

ХАРКІВ (рік)

**Основні формули для визначення швидкостей і прискорень точок ланок**

№	Вид руху	Швидкість / Прискорення
1	<p>Поступальний (повзун по стояку)</p> 	<p><b>Швидкість</b> Всі точки ланки мають однакову швидкість <math>\vec{V}_A</math> - вектор, який спрямований вздовж траєкторії руху точки <math>A</math>, <math>\vec{V}_A \parallel X-X</math></p> <p><b>Прискорення</b> Всі точки ланки мають однакові прискорення <math>\vec{a}_A</math>, <math>\vec{a}_A \parallel X-X</math>. Якщо вектор прискорення <math>\vec{a}_A</math> спрямований у бік <math>\vec{V}_A</math>, то рух рівноприскорений, якщо вектор прискорення <math>\vec{a}_A</math> спрямований у бік, протилежний <math>\vec{V}_A</math>, то рух - рівносповільнений.</p>
2	<p>Обертальний (повно або неповно) рух навколо нерухомої осі (кривошип або коромисло відносно стояка)</p> 	<p><b>Швидкість</b> Швидкість точки <math>A</math> <math>V_A = \omega_1 \cdot OA</math>. Вектор <math>\vec{V}_A</math> спрямований перпендикулярно до відрізка <math>OA</math>, у бік кутової швидкості <math>\omega_1</math>, <math>\vec{V}_A \perp OA</math></p> <p><b>Прискорення</b> Повне прискорення точки <math>A</math> <math>\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau</math>.</p> <p>Нормальне прискорення <math>a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA</math>, вектор <math>\vec{a}_A^n</math> спрямований за радіусом <math>AO</math> до центру обертання <math>O</math> <math>\vec{a}_A^n \parallel OA</math>.</p> <p>Дотичне прискорення <math>a_A^\tau = \epsilon_1 \cdot OA</math>. Вектор <math>\vec{a}_A^\tau</math> спрямований перпендикулярно <math>OA</math> у бік кутового прискорення <math>\epsilon_1</math> <math>\vec{a}_A^\tau \perp OA</math>.</p>
3	<p>Ланка здійснює плоскопаралельний рух (шатун)</p>	<p><b>Швидкість</b> Швидкість точки <math>B</math> <math>\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}</math>. Відносна швидкість <math>V_{BA} = \omega_2 \cdot AB</math>. Вектор <math>\vec{V}_{BA}</math> спрямований перпендикулярно до <math>BA</math> у бік кутової швидкості <math>\omega_2</math>, <math>\vec{V}_{BA} \perp BA</math></p>

	<p><b>Прискорення</b> Прискорення точки В, <math>\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}</math>. Відносне прискорення <math>\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau</math>. Нормальне прискорення <math>a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB</math>. Вектор <math>\vec{a}_{BA}^n</math> спрямований паралельно ВА (від точки В до точки А), <math>\vec{a}_{BA}^n \parallel BA</math>. Дотичне прискорення <math>\vec{a}_{BA}^\tau = \epsilon_2 \cdot AB</math>. Вектор <math>\vec{a}_{BA}^\tau</math> спрямований перпендикулярно ВА, <math>\vec{a}_{BA}^\tau \perp BA</math>.</p>
<p><b>4</b> Переміщення кулісного каменя вздовж куліси, ланка здійснює складний рух</p> 	<p><b>Швидкість</b> Точки А (належить кривошипу) і А<sub>1</sub> (належить кулісі) в кожний момент руху є тотожними. Вектор відносної швидкості <math>\vec{V}_r</math> спрямований вздовж куліси, <math>V_{A_1} = \omega_2 \cdot A_1B</math>, вектор переносної швидкості <math>\vec{V}_{A_1}</math> спрямований перпендикулярно до куліси ВА<sub>1</sub> у бік кутової швидкості <math>\omega_2</math>, <math>\vec{V}_{A_1} \perp BA_1</math>.</p> <p><b>Прискорення (коріолісове)</b> У системі координат, яка обертається навколо осі із кутовою швидкістю <math>\omega_2</math>, тіло, що рухається із лінійною швидкістю <math>V_r</math>, має прискорення. Коріолісовим або поворотним прискоренням називається складова абсолютного прискорення точки в складному русі, яка дорівнює подвійному векторному добутку кутової швидкості переносного обертання на відносну швидкість точки <math>\vec{a}_{КОР} = 2(\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_r)</math>. Якщо <math>\vec{\omega}_2 \perp \vec{V}_r</math>, тоді <math>a_{КОР} = 2\omega_2 \cdot V_r</math>. Напрямок вказаного прискорення визначається так – необхідно в площині обертання куліси вектор відносної швидкості <math>\vec{V}_r</math> повернути в цій площині на 90° у бік переносного обертання (за напрямом кутової швидкості <math>\omega_2</math>).</p>

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Единая система конструкторской документации. Основные надписи : ГОСТ 2.104-2006.-[Дата введения 2006-09-01].-М.: Стандартинформ, 2006.-20 с.- (Межгосударственный стандарт).
2. Единая система конструкторской документации. Текстовые документы : ГОСТ 2.106-96.-[Дата введения 1997-07-01].-М.: Стандартинформ, 1997.-39 с.- (Межгосударственный стандарт).
3. Единая система конструкторской документации. Масштабы : ГОСТ 2.302-68.-[Дата введения 1971-01-01].-М.: ИПК Издательство стандартов, 1971.-5 с.- (Межгосударственный стандарт)
4. Метрологія. Одиниці фізичних величин. Основні одиниці фізичних величин міжнародної системи одиниць. Основні положення, назви та позначення : ДСТУ 3651.0-97.-[Чинний від 1999-01-01].-К.: Держстандарт України, 1998.-27 с.
5. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин / Артоболевский И.И. – М.: Наука, 1975.-640 с.
6. Белоконев И.М. Механика машин. Расчеты с применением ЭЦВМ / Белоконев И.М.-К.: Вища школа, 1978.-232 с.
7. Зиновьев В.А. Курс теории механизмов и машин / Зиновьев В.А.-М.: Наука, 1975.-384 с.
8. Кожевников С.Н. Теория механизмов и машин / Кожевников С.Н. – М.: Машиностроение, 1974.-592 с.



## ЗМІСТ

ВСТУП	.....3
1. Завдання на розрахунково-графічну роботу	.....3
2. Структурний аналіз механізму	.....5
2.1. Основні поняття та визначення	.....5
2.2. Структурна схема механізму	.....8
2.3. Кінематичні пари	.....9
2.4. Ступінь рухливості механізму	.....9
2.5. Побудова груп Ассура	.....9
2.5.1. Остання група Ассура	....10
2.5.2. Початковий механізм	....10
3. Кінематичний аналіз кулісного механізму	....11
3.1. Визначення швидкостей точок ланок і кутових швидкостей ланок	....12
3.1.1. Загальні відомості про побудову плану швидкостей	....12
3.1.2. Визначення швидкості $\vec{V}_A$ точки $A$	....13
3.1.3. Визначення відносної швидкості $\vec{V}_r$ та переносної швидкості $\vec{V}_{A_1}$	....14
3.1.4. Визначення кутової швидкості $\omega_2$ куліси $BA_1$	....14
3.2. Визначення прискорень точок ланок і кутових прискорень ланок	....16
3.2.1. Загальні відомості про побудову плану прискорень	....16
3.2.2. Визначення прискорення $\vec{a}_A$ точки $A$	....17
3.2.3. Визначення коріолісова прискорення $\vec{a}_{КОР}$	....17
3.2.4. Визначення прискорення $\vec{a}_{A_1}$ точки $A_1$ та відносного прискорення $\vec{a}_r$	....17
3.2.5. Визначення кутового прискорення $\epsilon_2$ куліси $BA_1$	....18
4. Кінематичний аналіз кривошипно-повзункового механізму	....21
4.1. Визначення швидкостей точок ланок і кутових швидкостей ланок	....21
4.1.1. Загальні відомості про побудову плану швидкостей	....21
4.1.2. Визначення швидкості $\vec{V}_A$ точки $A$	....22

4.1.3. Визначення обертальної швидкості $\vec{V}_{BA}$ та швидкості $\vec{V}_B$	....23
4.1.4. Визначення кутової швидкості $\Omega_2$ шатуна АВ	....23
4.2. Визначення прискорень точок ланок і кутових прискорень ланок	....25
4.2.1. Загальні відомості про побудову плану прискорень	....25
4.2.2. Визначення прискорення $\vec{a}_A$ точки А	....25
4.2.3. Визначення прискорення $\vec{a}_B$ повзуна та прискорення $\vec{a}_{BA}$ точки В шатуна АВ	....26
4.2.4. Визначення кутового прискорення $\epsilon_2$ шатуна АВ	....27
5. Кінематичне дослідження механізму методом характеристик механізму	....29
5.1. Визначення характеристик механізму	....29
5.2. Визначення лінійних і кутових швидкостей	....30
5.3. Визначення лінійних та кутових прискорень	....32
6. Графічні засоби визначення кінематичних параметрів	....34
6.1. Графічне диференціювання	....36
6.2. Графічне інтегрування	....38
7. Правила оформлення розрахунково-графічної роботи	....43
7.1. Пояснювальна записка	....43
7.2. Загальні правила виконання креслень	....43
Додаток 1.....	....45
Додаток 2.....	....46
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	....48

**Навчальне видання**

Укладачі: **Вамболь** Сергій Олександрович  
**Міщенко** Ігор Вікторович  
**Чернобай** Геннадій Олександрович

**ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА  
РОЗДІЛ «ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН»**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ОРГАНІЗАЦІЇ  
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ  
ПРИ ВИВЧЕННІ ДИСЦИПЛІНИ**

Відповідальний за випуск І.В.Міщенко

Підп. до друку 10.06.2012 р. Формат 60x84 1/16  
Папір 80 г/см<sup>2</sup>. Друк ризограф. Умовн.-друк. арк. 3,2  
Тираж 150 прим. Вид № 98/12 Зам №

**Відділення редакційно-видавничої діяльності  
Національного університету цивільного захисту України  
61023, Харків, вул. Чернишевська, 94**

