Кафедра фізико-математичних дисциплін

Університету цивільного захисту України

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділи: ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, РЯДИ, КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА, ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ, ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт

Для слухачів заочної форми 3-річного строку навчання

Харків 2008

.
Друкується за рішенням кафедри
фізико-математичних дисциплін
Протокол №   від

Рецензенти: Мунтян В.К. – завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін УЦЗУ, кандидат технічних наук, доцент

Вища математика. Розділи: Звичайні диференціальні рівняння, ряди, комплексні числа, операційне числення, теорія ймовірностей та математична статистика. Методичні вказівки до виконання контрольних робіт. Для слухачів заочної форми 3-річного строку навчання. Укладачі: С.Д. Світлична, О.П. Сознік, О.А. Тарасенко. – Харків: УЦЗУ, 2008. – 39 с.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ І ОФОРМЛЕННЯ РОБІТ

Індивідуальні завдання необхідно виконувати в окремому зошиті або на аркушах формату А-4. Для зауважень рецензента потрібно залишити поля 4-6 см завширшки. Виконувати роботу треба точно за варіантом, який видає кафедра. Робота, виконана не за своїм варіантом, не перевіряється і не зараховується.

Задачі треба розв’язувати по порядку збільшення номерів свого варіанта, виданого кафедрою. Умови задач необхідно записувати повністю, після приводити докладне розв’язання. Якщо до поданої задачі є необхідним малюнок, його розміщують перед розв’язанням і роблять на ньому всі необхідні позначення. В кінці кожної задачі записується відповідь.

Після одержання перевіреної роботи слухач виправляє помилки, які були допущені. Якщо задача не потребує виправлень (всі задачі розв’язані вірно), слухач зобов’язаний пройти співбесіду з викладачем кафедри і отримати допуск до іспиту (заліку).

Слухачі, які не виконали запропоновані завдання і не пройшли співбесіду на кафедрі, до іспиту (заліку) не допускаються.

Зараховану роботу слухач подає викладачу кафедри під час іспиту (заліку).

Підписувати роботу треба за зразком, наведеним нижче.

Індивідуальне домашнє завдання з курсу
“Вища математика”
Розділи: Звичайні диференціальні рівняння,
ряди, комплексні числа, операційне числення,
теорія ймовірностей та математична статистика.
слухача 1 курсу
групи ЗП-11 УЦЗУ
Петрова Івана Івановича
Завдання №1: 1.1.9, 1.2.9, 1.3.9, 1.4.9, 1.5.9, 1.6.9
Завдання №2: 2.1.5, 2.2.5, 2.3.5, 2.4.5
Завдання №3: 3.1.18, 3.2.18, 3.3.18

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Завдання 1.

1.1. Розв’язати **рівняння з відокремлюваними змінними.**

Диференціальні рівняння із змінними, що відокремлюються, можна записати у вигляді

$$y' = f(x)g(y), \tag{1}$$

або у більш загальному вигляді

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \tag{2}$$

Щоб розв’язати таке рівняння, треба обидві його частини помножити, або поділити на такий вираз, щоб одна частина рівняння містила тільки змінну x, а друга – тільки y, а потім обчислити інтеграли від обох частин. Треба враховувати, що при діленні на функцію, яка містить змінні x або y, можна втратити розв’язки, що перетворюють данні функції на нуль.

Розв’язати рівняння $x^2y^2y'+1=y$.

Розв’язання. Зводимо його до вигляду (2):

$$x^2y^2\frac{dy}{dx}=y-1,$$

$$x^2y^2dy=(y-1)dx\ .$$

Поділимо обидві частини останнього рівняння на $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}dy=\frac{dx}{x^2}$$

Отже змінні відокремлено. Інтегруємо обидві частини рівняння

$$\int\frac{y^2}{y-1}dy=\int\frac{dx}{x^2}; \qquad \frac{1}{2}y^2+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+C.$$

Коли здійснювали ділення на $x^2(y-1)$ можна було втратити розв’язки x=0 і y=1. Очевидно, що y=1 є розв’язком рівняння, x=0 - ні.

Відповідь. $y^2+2y+2\ln|y-1|+\dfrac{2}{x}=c, \qquad y=1.$

Зазначимо, що рівняння типу $y'=f(ax+by)$ можна заміною змінних z=ax+by звести до рівняння з відокремлюваними змінними.

1.2. Розв’язати **однорідні диференціальні рівняння.**

Однорідне диференціальне рівняння можна записати у вигляді $y'=f(\frac{y}{x})$, або у вигляді $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, де $M(x,y)$ і $N(x,y)$ - однорідні функції однаковій степені. Функція зветься однорідною функцією степені k, якщо для всіх k маємо тотожність $M(kx,ky)=k^nM(x,y)$. Щоб розв’язати однорідне рівняння, треба зробити заміну змінних $y = xu(x)$. Тоді для $u(x)$ дістаємо рівняння з відокремлюваними змінними.

Розв'язати рівняння $xy' = 5x + y$.

Розв'язання. Це є однорідне рівняння. Нехай $y = xu$. Тоді $y' = u + xu'$. Підставляючи до рівняння, матимемо $xu + x^2u' = 5x + xu$, або $xu' = 5$. Розв'язуємо рівняння із змінними, що відокремлюються:

$$du = \frac{5}{x}dx\,; \qquad u = 5\ln|x| + c; \qquad y = \frac{5\ln|x|}{x} + \frac{c}{x}.$$

Відповідь. $xy = 5\ln|x| + c$.

1.3. Розв'язати **лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку.**

Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку мають вигляд:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

і розв'язуються методом варіації довільної сталої. Щоб розв'язати це рівняння, треба спочатку розв'язати однорідне рівняння

$$y' + a(x)y = 0,$$

яке є рівнянням з відокремлюваними змінними. В загальному розв'язку цього рівняння необхідно довільну сталу c замінити на невідому функцію c(x) і підставити цей розв'язок до вихідного рівняння і відшукати функцію c(x).

Розв'язати рівняння $x^2y' + xy + 1 = 0$.

Розв'язання. Ділимо на x^2 і дістаємо $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$. Отже $a(x) = \frac{1}{x}$ і $b(x) = -\frac{1}{x^2}$. Розв'язуємо рівняння $y' + \frac{1}{x} = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}\,; \qquad \ln|y| = -\ln|x| + \ln c\,; \qquad y = \frac{c}{x}.$$

Замінимо c на c(x). Тоді $y = \frac{c(x)}{x}$ і $y' = \frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2}$. Підставимо цю похідну до вихідного :

$$\frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow c'(x) = -\frac{1}{x}; \qquad c(x) = -\ln|x| + c.$$

Отже $y = \frac{c - \ln|x|}{x}$ є розв'язком рівняння.

Відповідь. $xy = c - \ln|x|$.

1.4. Розв'язати **лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.**

Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами мають вигляд

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (3)$$

де p і q - сталі коефіцієнти. Щоб розв'язати це рівняння, складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (4)$$

Якщо корені k_1 і k_2 цього рівняння дійсні і $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок (3) має вигляд

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.$$

Якщо корені k_1 і k_2 рівняння (4) дійсні і $k_1 = k_2 = k$, то загальний розв'язок (3) має вигляд

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{kx}.$$

Якщо корені k_1 і k_2 рівняння (4) комплексні і $k_1 = a + ib$, $k_2 == a - ib$, то розв'язок (4) записують у вигляді

$$y = (c_1 \sin bx + c_2 \cos bx)e^{ax}.$$

Розв'язати рівняння $y'' + y' - 2y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + k - 2 = 0$ має корені $k_1 = 1$ і $k_2 = -2$. Отже, маємо розв'язок $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$.

Відповідь. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$.

Розв'язати рівняння $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 10k + 25 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 5$ і тому розв'язок має вигляд $y = (c_1 + c_2 x)e^{5x}$.

Відповідь. $y = (c_1 + c_2 x)e^{5x}$.

Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 29y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 19 = 0$ має в цьому разі комплексні корені $k_1 = -2 + 5i$, $k_2 = -2 - 5i$, тобто а=-2, в=5. Тоді маємо розв'язок $y = (c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)e^{-2x}$.

Відповідь. $y = (c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)e^{-2x}$.

1.5. Розв'язати **лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР).**

ЛНДР мають вигляд

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (5)$$

Нехай $f(x) = Q_n(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$, де α_0 , α_1, α_2, $\ldots \alpha_{n-1}$, α_n – відомі сталі. Тоді частинний розв'язок (5) шукатимемо у вигляді

$\bar{y} = x^r P_n(x) = x^r(\beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + ... + \beta_{n-1}x + \beta_n)$, де β_0, β_1, $\dots \beta_{n-1}$, β_n – невідомі сталі, які треба знайти з умови, що вираз для $\bar{y}$ задовольняє рівнянню (5), а число r дорівнює числу коренів характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$, значення яких дорівнюють нулю.

Розв'язати рівняння $y'' - 3y' + 2y = 5x - 3$.

Розв'язання. Тут $\alpha_0 = 5$, $\alpha_1 = -3$. Згідно з попереднім розділом запишімо характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$, яке має корені $k_1 = 1$ і $k_2 = 2$. Тоді розв'язок ЛОДР має вигляд $Y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Оскільки $r = 0$ (немає коренів, які дорівнюють нулю), то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді $\bar{y} = Ax + B$. Підставляючи цей вираз до вихідного рівняння, знаходимо $A = \frac{5}{2}$, $B = \frac{9}{4}$ і отже $\bar{y} = \frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$, а для загального розв'язку $y = Y + \bar{y}$ дістаємо вираз

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{5}{2}x + \frac{9}{4}.$$

Відповідь. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{5}{2}x + \frac{9}{4}$.

Нехай права частина рівняння (5) задана у вигляді $f(x) = Q_n(x)e^{\gamma x}$, де γ є сталою. Тоді частинний розв'язок слід шукати у вигляді $\bar{y} = P_n(x)x^r e^{\gamma x}$ де r - кількість коренів характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$, значення яких збігається з числом γ.

Розв'язати рівняння $y'' - 3y' + 2y = (x+2)e^x$, в якому $f(x) = (x+2)e^x$, тобто $\gamma = 1, \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння ЛОДР $k^2 - 3k + 2 = 0$. Оскільки $k_1 = \gamma = 1$, то $r = 1$ і частинний розв'язок шукаємо у вигляді $\bar{y} = (Ax + b)xe^x = (Ax^2 + Bx)e^x$. Підставляючи до вихідного рівняння, дістаємо $A = -\frac{1}{2}, B = -3$. Отже загальний розв'язок набуває вигляду $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - (\frac{1}{2}x^2 + 3x)e^x$.

Відповідь. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - (\frac{1}{2}x^2 + 3x)e^x$.

1.6. Розв'язати **задачу Коші.**

Розв'язати диференціальне рівняння $X'' - 2X' = e^t(t^2 + t - 3)$ з початковими умовами $X(0) = 2,\ X'(0) = 2$.

Розв'язання. Знаходимо загальний розв'язок (дивись попередні розділи) $X = c_1 + c_2 e^{2t} - (t^2 + t - 1)e^t$, який містить дві сталі c_1, c_2. Коли $t = 0$, то $X(0) = 2$, і тому $c_1 + c_2 + 1 = 2$. Обчислимо похідну $X'(t)$: $X' = 2c_2 e^{2t} - (t^2 + 3t)e^t$. Враховуючи другу початкову умову $X'(0) = 2$, дістаємо $2c_2 = 2$. Таким чином маємо систему рівнянь

$$c_1 + c_2 = 1,$$
$$2c_2 = 2,$$

розв'язком якої є $c_1 = 0,\ c_2 = 1$. У результаті маємо розв'язок задачі Коші $y = e^{2t} - (t^2 + t - 1)e^t$.

Відповідь. $y = e^{2t} - (t^2 + t - 1)e^t$.

Завдання 2.

2.1. Дослідити на збіжність ряди.

Приклад 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{3n+4}$

Розв'язання. Скористаємось **необхідною ознакою** збіжності. Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{3n+4} = \frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow$ ряд розбіжний (необхідна ознака збіжності порушена).

Зауваження. Якщо необхідна ознака збіжності виконана, то висновок про поведінку ряду зробити не можна; треба застосувати до цього ряду якусь достатню ознаку.

Приклад 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

Розв'язання. Скористаємось **ознакою порівняння**. Для того, щоб застосувати її, треба мати деякі «еталонні» ряди, поведінка яких відома. До таких «еталонних» рядів належать узагальнені гармонічні ряди: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, які збігаються при $p > 1$ і розбігаються при $p \le 1$.

Використовуючи методи диференційного числення, можна довести, що

$$\ln(n+1) < n. \qquad (7)$$

Дійсно, якщо розглянути функцію неперервного аргументу $f(x) = \ln(x+1) - x$, де $x > -1$, то оскільки $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0,\ \forall x > 0 \Rightarrow f(x)\downarrow$ на інтервалі $(0;\infty)$. Оскільки $f(0) = 0$, то при $x > 0$ $f(x) < 0$, тобто $\ln(x+1) < x$ в цьому інтервалі. З нерівності (7), обидві частини якої додатні, випливає, що $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$.

Приймаючи $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$, $b_n = \frac{1}{n}$ і маючи на увазі, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний (гармонійний ряд, $p = 1$), на основі порівняння робимо висновок, що даний ряд теж розбіжний.

Приклад 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$

Розв'язання. Скористуємось **ознакою порівняння в граничній формі**. Якщо для двох рядів з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ виконується умова $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k$, де k - будь-яке число, не рівне нулю, то обидва ряди поводять себе однаково: або разом збігаються, або розбігаються. Ця умова означає, що при $n \to \infty$ загальні члени a_n і b_n рядів є нескінченно малі одного порядку (зокрема, еквівалентні). Оскільки $\sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$, можна зробити висновок, що даний ряд збіжний, бо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $(p = 2)$.

Приклад 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

Розв'язання. Скористуємось **ознакою Даламбера**. Обчислимо $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, а далі $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot n^n}{(n+1)^n} =$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow$ вихідний ряд розбігається.

Приклад 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$

Розв'язання. Скористуємось **радикальною ознакою Коші**. Обчислимо $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} < 1 \Rightarrow$ даний ряд збігається за радикальною ознакою Коші.

Приклад 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^3(n+1)}$

Розв'язання. Скористуємось **інтегральною ознакою Коші**. Функція $f(x) = \frac{1}{(x+1)\cdot\ln^3(x+1)}$ додатна, неперервна, монотонно спадна при $x \ge 1$. При натуральних значеннях аргументу, її значення збігаються з відповідними членами ряду. Скориставшись інтегральною ознакою Коші обчислимо $\int_1^{\infty} f(x)dx$:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\cdot \ln^3(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^3(x+1)} = -\frac{1}{2\cdot \ln^2(x+1)}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{2\cdot \ln^2 2},$$ тобто невласний інтеграл, а тому і досліджуваний ряд збіжний.

2.2. Розкласти функцію у степеневий ряд довкола вказаної точки і визначити область збіжності цього ряду.

Приклад 1. Розкласти функцію $y=\frac{1}{x}$ в ряд Тейлора поблизу точки $x_0=3$.

Розв'язання.

Подамо функцію $\frac{1}{x}$ у вигляді $\frac{1}{3+(x-3)} = \frac{1}{3\left(1+\frac{x-3}{3}\right)}$. Зіставляючи одержаний вираз з формулою суми збіжної геометричної прогресії $S=\frac{a_1}{1-q}$, покладемо: $a_1=\frac{1}{3}$, $q=-\frac{x-3}{3}$.

Оскільки $\frac{a_1}{1-q}=a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}+\ldots$ при $|q|<1$, то

$$\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x-3}{3}} = \frac{1}{3}-\frac{x-3}{3^2}+\frac{(x-3)^2}{3^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}+\ldots$$

Це має місце при умові $\left|-\frac{x-3}{3}\right|<1 \Rightarrow \frac{|x-3|}{3}<1 \Rightarrow |x-3|<3 \Rightarrow$

$-3<x-3<3 \Rightarrow 0<x<6$ – область збіжності ряду.

Приклад 2. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y=(x-\operatorname{tg} x)\cos x$.

Розв'язання. Перетворимо цей вираз:

$\left(x-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x = x\cos x-\sin x$. Скористаємось відомими рядами:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Зауважимо, що ці ряди збігаються до даних функцій для $x \in R$, причому збігаються абсолютно. Це дозволяє виконувати над ними арифметичні операції:

$$x\cos x - \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots\right) -$$

$$-\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = -x^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + x^5\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) - \ldots =$$

$$= -\frac{2}{3!}x^3 + \frac{4}{5!}x^5 - \ldots + (-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1} + \ldots, \text{ де } x \in R.$$

Однак, для вихідної функції $(x - \operatorname{tg} x)\cos x$ областю збіжності будуть усі значення x, окрім $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де така функція не існує.

2.3 Виконати дії і представити комплексні числа в тригонометричній і показниковій формах. Знайти спряжені числа для даних.

а) $(1+i)^{2i}$.

Розв'язання. Загальний вигляд комплексного числа в показовій формі $z = \rho e^{i\varphi}$, де $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$; в тригонометричній формі $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Позначимо $z=(1+i)^{2i}$. Представимо число $1+i$ в показовій формі: $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$; $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.

Тоді $z=\left(2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{2i} = 2^i e^{\frac{-\pi}{2}} = e^{\frac{-\pi}{2}} e^{\ln 2^i} = e^{\frac{-\pi}{2}} e^{i\ln 2}$ – показникова форма;

$z=e^{\frac{-\pi}{2}}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2)$ – тригонометрична форма числа z.

Було використано основну логарифмічну тотожність $a = e^{\ln a}$.

Запишемо спряжене число до z:

$\bar{z} = e^{\frac{-\pi}{2}} e^{-i\ln 2} = e^{\frac{-\pi}{2}}(\cos\ln 2 - i\sin\ln 2)$.

б) $\frac{i}{3+i} + \frac{1}{(1-3i)^2}$.

Розв'язання. Введемо позначення $z_1 = \frac{i}{3+i}$; $z_2 = \frac{1}{(1-3i)^2}$.

В z_1 помножимо чисельник і знаменник на число, спряжене до знаменника

$$z_1 = \frac{i(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{i(3-i)}{9+1} = \frac{3i+1}{10} = \frac{1+3i}{10}.$$

В z_2 спочатку обчислимо у знаменнику $(1–3i)^2$, а потім виконаємо аналогічні дії:

$$z_2=\frac{1}{(1-3i)^2}=\frac{1}{1-6i-9}=\frac{1}{-8-6i}=\frac{-8-6i}{(-8-6i)(-8+6i)}=\frac{-8+6i}{64+36}=\frac{-8+6i}{100}=$$

$$=\frac{-4+3i}{50};\ z=z_1+z_2=\frac{1+3i}{10}+\frac{-4+3i}{50}=\frac{5+15i-4+3i}{50}=\frac{1+18i}{50}.$$

Запишемо число у показовій формі: $|z|=\frac{\sqrt{1+18^2}}{50}=\frac{5\sqrt{13}}{50}=\frac{\sqrt{13}}{10}$, $\arg z=\mathrm{arctg}18$,

$z=\frac{\sqrt{13}}{10}e^{i\,\mathrm{arctg}18}$;

в тригонометричній формі: $z=\frac{\sqrt{13}}{10}(\cos(\mathrm{arctg}18)+ i\sin(\mathrm{arctg}18))$.

Спряжене до z: $\bar{z}=\frac{\sqrt{13}}{10}e^{-i\,\mathrm{arctg}18}=\frac{\sqrt{13}}{10}(\cos(\mathrm{arctg}18)-i\sin(\mathrm{arctg}18))$.

2.4. За даним а) оригіналом (б) зображенням) знайти а) зображення (б) оригінал).

а) $\frac{e^{-3t}+t^3-1}{t}$.

Розв'язання. $\frac{e^{-3t}+t^3-1}{t}=\frac{e^{-3t}}{t}+t^2-\frac{1}{t}$. Запишемо формулу операційного числення про інтегрування зображення: якщо $F(p)$ – зображення функції $f(t)$ за Лапласом ($F(p)\to f(t)$), $\frac{f(t)}{t}$–оригінал, тоді $\frac{f(t)}{t}\leftarrow\int_p^{+\infty}F(p)\,dp$.

Скористуємось цією формулою та таблицею перетворень Лапласа:

$$e^{-3t}\leftarrow\frac{1}{p+3};\quad \frac{e^{-3t}}{t}\leftarrow\int_p^{+\infty}\frac{dp}{p+3};\quad 1\leftarrow\frac{1}{p};\quad \frac{1}{t}\leftarrow\int_p^{+\infty}\frac{dp}{p};\quad t^2\leftarrow\frac{2}{p^3}.$$

Тоді запишемо зображення для заданого оригінала таким чином:

$$\frac{e^{-3t}}{t}+t^2-\frac{1}{t}\leftarrow\int_p^{+\infty}\frac{dp}{p+3}+\frac{2}{p^3}-\int_p^{+\infty}\frac{dp}{p}=\ln|p+3|\Big\|_p^{+\infty}+\frac{2}{p^3}-\ln|p|\Big\|_p^{+\infty}=\ln\left|\frac{p}{p+3}\right|+\frac{2}{p^3}.$$

б) $\frac{1}{(p+1)^2(p-1)}$.

Розв'язання. Розкладемо дріб на простіші:

$$\frac{1}{(p+1)^2(p-1)}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{(p+1)^2}+\frac{C}{p-1}=\frac{A(p^2-1)+B(p-1)+C(p-1)^2}{(p+1)^2(p-1)}=$$

$$=\frac{Ap^2-A+Bp-B+Cp^2+2Cp+C}{(p+1)^2(p-1)};$$

$1=(A+C)p^2+(B+2C)p-A-B+C$

A+C=0 A=-C

B+2C=0 B=-2C

C-A-B=1 C+C+2C=1 4C=1 $C=\frac{1}{4}$; $B=\frac{1}{4}$; $A=-\frac{1}{4}$.

Тоді можна записати:

$$\frac{1}{(p+1)^2(p-1)}=-\frac{1}{4(p+1)}-\frac{1}{2(p+1)^2}+\frac{1}{4(p-1)}\to-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{4}e^{t}.$$

Завдання 3.

3.1. Знайти середнє квадратичне відхилення σ(X) для наведеного закону розподілу дискретної випадкової величини X.

X	**–1**	**3**	**5**	**6**
p	0,4	0,2	0,3	0,1

Розв’язання.

Середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X дорівнює

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)},$$

де D(X) – дисперсія випадкової величини X.

В свою чергу, дисперсія D(X) дискретної випадкової величини обчислюється за формулою

$$D(X) = M(X^2)-[M(X)]^2,$$

де $M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i$ – математичне сподівання дискретної випадкової величини,

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2\cdot p_i.$$

В нашому випадку M(X) = -1·0,4+3·0,2+5·0,3+6·0,1 = 2,3;

$M(X^2) = (-1)^2\cdot0,4+3^2\cdot0,2+5^2\cdot0,3+6^2\cdot0,1 = 12,7$; $D(X) = 12,7-(2,3)^2 = 7,41$;

$\sigma(X)=\sqrt{7,41}\approx2,7$.

Відповідь: σ(X) ≈2,7.

3.2. Неперервна випадкова величина X задається функцією розподілу ймовірностей F(x). Знайти математичне сподівання M(X).

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 5x+7, & 0\le x<1/5 \\ 1, & x\ge 1/5 \end{cases}$$

Розв'язання.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X, всі можливі значення якої належать інтервалу (a,b), обчислюється за формулою

$$M(X)=\int_a^b x\,f(x)dx\,,$$

де f(x) – щільність розподілу ймовірностей.

В нашому завданні задано функцію розподілу ймовірностей F(x), яка пов'язана зі щільністю розподілу f(x) таким співвідношенням:

$$f(x)=F'(x)\,.$$

Отже, спочатку знайдемо f(x):

$$f(x)=F'(x)==\begin{cases} 0, & x<0, \\ 5, & 0\le x<1/5\,. \\ 0, & x\ge 1/5 \end{cases}$$

А далі знайдемо математичне сподівання M(X):

$$M(X)=\int_0^{1/5}5xdx=\left.\left(\frac{5x^2}{2}\right)\right|_0^{1/5}=\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{10}=0{,}1.$$

Відповідь: M(X) = 0,1.

3.3. Дана вибірка, добута з генеральної сукупності.

1) Знайти незміщену оцінку генеральної середньої.
2) Знайти виправлену дисперсію.
3) Знайти емпірічну функцію розподілу, побудувати її графік.
4) Побудувати полігон відносних частот.

x_i -2 4 5 6 10
n_i 20 10 30 30 10

Розв'язання.

1) Незміщена оцінка генеральної середньої – це вибіркова середня. Вона знаходиться за формулою

$$\overline{x}_в=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i n_i}{n}\,,$$

де x_i – варіанта виборки, n_i – частота варіанти, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – об'єм виборки.

У нашому випадку $n = 20 + 10 + 30 + 30 + 10 = 100$;

$$\overline{x}_в = \frac{-2 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 30 + 6 \cdot 30 + 10 \cdot 10}{100} = 4{,}3.$$

2) Виправлена дисперсія є незміщеною оцінкою генеральної дисперсії. Вона обчислюється таким чином: $S^2 = \frac{n}{n-1} D_в$,

де $D_в = \overline{x}_в{}^2 - [\overline{x}_в]^2$, $\overline{x}_в{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2 n_i}{n}$.

Ми вже знайшли у першому пункті $\overline{x}_в$, знайдемо тепер $\overline{x}_в{}^2$:

$$\overline{x}_в{}^2 = \frac{(-2)^2 \cdot 20 + 4^2 \cdot 10 + 5^2 \cdot 30 + 6^2 \cdot 30 + 10^2 \cdot 10}{100} = 30{,}7.$$

Тоді $D_в = 30{,}7 - (4{,}3)^2 = 12{,}21$; $S^2 = \frac{100}{99} \cdot 12{,}21 = 12{,}33$.

3) Емпірічною функцією розподілу називається функція $F^*(x)$, що визначає для кожного x відносну частоту події $X < x$: $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де n_x – кількість варіант, менших ніж x.

При $x \le -2$ відбувається подія $X < x \le -2$. У нас значень варіант $X < 2$ немає, тому на цьому проміжку $F^*(x) = 0$.

Значення $X < 4$, а саме $x_1 = -2$, спостерігалось 20 разів, отже $F^*(x) =$ $= 20/100 = 0{,}2$ при $-2 \le x \le 4$.

При $4 \le x \le 5$ значення $X < 5$, а саме $x_1 = -2$ та $x_2 = 4$ спостерігались $20+10 = 30$ разів, отже $F^*(x) = 30/100 = 0{,}3$.

При $5 \le x \le 6$ значення $X < 6$, а саме $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ та $x_3 = 5$ спостерігались $20 + 10 + 30 = 60$ разів, тому $F^*(x) = 60/100 = 0{,}6$.

Аналогічно, при $6 \le x \le 10$ значення $X < 6$, а саме $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$ та $x_4 = 6$ спостерігались $20 + 10 + 30 + 30 = 90$ разів, тому $F^*(x) =$ $= 90/100 = 0{,}9$.

При $x > 10$ для усіх варіант виборки $X < x < 10$, отже $F^*(x) = (20+10+30+30+10)/100 = 100/100 = 1$.

Будуємо графік емпірічної функції розподілу (рис. 1).

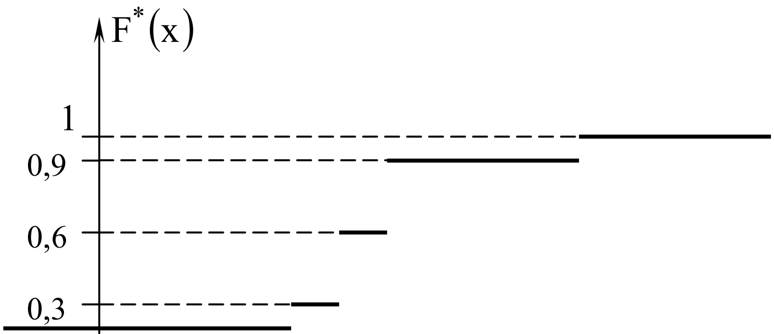

Рис. 1

4) Полігон відносних частот – це ламана лінія, відрізки якої з'єднують точки $(x_1;w_1)$, $(x_2;w_2)$,…, $(x_k;w_k)$, де x_i – варіанти виборки, w_i – відповідні їм відносні частоти.

Відносні частоти знаходяться за формулою $w_i = \frac{n_i}{n}$. У нашому випадку w_1 = 20/100 = 0,2; w_2 = 10/100 = 0,1; w_3 = 30/100 = 0,3; w_4 = =30/100 = 0,3; w_5 = 10/100 = 0,1.

Відкладаємо на осі абсцис варіанти x_i, на осі ординат – відповідні їм відносні частоти w_i. З'єднуючи точки $(x_i;\ w_i)$ відрізками прямих, отримуємо полігон відносних частот (рис.2).

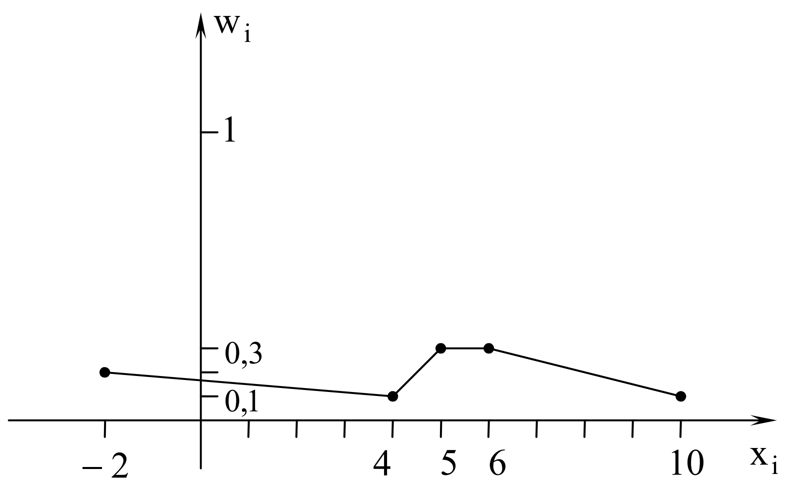

Рис. 2

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1.

Розв'язати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

1. $xy' = y \ln y$ **2.** $y' = 3y^{2/3}$ **3.** $xy' = 3y$

4. $(y')^2+y^2 = 1$ **5.** $xydx + (x+1)dy|= 0$ **6.** $\sqrt{y^2+1} = xyy'$

7. $(x^2 - 1)y' + 2xy = 0$ **8.** $y'\mathrm{ctg}x + y = 2$ **9.** $y' = y^{1/3}$
10. $xy' + y = y^2$ **11.** $2x^2yy' + y^2 = 2$ **12.** $y' - xy^2 = 2xy$
13. $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$ **14.** $e^{-y}(1+y') = 1$ **15.** $y' = 10^{x+y}$
16. $y' = \cos(x-y)$ **17.** $y' - y = 2x - 3$ **18.** $(x+2y)\, y' = 1$
19. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$ **20.** $2y' + y^2 = 0$ **21.** $y' - y\, y' = y$
22. $2xy' = y$ **23.** $e^{-y}(1+y') = 1$ **24.** $-y'\mathrm{tg}x + y = 2$
25. $\sqrt{y^2 - 1} + x^2yy' = 0$ **26.** $y' = 4y^{3/4}$ **27.** $xy' - 2y(y-1) = 0$
28. $xy' = 2y \ln y$ **29.** $y'\,\mathrm{tg}x + x - 1 = 0$ **30.** $yy' + x - 1 = 0$

1.2. Розв’язати однорідні диференціальні рівняння 1-го порядку

1. $xy' = (x + 2y)$ **2.** $(x+y)y' = y - x$
3. $x^2y' + y^2 - 2xy = 0$ **4.** $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$
5. $y^2 + x^2y' = xy'$ **6.** $(x^2+y^2)y' = 2xy$
7. $x^2y' - y^2 - 2xy = 0$ **8.** $(x^2-y^2)y' = 2xy$
9. $x^3y' = x^2y - y^3$ **10.** $(2x^2 + y^2)y' = 2xy$
11. $xy' = x + y$ **12.** $xy' = y + xe^{-\frac{y}{x}}$
13. $xy' = y + 2x$ **14.** $xy' = x - y$
15. $xy' + (x - y)\ln\frac{x-y}{x} = y$ **16.** $xy' - y + \sqrt{xy} = 0$
17. $xy' = 2y - x$ **18.** $xy' = 2y - 3x$
19. $(x^2 + y^2)y' = xy$ **20.** $(2x + y)y' = y$
21. $(x^3 - 2y^3)y' = 3x^2y$ **22.** $(x^3 + 2y^3)y' = 3x^2y$
23. $x^2y' = y^2 - 2x^2$ **24.** $x^2y' = y^2 - 2x^2$
25. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ **26.** $x^2y' = x^2 + xy + y^2$
27. $xy' = x \ln \frac{y}{x}$ **28.** $(x + y)y' = y$
29. $(xy - x^2)y' = y^2$ **30.** $xy' = x + y$

1.3. Розв’язати лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку

1. $xy' - 2y = 2x^4$ **2.** $(2x + 1)y' = 4x + 2y$ **3.** $y' + y\mathrm{tg}x = \cos^3 x$
4. $y'\mathrm{ctg}x + y = 2$ **5.** $x(y' - y) = e^{x}$ **6.** $x^2y' + xy + 1 = 0$
7. $y = x(y' - x\cos x)$ **8.** $y' = 2x(x^2 + 2y)$ **9.** $(xy' - 1)\ln x = 2y$
10. $xy' + (x + 1) = 3x^2e^{-x}$ **11.** $2(xy' + y) = x^2y + x$ **12.** $xy' + x^2 - xy - y = 0$
13. $x(x-1)y' = 1 - 2xy$ **14.** $x(x + 1)(y' - 1) = y$ **15.** $2(xy' + y) = x^2y + e^{\frac{x^2}{4}}$
16. $y' + y\mathrm{tg}x = \sin 2x$ **17.** $y' - 2x(x - y) = 0$ **18.** $(1 + x^2)y' + 2xy = x^2$
19. $xy' + x^2 + xy - y = 0$ **20.** $(1 - x^2)y' - 2xy = 2$ **21.** $xy' - y = x^2e^x$
22. $y' = 1 + x\frac{2y + x}{1 - x^2}$ **23.** $x^2y' + xy = 1$ **24.** $y' - y = xe^x$

25. $y \sin x + y' \cos x = 1$ **26.** $y' + 2y = \dfrac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ **27.** $y' + 7y = 7x$

28. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$ **29.** $y' - y = 5e^{2x}$ **30.** $y' + y\,\mathrm{tg}x = \cos^2 x$

1.4. Розв’язати лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

1. a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ 2. a) $y'' - 4y' + 3y = 0$ 3. a) $y'' - y' - 2y = 0$
b) $y'' - 2y' + y = 0$ b) $4y'' - 4y' + y = 0$ b) $y'' + 2y' + y = 0$
c) $4y'' + y = 0$ c) $y'' + y' + y = 0$ c) $y'' + 4y = 0$

4. a) $y'' + 2y' - 3y = 0$ 5. a) $y'' + 3y' + 2y = 0$ 6. a) $y'' - 2y' - 3y = 0$
b) $4y'' + 4y' + y = 0$ b) $y'' + 4y' + 4y = 0$ b) $y'' - 4y' + 4y = 0$
c) $y'' - y' + y = 0$ c) $y'' + y = 0$ c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

7. a) $y'' + 4y' + 3y = 0$ 8. a) $y'' - 5y' + 4y = 0$ 9. a) $y'' - 3y' - 4y = 0$
b) $9y'' + 6y' + y = 0$ b) $9y'' - 6y' + y = 0$ b) $4y'' - 12y' + 9y = 0$
c) $y'' - 2y' + 2y = 0$ c) $y'' + 4y' + 5y = 0$ c) $y'' - 4y' + 5y = 0$

10. a) $y'' + 5y' + 4y = 0$ 11. a) $y'' + 3y' - 4y = 0$ 12. a) $y'' - 5y' + 6y = 0$
b) $4y'' + 12y' + 9y = 0$ b) $9y'' - 12y' + 4y = 0$ b) $9y'' + 12y' + 4y = 0$
c) $y'' + 6y' + 10y = 0$ c) $y'' - 6y' + 10y = 0$ c) $y'' + 25y = 0$

13. a) $y'' + y' - 6y = 0$ 14. a) $y'' + 5y' + 6y = 0$ 15. a) $y'' + 4y' - 5y = 0$
b) $9y'' + 24y' + 16y = 0$ b) $9y'' - 24y' + 16y = 0$ b) $y'' - 6y' + 9y = 0$
c) $y'' + 8y' + 17y = 0$ c) $y'' - 8y' + 17y = 0$ c) $y'' - 2y' + 5y = 0$

16. a) $2y'' + 5y' = 0$ 17. a) $2y'' + y' - y = 0$ 18. a) $y'' + 3y' - 4y = 0$
b) $y'' + 6y' + 9y = 0$ b) $16y'' - 24y' + 9y = 0$ b) $16y'' + 24y' + 9y = 0$
c) $y'' + 2y' + 5y = 0$ c) $y'' - 2y' + 5y = 0$ c) $y'' - 2y' + 10y = 0$

19. a) $y'' + y' = 0$ 20. a) $y'' + 5y' = 0$ 21. a) $y'' - 9y = 0$
b) $16y'' - 24y' + 9y = 0$ b) $4y'' - 20y' + 25y = 0$ b) $4y'' + 20y' + 25y = 0$
c) $y'' - 6y' + 10y = 0$ c) $y'' + 6y' + 10y = 0$ c) $y'' - 4y' + 8y = 0$

22. a) $3y'' - 2y' - 8y = 0$ 23. a) $3y'' + 2y' - 8y = 0$ 24. a) $y'' - y' = 0$
b) $16y'' - 8y' + y = 0$ b) $16y'' + 8y' + y = 0$ b) $y'' - 8y' + 16y = 0$
c) $y'' + 4y' + 8y = 0$ c) $y'' - 4y' + 13y = 0$ c) $y'' + 4y' + 13y = 0$

25. a) $y''+9y'=0$
b) $y''+8y'+16y=0$
c) $y''+4y=0$

26. a) $y''-9y'=0$
b) $4y''-28y'+49y=0$
c) $y''+6y'+13y=0$

27. a) $4y''-8y'+3y=0$
b) $4y''+28y'+49y=0$
c) $4y''-8y'+5y=0$

28. a) $4y''+8y'+3y=0$
b) $y''-2y=0$
c) $4y''+8y'+5y=0$

29. a) $y''+5y'+4y=0$
b) $y''+2y=0$
c) $2y''-2y'+y=0$

30. a) $y''-5y'+4y=0$
b) $y''+10y'+25y=0$
c) $2y''+2y'+y=0$

1.5. Розв'язати ЛНДР 2-го порядку

1. $y'' + 4y = 2x$
2. $y'' - 3y' + 2y = xe^{x}$
3. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
4. $y'' + y' - 2y = (x + 1)e^{x}$
5. $y'' - 2y' + 2y = 3x$
6. $y'' + 4y' - 5y = 12e^{x}$
7. $y'' + 4y' - 5y = 2e^{-5x}$
8. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
9. $y'' - 2y' + 2y = 9x^{3}$
10. $y'' + 4y' = 2x$
11. $y'' - 3y' + 2y = 2x^{2}$
12. $y'' + 4y' - 5y = 6e^{5x}$
13. $y'' + 4y' - 5y = x - 2$
14. $y'' - 3y' + 2y = 4x^{2} - 10$
15. $2y'' + 5y' = 3e^{-x}$
16. $2y'' - 4y' = 12e^{2x}$
17. $2y'' + 5y' = 5x + 4$
18. $y'' + 2y' = 8x + 2$
19. $y'' - 2y' = 8x + 4$
20. $y'' + 2y' = 4xe^{2x}$
21. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$
22. $y'' - 4y' + 4y = 2x^{2} - 4$
23. $y'' - 4y' + 4y = 2xe^{4x}$
24. $y'' - 4y' + 4y = x^{3} - 3x^{2}$
25. $y'' - 2y' + 10y = 10x^{2} + 12$
26. $y'' + y = 2x$
27. $y'' + y = 4x^{2} - 4$
28. $y'' + y' = 2x + 3$
29. $y'' + y = (4x + 6)e^{x}$
30. $y'' + y' = 3x^{2} - x + 5$

1.6. Розв'язати задачу Коші

1. $X''-3X'+2X=te^{t}$;
$X(0)=1;\quad X'(0)=-2;$

2. $X''-2X'+X=t^{2}$;
$X(0)=X'(0)=0;$

3. $X''+4X=2t;$
$X(0)=X'(0)=0;$

4. $X''+2X'+X=1;$
$X(0)=X'(0)=0;$

5. $X''-2X'+X=4;$
$X(0)=1;\quad X'(0)=2;$

6. $X''+4X'+4X=t^{2}e^{2t}$;
$X(0)=1;\quad X'(0)=2;$

7. $X''+4X=2t^{4}-t^{2}$;
$X(0)=-1;\quad X'(0)=0;$

8. $X''-3X'+2X=12e^{t}$;
$X(0)=2;\quad X'(0)=6;$

9. $X''-2X'-3X=2t;$
$X(0)=X'(0)=1;$

10. $X''-2X'+5X=1-t;$
$X(0)=X'(0)=0;$

11. $X'' + 2X' + X = t^2$;
$X(0) = X'(0) = 1$;

12. $X'' + X = 2t^3$;
$X(0) = X'(0) = 0$;

13. $X'' - X' - 6X = 2$;
$X(0) = 1$; $X'(0) = 0$;

14. $X'' + X' - 2X = t^2 + t$;
$X(0) = 1$; $X'(0) = 3$;

15. $X'' + 2X' + X = -2(1 + t)$;
$X(0) = X'(0) = 1$;

16. $X'' + 4X' + 29X = e^{-2t}$;
$X(0) = 0$; $X'(0) = -1$;

17. $X'' + X' = 2t$;
$X(0) = X'(0) = -1$;

18. $X'' + 4X = 5t^3$;
$X(0) = X'(0) = 0$;

19. $X'' - 2X' - 3X = 2t + 1$;
$X(0) = X'(0) = 1$;

20. $X'' + 4X = t + 2t^4$;
$X(0) = X'(0) = 0$;

21. $X'' + 3X' - 10X = te^t$;
$X(0) = 3$; $X'(0) = 1$;

22. $X'' - 3X' + 2X = 2e^t$;
$X(0) = 1$; $X'(0) = 0$;

23. $X'' + 2X' = 2 + e^t$;
$X(0) = 1$; $X'(0) = 2$;

24. $X'' + X = 6e^{-t}$;
$X(0) = 3$; $X'(0) = 1$;

25. $X'' + 2X' = 4t$;
$X(0) = 2$; $X'(0) = 4$;

26. $2X'' + 3X' + X = 3e^t$;
$X(0) = 0$; $X'(0) = 1$;

27. $X'' + 2X' + X = 2e^{-t}$;
$X(0) = 5$; $X'(0) = 3$;

28. $X'' + 4X' = t - 8$;
$X(0) = 0$; $X(0) = 1$;

29. $X'' - X = 4t + 5t^3$;
$X(0) = -1$; $X'(0) = -2$;

30. $X'' - 3X' + 2X = 5e^{2t}$;
$X(0) = 0$; $X'(0) = 6$;

Завдання 2.

2.1. Дослідити на збіжність ряди

1. а) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$; б) $a_n = \dfrac{n^n}{3^n n!}$; в) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{2}{5^{n-1} + n - 1}$; д) $a_n = \dfrac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$; е) $a_n = \dfrac{1}{n \ln n}$.

2. а) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$; б) $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{1}{n}\right)$; в) $a_n = \dfrac{(3n+2)!}{10^n n^2}$;

г) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{n^2}$; д) $a_n = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; е) $a_n = \dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)}{n(n+1)(n+2)}$.

3. а) $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n-\ln n}$; б) $a_n = \dfrac{1}{n\ln n\cdot\ln(\ln n)}$; в) $a_n = \cos\dfrac{1}{2^n}$;

г) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n^n}$; д) $a_n = \dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$; е) $a_n = \dfrac{1}{n-1}\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$.

4. а) $a_n = \ln\dfrac{n^2+5}{n^2+4}$; б) $a_n = \dfrac{\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1+(-1)^n}{2}n\right)}{n^3+2}$; в) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$;

г) $a_n = 1-\cos\pi n$; д) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}\,n!}{3^n+2}$; е) $a_n = \left(\arcsin\dfrac{1}{n}\right)^n$.

5. а) $a_n = \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; б) $a_n = \dfrac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$; в) $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$;

г) $a_n = \dfrac{\ln(1+n)}{n}$; д) $a_n = \dfrac{e^n}{n^4}$; е) $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$.

6. а) $a_n = n\sin\dfrac{2+(-1)^n}{n^3}$; б) $a_n = \dfrac{n!5^n}{(2n)!}$; в) $a_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{n-\cos^2 6n}$; д) $a_n = \dfrac{1}{n\ln^2 n}$; е) $a_n = \dfrac{5^n}{4^{n+1}}$.

7. а) $a_n = (\mathrm{arctg} n)^{-1}$; б) $a_n = \dfrac{n(2+\cos\pi n)}{2n^2-1}$; в) $a_n = \sqrt{n}\left(\dfrac{n}{4n-3}\right)^{2n}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{n^2\ln n+\sqrt[3]{\ln^2 n}}$; д) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{arctg}\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}$; е) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

8. а) $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$; б) $a_n = \left(\dfrac{3n-1}{2n+5}\right)^n$; в) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}\sin\dfrac{1}{n-1}$;

г) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$; д) $a_n = \dfrac{\sin^2 n}{n^2+1}$; е) $a_n = \dfrac{1}{n\ln n\sqrt[3]{\ln^2(n+1)}}$.

9. а) $a_n = \dfrac{n\ln n}{n^3+1}$; б) $a_n = \dfrac{\arccos\dfrac{(-1)^n n}{n+1}}{n^2+2}$; в) $a_n = \left(\dfrac{5}{2}+\cos\pi n\right)$;

г) $a_n = \dfrac{(3n)!}{2^{n^2}}$; д) $a_n = 2^n\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$; е) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$.

10. а) $a_n = \dfrac{n\ln n}{n^2-2}$; б) $a_n = \sqrt[3]{n}\arcsin\dfrac{1}{n^3}$; в) $a_n = \dfrac{n^n}{(2n+1)!}$;

г) $a_n = \sqrt[n]{0{,}1}$; д) $a_n = \dfrac{1}{n\ln^3(2n)}$; е) $a_n = \left(\dfrac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

11. а) $a_n = n\arcsin^n\dfrac{1}{n+1}$; б) $a_n = \dfrac{1}{n\ln^2(3n+1)}$; в) $a_n = n^3\operatorname{tg}^5\dfrac{\pi}{n}$;

г) $a_n = \dfrac{1+\sin\dfrac{\pi n}{2}}{n^2}$; д) $a_n = \dfrac{n^n}{3^{n+1}\cdot n!}$; е) $a_n = n^{3/2}\ln\left(\dfrac{n^{3/2}+1}{n^{3/2}}\right)$.

12. а) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\sin\dfrac{2+(-1)^n}{6}\pi$; б) $a_n = n^n\sin^n\dfrac{1}{2n}$; в) $a_n = \cos\dfrac{1}{n!}$;

г) $a_n = \left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$; д) $a_n = \dfrac{(n+2)!}{n^n}$; е) $a_n = \dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$.

13. а) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$; б) $a_n = \dfrac{(2n-1)!}{(3n+1)2^n}$; в) $a_n = (3n)^n\arcsin^n\dfrac{1}{4n}$;

г) $a_n = \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}}-1\right)$; д) $a_n = \dfrac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$; е) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\sin^2 n}$.

14. а) $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{(5n+1)4^n}$; б) $a_n = n^n\operatorname{tg}^n\dfrac{1}{3n}$; в) $a_n = \sqrt[n]{0{,}04}$;

г) $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg}(-1)^n}{\sqrt{n(2+n^2)}}$; д) $a_n = \dfrac{1}{(n+5)\ln^n(n+1)}$; е) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{2\pi}{3^n}$.

15. а) $a_n = \dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$; б) $a_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^3+1)}$; в) $a_n = \dfrac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$;

г) $a_n = \frac{n}{2^n n!}$; д) $a_n = \left(n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}\right)^{-1}$; е) $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

16. а) $a_n = \frac{\sin\frac{\pi}{2n+1}}{n\left(3+\sin\frac{\pi n}{4}\right)}$; б) $a_n = \frac{1}{\left(\frac{n}{3}-1\right)\ln^2\frac{n}{2}}$; в) $a_n = \frac{n!}{e^n}$;

г) $a_n = \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$; д) $a_n = \frac{2}{2^n+n}$; е) $a_n = n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$.

17. а) $a_n = \frac{2+(-1)^n}{(1{,}5)^n}$; б) $a_n = 2^n \operatorname{tg}^{n+1}\frac{\pi}{n+1}$; в) $a_n = \arcsin\frac{n}{\left(n^2+3\right)^{\frac{5}{2}}}$;

г) $a_n = \frac{2n+1}{\left(3n^2+2\right)\ln\frac{n}{2}}$; д) $a_n = \frac{n}{(2{,}5)^n n!}$; е) $a_n = \frac{3n-1}{\sqrt{n}}$.

18. а) $a_n = \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; б) $a_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$; в) $a_n = \frac{(2n)!}{2^n}$;

г) $a_n = \frac{3n}{\left(n^2-2\right)\ln(2n)}$; д) $a_n = \frac{n^{2n}}{n!}$; е) $a_n = \frac{(-1)^{2n+1}+2}{\arcsin n}$.

19. а) $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$; б) $a_n = \frac{2^{n^2}}{(3n)!}$; в) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$;

г) $a_n = \frac{1}{(n+3)\ln^2 2n}$; д) $a_n = \frac{\arcsin\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sqrt[3]{n^3-2n}}$; е) $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$.

20. а) $a_n = \frac{3^{n+1}n!}{n^n}$; б) $a_n = \frac{n}{\ln n}$; в) $a_n = \frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$;

г) $a_n = \frac{\left(n^2+3\right)^2}{n^5+\ln^4 n}$; д) $a_n = n \operatorname{arctg}\frac{2}{n}$; е) $a_n = \frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$.

21. а) $a_n = \frac{2^n+\sin n}{3^n+\cos n}$; б) $a_n = \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$; в) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$;

г) $a_n = \dfrac{n^n}{(n+2)!}$; д) $a_n = \dfrac{1}{(3n-1)\ln n}$; е) $a_n = \dfrac{1}{(3n-1)\ln n}$.

22. а) $a_n = \dfrac{1}{4n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; б) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^2+1}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; в) $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{n^n}$;

г) $a_n = \arccos\dfrac{1}{n}$; д) $a_n = \dfrac{(n^2+3)n^{-3}}{\left(2+\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)}$; е) $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$.

23. а) $a_n = \dfrac{\ln n}{n^3+n+1}$; б) $a_n = \left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $a_n = \dfrac{1}{n^2-\ln n}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}$; д) $a_n = n\sin\dfrac{1}{n}$; е) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!5^n}$.

24. а) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$; б) $a_n = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{n}+2\right)}\operatorname{arctg}\dfrac{n+3}{n^2+5}$; в) $a_n = \sqrt[n]{0{,}02}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$; д) $a_n = \dfrac{\cos^2\dfrac{\pi n}{3}}{3^n+2}$; е) $a_n = \dfrac{(2{,}5)^n n!}{n^n}$.

25. а) $a_n = 1-\cos\pi n$; б) $a_n = \dfrac{2+\sin\dfrac{\pi n}{4}}{n^2}\operatorname{ctg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; в) $a_n = \dfrac{n}{\left(n^2+5\right)\ln n}$;

г) $a_n = \dfrac{(n+2)!}{n^{n+1}}$; д) $a_n = \dfrac{n+1}{\left(\sqrt[3]{n+1}+1\right)\left(n\sqrt[4]{n^3+1}\right)}$; е) $a_n = \dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n^2}$.

26. а) $a_n = \dfrac{(n+1)!n}{4^n+3}$; б) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{n^2}$; в) $a_n = \ln\dfrac{n^3}{n^3+2}$;

г) $a_n = \dfrac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n+2)}$; д) $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n^6+1}}$; е) $a_n = \left(\dfrac{2n}{11n+6}\right)^{n^2}$.

27. а) $a_n = \dfrac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$; б) $a_n = \sin\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; в) $a_n = \dfrac{n^2}{\ln^2 n}$;

г) $a_n = \dfrac{n!3^n}{(2n)!}$; д) $a_n = \dfrac{1}{4^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$; е) $a_n = \dfrac{\dfrac{3}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1}}$.

28. а) $a_n = 3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; б) $a_n = \frac{1}{(5n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$; в) $a_n = \frac{n^{3n}}{(n!)^2}$;

г) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$; д) $a_n = n\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$; е) $a_n = \frac{2\cos\frac{\pi}{3n}}{\sqrt[4]{n^4+1}}$.

29. а) $a_n = \sin\frac{n+1}{n^2\sqrt{n+5}}$; б) $a_n = \left(\frac{3n+7}{4n-1}\right)^{2n-1}$; в) $a_n = n\arcsin\frac{1}{n}$;

г) $a_n = \frac{\mathrm{arctg}\left\lfloor 2+(-1)^n\right\rfloor}{\ln(1+n)}$; д) $a_n = \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$; е) $a_n = \frac{n!}{3^n}$.

30. а) $a_n = \frac{\arcsin\frac{3+(-1)^n}{4}}{2^n+2n}$; б) $a_n = \frac{1}{(n-2)\ln(n+3)}$; в) $a_n = \frac{(4n)!}{3^{n^2}}$;

г) $a_n = \sqrt{n}\left(\frac{n+1}{4n+5}\right)^{2n}$; д) $a_n = \frac{1+7n}{n+5^n}$; е) $a_n = \sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}$.

2.2. Розкласти функцію у степеневий ряд довкола вказаної точки і визначити область збіжності цього ряду

1. $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}$, $x_0= 0$.

2. $f(x)=\frac{6}{x-2}$, $x_0= 1$.

3. $f(x)=\ln(3+2x)$, $x_0= 0$.

4. $f(x)=\frac{9}{20-x-x^2}$, $x_0= 0$.

5. $f(x)=(x-1)\sin 5x$, $x_0=0$.

6. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=-3$.

7. $f(x)=2x\cos^2\frac{x}{2}-x$, $x_0=0$.

8. $f(x)=\frac{2}{x(x+2)}$, $x_0=1$.

9. $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}-\cos 3x$, $x_0=0$.

10. $f(x)=\frac{7}{12-x-x^2}$, $x_0=0$.

11. $f(x)=(x-1)\mathrm{ch}x$, $x_0=0$.

12. $f(x)=\frac{2x}{16-x^2}$, $x_0=0$.

13. $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$, $x_0= -3$.

14. $f(x)=e^{2X+3}$, $x_0=1$.

15. $f(x)=\frac{1}{3-x}$, $x_0=1$.

16. $f(x)=2x\sin^2\frac{x}{4}-x$, $x_0=0$.

17. $f(x)=\frac{3-2x}{x^2-3x+2}$, $x_0=0$.

18. $f(x)=\ln(7-2x)$, $x_0=0$.

19. $f(x)=\dfrac{5}{6+x-x^2}$, $x_0=0$.

20. $f(x)=\dfrac{sh3x}{3x}$, $x_0=0$.

21. $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-4x)}$, $x_0=0$.

22. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+4}$, $x_0=0$.

23. $f(x)=(3+e^{-x})^2$, $x_0=0$.

24. $f(x)=\dfrac{ch3x-1}{x^2}$, $x_0=0$.

25. $f(x)=\dfrac{3}{2+x-x^2}$, $x_0=0$.

26. $f(x)=4^x$, $x_0=0$.

27. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8x+7}$, $x_0=0$.

28. $f(x)=\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$, $x_0=0$.

29. $f(x)=\dfrac{6}{8+2x-x^2}$, $x_0=0$.

30. $f(x)=\ln x$, $x_0=1$.

2.3. Виконати дії і представити комплексні числа в тригонометричній і показниковій формах. Знайти спряжені числа для даних

1. а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\dfrac{2i+1}{3-i}+i^3$; **2.** а) $\sqrt[4]{4}$; б) $(1+i)^5$;

3. а) $(-i)^5$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}}$; **4.** а) $\sqrt[3]{-1}$; б) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^9$;

5. а) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+3i}{4-4i}\right)^6$; б) $\sqrt[3]{(-1+i)^2}$; **6.** а) $\sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+i}}$; б) $(1-i)^2(1-i^7)$;

7. а) $\sqrt[5]{1}$; б) $(\sqrt{3}+i)^{14}(1-i^6)$; **8.** а) $\sqrt[3]{-i}$; б) $i^{21}(2-2i)^4$;

9. а) $(1-i)^{1-i}$; б) $\left(\dfrac{2i}{1+i}\right)^{15}$; **10.** а) $\sqrt{-2+2i}$; б) $\left(i^{21}+\sqrt{3}\right)^5$;

11. а) $(-1+i)^{-3i}$; б) $\sqrt[4]{-16}$; **12.** а) $(i)^i$; б) $\left(\dfrac{-2-2i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{10}$;

13. а) $(1+i\sqrt{3})^{1+i}$; б) $\dfrac{i}{2+i}+\dfrac{1}{(1-2i)^2}$; **14.** а) $\sqrt[5]{32}$; б) $(2-i)^2(2+3i)$;

15. $(-1)^{\sqrt{2}i}$; б) $\dfrac{1-i}{(1+i)^2}-2i$; **16.** а) $\sqrt[3]{-1-i}$; б) $\dfrac{3+i}{1-i^5}$;

17. а) $(2-2i)^{-i}$; б) $(i^{15}-1)^8$; **18.** а) $(1+i\sqrt{3})^{30}$; б) $\sqrt[3]{-1+i}$;

19. а) $i^{\frac{1}{i}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{32}}$; **20.** а) $(1+3i)(1-3i)^2$; б) $\sqrt[3]{8}$;

21. а) $\sqrt[5]{-1}$; б) $\dfrac{2i(1+i)-i^3}{(1-i)^3}$; **22.** а) $(1+i)^i$; б) $\sqrt[3]{-i+\sqrt{3}}$;

23. а) $\sqrt[3]{-8i}$; б) $\dfrac{(2+3i)(4i-1)}{1+i}$; **24.** а) $\sqrt[5]{-1+i}$; б) $(4-4\sqrt{3}i)^3$;

25. а) $\sqrt[4]{1+i}$; б) $(1-2i)^3(i^5-3)$; **26.** а) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$; б) $-\dfrac{2}{i}+i^3(1+i^7)$;

27. а) $(1)^{2i}$; б) $\left(\dfrac{i-1}{2i}\right)^{18}$; **28.** а) $\dfrac{2i-1}{i^3}-(i-1)^6$; б) $\sqrt[4]{-16}$;

29. а) $\dfrac{2i+1}{i^3}+(i+1)^6$; б) $\sqrt[4]{-i}$; **30.** а) $\sqrt{1-i}$; б) $(1+i^7)(2+i)^2$.

2.4. За даним а) оригіналом; б) зображенням знайти а) зображення; б) оригінал

1. а) $\dfrac{e^{-2t}-t^2-1}{t}$; б) $\dfrac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$; **2.** а) $\int\limits_0^t \cos^2\tau d\tau$; б) $\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$;

3. а) $\dfrac{e^{3t}-e^{-4t}}{t}$; б) $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$; **4.** а) $\int\limits_0^t (\tau+1)e^{-\tau}d\tau$; б) $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+1)}$;

5. а) $\dfrac{\cos 2t-\cos t}{t}$; б) $\dfrac{4}{p^3+8}$; **6.** а) $\int\limits_0^t (\tau+1)\sin 3\tau d\tau$; б) $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$;

7. а) $\dfrac{2\cos t-1-e^{-3t}}{t}$; б) $\dfrac{1}{p(p^3+1)}$; **8.** а) $\int\limits_0^t \tau\sin 3\tau d\tau$; б) $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$;

9. а) $\dfrac{e^t-t-1}{t}$; б) $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$; **10.** а) $\int\limits_0^t \mathrm{ch}2\tau e^{-\tau}d\tau$; б) $\dfrac{p-3}{p^3+4p^2+8p}$;

11. а) $\dfrac{e^t-e^{-2t}}{t}$; б) $\dfrac{1}{p^3+p^2+p}$; **12.** а) $\int\limits_0^t \mathrm{sh}3\tau d\tau$; б) $\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$;

13. а) $\dfrac{t\sin t-1+e^{-t}}{t}$; б) $\dfrac{5p^3+5p^2-11p+3}{p^3(p+3)}$; **14.** а) $\int\limits_0^t \sin^2\tau d\tau$; б) $\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$;

15. а) $\dfrac{e^{3t}-e^{-5t}}{t}$; б) $\dfrac{2p^3+p^2+2p+3}{p^5-2p^4+2p^3}$;

16. а) $\int\limits_0^t \tau(e^\tau-\mathrm{sh}\tau)d\tau$; б) $\dfrac{1}{(p^2+2p+3)(p-2)}$; **17.** а) $\dfrac{\mathrm{ch}2t-\mathrm{ch}t}{t}$; б) $\dfrac{1}{p^3-1}$; **18.** а) $\int\limits_0^t \tau\mathrm{sh}^2\tau d\tau$; б) $\dfrac{5p}{(p^2-2p+2)(p+2)}$; **19.** а) $\dfrac{e^t-\cos^2 2t-1}{t}$;

б) $\dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$; **20.** а) $\int\limits_0^t \sin^2 9\tau d\tau$; б) $\dfrac{5}{(p^2+4p+5)(p-1)}$;

21. а) $\dfrac{1+e^{-4t}-2\cos 2t}{t}$; б) $\dfrac{4-p-p^2}{p^4-p^3}$; **22.** а) $\int\limits_0^t \tau^2 \sin\tau d\tau$; б) $\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+2)}$;

23. а) $\dfrac{e^t t^2-\sin t}{t}$; б) $\dfrac{2+3p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$;

24. а) $\int\limits_0^t \tau \operatorname{ch}6\tau d\tau$; б) $\dfrac{p}{(p^2-1)^2}$; **25.** а) $\dfrac{e^{2t}\sin t}{t}$; б) $\dfrac{2+p}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$;

26. а) $\int\limits_0^t e^{-\tau}\tau^3 d\tau$; б) $\dfrac{6}{p^3-8}$; **27.** а) $\dfrac{\operatorname{sh}3t+e^t-1}{t}$; б) $\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$;

28. а) $\int\limits_0^t e^{\tau}\operatorname{sh}3\tau d\tau$; б) $\dfrac{1}{p^2(p^2-4)}$; **29.** а) $\dfrac{\operatorname{ch}t-1}{t}$; б) $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$;

30. а) $\int\limits_0^t \tau(e^{\tau}+\operatorname{ch}\tau)d\tau$; б) $\dfrac{3p^2}{8p^3-1}$.

3

Завдання 3.

3.1. Знайти середнє квадратичне відхилення σ(X) для наведеного закону розподілу дискретної випадкової величини X

1.

X	**–3**	**–2**	**2**	**4**	**5**
p	0,1	0,1	0,1	0,2	0,5

2.

X	**–2**	**–1**	**0**	**3**	**6**
p	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

3.

X	**–1**	**0**	**1**	**2**	**4**
p	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

4.

X	**1**	**2**	**3**	**7**
p	0,1	0,2	0,4	0,3

5.

X	**1**	**4**	**5**	**8**
p	0,3	0,4	0,1	0,2

6.

X	**–1**	**0**	**2**	**3**	**4**
p	0,1	0,3	0,2	0,2	0,2

7.

X	**–4**	**1**	**2**	**3**	**4**
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

8.

X	**3**	**5**	**6**	**8**
p	0,2	0,1	0,3	0,4

9.

X	**–3**	**–2**	**2**	**4**	**5**
p	0,1	0,1	0,1	0,2	0,5

10.

X	**2**	**4**	**7**	**8**
p	0,2	0,3	0,1	0,4

11.

X	**–2**	**2**	**3**	**6**
p	0,4	0,3	0,1	0,2

12.

X	**1**	**2**	**5**	**8**
p	0,2	0,4	0,3	0,1

13.

X	**–1**	**2**	**4**	**8**
p	0,1	0,4	0,3	0,2

14.

X	**3**	**5**	**7**	**8**
p	0,2	0,4	0,1	0,3

15.

X	**–4**	**–1**	**2**	**5**	**6**
p	0,3	0,1	0,3	0,1	0,2

16.

X	**2**	**5**	**6**	**9**
p	0,2	0,2	0,2	0,4

17.

X	**3**	**5**	**6**	**7**	**10**
p	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

18.

X	**5**	**8**	**9**
p	0,3	0,3	0,4

19.

X	**–3**	**–2**	**0**	**4**	**6**

20.

X	**–2**	**–1**	**2**	**7**	**9**

	p	0,1	0,1	0,1	0,2	0,5		p	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

21. **X** **–1** **3** **4** **8**
p 0,3 0,2 0,3 0,2

22. **X** **3** **4** **7** **9**
p 0,4 0,2 0,3 0,1

23. **X** **–4** **–3** **0** **4**
p 0,1 0,3 0,4 0,2

24. **X** **2** **3** **5** **6** **8**
p 0,2 0,2 0,3 0,1 0,2

25. **X** **4** **6** **10**
p 0,3 0,4 0,3

26. **X** **–1** **1** **4** **8**
p 0,4 0,2 0,1 0,3

27. **X** **2** **5** **7** **10**
p 0,3 0,1 0,3 0,3

28. **X** **–6** **–2** **4** **5** **8**
p 0,1 0,3 0,4 0,1 0,1

29. **X** **–1** **0** **1** **4**
p 0,3 0,4 0,1 0,2

30. **X** **0** **1** **2** **5** **10**
p 0,2 0,2 0,3 0,2 0,1

3.2. Неперервна випадкова величина X задається функцією розподілу ймовірностей F(x). Знайти математичне сподівання M(X).

1. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^3, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

2. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^5, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

3. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 9x^2, & 0\le x<1/3\\ 1, & x\ge 1/3\end{cases}$$

4. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 50x^2, & 0\le x<1/5\\ 1, & x\ge 1/5\end{cases}$$

5. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

6. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^4, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

7. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2x, & 0\le x<1/2\\ 1, & x\ge 1/2\end{cases}$$

8. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 16x^2, & 0\le x<1/4\\ 1, & x\ge 1/4\end{cases}$$

9. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 36x^2, & 0\le x<1/6\\ 1, & x\ge 1/6\end{cases}$$

10. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

11. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^3-2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

12. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^5+8, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

13. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 4x^2, & 0\le x<1/4\\ 1, & x\ge 1/4\end{cases}$

14. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 7x+1, & 0\le x<1/7\\ 1, & x\ge 1/7\end{cases}$

15. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^6, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

16. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^4-7, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

17. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 8x+11, & 0\le x<1/8\\ 1, & x\ge 1/8\end{cases}$

18. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 36x^2-5, & 0\le x<1/6\\ 1, & x\ge 1/6\end{cases}$

19. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 27x^3-4, & 0\le x<1/3\\ 1, & x\ge 1/3\end{cases}$

20. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 49x^2+2, & 0\le x<1/7\\ 1, & x\ge 1/7\end{cases}$

21. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 9x+15, & 0\le x<1/9\\ 1, & x\ge 1/9\end{cases}$

22. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^8, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

23. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^9+6, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

24. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 64x^2, & 0\le x<1/8\\ 1, & x\ge 1/8\end{cases}$

25. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 81x^4+1, & 0\le x<1/3\\ 1, & x\ge 1/3\end{cases}$

26. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 144x^2, & 0\le x<1/12\\ 1, & x\ge 1/12\end{cases}$

27. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 625x^4, & 0\le x<1/5\\ 1, & x\ge 1/5\end{cases}$

28. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 11x, & 0\le x<1/11\\ 1, & x\ge 1/11\end{cases}$

29. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 121x^2+9, & 0\le x<1/11\\ 1, & x\ge 1/11\end{cases}$

30. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 10x-2, & 0\le x<1/10\\ 1, & x\ge 1/10\end{cases}$

3. 3. Дана вибірка, добута з генеральної сукупності.
1) Знайти незміщену оцінку генеральної середньої.
2) Знайти виправлену дисперсію.

3) Знайти емпірічну функцію розподілу, побудувати її графік.
4) Побудувати полігон відносних частот.

1. x_i -1 3 7 9 12
n_i 15 18 12 10 5

2. x_i -4 1 4 8 11
n_i 10 20 30 15 25

3. x_i 2 6 7 10
n_i 21 32 27 20

4. x_i 1 6 7 10 12
n_i 8 3 4 2 3

5. x_i 1 5 6 8
n_i 5 15 10 20

6. x_i 2 6 7 9
n_i 6 10 1 3

7. x_i 2 3 4 6
n_i 10 4 2 3

8. x_i 10 15 25 30
n_i 20 25 50 5

9. x_i 4 9 11 17
n_i 2 5 2 1

10. x_i 2 3 5 9
n_i 8 3 6 3

11. x_i 4 6 7 8 15
n_i 1 2 3 2 2

12. x_i 10 15 20 30
n_i 2 4 12 2

13. x_i 2 3 5 9
n_i 7 3 4 6

14. x_i -3 -1 4 5
n_i 8 2 6 4

15. x_i 7 10 11 12
n_i 5 3 6 6

16. x_i -7 -5 -3 2 6
n_i 2 7 3 4 4

17. x_i 4 5 6 8
n_i 11 12 14 13

18. x_i 1 5 9 11
n_i 2 3 4 1

19. x_i -1 0 1 3
n_i 20 30 40 10

20. x_i -2 3 4 8
n_i 4 5 7 4

21. x_i -3 -2 0 3 8
n_i 11 21 17 13 18

22. x_i -10 -5 10 15
n_i 2 3 4 1

23. x_i -2 4 6 9
n_i 2 5 2 1

24. x_i 7 8 11 15
n_i 8 6 7 9

25. x_i 0 3 4 7
n_i 7 8 10 5

26. x_i 8 15 20 22
n_i 9 10 12 9

27. x_i 3 5 7 8
n_i 2 1 3 4

28. x_i 8 12 14 20
n_i 3 8 6 3

29. x_i 8 9 10 12
n_i 7 4 11 8

30. x_i 4 9 10 16
n_i 7 8 2 3

Таблиця видачі індивідуальних домашніх завдань слухачам, що вступили в непарному році

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00		1.9 2.2 3.24	1.18 2.3 3.23	1.27 2.4 3.22	1.6 2.5 3.21	1.15 2.6 3.20	1.24 2.7 3.19	1.3 2.8 3.18	1.12 2.9 3.16	1.21 2.10 3.17
01	1.26 2.5 3.23	1.6 2.7 3.20	1.15 2.11 3.19	1.24 2.9 3.18	1.3 2.10 3.17	1.12 2.10 3.17	1.21 2.12 3.15	1.30 2.13 3.14	1.9 2.14 3.13	1.18 2.15 3.12
02	1.30 2.19 3.5	1.9 2.20 3.4	1.8 2.21 3.3	1.27 2.22 3.2	1.6 2.23 3.1	1.15 2.24 3.30	1.24 2.25 3.29	1.3 2.26 3.28	1.12 2.27 3.27	1.21 2.28 3.26
03	1.25 2.24 3.5	1.4 2.25 3.4	1.13 2.26 3.3	1.22 2.27 3.2	1.1 2.28 3.1	1.10 2.29 3.30	1.19 2.30 3.29	1.28 2.1 3.28	1.7 2.2 3.27	1.16 2.3 3.26
04	1.29 2.8 3.17	1.9 2.10 3.14	1.18 2.11 3.13	1.27 2.12 3.12	1.6 2.13 3.11	1.15 2.14 3.10	1.24 2.15 3.9	1.3 2.16 3.8	1.12 2.17 3.7	1.21 2.18 3.6
05	1.25 2.14 3.15	1.4 2.15 3.14	1.13 2.16 3.13	1.22 2.17 3.12	1.1 2.18 3.11	1.10 2.19 3.10	1.19 2.20 3.9	1.28 2.28 3.8	1.7 2.22 3.7	1.16 2.23 3.6
06	1.29 2.28 3.27	1.8 2.29 3.26	1.17 2.29 3.25	1.26 2.1 3.24	1.5 2.2 3.23	1.14 2.3 3.21	1.23 2.4 3.21	1.2 2.5 3.20	1.11 26 319	120 27 318
07	1.24 2.3 3.29	1.4 2.5 3.24	1.13 2.6 3.22	1.22 2.7 3.22	1.1 2.8 3.21	1.10 2.9 3.20	1.19 2.10 3.19	1.28 2.11 3.18	1.7 2.12 3.17	1.16 2.13 3.16
08	1.29 2.18 3.7	1.8 2.19 3.6	1.17 2.20 3.5	1.26 2.21 3.4	1.5 2.22 3.3	1.14 2.23 3.2	1.23 2.24 3.1	1.2 2.25 3.30	1.11 2.26 3.24	1.20 2.27 3.28
09	1.24 2.23 3.7	1.3 2.24 3.6	1.12 2.25 3.5	1.21 2.26 3.4	1.30 2.27 3.3	1.9 2.28 3.2	1.18 2.29 3.1	1.27 2.30 3.30	1.6 2.1 3.29	1.15 2.2 3.28
10	1.28 2.7 3.19	1.8 2.9 3.16	1.17 2.10 3.15	1.26 2.11 3.14	1.5 2.12 3.13	1.14 2.13 3.12	1.23 2.14 3.11	1.2 2.15 3.10	1.11 2.16 3.9	1.20 2.17 3.8
11	1.30 2.1 3.25	1.1 2.2 3.30	1.10 2.3 3.29	1.19 2.4 3.28	1.28 2.5 3.27	1.7 2.6 3.26	1.16 2.7 3.25	1.25 2.8 3.24	1.4 2.9 3.23	1.13 2.10 3.22
12	1.28 2.27 3.29	1.7 2.28 3.28	1.6 2.29 3.27	1.25 2.30 3.26	1.4 2.1 3.25	1.13 2.2 3.24	1.22 2.3 3.23	1.1 2.4 3.22	1.10 2.5 3.21	1.19 2.6 3.20

13	1.22 2.11 3.21	1.1 2.12 3.20	1.10 2.13 3.19	1.19 2.14 3.18	1.28 2.15 3.17	1.7 2.16 3.16	1.16 2.17 3.15	1.25 2.18 3.14	1.4 2.19 3.13	1.13 2.20 3.12
14	1.28 2.17 3.9	1.17 2.18 3.8	1.6 2.19 3.7	1.25 2.20 3.6	1.4 2.21 3.5	1.13 2.22 3.4	1.22 2.13 3.3	1.1 2.24 3.2	1.10 2.25 3.1	1.19 2.26 3.30
15	1.22 2.21 3.11	1.1 2.20 3.10	1.10 2.23 3.9	1.19 2.24 3.8	1.28 2.25 3.7	1.7 2.26 3.6	1.16 2.27 3.5	1.25 2.28 3.4	1.4 2.29 3.3	1.13 2.30 3.2
16	1.27 2.6 3.21	1.7 2.8 3.18	1.16 2.9 3.17	1.25 2.10 3.16	1.4 2.11 3.15	1.13 2.12 3.14	1.22 2.13 3.13	1.1 2.14 3.12	1.10 2.15 3.11	1.19 2.16 3.10
17	1.22 2.1 3.1	1.2 2.3 3.28	1.11 2.4 3.27	1.20 2.5 3.26	1.29 2.6 3.25	1.8 2.7 3.24	1.17 2.8 3.23	1.26 2.9 3.22	1.5 2.10 3.21	1.14 2.11 3.20
18	1.27 2.26 3.1	1.6 2.27 3.30	1.15 2.28 3.29	1.24 2.29 3.28	1.3 2.30 3.27	1.12 2.1 3.26	1.21 2.2 3.25	1.30 2.3 3.24	1.9 2.4 3.23	1.18 2.5 3.22
19	1.23 2.12 3.19	1.2 2.13 3.18	1.11 2.14 3.17	1.20 2.15 3.16	1.29 2.16 3.15	1.8 2.17 3.14	1.17 2.18 3.13	1.26 2.19 3.12	1.5 2.20 3.11	1.14 2.21 3.10
20	1.27 2.16 3.11	1.6 2.17 3.10	1.15 2.18 3.9	1.24 2.19 3.8	1.3 2.20 3.7	1.12 2.21 3.6	1.21 2.22 3.5	1.30 2.23 3.4	1.9 2.24 3.3	1.18 2.25 3.2
21	1.23 2.22 3.9	1.2 2.23 3.8	1.11 2.24 3.7	1.20 2.25 3.6	1.29 2.26 3.5	1.8 2.27 3.4	1.17 2.28 3.3	1.26 2.29 3.2	1.5 2.30 3.1	1.14 2.1 3.20
22	1.26 2.25 3.3	1.5 2.26 3.2	1.14 2.27 3.1	1.23 2.28 3.30	1.2 2.29 3.29	1.11 2.30 3.28	1.20 2.1 3.27	1.29 2.2 3.26	1.8 2.3 3.25	1.17 2.4 3.24
23	1.23 2.2 3.29	1.3 2.4 3.26	1.13 2.5 3.25	1.21 2.6 3.24	1.30 2.7 3.23	1.9 2.8 3.22	1.18 2.9 3.21	1.27 2.10 3.20	1.6 2.11 3.19	1.15 2.12 3.18
24	1.26 2.15 3.13	1.5 2.16 3.12	1.14 2.17 3.11	1.23 2.18 3.10	1.2 2.19 3.9	1.11 2.20 3.8	1.20 2.21 3.7	1.29 2.22 3.6	1.8 2.23 3.5	1.17 2.24 3.4
25	1.24 2.13 3.17	1.3 2.14 3.16	1.12 2.15 3.15	1.21 2.16 3.14	1.30 2.17 3.13	1.9 2.18 3.12	1.18 2.19 3.11	1.27 2.20 3.10	1.6 2.21 3.9	1.15 2.22 3.8
26	1.25 2.4 3.27	1.5 2.6 3.22	1.14 2.7 3.21	1.23 2.8 3.20	1.2 2.9 3.19	1.11 2.10 3.18	1.20 2.11 3.17	1.29 2.12 3.16	1.8 2.13 3.15	1.17 2.14 3.14

Таблиця видачі індивідуальних домашніх завдань слухачам, що вступили в парному році

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00		1.1 2.2 3.30	1.10 2.3 3.29	1.19 2.4 3.28	1.28 2.5 3.27	1.7 2.6 3.26	1.16 2.7 3.25	1.25 2.8 3.24	1.4 2.9 3.23	1.13 2.10 3.22
01	1.22 2.11 3.21	1.1 2.12 3.20	1.10 2.13 3.19	1.19 2.14 3.18	1.28 2.15 3.17	1.7 2.16 3.16	1.16 2.17 3.15	1.25 2.18 3.14	1.4 2.19 3.13	1.13 2.20 3.12
02	1.22 2.21 3.11	1.1 2.20 3.10	1.10 2.23 3.9	1.19 2.24 3.8	1.28 2.25 3.7	1.7 2.26 3.6	1.16 2.27 3.5	1.25 2.28 3.4	1.4 2.29 3.3	1.13 2.30 3.22
03	1.22 2.1 3.1	1.2 2.3 3.28	1.11 2.4 3.27	1.20 2.5 3.26	1.29 2.6 3.25	1.8 2.7 3.24	1.17 2.8 3.23	1.26 2.9 3.22	1.5 2.10 3.21	1.14 2.11 3.20
04	1.23 2.12 3.19	1.2 2.13 3.18	1.11 2.14 3.17	1.20 2.15 3.16	1.29 2.16 3.15	1.8 2.17 3.14	1.17 2.18 3.13	1.26 2.19 3.12	1.5 2.20 3.11	1.14 2.21 3.10
05	1.23 2.22 3.9	1.2 2.23 3.8	1.11 2.24 3.7	1.20 2.25 3.6	1.29 2.26 3.5	1.8 2.27 3.4	1.17 2.28 3.3	1.26 2.29 3.2	1.5 2.30 3.1	1.14 2.1 3.20
06	1.23 2.2 3.29	1.3 2.4 3.26	1.12 2.5 3.25	1.21 2.6 3.24	1.30 2.7 3.23	1.9 2.8 3.21	1.18 2.9 3.21	1.27 2.10 3.20	1.6 2.11 3.19	1.15 2.12 3.18
07	1.24 2.13 3.17	1.3 2.14 3.16	1.12 2.15 3.15	1.21 2.16 3.14	1.30 2.17 3.13	1.9 2.18 3.12	1.18 2.19 3.11	1.27 2.20 3.10	1.6 2.21 3.9	1.15 2.22 3.8
08	1.24 2.23 3.7	1.3 2.24 3.6	1.12 2.25 3.5	1.21 2.26 3.4	1.30 2.27 3.3	1.9 2.28 3.2	1.18 2.29 3.1	1.27 2.30 3.30	1.6 2.1 3.29	1.15 2.2 3.28
09	1.24 2.3 3.7	1.4 2.5 3.6	1.13 2.6 3.5	1.22 2.7 3.4	1.1 2.8 3.3	1.10 2.9 3.2	1.19 2.10 3.1	1.28 2.11 3.30	1.7 2.12 3.29	1.16 2.13 3.28
10	1.25 2.14 3.15	1.4 2.15 3.14	1.13 2.16 3.13	1.22 2.17 3.12	1.1 2.18 3.11	1.10 2.19 3.10	1.19 2.20 3.9	1.28 2.21 3.8	1.7 2.22 3.7	1.16 2.23 3.6
11	1.25 2.24 3.5	1.14 2.25 3.4	1.13 2.26 3.3	1.22 2.27 3.2	1.1 2.28 3.1	1.10 2.29 3.30	1.19 2.30 3.29	1.28 2.1 3.28	1.7 2.2 3.27	1.16 2.3 3.26
12	1.25 2.4 3.27	1.5 2.6 3.22	1.14 2.7 3.21	1.23 2.8 3.20	1.2 2.9 3.19	1.11 2.10 3.18	1.20 2.11 3.17	1.29 2.12 3.16	1.8 2.13 3.15	1.17 2.14 3.14
13	1.26	1.5	1.14	1.23	1.2	1.11	1.20	1.29	1.8	1.17

	2.15 3.13	2.16 3.12	2.17 3.11	2.18 3.10	2.19 3.9	2.20 3.8	2.21 3.7	2.22 3.6	2.23 3.5	2.24 3.4
14	1.26 2.25 3.3	1.5 2.26 3.2	1.14 2.27 3.1	1.23 2.28 3.30	1.2 2.29 3.29	1.11 2.30 3.28	1.20 2.1 3.27	1.29 2.2 3.26	1.8 2.3 3.25	1.17 2.4 3.24
15	1.26 2.5 3.23	1.6 2.7 3.20	1.15 2.11 3.19	1.24 2.9 3.18	1.3 2.10 3.17	1.12 2.11 3.16	1.21 2.12 3.15	1.30 2.13 3.14	1.9 2.14 3.13	1.18 2.15 3.12
16	1.27 2.16 3.11	1.6 2.17 3.10	1.15 2.18 3.9	1.24 2.19 3.8	1.3 2.20 3.7	1.12 2.21 3.6	1.21 2.22 3.5	1.30 2.23 3.4	1.9 2.24 3.3	1.18 2.25 3.2
17	1.27 2.26 3.1	1.6 2.27 3.30	1.15 2.28 3.29	1.24 2.29 3.28	1.3 2.30 3.27	1.12 2.1 3.26	1.21 2.2 3.25	1.30 2.3 3.24	1.9 2.4 3.23	1.18 2.5 3.22
18	1.27 2.6 3.21	1.7 2.8 3.18	1.16 2.9 3.17	1.25 2.10 3.16	1.4 2.11 3.15	1.13 2.12 3.14	1.22 2.13 3.13	1.1 2.14 3.12	1.10 2.15 3.11	1.19 2.16 3.10
19	1.28 2.17 3.9	1.7 2.18 3.8	1.16 2.19 3.7	1.25 2.20 3.6	1.4 2.21 3.5	1.13 2.22 3.4	1.22 2.23 3.3	1.1 2.24 3.2	1.10 2.25 3.1	1.19 2.26 3.30
20	1.28 2.27 3.29	1.7 2.28 3.28	1.6 2.29 3.27	1.25 2.30 3.26	1.4 2.1 3.25	1.13 2.2 3.24	1.22 2.3 3.23	1.1 2.4 3.22	1.10 2.5 3.21	1.19 2.6 3.20
21	1.28 2.7 3.19	1.8 2.9 3.16	1.17 2.10 3.15	1.26 2.11 3.14	1.5 2.12 3.13	1.14 2.13 3.12	1.23 2.14 3.11	1.2 2.15 3.10	1.11 2.16 3.9	1.20 2.17 3.8
22	1.29 2.18 3.7	1.8 2.19 3.6	1.17 2.20 3.5	1.26 2.21 3.4	1.5 2.22 3.3	1.14 2.23 3.2	1.23 2.24 3.1	1.2 2.25 3.30	1.11 2.26 3.24	1.20 2.27 3.28
23	1.29 2.28 3.27	1.8 2.29 3.26	1.17 2.30 3.25	1.26 2.1 3.24	1.5 2.2 3.23	1.14 2.3 3.22	1.23 2.4 3.21	1.2 2.5 3.20	1.11 2.6 3.19	1.20 2.7 3.18
24	1.29 2.8 3.17	1.9 2.10 3.14	1.18 2.11 3.13	1.27 2.12 3.12	1.6 2.13 3.11	1.15 2.14 3.10	1.24 2.15 3.9	1.3 2.16 3.8	1.12 2.17 3.7	1.21 2.18 3.6
25	1.30 2.1 3.5	1.9 2.2 3.4	1.18 2.3 3.3	1.27 2.4 3.2	1.6 2.5 3.1	1.15 2.6 3.30	1.24 2.7 3.29	1.3 2.8 3.28	1.12 2.9 3.27	1.21 2.10 3.26
26	1.30 2.1 3.25	1.9 2.2 3.24	1.18 2.3 3.23	1.27 2.4 3.22	1.6 2.5 3.21	1.15 2.6 3.20	1.24 2.7 3.19	1.3 2.8 3.18	1.12 2.9 3.17	1.21 2.20 3.16

ЛІТЕРАТУРА

1. Абрамов Ю.А, и др. Операционное исчисление. Метод. пособие. – Харьков, 1993.
2. Басманов О.Є., Кириченко І.К., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Вища математика. – Харків: АПБУ, 2003.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1973.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: 1981.
5. Говаленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: АПБУ, 2003.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2002.
8. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.:Наука, 1971.
9. Овчиников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2. К.: Техніка, 2000.

ЗМІСТ

Підписано до друку 15.01.2008 р. Формат 60х84 1/16.
Папір 80 г/м^2. Друк ризограф. Ум.друк. арк. 2,4
Тираж прим. Вид.№81/08. Зам.№
Відділення редакційно-видавничої діяльності
Університету цивільного захисту України
61023, м. Харків, вул. Чернишевська, 94