НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 1

з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Вступ у теорію моделювання»**

м. Харків

<u>Місце проведення:</u> аудиторія за розкладом занять.
<u>Час проведення:</u> 80 хвилин.
<u>Матеріальне забезпечення:</u> мультимедійний проектор.
<u>Мета лекції:</u> визначити основні цілі, задачі та поняття теорії моделювання.

<u>Загальні методичні вказівки</u>

1. Перевірити наявність слухачів на занятті.
2. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
3. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

<u>План лекції:</u>

Вступ	8 хв.
1. Вступ в теорію моделювання	30 хв.
2. Поняття моделювання	20 хв.
3. Поняття моделі	20 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Волкова В.Н. Моделирование систем и процессов /В. Н. Волкова, Г. В. Горелова, В. Н. Козлов [и др.]; под ред. В. Н. Волковой, В. Н. Козлова. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 449 с.
2. Єріна А. Статистичне моделювання і прогнозування / А. Єріна. –Київ, 2001.
3. Фрейдина Е.В. Исследование систем управления /Е.В. Фрейдина. – М.: Омега-Л., 2008. – 367 с.
4. Макроекономічне моделювання та прогнозування / За ред. Крюкової І. –Харків, 2000.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

ВСТУП

Моделювання у сфері цивільного захисту – циклу професійної (обов'язкової) підготовки здобувачів освітньо-наукового ступеня «доктор філософії» за спеціальністю 263 «Цивільна безпека».

Метою викладання навчальної дисципліни «Моделювання у сфері цивільного захисту» є підготовка фахівців здатних застосовувати на практиці теорію моделювання систем та процесів; теорію прийняття управлінських рішень і методи експертних оцінок; розробляти короткострокові й довгострокові прогнози розвитку ситуації; розробляти математичні моделі, застосовувати математичні методи в процесі прогнозування, підготовки і ухвалення управлінських рішень в організаційних системах, розуміти проблему прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності, аналізувати вихідну інформацію та можливість її представлення у кількісному або якісному вигляді, застосовувати методи аналізу й оцінки ризику; розуміти проблеми стійкого розвитку, аналізувати ризики, що пов'язані з діяльністю людини, розробляти та надавати пропозиції (рекомендації) щодо оптимізації управлінських рішень у сфері цивільного захисту.

На вивчення навчальної дисципліни відведено 195 годин, з них 90 години аудиторних. Це означає, що загальна кількість занять складає 45, з них 22 лекції та 23 практичних занять. Навчальна дисципліна складається з 4-х модулів.

По завершенні кожного модуля необхідно буде написати модульну контрольну роботу. Підсумкова оцінка є середньою за модулями. Завершується вивчення навчальної дисципліни екзаменом. Екзамен виставляється автоматично лише тим, хто буде мати підсумкову оцінку не нижче 4С.

1. ВСТУП В ТЕОРІЮ МОДЕЛЮВАННЯ

Моделювання як одну з найважливіших категорій процесу пізнання неможливо відокремити від розвитку людства. З самого дитинства людина пізнає світ, спочатку через іграшки й ігри, відображаючи, тобто моделюючи, дійсність. З роками вона використовує все більш складні моделі, які дають можливість "програвати" різні життєві та виробничі ситуації і тим самим отримувати якнайкращі способи вирішення проблеми.

Математичні моделі є одним з основних інструментів пізнання людиною явищ навколишнього світу. Під математичними моделями ро-зуміють основні закономірності і зв'язки, властиві явищу, що вивчається. Це можуть бути формули або рівняння, набори правил або угод, вира-жені в математичній формі. Так, наприклад, закони Ньютона повністю визначають закономірності руху планет навколо Сонця. Використовуючи основні закони механіки, відносно неважко скласти рівняння, що опи-сують рух космічного апарата, наприклад, від Землі до Місяця. Проте отримати їх розв'язання (чи розв'язок) у вигляді простих формул не є можливим. Тому для розрахунку траєкторій космічних апаратів служать комп'ютери, тобто застосовується комп'ютерне моделювання.

Методи комп'ютерного моделювання широко використовують у всіх сферах діяльності людини – від конструювання моделей технічних, технологічних й організаційних систем до вирішення проблем розвитку людства і навколишнього світу. Класичними об'єктами моделювання є інформаційні, виробничі, транспортні й інші логістичні системи, моделі яких у більшості випадків використовуються для розв'язання задач проектування, реконструкції і довгострокового планування, тобто застосовуються для управління цими системами. Комп'ютерне моделювання повинне застосовуватися завжди, коли потрібно відповісти на запитання: "Що буде, якщо...?", тобто при прийнятті рішення.

У розвинених країнах перед інвестуванням коштів у будь-який проект можливості його реалізації перевіряються на імітаційних моделях. Практично всі транснаціональні компанії мають моделі розвитку виробництва, більш того, вони вкладають значні кошти у дослідження цих моделей. Наприклад, в автомобільній промисловості Німеччини приймають до розгляду технічну документацію тільки за умови її відповідності концепції Digital Fabrik (комп'ютерне виробництво). Важливу роль у цій концепції відіграють 3D-моделі всіх елементів виробничого процесу, що замінюють собою звичайні CAD-креслення.

Моделювання – складний процес, що потребує багато часу, незважаючи на те, йде мова про окремого фахівця з моделювання чи цілої групи фахівців, упродовж роботи якої потрібні постійний зв'язок і координація. Зазначені причини виправдовують зусилля, докладені для розробки методів, що допомагають прискорити процес моделювання шляхом автоматизації деяких процесів. Сучасні програмні засоби моделювання використовують графічний інтерфейс і дво- або тривимірну анімацію, що значно полегшує сприйняття результатів моделювання неспеціалістом.

З усіх видів моделювання – а це перш за все математичне і графічне – основна увага приділяється імітаційному моделюванню. Огляд науково-дослідницьких робіт показує, що імітаційне моделювання є чи не найпопулярнішим, за використанням на практиці його випереджають лише методи математичного програмування. Головна цінність імітаційного моделювання полягає в тому, що в основу його покладена методологія системного аналізу. Вона дозволяє досліджувати проектовану або аналізовану систему методами операційного аналізу, який включає такі взаємопов'язані етапи: змістовна постановка задачі, розробка концептуальної моделі, розробка та програмна реалізація імітаційної моделі, перевірка адекватності моделі та оцінка точності результатів моделювання, планування і проведення експериментів та прийняття рішень. Завдяки цьому можна застосовувати імітаційне моделювання як універсальний підхід під час прийняття рішень в умовах невизначеності та врахування у моделях тих факторів, які важко формалізувати, а також використовувати основні принципи системного підходу для виконання практичних завдань

2. ПОНЯТТЯ МОДЕЛЮВАННЯ

Моделювання – це спосіб дослідження будь-яких явищ, процесів або об'єктів шляхом побудови й аналізу їх моделей. У широкому розумінні моделювання є однією з основних категорій теорії пізнання і мало не єдиним науково обґрунтованим методом наукових досліджень систем і процесів будь-якої природи в багатьох сферах людської діяльності.

Основними поняттями в теорії і практиці моделювання об'єктів, процесів і явищ є поняття "система" і "модель".

У перекладі з грецької "systema" – це ціле, яке складається з частин; об'єднання. Термін "система" існує вже більш ніж два тисячоліття, проте, різні дослідники визначають його по-різному. На сьогодні існує понад 500 визначень терміна "система". Проте, використовуючи будь-яке з них, насамперед потрібно мати на увазі ті завдання, які ставить перед собою дослідник. Системою може бути і один комп'ютер, і автоматична лінія або технологічний процес, в яких комп'ютер є лише одним з компонентів, і все підприємство або декілька різних підприємств, що функціонують як єдина система в одній галузі промисловості. Те, що один дослідник визначає як систему, для іншого може бути лише компонентом складнішої системи.

Для всіх визначень системи спільним є те, що ***система*** – цілісний комплекс взаємозв'язаних елементів, який має певну структуру і взаємодіє із зовнішнім середовищем. ***Структура*** системи – це організована сукупність зв'язків між її елементами. Під таким зв'язком розуміють можливість впливу одного елементу системи на інший. ***Середовище*** – це сукупність елементів зовнішнього світу, які не входять до складу системи, але впливають на її поведінку або властивості. Система є ***відкритою***, якщо існує зовнішнє середовище, яке впливає на систему, і ***закритою***, якщо зовнішнє середовище відсутнє або не враховується, у зв'язку з поставленими цілями досліджень.

Одне з перших визначень системи (1950 рік) належить американському біологові Л. фон Берталанфі, згідно з яким система складається з деякої кількості взаємозв'язаних елементів. Оскільки між елементами системи існують певні взаємозв'язки, то повинні бути структурні відношення. Таким чином, система – це щось більше, ніж сукупність елементів. Аналізуючи систему, потрібно враховувати оцінку системного (синергетичного) ефекту. Властивості системи відмінні від властивостей її елементів, і залежно від властивостей, якими цікавляться дослідники, та ж сама сукупність елементів як може бути системою, так і не бути нею.

Визначення поняття системи пов'язані з теорією систем, в рамках якої використовуються такі рівні абстрактного опису:

– символічний, або лінгвістичний;

– теоретико-множинний;

– абстрактно-алгебраїчний;

– топологічний;

– логіко-математичний;

– теоретико-інформаційний;

– динамічний;

– евристичний.

Найвищий рівень абстрактного опису систем – лінгвістичний; ґрунтуючись на ньому, можна отримати всі інші рівні. На цьому рівні вводиться поняття предметної області, для опису якої застосовуються моделі алгебри, пов'язані з деякою мовою. Для опису предметної області цією мовою використовуються два рівні формальних мов, за допомогою яких будують логіко-алгебраїчну модель предметної області. На цій моделі підтверджуються дослідницькі прийоми за допомогою нормального апарату, яким можуть бути теорії, побудовані у вигляді дійсних висловлювань з всієї множини висловлювань.

Елементи системи і зв'язки між ними в різних випадках можуть мати різну природу (фізичну, інформаційну, технологічну, біологічну, соціальну), тому аналізом систем займаються представники різних галузей науки і техніки. Науковий напрям під назвою ***загальна теорія систем***, який з'явився в кінці 50-х – на початку 60-х років ХХ століття, пов'язаний з розробкою сукупності філософських, методологічних, наукових і прикладних методів аналізу та синтезу систем довільної природи. Ця теорія є загальною, оскільки має дедуктивний характер, об'єднує інші теорії, а саме: теорії управління, самоорганізації, навчання і тому подібне, і розроблена для вивчення поведінки абстрактних систем. Основне її призначення – пояснити, яким чином з окремих елементів утворюється складна єдність цілого, нова сутність. Загальна теорія систем тісно пов'язана з формальною і є певною мірою математичною. Основна процедура теорії систем і системного аналізу – ***побудова моделі*** системи, яка відображувала б всі фактори, взаємозв'язки і реальні ситуації. Займаються цим фахівці з системного аналізу – системні аналітики.

3. ПОНЯТТЯ МОДЕЛІ

Науковою основою моделювання як методу пізнання і дослідження різних об'єктів і процесів є теорія схожості, в якій головним є поняття аналогії, тобто схожість об'єктів за деякими ознаками. Подібні об'єкти називаються аналогами. Аналогія між об'єктами може встановлюватися за якісними і (або) кількісними ознаками.

Основним видом кількісної аналогії є математична схожість, коли об'єкти описуються за допомогою рівнянь і функцій. Функції і незалежні змінні називаються схожими, якщо вони співпадають з точністю до деяких констант. Окремими видами математичної схожості є геометрична схожість, яка встановлює схожість геометричних образів, і часова, така, що визначає схожість функцій часу, для яких константа часу (масштаб) показує, в яких відношеннях перебувають параметри функцій, такі як період, часова затримка і т. п.

Іншим видом кількісної аналогії є фізична схожість. Критерії фізичної схожості можна отримати, не маючи математичного опису об'єктів, наприклад, на основі значень фізичних параметрів, які характеризують досліджуваний процес у натурі і на моделі. За типами процесу розрізняють види схожості, для якої розроблені відповідні критерії, – гідравлічні, електричні, аеродинамічні й ін.

Вивчення переходу від властивостей реальних об'єктів до властивостей системи є найважливішим завданням теорії систем. У загальній теорії систем визнається об'єктивність існування систем. Згідно з цією теорією, якщо реально існують взаємозв'язки між об'єктами, то існують і системи, які їм відповідають. Ця теорія ґрунтується на постулаті функціонально-структурного ізоморфізму об'єктів і явищ природи, який формулюється таким чином.

Якщо структура однієї системи і зовнішні функції її елементів ізоморфні структурі іншої системи і зовнішнім функціям її елементів, то зовнішні властивості цих систем не розрізняються в області їх ізоморіфізму.

У теорії систем цей постулат має не менше значення, ніж закони збереження матерії у фізиці або аксіоми в математиці. Разом з іншими постулатами він є основою для логічного, доказового розгортання теорії і дає можливість пояснити єдність закономірностей природи для об'єктів, які здаються несхожими і незалежними один від одного. Ізоморфізм реальних систем є основою і логічним наслідком вищезазначеного постулату.

У теорії систем існує ще один важливий для моделювання постулат, який визначає, що описом структури і функцій деякої системи може бути інша ізоморфна відносно її система. При цьому ізоморфізм (схожість) двох систем стосується і структур систем і функцій їх елементів. Одна з таких систем є моделлю іншої (оригіналу) і навпаки. Таких ізоморфних систем може бути безліч. Виникає проблема вибору або побудови системи, яка може бути моделлю досліджуваної системи.

Підсумовуючи вищесказане, надалі використовуватимемо таке коротке визначення. Модель – це реально існуюча або абстрактна система, яка, замінюючи і відображаючи в пізнавальних процесах іншу систему – оригінал, перебуває з нею у відношенні схожості.

У сучасній теорії управління використовуються моделі двох основних типів. Для технологічних об'єктів цей поділ відповідає "феноменологічним" і "дедуктивним" моделям. Під феноменологічними моделями розуміють переважно емпірично відновлені залежності вихідних даних від вхідних, як правило, з невеликою кількістю входів і виходів. Дедуктивне моделювання передбачає з'ясування і опис основних фізичних закономірностей функціонування всіх компонентів досліджуваного процесу і механізмів їх взаємодії. За допомогою дедуктивних моделей описується процес у цілому, а не окремі його режими.

Перший тип моделей – моделі даних, які не мають потреби, не використовують і не відображають яких-небудь гіпотез про фізичні процеси або системи, з яких ці дані отримані. До моделей даних належать всі моделі математичної статистики. Останнім часом ця сфера моделювання ув'язується з експериментально-статистичними методами і системами, що істотно розширює методологічну базу для прийняття рішень під час розв’язання задач аналізу даних і управління.

Другий тип моделей – системні моделі, які будуються в основному на базі фізичних законів і гіпотез про те, як система структурована і, можливо, як вона функціонує. Використання системних моделей передбачає можливість працювати в технологіях віртуального моделювання – на різноманітних тренажерах і в системах реального часу (операторські, інженерні, біомедичні інтерфейси, різноманітні системи діагностики і тестування та ін.). Саме системні моделі є ядром моделювання на сучасному етапі.

Таким чином, модель є абстракцією системи і відображає деякі її властивості. Цілі моделювання формулює дослідник. Значення цілей моделювання неможливо переоцінити. Тільки завдяки ним можна визначити сукупність властивостей модельованої системи, які повинна мати і модель, тобто від мети моделювання залежить потрібний ступінь деталізації моделі.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації діяльності у сфері цивільного захисту, д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації діяльності у сфері цивільного захисту, к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 2

з навчальної дисципліни

«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Класифікація моделей»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.
Час проведення: 80 хвилин.
Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.
Мета лекції: визначити класифікаційні ознаки моделей, особливості застосування абстрактних та реальних моделей.

Загальні методичні вказівки

4. Перевірити наявність слухачів на занятті.
5. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
6. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Особливості абстрактних моделей	40 хв.
2. Особливості реальних моделей	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

5. Волкова В.Н. Моделирование систем и процессов /В. Н. Волкова, Г. В. Горелова, В. Н. Козлов [и др.]; под ред. В. Н. Волковой, В. Н. Козлова. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 449 с.
6. Єріна А. Статистичне моделювання і прогнозування / А. Єріна. –Київ, 2001.
7. Фрейдина Е.В. Исследование систем управления /Е.В. Фрейдина. – М.: Омега-Л., 2008. – 367 с.
8. Макроекономічне моделювання та прогнозування / За ред. Крюкової І. –Харків, 2000.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1. ОСОБЛИВОСТІ АБСТРАКТНИХ МОДЕЛЕЙ

Для того щоб визначити види моделей, перш за все, потрібно вказати ознаки класифікації.

Якщо враховувати, що моделювання – це метод пізнання дійсності, то основною ознакою класифікації можна назвати спосіб подання моделі. За цією ознакою розрізняють абстрактні і реальні моделі (рис. 1). Під час моделювання можливі різні абстрактні конструкції, проте, основною є віртуальна (уявна) модель, що відображає ідеальне уявлення людини про навколишній світ, який фіксується у свідомості через думки і образи. Віртуальна модель може представлятися у вигляді наглядної моделі за допомогою графічних образів і зображень.

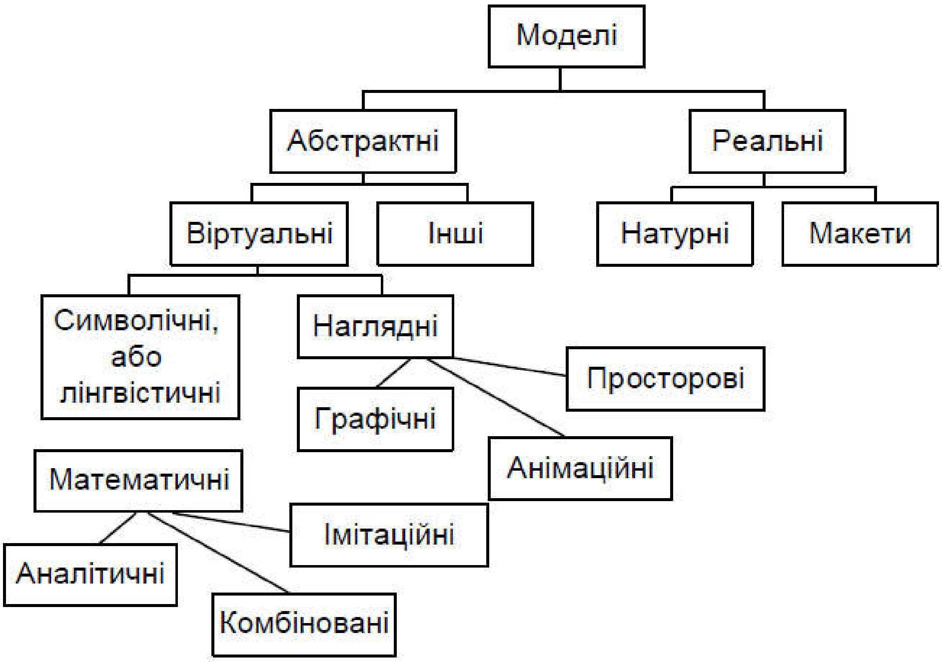

Рис. 1 – Основні типи моделей

Наглядні моделі залежно від способу реалізації можна поділити на дво- або тривимірні графічні, анімаційні і просторові. Графічні й анімаційні моделі широко використовуються для відображення процесів, які відбуваються в модельованій системі. Графічні моделі застосовуються в системах автоматизованого проектування (computer-aided design, CA).

Щоб побудувати модель у ***формальному вигляді***, створюють ***символічну***, або ***лінгвістичну***, модель, яка відповідала б високому рівню абстрактного опису, як це було вказано вище. На базі її отримують інші рівні опису.

Основним видом абстрактної моделі є математична модель. Її вид залежить як від природи реального об'єкта, так і від задач дослідження об'єкта та необхідної достовірності і точності розв'язку цієї задачі. Будь-яка математична модель, як і всяка інша, описує реальний об'єкт лише з деякою мірою наближення до дійсності. За видом математичні моделі для дослідження характеристик процесу функціонування систем можна розділити на аналітичні, імітаційні і комбіновані.

Для аналітичної моделі характерно те, що процеси функціонування елементів системи записуються у вигляді деяких функціональних співвідношень (алгебрі, інтегральнодиференціальних, кінцево різницевих і т. п.) або логічних умов. Аналітична модель може бути досліджена такими методами:

а) аналітичним, коли прагнуть отримати в загальному вигляді явні залежності для шуканих характеристик;

б) чисельним, коли, не вміючи розв'язувати рівняння в загальному вигляді, прагнуть отримати числові результати при конкретних початкових даних;

в) якісним, коли, не маючи розв'язку в явному вигляді, можна знайти деякі властивості розв'язку (наприклад, оцінити сталість розв'язку).

В імітаційній моделі відтворюється процес функціонування системи у часі, причому імітуються елементарні явища, що складають про цес, із збереженням їх логічної структури і послідовності протікання в часі, що дозволяє за початковими даними отримати зведення про стани процесу в певні моменти часу, які дають можливість оцінити характеристики системи S.

Основною перевагою використання імітаційних моделей порівняно з аналітичними моделями є можливість розв'язання складніших задач. Імітаційні моделі дозволяють досить просто враховувати такі фактори, як наявність дискретних і безперервних елементів, нелінійні характеристики елементів системи, численні випадкові дії тощо, які часто створюють труднощі при аналітичних дослідженнях. Нині імітаційне моделювання – найбільш ефективний метод дослідження великих систем, а часто і єдиний практично доступний метод отримання інформації про поведінку системи, особливо на етапі її проектування.

Коли результати, отримані при відтворенні на імітаційній моделі процесу функціонування системи , є реалізаціями випадкових величин і функцій, тоді для знаходження характеристик процесу потрібне його багаторазове відтворення з подальшою статистичною обробкою інформації і доцільно як метод машинної реалізації імітаційної моделі використовувати метод статистичного моделювання. Спочатку був розроблений метод статистичних випробувань, що є чисельним методом, який застосовувався для моделювання випадкових величин і функцій, імовірнісні характеристики яких співпадали з розв'язками аналітичних задач (така процедура отримала назву метода Монте-Карло). Потім цей прийом почали застосовувати і для машинної імітації з метою дослідження характеристик процесів функціонування систем, схильних до випадкових дій, тобто з'явився метод статистичного моделювання.

Таким чином, методом статистичного моделювання надалі називатимемо метод машинної реалізації імітаційної моделі, а методом статистичних випробувань (Монте-Карло) називатимемо чисельний метод розв'язання аналітичних задач.

Метод імітаційного моделювання дозволяє розв’язувати задачі аналізу великих систем S, включаючи задачі оцінки: варіантів структури системи, ефективності різних алгоритмів управління системою зміни різних параметрів системи. Імітаційне моделювання може бути покладене також в основу структурного, алгоритмічного і параметричного синтезу великих систем, коли потрібно створити систему із заданими характеристиками при певних обмеженнях, яка є оптимальною за деякими критеріями оцінки ефективності.

Використання ***комбінованих*** (аналітико-імітаційних) ***моделей*** при аналізі і синтезі систем дозволяє об'єднати переваги аналітичних й імітаційних моделей. При побудові комбінованих моделей проводиться попередня декомпозиція процесу функціонування об'єкта на складові підпроцеси, і для тих з них, де це можливо, використовуються аналітичні моделі, а для решти підпроцесів будуються імітаційні моделі. Такий комбінований підхід дозволяє охопити якісно нові класи систем, які не можуть бути досліджені з використанням тільки аналітичного й імітаційного моделювання окремо.

2. ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ

На відміну від абстрактних, ***реальні*** моделі існують у природі, і з ними можна експериментувати. Реальні моделі – це такі моделі, в яких хоча б один компонент є фізичною копією реального об'єкта. Залежно від того, в якому співвідношенні перебувають властивості системи і моделі, реальні моделі можна поділити на натурні і макетні.

Натурні (фізичні) моделі – це існуючі системи (або їх частини), на яких ведуться дослідження. Натурні моделі повністю адекватні реальній системі, що дає можливість отримувати високу точність і достовірність результатів моделювання. Істотні недоліки натурних моделей – це неможливість моделювання критичних й аварійних режимів їх роботи і висока вартість.

Макетні моделі – це реально існуючі моделі, що відтворюють модельовану систему в певному масштабі. Іноді такі моделі називаються ***масштабними***. Параметри моделі і системи відрізняються між собою. Числове значення цієї відмінності називається масштабом моделювання, або коефіцієнтом схожості. Ці моделі розглядаються в рамках теорії схожості, яка в окремих випадках передбачає геометричну схожість оригінала і моделі для відповідних масштабів параметрів. Прості макетні моделі – це пропорційно зменшені копії існуючих систем, які відтворюють основні властивості системи або об'єкта залежно від мети моделювання. Макетні моделі широко використовуються під час вивчення фізичних та аеродинамічних процесів, гідротехнічних споруд і багатьох інших технічних систем.

Залежно від можливості змінювати в часі свої властивості моделі поділяються на статичні і динамічні. Статичні моделі, на відміну від динамічних, не змінюють своїх властивостей в часі. Динамічні моделі, як правило, є імітаційними.

Залежно від того, яким чином відтворюються в часі стани моделі, розрізняють дискретні, неперервні і дискретно-неперервні (комбіновані) моделі.

Відповідно до співвідношень між станами системи і моделі розрізняють детерміновані і стохастичні моделі. Останні, на відміну від детермінованих моделей, враховують імовірнісні явища і процеси, що відбуваються в системі.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 3
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Підходи до побудови моделей»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.
Час проведення: 80 хвилин.
Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.
Мета лекції: визначити особливості використання різних підходів до створення моделей.

Загальні методичні вказівки

7. Перевірити наявність слухачів на занятті.
8. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
9. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Процес створення моделей	40 хв.
2. Підходи до створення моделей	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

9. Волкова В.Н. Моделирование систем и процессов /В. Н. Волкова, Г. В. Горелова, В. Н. Козлов [и др.]; под ред. В. Н. Волковой, В. Н. Козлова. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 449 с.
10. Єріна А. Статистичне моделювання і прогнозування / А. Єріна. –Київ, 2001.
11. Фрейдина Е.В. Исследование систем управления /Е.В. Фрейдина. – М.: Омега-Л., 2008. – 367 с.
12. Макроекономічне моделювання та прогнозування / За ред. Крюкової І. –Харків, 2000.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

3. ПРОЦЕС СТВОРЕННЯ МОДЕЛЕЙ

Розглядаючи сфери застосування моделей, можна констатувати, що за допомогою моделі можна досягти двох основних цілей: описової, якщо модель призначена для пояснення і кращого розуміння об'єкта, або приписуючої, коли модель дає можливість передбачити або відтворити характеристики об'єкта чи визначити його поведінку. Таким чином, модель є описовою, якщо вона призначена зображати поведінку (функціонування) або властивості існуючої чи типової системи (наприклад, масштабна модель або письмовий опис, який дає можливість ознайомитись з фізичними і робочими характеристиками пожарної автоцистерни). Протилежність – приписуюча модель, яка відображає необхідну поведінку або властивості запропонованої системи (наприклад, масштабна модель або письмовий опис з потрібними фізичними і робочими характеристиками пожарної автоцистерни).

Приписуюча модель може бути описовою, але не навпаки. Тому існує різний ступінь корисності моделей, які використовуються в технічних і соціальних науках. Це значною мірою залежить від методів і засобів, застосовуваних під час побудови моделей, а також від кінцевої мети. У соціальних науках моделі призначені для пояснення існуючих систем, а в техніці вони є допоміжними засобами для створення нових або досконаліших моделей. Модель, яка придатна для досягнення цілей розробки системи, повинна також пояснювати (тлумачити) її.

При побудові моделей застосовуються фундаментальні закони природи, варіаційні принципи, аналогії, ієрархічні ланцюжки. Процес створення моделі включає такі етапи.

1. Словесно-смисловий опис об'єкта або явища – формулювання описової моделі, призначеної для сприяння кращому розумінню об'єкта моделювання.

2. Числове вираження модельованої реальності для виявлення кількісної міри і меж відповідних якостей; з цією метою ведеться математико-статистична обробка емпіричних даних, пропонується кількісне формулювання якісно встановлених фактів і узагальнень.

3. Перехід до вибору або формулювання моделей явищ і процесів (варіаційного принципу, аналогії і т. п.) і його запису у формалізованій формі; це рівень структурних теоретичних схем, таких, як системи масового обслуговування, мережі Петрі, скінченні або імовірнісні автомати, діаграми фонд-потік тощо.

4. Завершення формулювання моделі її "оснащенням" – задавання початкового стану і параметрів об'єкта.

5. Вивчення моделі за допомогою доступних методів (зокрема із застосуванням різних підходів і обчислювальних методів).

У результаті дослідження моделі досягається поставлена мета. У цьому випадку повинна бути встановлена всіма можливими способами (шляхом порівняння з практикою, порівнянням з іншими підходами) її адекватність, тобто відповідність об'єкта сформульованим умовам.

При побудові моделей зазвичай використовують такі формальні підходи: кібернетичний, системна динаміка, теоретико-множинний.

4. ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ

a. Кібернетичний підхід

Систему можна вивчати й аналізувати, змінюючи вхідні впливи і спостерігаючи за виходами. Це кібернетичний підхід, згідно з яким система розглядається як "чорний ящик". Метод "чорного ящика" широко використовується під час моделювання систем, коли для дослідника важливо отримати інформацію про поведінку системи, а не про її будову.

Дослідник не може зробити однозначний висновок про структуру "чорного ящика", спостерігаючи лише за його входами і виходами, оскільки поведінка модельованої системи нічим не відрізняється від поведінки ізоморфних їй систем.

2.2. Системна динаміка

Для формального представлення моделей неперервних систем Дж. Форрестер у 1960 році запропонував підхід, названий системною динамікою, який дає можливість будувати моделі динамічних взаємозв'язаних систем за допомогою причинних діаграм циклів і схем виду "фонд-потік". Він же запропонував для чисельного моделювання таких систем мову Динамо. Модель будується як система диференціально-різницевих рівнянь, а мова Динамо дає можливість автоматизувати процес їх написання. Практично всі сучасні засоби неперервного і неперервно-дискретного моделювання базуються на цій мові для побудови моделей. На відміну від математичного розв'язання системи таких рівнянь у замкнутому вигляді використовується чисельне розв'язання з дискретним кроком часу, що дає можливість моделювати на деякому проміжку часу динамічні зміни фондів, пов'язаних з точкою часу, і потоків. Фонди і потоки пов'язані між собою через змінні.

Фонд можна трактувати як деяку кількість чого-небудь, що вимірюється в певних одиницях (наприклад, фізичних, грошових та ін.). Фонди можуть акумулювати одиниці фонду. Краще всього їх представляти як резервуари, ресурси або буфера. Фонди поповнюються через вхідні потоки і спорожняються через вихідні. Як буфер фонд може використовуватися для забезпечення балансування швидкості накопичення і витрачання.

Потік – це процес, що протікає неперервно в часі, оцінити який можна в деяких кількісних одиницях за певний проміжок часу. Залежно від характеристики використання потоки діляться на: обмежені і необмежені, одно- і двонаправлені, конвертовані і неконвертовані. Потік, як правило, обмежується фондом. Потоком можна керувати, тобто збільшувати або зменшувати його інтенсивність за допомогою деяких виразів алгебри.

Існує багато різних способів пов'язувати в динамічних моделях причини і наслідки, не розглядаючи конкретні методи. В їх основі лежить декілька підходів. Розглянемо три з них, наведених на рис. 1.

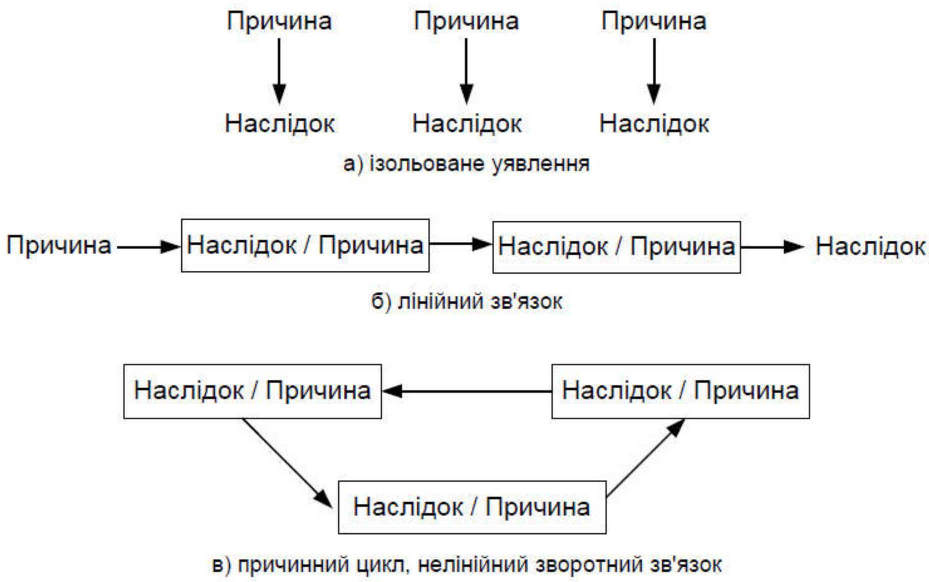

Рис .1 - Три підходи до пов'язування причин і наслідків для побудови моделі

Перший підхід (ізольоване уявлення) полягає в тому, що наслідок виникає з деякої причини і взаємозв'язок між різними причинами від- сутній. Такий підхід, наприклад, використовують економісти під час роз- рахунків. Як правило, для цього застосовують статичні і статистичні моделі.

Другий підхід (лінійний зв'язок) передбачає, що між причинами і наслідками існує лінійний зв'язок у вигляді ланцюжка. Такий підхід підтримують інженери і науковці, які вважають, що всі події у всесвіті залежать одна від одної. Маючи достатню кількість інформації, можна побудувати залежності в часі для всіх подій у майбутньому. Системні мислителі, які застосовують цю парадигму, користуються діаграмами впливу і моделями лінійних рівнянь та вважають, що завжди можна логічно прослідкувати, "що є на вході і що буде на виході".

Згідно з третім підходом (причинний цикл) всесвіт розглядається як система з зворотними зв'язками, тобто ланцюжки причин і наслідків циклічно пов'язані між собою. Таке уявлення підтримують кібернетики, прибічники нелінійної динаміки і хаосу. Вони вважають, що всесвіт значною мірою хаотичний, і передбачити майбутнє, враховуючи його минуле, неможливо. Ці системні мислителі використовують циклічні причинні моделі, нелінійні рівняння в кінцевих різницях. Часто поведінка таких моделей далека від реальності й інтуїтивного уявлення і може бути де в чому неочікуваною для дослідника.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» серпня 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 4
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Основи прогнозування»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.

Час проведення: 80 хвилин.

Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.

Мета лекції: визначити особливості прогнозування та створення математичних моделей.

Загальні методичні вказівки

10. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
11. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
12. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Основи прогнозування	30 хв.
2. Математичне прогнозування	20 хв.
3.Етапи створення математичної моделі	20 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Рабочая книга по прогнозированию / [Бестужев-Лада И.В., Саркисян С.А., Минаев Э.С. и др.]. – М.: Мысль, 1982. – 426 с.
2. Лисичкин В.А. Теория и практика прогностики. – М.: Дело, 1998. – 816 с.
3. Вентцель Е.С. Вероятностное прогнозирование деятельности человека. – М.: Наука, 1977. – 267 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

5. ОСНОВИ ПРОГНОЗУВАННЯ

Прогнозування являє собою науково обґрунтоване судження про майбутні стани об'єкта прогнозування і (або) про альтернативні шляхи досягнення цього стану. Необхідність прогнозування викликана тією обставиною, що майбутні стану об'єкта мають велике значення для рішень, прийнятих в даний момент. Має місце невизначеність, пов'язана з майбутньою ситуацією, яку повністю усунути неможливо. Основним завданням суб'єкта, що приймає рішення за наявності невизначеностей, є знаходження оптимального рішення з ряду альтернатив. Прогнозування виступає як один з інструментів пошуку такого рішення, яке повинно прийматися на основі науково обґрунтованого, об'єктивного аналізу проблеми.

Прогноз може бути якісним і кількісним. Якісний прогноз можна отримати як через ланцюг дедуктивних або індуктивних висновків, так і за допомогою кількісного аналізу. Кількісний прогноз пов'язаний з «можливостями», з якими відбувається та чи інша подія в майбутньому, а також з деякими кількісними характеристиками цієї події (наприклад, його математичним очікуванням, найбільш імовірним значенням і т.д.).

Розрізняють ділянку спостереження, де процес вивчається протягом деякого часу, і точку попередження, в якій оцінюється як математичне очікування процесу (точковий прогноз) і величина інтервалу, в який із заданою вірогідністю потрапить майбутнє значення процесу (інтервальний прогноз).

Природним вимогою до якості даних, отриманих в результаті прогнозування, є їх точність. Однак дані навіть найдосконаліших прогнозують систем можуть збігтися з кількісними даними про об'єкт в майбутньому лише з певною ймовірністю. Якщо неправомірно вимагати точного збігу величини прогнозованого значення з його майбутнім значенням, то цілком законним є вимога попадання майбутнього значення в деяку область значень, яка визначається при прогнозуванні. Система, що прогнозує, що дає меншу величину області, в якій буде перебувати майбутнє значення параметра об'єкта, зазвичай передбачається більш точної (кращою).

Важливою вимогою до досліджуваної системі є здатність до реагування на зміни, що відбуваються в досліджуваному об'єкті прогнозування з метою усунення помилок прогнозування, які можуть бути викликані наступними причинами.

По-перше, існуванням невизначеності майбутньої ситуації. При отриманні нової інформації про об'єкт ми не можемо з упевненістю сказати, що помилка прогнозування викликана тільки впливом невизначеностей, так само як це, наприклад, мало місце в попередніх спостереженнях за цим об'єктом. Завданням прогнозуючої системи є максимальне зменшення рівня невизначеності (наприклад, фільтрація перешкод в технічних системах).

По-друге, може виникнути ситуація, коли помилки прогнозування викликані змінами в закономірностях функціонування самого об'єкта або процесу, що вивчається. Система, що прогнозує повинна якомога швидше «розпізнати» це зміна і проводити подальше прогнозування з урахуванням цієї зміни.

Нарешті, по-третє, в найзагальнішому випадку помилки прогнозування викликаються одночасно тими і іншими причинами, тобто система, що прогнозує повинна «уміти» своєчасно відрізняти «корисні» зміни в об'єкті прогнозування від результату впливу невизначеностей, рівень яких необхідно зменшити. У системах управління це завдання аналогічне завданню прогнозування величини корисного сигналу при одночасному здійсненні фільтрації перешкод. Наведені вимоги є загальними для будь-якої прогнозуючої системи.

Одним з найважливіших етапів процесу прогнозування є вироблення моделі досліджуваного процесу. Найбільш широко поширені математичні моделі, хоча в деяких випадках успішно використовуються і фізичні моделі (випробування моделі літальних апаратів в аеродинамічних трубах, випробування макетів майбутніх гребель в спеціалізованих лабораторіях і т.д.).

Побудова моделі припускає деяке відтворення об'єкта з цілком конкретною метою. Розглядаються тільки ті його сторони, які з достатньою для цілей прогнозування точністю описують досліджуваний об'єкт.

По суті аналіз об'єкта при прогнозуванні - це аналіз спеціальним чином побудованих моделей. Від того, наскільки правильно побудовані окремі моделі, як вони пов'язані один з одним, залежать результати прогнозування.

2 МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГНОЗУВАННЯ

Методи математичного прогнозування можуть бути розділені на три групи: статистичні (описові), причинно-наслідкові і суміщені.

Вивчення будь-якого процесу вимагає поставити закон зміни вхідних змінних в часі. Вихідні змінні можуть бути описані за допомогою деякої моделі, значення коефіцієнтів якої визначаються підбором. Різні спостереження можуть враховуватися з різними ваговими множниками. Прогноз на основі статистичної моделі, що включає опис передісторії системи, полягає в розрахунку її стану для деякого часу попередження.

Для отримання більш точного прогнозу необхідно побудувати модель, що враховує причини змін в системі об'єкт - зовнішнє середовище. Прогноз, отриманий за допомогою такої моделі, дозволяє більш надійно передбачити майбутнє системи. Однак методи причинно-наслідкового групи вимагають чітко сформульованої математичної моделі поведінки прогнозованого об'єкта.

Вибір і обґрунтування моделі є вузловим питанням математичного прогнозування і далеко не тривіальним завданням, в більшості цікавих для практики випадків вимагає спеціальних дослідницьких проробок. Тільки в тому випадку, коли модель правильно описує поведінку досліджуваного об'єкта, можна очікувати досить точні результати прогнозування.

Складність оцінки параметрів моделі залежить від ступеня спотворення інформації про об'єкт прогнозування. Точність прогнозу буде тим вище, чим менше спотворень і чим більше наявної інформації про прогнозований об'єкті. Математичні методи ідентифікації моделей припускають наявність деякого критерію, використання якого дозволить отримати найкращі в деякому сенсі оцінки невідомих параметрів моделі.

При статистичному прогнозуванні найбільш поширеним є критерій, що дає значення невідомих параметрів моделі з умови мінімуму суми квадратів відхилень прогнозованою (розрахункової) величини від її можна побачити значень. Метод найменших квадратів не завжди дає найкращі результати. Можливе використання критерію, що дає оцінки невідомих параметрів моделі з умови мінімуму «зваженої» суми квадратів зазначених відхилень. Вибір критерію «найкращої» оцінки невідомих параметрів моделі є другим важливим моментом при математичному прогнозуванні і залежить від властивостей об'єкта прогнозування, вимог до точності прогнозу і т.п.

Статистичне прогнозування використовує тільки частину повного часового ряду. Зв'язок між змінними визначається в будь-якому випадку. Такий прогноз, спираючись на добре відпрацьовані методи відшукання відповідних моделей і методи уточнення прогнозів за новими спостереженнями, дозволяє:

- робити припущення про можливість і моментах появи екстремумів в розглянутій часової залежності змінних системи, а також про значення змінних в екстремальних точках,
- отримати хороші результати при уточненні прийнятих рішень, що поширюються на відносно короткі проміжки часу (зазвичай ці проміжки в десять разів більше інтервалів між уточненнями пророкувань).

Між результатами прогнозу і основними показниками функціонування системи можлива причинний зв'язок. Тому існує небезпека безглуздого використання множинної регресії в пошуках «хорошого» коефіцієнта кореляції між прогнозованими (вихідними) змінними і різними вхідними змінними. Необхідно звернутися до прогнозів на основі аналізу причинно-наслідкових зв'язків, які дозволяють передбачити моменти появи екстремумів і значення змінних в екстремальних точках.

Успішне вирішення завдання прогнозування при застосуванні математичних методів визначається правильністю вибору математичної моделі (адекватністю її прогнозованому процесу) і точністю оцінки її невідомих параметрів. Найкращі результати виходять при використанні суміщених статистичних та причинно-наслідкових методів прогнозування.

3 ЕТАПИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

. Побудова математичної моделі, є процес, який можна розподілити на етапи:

1)Постановка завдання.

2)Розробка моделі.

3)Перевірка моделі на достовірність.

4)Застосування.

1. Постановка завдання. Проблему потрібно точно та чітко визначити. Якщо сама проблема не буде ретельно та точно діагностована, то застосування математичного апарату і обчислювальної техніки буде марним. Правильна постановка завдання важливіша навіть, ніж його рішення.

2. Побудова моделі. Розробник повинен визначити головну мету моделі, які характеристики та данні планується отримати в ході дослідження моделі. Розробник повинен визначити, яка інформація буде потрібна для побудови моделі відповідної якості та адекватності.

3 Перевірка моделі на достовірність. Після побудови моделі її треба перевірити на достовірність: визначити ступінь відповідності моделі реальному об'єкту.

4. Застосування моделі. Жодну модель не можна вважати успішно розробленою доти, доки її не прийнято, не усвідомлено і не апробовано на практиці.

Відповідно, щоб побудувати математичну модель процесу функціонування будь-якої системи, треба спочатку надати змістовне описання цього процесу, потім формалізувати усі поняття і відношення, пов'язані з системою, параметри, які характеризують досліджений процес, що досліджується, і після цього знайти його математичне описання. Таким чином можна скласти схему побудови математичної моделі, зобразивши її на малюнку.

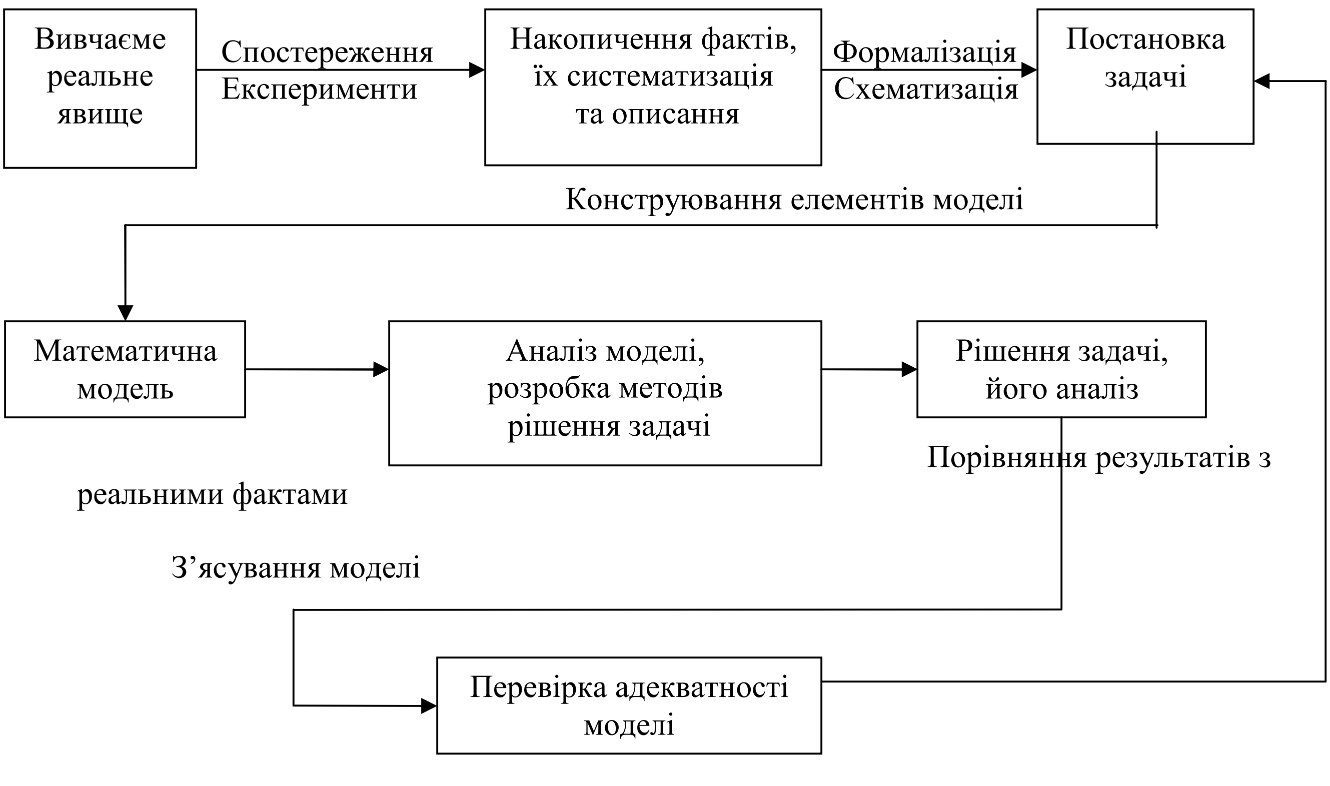

Рис.1. Схема побудови математичних моделей

Сьогодні розроблені математичні аналітичні моделі дозволяють розраховувати наступні процеси діяльності підрозділів пожежної охорони, а саме:

- розподілення потоків викликів пожежних підрозділів;
- тривалість зайнятості пожежних підрозділів по обслуговуванню викликів;
- процес виникнення одночасних викликів;
- процес функціонування системи зв'язку;
- вибір кількості оперативних пожежних відділень та розподілення (розміщення) їх в місті;
- складання розкладу викликів;
- розрахунок необхідної кількості пожежних автомобілів;
- частість використання пожежних автомобілів по обслуговування викликів.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» серпня 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 5
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Парний регресійний аналіз»**

м. Харків

<u>Місце проведення:</u> аудиторія за розкладом занять.
<u>Час проведення:</u> 80 хвилин.
<u>Матеріальне забезпечення:</u> мультимедійний проектор.
<u>Мета лекції:</u> визначити особливості використання парного регресійного аналізу.

<u>Загальні методичні вказівки</u>

13. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
14. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
15. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

<u>План лекції:</u>

Вступ	8 хв.
1. Метод найменших квадратів	15 хв.
2. Рівняння регресійної моделі	20 хв.
3.Парний регресійний аналіз	20 хв.
4. Інтервальні оцінки функції регресії та її параметрів	15 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

4. Григорків В.С. Економетрика: Лінійні моделі парної та множинної регресії: навчальний посібник. - Чернівці: ЧНУ, 2009.-224 с.
5. Рабочая книга по прогнозированию / [Бестужев-Лада И.В., Саркисян С.А., Минаев Э.С. и др.]. – М.: Мысль, 1982. – 426 с.
6. Лисичкин В.А. Теория и практика прогностики. – М.: Дело, 1998. – 816 с.
7. Вентцель Е.С. Вероятностное прогнозирование деятельности человека. – М.: Наука, 1977. – 267 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Метод найменших квадратів для випадку лінійної функції однієї змінної було розроблено К. Гаусом в 1794-1795 роках.

Завжди можна підібрати функцію $y = f(x)$, яка для кожного значення x_i (*i=1,2 ...n*) давала б значення, достатньо близькі до відповідних заданим значенням y_i (*i=1, 2,…n*) (рис.1).

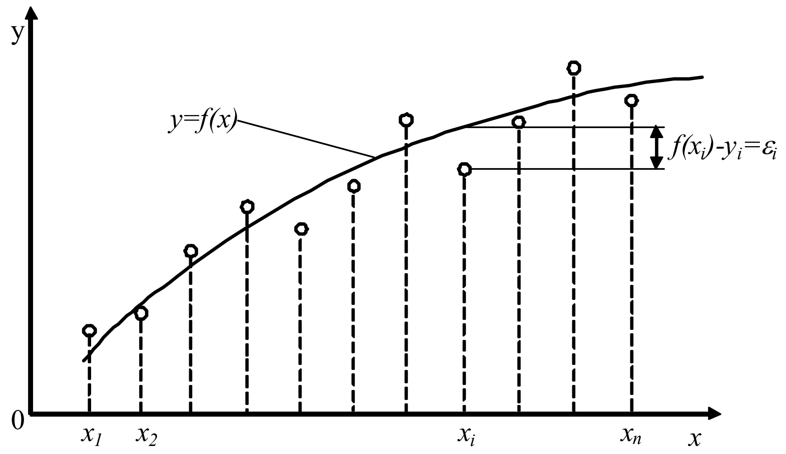

Рис. 1 – Статистичні дані розвитку явища

Перепишемо рівняння $y = f(x)$, підставивши замість x та y значення, які нам відомі (x_1, y_1; … x_n, y_n.), та отримаємо наступні рівняння:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) - y_1 = \varepsilon_1 \\ f(x_2) - y_2 = \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(x_n) - y_n = \varepsilon_n \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ будемо називати відхиленнями.

Найбільш точною вважається формула $y = f(x)$, для якої сума квадратів відхилень буде мати найменше значення, ніж у інших функцій.

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_3^2 \Rightarrow \min.$$

Розглянемо у загальному виді процес визначення параметрів емпіричної формули за способом найменших квадратів. Нехай підібрано емпіричну формулу виду

$$y = f(x, a_1, \dots a_m), \qquad (2)$$

де x – незалежна змінна;

$a_1, \ldots a_m$– параметри (постійні коефіцієнти, що входять у формулу), які потрібно визначити.

Запишемо рівняння $y = f(x, a_1 \ldots a_m)$ наступним чином $f(x, a_1 \ldots a_m) - y = 0$; підставляючи в ліву частину рівняння відомі значення x_i та y_i, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, \grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots \grave{a}_m) - y_1 = \varepsilon_1 \\ f(x_2, \grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots \grave{a}_m) - y_2 = \varepsilon_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_n, \grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots \grave{a}_m) - y_n = \varepsilon_n \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Відповідно до способу найменших квадратів підберемо такі значення параметрів $a_1 \ldots a_m$, щоб сума квадратів відхилень була мінімальною. Складемо суму квадратів відхилень:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i, \grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots \grave{a}_m) - y_i \right]^2 = \left[f(x_1, \grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots \grave{a}_m) - y_1 \right]^2 + \\ + \left[f(x_2, \grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots \grave{a}_m) - y_2 \right]^2 + \ldots + \left[f(x_n, \grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots \grave{a}_m) - y_n \right]^2 .$$

Оскільки змінні $x_1, y_1 \ldots x_n, y_n$ є числами постійними, то параметри $a_1 \ldots a_m$, що входять в рівняння (3)

$$U = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2, \tag{4}$$

слід розглядати як невідомі величини, які необхідно визначити. Таким чином, представлене рівняння ми можемо розглядати як функцію *m* незалежних змінних $a_1 \ldots a_m$:

$$U = f(x_i, \grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots \grave{a}_m). \tag{5}$$

Необхідно визначити, за яких $a_1 \ldots a_m$ функція U має мінімальне значення, для чого необхідно дослідити її на екстремум. З курсу математичного аналізу відомо, що функція, яка може бути продиференційована, має екстремум в точках, в яких всі частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю. Для функції U необхідні умови мінімуму мають наступний вид:

$$\frac{\partial U}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial a_2} = 0, \ldots \frac{\partial U}{\partial a_m} = 0.$$

Розв’язання системи рівнянь (8) дозволить визначити параметри $a_1 \ldots a_m$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial a_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial U}{\partial a_m} = 0 \end{array}\right\}. \qquad (6)$$

Використання процедури оцінки, що базується на методі найменших квадратів, вимагає обов'язкового задоволення цілого ряду передумов, невиконання яких може призвести до значних помилок.

Випадкові помилки мають нульову середню, кінцеві дисперсії.

Кожне вимірювання випадкової похибки характеризується нульовим середнім, не залежним від значень спостережуваних змінних.

Дисперсії кожної випадкової помилки є однаковими, їх величини не залежні від значень спостережуваних змінних.

Значення похибок різних спостережень незалежні одна від одної.

Випадкові помилки мають нормальний розподіл.

Значення ендогенної змінної x є вільними від помилок вимірювання і мають кінцеві середні значення і дисперсії.

У практичних дослідженнях як модель тренда в основному використовують наступні функції:

– лінійну

$$y = ax + b; \qquad (7)$$

– квадратичну

$$y = ax^2 + bx + c; \qquad (8)$$

–степеневу

$$y = x^n; \qquad (9)$$

– показову

$$y = a^x; \qquad (10)$$

– експоненціальну

$$y = ae^x; \qquad (11)$$

– логістичну

$$y = \frac{a}{1 + be^{-cx}}. \qquad (12)$$

Вибір моделі у кожному конкретному випадку здійснюється за цілим рядом статистичних критеріїв, наприклад за дисперсією, кореляційним відношенням та ін. Слід зазначити, що названі критерії є критеріями апроксимації, а не прогнозу. Проте, зважаючи на прийняту гіпотезу про стійкість процесу в майбутньому, можна припускати, що в цих умовах модель, найбільш вдала для апроксимації, буде якнайкращою і для прогнозу.

У ряді випадків для вибору виду функціональної залежності використовують прийом, що базується на тому, що певні співвідношення між змінами вхідної і вихідної величини припускають ту або іншу функціональну залежність. Дійсно, якщо виконується умова $\Delta y/\Delta x \approx const$, приймається лінійна модель $y = ax + \hat{a}$, де a, $\hat{a}$ – коефіцієнти, що визначаються за методом найменших квадратів;

Δy, Δx – прирости залежної і незалежної змінних, тобто $\Delta y = y_t - y_{t-1}$; $\Delta x = x_t - x_{t-1}$.

Якщо $\Delta \ln y/\Delta x = const$, то приймається модель $y = ax^{\hat{a}}$; якщо $\Delta \ln y/\Delta \ln x \approx const$, то $y = a\hat{a}^x$; у разі $\Delta y^2/\Delta x^2 \approx const$, то $y = ax^2 + \hat{a}x + c$; у випадку $\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\right)/\Delta x \approx const$, то $y = \dfrac{x}{a + \hat{a}x}$.

Визначимо параметри a та $\hat{a}$ функції $y = ax + \hat{a}$. Для цього випишемо n відхилень наступним чином:

$$\left.\begin{array}{l} \grave{a}x_1 + \hat{a} - y_1 = \varepsilon_1 \\ \grave{a}x_2 + \hat{a} - y_1 = \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \grave{a}x_n + \hat{a} - y_n = \varepsilon_n \end{array}\right\}. \qquad (18)$$

Відповідно до методу найменших квадратів параметри a та $\hat{a}$ функції $y = ax + \hat{a}$ повинні бути вибрані такими, щоб сума квадратів відхилень була мінімальною

$$U = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \Rightarrow \min. \qquad (13)$$

Відповідно це рівняння розпишемо наступним чином:

$$\begin{gathered} U = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\grave{a}x_i + \hat{a} - y_i\right]^2 = \left[\grave{a}x_1 + \hat{a} - y_1\right]^2 + \\ + \left[\grave{a}x_2 + \hat{a} - y_2\right]^2 + \dots + \left[\grave{a}x_n + \hat{a} - y_n\right]^2 \end{gathered}. \qquad (14)$$

Знайдемо частинні похідні від отриманої функції *U:*

$$\frac{\partial U}{\partial \grave{a}} = 2\left[\grave{a}x_1 + \hat{a} - y_1\right] \cdot x_1 + 2\left[\grave{a}x_2 + \hat{a} - y_2\right] \cdot x_2 + \ldots$$
$$\ldots. + 2\left[\grave{a}x_n + \hat{a} - y_n\right] \cdot x_n; \qquad (15)$$
$$\frac{\partial U}{\partial \hat{a}} = 2\left[\grave{a}x_1 + \hat{a} - y_1\right] + 2\left[\grave{a}x_2 + \hat{a} - y_2\right] + \ldots + 2\left[\grave{a}x_n + \hat{a} - y_n\right].$$

Прирівнявши отримані частинні похідні нулю та поділивши отримані рівняння на 2, отримаємо наступну лінійну систему рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\grave{a}x_1 + \hat{a} - y_1\right] \cdot x_1 + \left[\grave{a}x_2 + \hat{a} - y_2\right] \cdot x_2 + \ldots + \left[\grave{a}x_n + \hat{a} - y_n\right] \cdot x_n = 0, \\ \left[\grave{a}x_1 + \hat{a} - y_1\right] + \left[\grave{a}x_2 + \hat{a} - y_2\right] + \ldots + \left[\grave{a}x_n + \hat{a} - y_n\right] = 0 \end{array}\right\}. \qquad (16)$$

Виконавши нескладні алгебраїчні перетворення, отримаємо наступну систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \hat{a} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \, y_i \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \hat{a} \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{array}\right\}. \qquad (17)$$

Розв’язок системи нормальних рівнянь (23) має наступний вид:

$$a = \frac{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \qquad \hat{a} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \qquad (18)$$

Важливим моментом отримання прогнозу за допомогою методу найменших квадратів є оцінка достовірності отриманого результату.

2 РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ

Явища, які у випадку подій масового характеру відрізняються певною закономірністю, проте не виявляються на основі одиничного спостереження, називаються **масовими явищами**. Саме така закономірність називається статистичною закономірністю.

Статистична закономірність спостерігається в тих випадках, коли:

а) у досліджуваному процесі діє один загальний комплекс причин;

б) разом з цим, у кожному окремому випадку діють особливі додаткові причини, кожний раз інші.

При цьому самі причини, які визначають масові процеси, прийнято ділити на дві категорії:

− основні причини, які діють у всіх випадках;

− побічні (вторинні) причини, які виявляються тільки в окремих випадках.

Статистична закономірність має місце тоді, коли існує поєднання основних та побічних причин. Основні причини обумовлюють саме існування такої закономірності, а побічні причини визначають її відносну приблизність. Іншими словами, закономірність проявляється тільки в загальній масі випадків, а окремий випадок може відхилитись від загалу.

З наведеного вище стає зрозумілим, що статистичний аналіз виявляється корисним в тих випадках, коли доводиться аналізувати процеси, які при масовому спостереженні здатні проявляти очевидну закономірність. Якби діяли тільки головні причини, без накладення другорядних, то всі окремі випадки були б абсолютно однакові, і не виникло б потреби аналізувати всю їх масу. Досить було б досліджувати один з випадків і на його основі зробити висновки, що відносяться вже до всієї досліджуваної сукупності.

Там, де закономірність пробивається через результати дії побічних причин, доводиться вивчати вже цілу масу випадків, щоб мати можливість виявити закономірність. У такій ситуації дослідження одиничного прикладу може привести до помилкових висновків.

У масових процесах зазвичай розрізняють два елементи: систематичний (постійний) і випадковий (побічний). Систематичний елемент є результатом дії основних причин, випадковий елемент - наслідок дії побічних причин (їх поєднання і дія виявляються по-різному у кожному окремому випадку). Статистична закономірність виявляється виразніше у разі дії **закону великих чисел**. Цей закон відображає закономірності, властиві випадковим подіям масового характеру. При великій кількості спостережень вплив випадкових чинників взаємно врівноважується, і вступають в дію головні причини, які відбиваються в деякій постійності середніх чисел.

Для виконання закону великих чисел важливо дотримати певні умови:

а) досліджуваний масив повинен бути однорідним, бути однакової якості. Це означає, що всі елементи масиву потрапляють під дію одних і тих же основних причин. Інакше можуть виникнути інші основні чинники, і тоді виявити загальну картину виявиться неможливим.

Однорідність даної статистичної маси не можна встановити на основі статистичного дослідження. Для цього потрібний якісний аналіз, який проводиться методами, що використовуються у відповідних областях науки (фізиці, економіці та ін.);

б) побічні причини, що впливають на різні елементи масиву, повинні бути незалежними або мало залежними один від одного. Таким чином, не може бути коректної статистики там, де немає достатньо:

- багаточисельних;
- однорідних;
- незалежних даних.

Якщо ця умова не дотримана, то відсутня і коректна статистика.

Знання статистики допомагає нам прийняти оптимальні рішення. При цьому статистика зовсім не відкидає досвід і інтуїцію дослідника. Її можна розглядати як один з компонентів процесу прийняття рішення, але зовсім не як весь процес. Тому є підстави вважати, що статистика доповнює, але не замінює діловий досвід, здоровий глузд і інтуїцію людини.

Залежність однієї випадкової величини від значень, які приймає інша випадкова величина (фізична характеристика), в статистиці називається **регресією**. Якщо цій залежності надано аналітичного вигляду, то таку форму уявлення зображають рівнянням регресії.

Процедура пошуку передбачуваної залежності між різними числовими сукупностями зазвичай включає наступні етапи:

- встановлення значущості зв'язку між ними;
- можливість представлення цієї залежності у формі математичного виразу (рівняння регресії).

Перший етап у вказаному статистичному аналізі стосується виявлення так званої кореляції, або кореляційної залежності. **Кореляція** розглядається як ознака, що вказує на взаємозв'язок ряду числових послідовностей. Інакше кажучи, кореляція характеризує силу взаємозв'язку в даних. Якщо це стосується взаємозв'язку двох числових масивів x_i і y_i, то таку кореляцію називають парною. При пошуку кореляційної залежності зазвичай виявляється ймовірний зв'язок однієї величини x (для якогось обмеженого діапазону її зміни, наприклад від x_1 до x_n) з іншою величиною y, що також змінюється в деякому інтервалі $\left(y_1, y_n\right)$. У такому разі ми матимемо справу з двома числовими послідовностями, між якими і належить встановити наявність статистичного (кореляційного) зв'язку. На цьому етапі поки не ставиться завдання визначити, чи є одна з цих випадкових величин функцією, а інша – аргументом. Відшукання кількісної залежності між ними у формі конкретного аналітичного виразу $y = f\left(x\right)$ – це завдання вже іншого аналізу, регресійного.

Таким чином, кореляційний аналіз дозволяє зробити висновок про силу взаємозв'язку між парами даних x і y, а регресійний аналіз використовується для прогнозування однієї змінної (y) на підставі іншої (x).

Іншими словами, в цьому випадку намагаються виявити причинно-наслідковий зв'язок між аналізованими сукупностями.

Прийнято розрізняти **два види зв'язку між числовими сукупностями** – це може бути функціональна залежність або ж статистична (випадкова). За наявності функціонального зв'язку кожному значенню чинника, що впливає (аргументу), відповідає певна величина іншого показника (функції), тобто зміна результативної ознаки цілком обумовлена дією факторної ознаки.

Аналітично функціональна залежність представляється в наступному вигляді: $y = f\left(x\right)$.

У разі статистичного зв'язку значенню одного чинника відповідає деяке наближене значення досліджуваного параметра, його точна величина є непередбачуваною, не прогнозованою, тому отримувані показники виявляються випадковими величинами. Це означає, що зміна результативної ознаки y обумовлена впливом факторної ознаки x лише частково, оскільки можлива дія і інших чинників, внесок яких позначений як : $y = f\left(x\right) + \varepsilon$.

За своїм характером кореляційні зв'язки – це співвідносні зв'язки.

Для кількісної оцінки існування зв'язку між сукупностями випадкових величин, що вивчаються, використовується спеціальний статистичний показник – коефіцієнт кореляції r.

Якщо передбачається, що цей зв'язок можна описати лінійним рівнянням типу $y = a + bx$ (де a і b – константи), то прийнято говорити про існування лінійної кореляції.

Коефіцієнт r - це безрозмірна величина, вона може змінюватися від 0 до ±1. Чим ближче значення коефіцієнта до одиниці (неважливо, з яким знаком), тим з більшою упевненістю можна стверджувати, що між двома даними сукупностями змінних існує лінійний зв'язок. Іншими словами, значення однієї з цих випадкових величин (y) істотним чином залежить від того, яке значення приймає інша (x). Випадок, коли $r = 1$, свідчить про те, що має місце класичний випадок чисто функціональної залежності (тобто реалізується ідеальний взаємозв'язок).

Якщо між парами сукупностей є цілком очевидний зв'язок, то, не розглядаючи стадію кореляції, можна відразу приступати до пошуку рівняння регресії.

Якщо ж дослідження стосуються якогось нового процесу, що раніше не вивчався, то наявність зв'язку між сукупностями є предметом спеціального пошуку.

При цьому умовно можна виділити методи, які дозволяють оцінити наявність зв'язку якісно, і методи, що дають кількісні оцінки. Щоб виявити наявність якісного кореляційного зв'язку між двома досліджуваними числовими наборами експериментальних даних, існують різні методи, які прийнято називати елементарними.

Ними можуть бути прийоми, засновані на наступних операціях:

− паралельному зіставленні рядів;

− побудові кореляційної і групової таблиць;

– графічному зображенні за допомогою поля кореляції.

Нехай існує p незалежних змінних $X_1, X_2, ..., X_p$ і залежна змінна Y. Оскільки змінна Y є випадковою величиною, то при заданих значеннях факторів вона має деякий розподіл. Якщо випадкова величина Y неперервна, то можна вважати, що її розподіл при кожному припустимому наборі значень факторів $\left(x_1, ..., x_p\right)$ має умовну щільність розподілу $f_{x_1,... x_p}\left(y\right)$. Найчастіше передбачається, що умовний розподіл Y для кожного припустимого набору значень факторів – нормальний. Пояснюючі змінні $X_1, X_2, ..., X_p$ можуть розглядатися як випадкові, так і детерміновані, тобто такі, що приймають певні значення. В класичній прогнозній моделі вони вважаються детермінованими.

Пояснена частина $\hat{y}\left(X_1, ..., X_p\right)$ являє собою функцію від значень факторів. Таким чином, прогнозна модель має вигляд:

$$Y = \hat{y}\left(X_1, ..., X_p\right) + \varepsilon .$$

Найбільш природним вибором поясненої частини випадкової величини Y є її середнє значення – умовне математичне очікування $M_X\left[Y\right]$, що визначається при даному наборі пояснюючих змінних. Рівняння $M_X\left[Y\right] = f\left(x_1, ..., x_p\right)$ називається рівнянням регресії. У цьому випадку прогнозна модель має вигляд

$$Y = M_X\left[Y\right] + \varepsilon , \tag{19}$$

де ε – випадкова величина, що називається похибкою або помилкою. Рівняння (19) називається рівнянням регресійної моделі.

Відзначимо деякі властивості регресійної моделі. Знайдемо математичне очікування від обох частин виразу (19):

$$\begin{aligned} &M_X\left[Y\right] = M_X\left[M_X\left[Y\right]\right] + M_X\left[\varepsilon\right] \Rightarrow M_X\left[Y\right] = M_X\left[Y\right] + M_X\left[\varepsilon\right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_X\left[\varepsilon\right] = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Отже, у регресійній моделі очікуване значення випадкової помилки дорівнює нулю. Звідси витікає вимога некорельованості випадкових помилок і пояснюючих змінних.

Для того щоб знайти пояснену частину $\hat{y}\left(X_1, ..., X_p\right) = M_X\left[Y\right]$, необхідно знати умовні розподіли випадкової величини Y. Але слід зауважити, що на практиці знайти точне значення поясненої частини неможливо.

У таких випадках застосовується стандартна процедура згладжування експериментальних даних. Вона складається із двох етапів:

1) визначається тип функції $M_X\left[Y\right]$ (лінійна, показова і т.д.):

2) знаходять оцінки параметрів цієї функції за допомогою одного з методів математичної статистики.

Формально жодних способів вибору типу функції не існує. Однак у більшості випадків прогнозні моделі є лінійними. Крім простоти, для такого вибору існують дві причини.

По-перше, якщо випадкова величина $\left(X, Y\right)$ має спільний нормальний розподіл, то її рівняння регресії є лінійним. По-друге, лінійна регресійна модель має менший ризик значної помилки прогнозу.

Надалі ми будемо розглядати лінійні регресійні моделі. Найбільш вивченими є такі лінійні регресійні моделі, у яких виконується умова (20). Вони називаються класичними моделями.

3.ПАРНИЙ РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Як було показано в попередньому розділі, задача прогнозу пов'язана з розглядом регресійної моделі $Y = M_X\left[Y\right] + \varepsilon$. Однак, оскільки одержання рівняння регресії $M_X\left[Y\right] = f\left(x_1,..., x_p\right)$ потребує досить значної вибірки як пояснюючих, так і залежних змінних (що практично неможливо), то намагаються визначити криву або поверхню, яка зв'язує вхідні та вихідні змінні, наближеними методами. Ці методи одержали назву регресійного аналізу.

Таким чином, задачею регресійного аналізу є встановлення форми залежності між змінними, оцінка функції регресії, прогноз невідомих значень залежної змінної.

Природно, що кількість факторних змінних X може бути довільною. Чим їх більше, тим складніше проведення регресійного аналізу. Тому спочатку розглянемо випадок, коли вхідна змінна або фактор один. У цьому випадку говорять про парний регресійний аналіз або однофакторну модель.

З курсу математичного аналізу відомо, що в цьому випадку мова йде про функціональну залежність, тобто коли кожному значенню однієї або декількох незалежних змінних (аргументів) ставлять у відповідність одне й тільки одне значення функції.

Необхідно відзначити, що в більшості випадків кожному значенню вхідної або факторної змінної відповідає множина можливих значень залежної змінної. З точки зору математичної статистики, кожному значенню вхідної змінної відповідає певний розподіл результативної змінної. Така залежність одержала назву ***статистичної або стохастичної***.

Поява статистичного зв'язку пояснюється наявністю в будь-якій задачі прогнозування цілого ряду неврахованих або неконтрольованих факторів, які неминуче приводять до наявності помилок. Тому, при розв’язанні задачі прогнозування розглядають усереднення залежної змінної Y по фактору X. Інакше кажучи, знаходять умовне математичне очікування $M_x\left[Y\right]$, тобто математичне очікування результативної змінної Y за умови, що фактор X прийняв конкретне значення x.

Якщо кожному значенню факторної змінної відповідає умовне математичне очікування залежної змінної, то така статистична залежність називається кореляційною.

Оскільки для кожного значення X умовне математичне очікування $M_x\left[Y\right]$ буде приймати нове значення, тобто буде залежати від величини x, то, як відомо з математичної статистики, кореляційна залежність може бути представлена у вигляді

$$M_x\left[Y\right] = \varphi\left(x\right), \qquad (21)$$

де $\varphi\left(x\right) \neq \text{const}$.

Рівняння (21) називається модельним рівнянням регресії, функція $\varphi\left(x\right)$ – модельною функцією регресії, а її графік – модельною лінією регресії.

Для одержання точного модельного рівняння регресії необхідно для кожного значення параметра X знати умовний закон розподілу вихідної змінної Y. На практиці така інформація, як правило, відсутня. Найчастіше дослідник має лише вибірку пар значень $\left(x_i, y_i\right)$ обмеженого об'єму n. У цьому випадку мова може йти лише про оцінку або наближене значення функції регресії. Такою оцінкою є вибіркова лінія регресії

$$\hat{y} = \hat{\varphi}\left(x, b_0, b_1, ..., b_p\right), \qquad (22)$$

де $\hat{y}$ – вибіркова умовна середня результативної змінної Y при фіксованому значенні фактору $X = x$, $b_0, b_1, ..., b_p$ – параметри кривої. На відміну від (21) рівняння (22) називається вибірковим рівнянням регресії. Якщо наближене значення функції $\hat{\varphi}\left(x, b_0, b_1, ..., b_p\right)$ обрано правильно, то зі збільшенням об'єму вибірки воно повинно наближатися до модельної функції регресії $\varphi\left(x\right)$.

У якості приклада розглянемо статистичну залежність, що представлена в табл. 1.

Таблиця 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
y_i	5	10	10	7	5	6	6	5	6	8

Графічна інтерпретація даної залежності наведена на рис. 1.

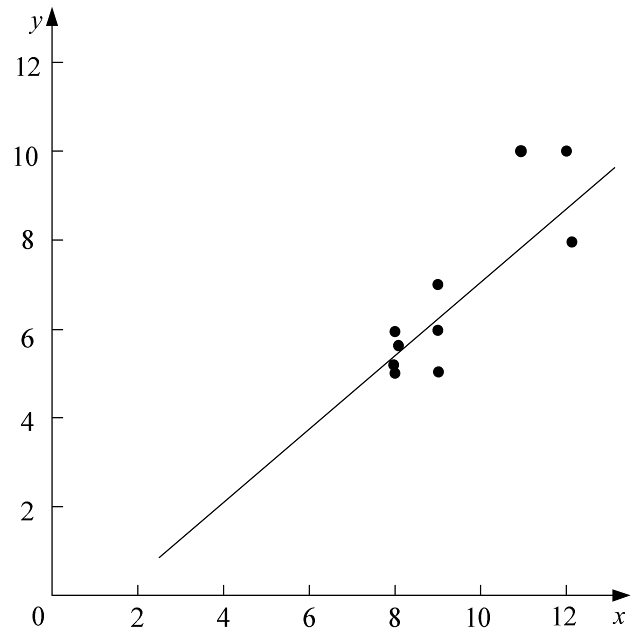

Рис1

Точки, що зображують статистичну залежність вихідної змінної від факторів, називаються полем кореляції. По розташуванню емпіричних точок можна припустити наявність лінійної кореляційної залежності між змінними X та Y. Тому вибіркове рівняння регресії будемо шукати у вигляді лінійного рівняння

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x. \qquad (23)$$

Оскільки, незалежно від конкретної задачі прогнозування, загальний вид рівняння лінійної регресії є незмінним, то з'ясуємо, яким чином можна знаходити невідомі параметри рівняння b_0 та b_1.

Параметри, отримані за МНК мають деякі ідеальні або оптимальні властивості. Вони зазначені в добре відомій теоремі Гаусса-Маркова. Для того щоб зрозуміти її значення, необхідно розглянути властивість найкращого лінійного незміщеного параметра. Параметр, скажімо b_0 за МНК, вважається найкращим лінійним незміщеним параметром b_0, якщо він має такі властивості:

1. Він лінійний, тобто являє собою лінійну функцію випадкової змінної, таку як залежна змінна Y в регресійній моделі.
2. Він є незміщеним параметром.
3. Він має найменшу дисперсію в класі всіх лінійних незміщених параметрів; незміщений параметр з найменшою дисперсією відомий як ефективний параметр.

Можна довести, що параметри, отримані за МНК, мають властивості найкращого лінійного незміщеного параметра. Це є висновком відомої теореми Гаусса-Маркова, яка може бути сформульована таким чином: при прийнятих гіпотезах класичної регресійної лінійної моделі отримані за методом найменших квадратів параметри в класі лінійних незміщених параметрів мають найменшу дисперсію, тобто вони є найкращими лінійними незміщеними параметрами.

Дана теорема дуже важлива при регресійному аналізі, оскільки стосується як теорії, так і практики.

КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ

Розглянемо, яким чином можна оцінювати тісноту кореляційної залежності між X і Y. Коефіцієнт регресії b_1 для цієї мети є непридатним. Незважаючи на те, що він показує, на скільки одиниць у середньому зміниться Y при збільшенні X на одну одиницю, у цього коефіцієнта є істотний недолік: він залежить від одиниць виміру. Тому для оцінки тісноти кореляційної залежності між X і Y використовують наступний підхід.

Перетворимо рівняння (3.41) наступним чином:

$$\frac{\hat{y}-\overline{y}}{\sigma_y} = b_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \frac{\left(x-\overline{x}\right)}{\sigma_x}. \tag{24}$$

У даному виразі величина

$$r_{xy} = b_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \tag{25}$$

показує, на скільки одиниць σ_y зміниться в середньому Y, якщо X зміниться на одне σ_x. Величина r_{xy} є показником тісноти зв'язку між змінними і називається ***вибірковим коефіцієнтом кореляції***.

На рис. 2 а) та рис. 2 б) наведені дві кореляційні залежності Y від X. Очевидно, що в першому випадку кореляційна залежність сильніше і коефіцієнт кореляції більше. Якщо $r_{xy} > 0$, то кореляційний зв'язок є прямим, якщо $r_{xy} < 0$ – зворотнім.

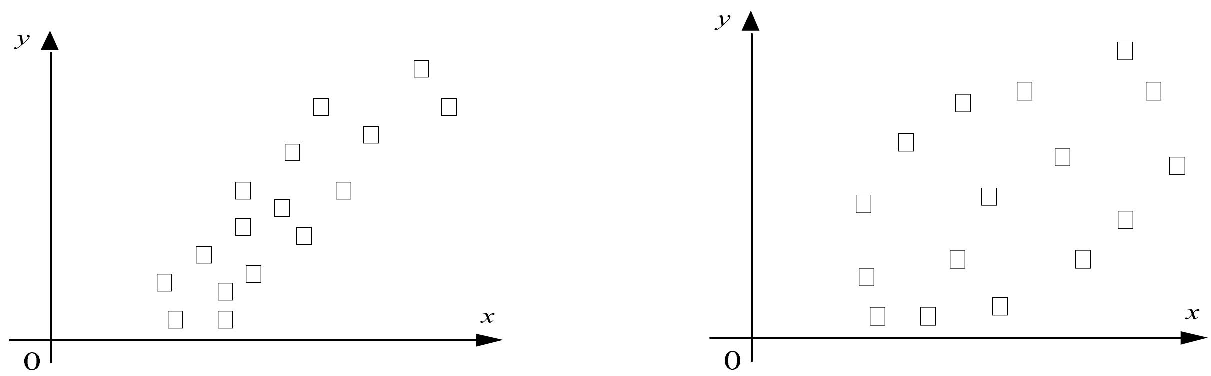

Рис. 2 а) Рис. 2 б)

$$r_{xy} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right)}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right)^2}} =$$

$$= \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}. \qquad (26)$$

16. ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ ФУНКЦІЇ РЕГРЕСІЇ ТА ЇЇ ПАРАМЕТРІВ

Довірчий інтервал функції регресії (прогнозу).

Прогнозне значення $\hat{y}$ визначається шляхом підстановки в рівняння регресії відповідного значення фактору x_n:

$$\hat{y}_n = \hat{y}(x_n) = b_0 + b_1 x_n \qquad (27)$$

Довірчий інтервал прогнозу обчислюється за наступними формулами:

$$M_{X_n}[y] = \hat{y}_n \pm t_{1-\alpha;n-2} S_{\hat{y}}, \qquad (28)$$

де $M_{X_n}[y]$ - умовне математичне сподівання залежної змінної;

$S_{\hat{y}}$ - оцінка стандартної похибки прогнозу, яка обчислюється за формулою:

$$S_{\hat{y}} = S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_n - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_n - \bar{x})^2}}, \qquad (29)$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2}{n-2}} \text{ -} \tag{30}$$

оцінка середньоквадратичного відхилення похибок.

Зауваження. Прогноз значень залежної змінної за рівнянням регресії виправданий, якщо значення x пояснюючої змінної X не виходить за діапазон її значень за вибіркою.

Довірчі інтервали для коефіцієнтів регресійної моделі.

Формули для обчислення довірчих інтервалів для коефіцієнтів мають наступний вигляд:

$$\beta_0 = b_0 \pm t_{1-\alpha;n-2} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{\overline{x^2}}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}}; \tag{31}$$

$$\beta_1 = b_1 \pm t_{1-\alpha;n-2} \cdot - \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}}. \tag{32}$$

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 6

з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Множинний регресійний аналіз»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.
Час проведення: 80 хвилин.
Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.
Мета лекції: визначити особливості використання множинного регресійного аналізу.

Загальні методичні вказівки
1. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
2. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
3. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Множинний регресійний аналіз	40 хв.
2. Коефіцієнт еластичності	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Григорків В.С. Економетрика: Лінійні моделі парної та множинної регресії: навчальний посібник. - Чернівці: ЧНУ, 2009.-224 с.
2. Рабочая книга по прогнозированию / [Бестужев-Лада И.В., Саркисян С.А., Минаев Э.С. и др.]. – М.: Мысль, 1982. – 426 с.
3. Лисичкин В.А. Теория и практика прогностики. – М.: Дело, 1998. – 816 с.
4. Вентцель Е.С. Вероятностное прогнозирование деятельности человека. – М.: Наука, 1977. – 267 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

МНОЖИННИЙ РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Як було показано у попередній лекції, у найпростіших випадках задач прогнозування результуюча змінна Y залежить тільки від однієї пояснюючої змінної X, і ця залежність може бути описана за допомогою парної регресійної моделі. Однак у реальних задачах розвиток певних об'єктів, явищ та процесів, як правило, залежить від сукупності декількох діючих факторів. Тому виникає необхідність дослідження залежності однієї результуючої змінної Y від декількох пояснюючих змінних $X_1, X_2, ..., X_p$. Ця задача розв'язується за допомогою множинного регресійного аналізу.

Нехай проведено n спостережень залежної змінної Y і факторів $X_1, X_2, ..., X_p$. Тоді, за аналогією з парною лінійною регресією, модель множинної лінійної регресії можна представити у вигляді

$$\begin{gathered} Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_p X_p + \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i. \end{gathered} \quad (1)$$

Дана модель називається класичною нормальною лінійною моделлю множинної регресії.

Оскільки в регресійну модель у цьому випадку включається декілька пояснюючих змінних, то для розв'язання задач, пов'язаних з нею, доцільно використовувати матричні позначення.

Введемо наступні позначення:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & ... & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & ... & x_{2p} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{np} \end{pmatrix}, \; \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ ... \\ \beta_p \end{pmatrix}, \; \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ ... \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де Y – матриця-стовпець розміру $n \times 1$ значень результуючої змінної; X – матриця розміру $n \times (p+1)$ значень пояснюючих змінних (матриця плану); β – матриця-стовпець розміру $p \times 1$ параметрів регресійної моделі; ε – матриця-стовпець розміру $n \times 1$ похибок (випадкових помилок, залишків).

Тоді в матричній формі класична нормальна лінійна модель множинної регресії прийме вигляд:

$$Y = X\beta + \varepsilon. \quad (3)$$

У матрицю X введений додатковий стовпець або фіктивний змінна X_0, всі елементи якої дорівнюють одиниці, для того, щоб при множенні X на β в моделі множинної регресії одержати доданок β_0.

Так само як і у випадку парного регресійного аналізу, оцінкою моделі (3) на підставі вибірки є рівняння

$$Y = Xb + e, \quad (4)$$

де матриця-стовпець b є оцінкою β з тими ж розмірами $p \times 1$, матриця-стовпець e – оцінкою ε з тими ж розмірами $n \times 1$.

Аналогічно до випадку парної лінійної регресії, для визначення матриці-стовпця b застосуємо метод найменших квадратів.

Оскільки у випадку множинної регресійної моделі рівняння регресії має вигляд:

$$\hat{Y} = X\,b\,, \tag{5}$$

то матриця-стовпець e визначається співвідношенням $e = Y - \hat{Y} = Y - X\,b$. Скористаємося властивістю добутку транспонованої матриці-стовпця e^T на саму матрицю e:

$$e^T\,e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 .$$

Тоді умова мінімізації квадратів відхилень емпіричних значень y_i від значень $\hat{y}_i$, знайдених з рівняння регресії (2.53), запишеться у вигляді:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e^T\,e = \left(Y - X\,b \right)^T \left(Y - X\,b \right) \to \min . \tag{6}$$

Перемножимо в (2.54) вирази у дужках, скориставшись властивістю матриць $\left(X\,b \right)^T = b^T\,X^T$. Це дасть наступний результат:

$$S = Y^T\,Y - Y^T\,X\,b - b^T\,X^T\,Y + b^T\,X^T\,X\,b\,. \tag{7}$$

У даному виразі матриця $Y^T\,X\,b$ має розмір $\left(1 \times n\right)\left[n \times \left(p+1 \right) \right]\left[\left(p+1 \right) \times 1 \right]$, тобто 1×1. Оскільки транспонування подібної матриці її не змінить, то $Y^T\,X\,b = \left(Y^T\,X\,b \right)^T = b^T\,X^T\,Y$. Таким чином, остаточно маємо умову мінімізації квадратів відхилень у вигляді:

$$S = Y^T\,Y - 2b^T\,X^T\,Y + b^T\,X^T\,X\,b \to \min . \tag{8}$$

У вираженні (7) матриці X та Y відомі, тому що їхні елементи одержують у результаті експерименту. Отже, зміна S залежить лише від невідомої матриці b. Але для визначення екстремуму функції декількох змінних $S\left(b_0, b_1, \dots, b_p \right)$ необхідно її часткові похідні по цим змінним прирівняти нулю. У матричній формі це буде мати наступний вигляд: $\dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$.

Скориставшись правилами матричного диференціювання $\dfrac{\partial \left(b^T\,c \right)}{\partial b} = c$, де c – матриця-стовпець, і $\dfrac{\partial \left(b^T\,A b \right)}{\partial b} = 2\,A b$, де A симетрична матриця, та позначаючи $c = X^T\,Y$, $A = X^T\,X$, знаходимо вираз:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\,X^T\,Y + 2\,X^T\,X\,b = 0\,. \tag{9}$$

Звідси одержуємо матричне рівняння або, що те ж саме, систему нормальних рівнянь у матричній формі:

$$X^T\,X\,b = X^T\,Y\,. \tag{10}$$

Обчислимо матриці $X^T\,X$ і $X^T\,Y$, що входять в (3.58):

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n & \sum x_{i1} & \dots & \sum x_{ip} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \dots & \sum x_{i1} x_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{ip} & \sum x_{i1} x_{ip} & \dots & \sum x_{ip}^2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_{i1} \\ \dots \\ \sum y_i x_{ip} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

У тому випадку, коли $p = 1$, тобто фактор один, з (10) - (12) можна одержати систему нормальних рівнянь однофакторної моделі для визначення b_0 і b_1.

Як відомо з лінійної алгебри, розв’язком матричного рівняння (12) буде матриця-стовпець

$$b = \left(X^T X \right)^{-1} X^T Y, \quad (13)$$

де $\left(X^T X \right)^{-1}$ – зворотна матриця. Знайти дану зворотну матрицю можна лише в тому випадку, коли вихідна матриця $X^T X$ – невиродженою, тобто її визначник не дорівнює нулю. Отже, ранг матриці повинен дорівнювати її порядку: $rg\left(X^T X \right) = p+1$. З лінійної алгебри відомо, що в цьому випадку і $rg\left(X \right) = p+1$. Але це можливо лише тоді, коли стовпці матриці X лінійно незалежні. Ця умова автоматично висуває вимогу до кількості рядків матриці X, тобто до числа спостережень над пояснюючими і результуючими змінними: їх повинно бути не менше кількості стовпців, тобто $n \ge p+1$. У противному випадку ранг матриці стане менше $p+1$ і матричне рівняння розв’язати буде неможливо. На практиці для одержання надійних статистичних результатів беруть $n > p+1$.

Таким чином, знаючи матрицю-стовпець b із рівняння множинної регресії (1) можна знайти значення $\hat{Y}$ для кожного конкретного набору значень пояснюючої змінної X.

У тому випадку, коли необхідно провести порівняння впливу на залежну змінну різних пояснюючих змінних, використовують, наприклад, стандартизований коефіцієнт еластичності E_j:

$$E_j = b_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}. \quad (14)$$

Стандартизований коефіцієнт еластичності E_j показує, на скільки відсотків зміниться в середньому Y при збільшенні X_j на 1%.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 7

з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Коваріаційна матриця і її вибіркова оцінка»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.
Час проведення: 80 хвилин.
Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.
Мета лекції: визначити особливості коваріаційної матриці та її оцінки.

Загальні методичні вказівки

1. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
2. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
3. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Коваріаційна матриця	40 хв.
2. Оцінка дисперсії оббурювань	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Григорків В.С. Економетрика: Лінійні моделі парної та множинної регресії: навчальний посібник. - Чернівці: ЧНУ, 2009.-224 с.
2. Рабочая книга по прогнозированию / [Бестужев-Лада И.В., Саркисян С.А., Минаев Э.С. и др.]. – М.: Мысль, 1982. – 426 с.
3. Лисичкин В.А. Теория и практика прогностики. – М.: Дело, 1998. – 816 с.
4. Вентцель Е.С. Вероятностное прогнозирование деятельности человека. – М.: Наука, 1977. – 267 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 КОВАРІАЦІЙНА МАТРИЦЯ

Варіації або можливі зміни оцінок параметрів рівняння множинної регресії будуть, в остаточному підсумку, визначати й точність самого рівняння. Для оцінки цих варіацій у множинному регресійному аналізі використовують коваріаційну матрицю вектора оцінок параметрів /, яка є матричним аналогом дисперсії однієї змінної:

$$\Sigma_b = \begin{pmatrix} \sigma_{00} & \sigma_{01} & \dots & \sigma_{0p} \\ \sigma_{10} & \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p0} & \sigma_{p1} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де σ_{ij} – коваріації або кореляційні моменти оцінок b_i і b_j, які визначаються як математичне очікування добутку відхилень цих змінних від їхніх математичних очікувань:

$$\sigma_{ij} = M\left[\left(b_i - M\left[b_i\right]\right)\left(b_j - M\left[b_j\right]\right)\right]. \qquad (2)$$

Як відомо, коваріація або кореляційний момент характеризує як ступінь розсіювання значень двох змінні щодо їхніх математичних очікувань, так і взаємозв'язок цих змінних.

Оскільки оцінки b_j, отримані методом найменших квадратів, є ефективними незміщеними оцінками параметрів β_j, тобто $M\left[b_j\right] = \beta_j$, то (2) ухвалює вид:

$$\sigma_{ij} = M\left[\left(b_i - \beta_i\right)\left(b_j - \beta_j\right)\right]. \qquad (3)$$

З (3) випливає, що при рівності індексів $i = j$ виходять діагональні елементи матриці Σ_b, які рівні дисперсії оцінок параметрів регресії:

$$\sigma_{ij} = M\left[\left(b_j - \beta_j\right)^2\right] = \sigma_{b_j}^2 . \qquad (4)$$

У скороченому виді ковариационная матриця вектора оцінок параметрів Σ_b має вигляд:

$$\Sigma_b = M\left[\left(b - \beta\right)\left(b - \beta\right)^T\right], \qquad (5)$$

де b й β – матриці-стовпці.

З п. 2.2 випливає, що

$$b = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \left(X\beta + \varepsilon\right) =$$

$$= \left(X^T X\right)^{-1} X^T X\beta + \left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon = \beta + \left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon.$$

Отже,

$$\Sigma_b = M\left[\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon\right)\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon\right)^T\right] =$$
$$= M\left[\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon \varepsilon^T X\left(X^T X\right)^{-1}\right] = \left(X^T X\right)^{-1} X^T M\left[\varepsilon \varepsilon^T\right] X\left(X^T X\right)^{-1}. \qquad (6)$$

Тут $M\left[\varepsilon \varepsilon^T\right]$ являє собою ковариационную матрицю вектора помилок або збурювань

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} M\left[\varepsilon_1^2\right] & M\left[\varepsilon_1 \varepsilon_2\right] & \dots & M\left[\varepsilon_1 \varepsilon_n\right] \\ M\left[\varepsilon_2 \varepsilon_1\right] & M\left[\varepsilon_2^2\right] & \dots & M\left[\varepsilon_1 \varepsilon_n\right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M\left[\varepsilon_n \varepsilon_1\right] & M\left[\varepsilon_n \varepsilon_2\right] & \dots & M\left[\varepsilon_n^2\right] \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

у якої усі недіагональні елементи дорівнюють нулю, а діагональні рівні однієї й тієї ж дисперсії σ^2. Тому матриця $M\left[\varepsilon \varepsilon^T\right] = \sigma^2 E_n$, де E_n – одинична матриця n-го порядку.

У такий спосіб (6) ухвалює вид

$$\Sigma_b = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \sigma^2 E_n X\left(X^T X\right)^{-1} =$$
$$= \sigma^2\left(X^T X\right)^{-1} X^T E_n X\left(X^T X\right)^{-1} = \sigma^2\left(X^T X\right)^{-1}. \qquad (8)$$

Отже, за допомогою зворотної матриці $\left(X^T X\right)^{-1}$ визначається не тільки матриця-стовпець b оцінок параметрів, але й дисперсії й коваріації його компонент.

2 ОЦІНКА ДИСПЕРСІЇ ОББУРЮВАНЬ

Для оцінки дисперсії збурювань розглянемо матрицю-стовпець, яка відповідно до (9) рівна:

$$e = Y - X b = X\beta + \varepsilon - X\left(X^T X\right)^{-1} X^T\left(X\beta + \varepsilon\right) =$$
$$= X\beta + \varepsilon - X\left(X^T X\right)^{-1} X^T X\beta - X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon = \qquad (9)$$
$$= X\beta + \varepsilon - X\beta - X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon = \varepsilon - X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon.$$

На підставі (9) знаходимо

$$M\left[e^T e\right] = M\left[\left(\varepsilon - X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon\right)^T \left(\varepsilon - X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon\right)\right] =$$
$$= M\left[\left(\varepsilon^T - \varepsilon^T X\left(X^T X\right)^{-1} X^T\right)\left(\varepsilon - X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon\right)\right] =$$
$$= M\left[\varepsilon^T \varepsilon\right] - M\left[\varepsilon^T X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon\right] - M\left[\varepsilon^T X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon\right] + \qquad (10)$$
$$+ M\left[\varepsilon^T X\left(X^T X\right)^{-1} X^T X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon\right] =$$
$$= M\left[\varepsilon^T \varepsilon\right] - M\left[\varepsilon^T X\left(X^T X\right)^{-1} X^T \varepsilon\right].$$

Перший доданок (10)

$$M\left[\varepsilon^T \varepsilon\right] = M\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} M\left[\varepsilon_i^2\right] = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2 . \qquad (11)$$

У другому доданку матриця $X\left(X^T X\right)^{-1} X^T = B$ є симетричної, тому $\varepsilon^T B\varepsilon$ являє собою квадратичну форму $\sum_{i,\ j=1}^{n} b_{ij}\, \varepsilon_i\, \varepsilon_j$. Її математичне очікування

$$M\left[\varepsilon^T B\varepsilon\right] = M\left[\sum_{i,\ j=1}^{n} b_{ij}\, \varepsilon_i\, \varepsilon_j\right] = \sum_{i,\ j=1}^{n} b_{ij}\, M\left[\varepsilon_i\, \varepsilon_j\right] = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\, M\left[\varepsilon_i^2\right] + \sum_{i,\ j=1(i \neq j)}^{n} b_{ij}\, M\left[\varepsilon_i\, \varepsilon_j\right].$$

Тут другий доданок дорівнює нулю, тому

$$M\left[\varepsilon^T B\varepsilon\right] = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\, \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} b_{ij} . \qquad (12)$$

Заміняючи матрицю B її вираженням, остаточно одержуємо

$$M\left[\varepsilon^T B\varepsilon\right] = \sigma^2 \left(p+1\right). \qquad (13)$$

Підстановка (13) і (11) в (10) приводить до виразу

$$M\left[e^T e\right] = n\sigma^2 - \sigma^2\left(p+1\right) = \sigma^2\left(n-p-1\right). \qquad (14)$$

Рівність (14) означає, що незміщена оцінка s^2 дисперсії оббурювань визначається по формулі

$$s^2 = \frac{e^T e}{n-p-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-p-1} . \qquad (15)$$

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 8

з навчальної дисципліни

«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Визначення довірчих інтервалів для коефіцієнтів і функції регресії»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.

Час проведення: 80 хвилин.

Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.

Мета лекції: визначити особливості визначення довірчих інтервалів для коефіцієнтів і функції регресії.

Загальні методичні вказівки

1. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
2. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
3. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Визначення довірчих інтервалів для коефіцієнтів і функції регресії	40 хв.
2. Оцінка значимості множинної регресії	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Григорків В.С. Економетрика: Лінійні моделі парної та множинної регресії: навчальний посібник. - Чернівці: ЧНУ, 2009.-224 с.
2. Рабочая книга по прогнозированию / [Бестужев-Лада И.В., Саркисян С.А., Минаев Э.С. и др.]. – М.: Мысль, 1982. – 426 с.
3. Лисичкин В.А. Теория и практика прогностики. – М.: Дело, 1998. – 816 с.
4. Вентцель Е.С. Вероятностное прогнозирование деятельности человека. – М.: Наука, 1977. – 267 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 ВИЗНАЧЕННЯ ДОВІРЧИХ ІНТЕРВАЛІВ ДЛЯ КОЕФІЦІЄНТІВ І ФУНКЦІЇ РЕГРЕСІЇ

Після визначення рівняння множинної регресії, яке описує класичну модель множинної регресії й з'ясування за допомогою коваріаційної матриці, які величини дисперсії компонент матриці-стовпця b, перейдемо до оцінки значимості коефіцієнтів регресії b_j й побудові для них довірчого інтервалу. Це необхідно для того, щоб при використанні отриманої моделі з метою прогнозу представляти той діапазон, у якому можуть коливатися отримані результати.

Як було показано у попередній лекції, елементи коваріаційної матриці мають вигляд: $\sigma_{ij} = M\left[\left(b_i - M\left[b_i\right]\right)\left(b_j - M\left[b_j\right]\right)\right]$,

причому у випадку рівності $i = j$ одержуємо її діагональні елементи:

$$\sigma_{jj} = M\left[\left(b_j - \beta_j\right)^2\right] = \sigma_{b_j}^2, \qquad (1)$$

які рівні дисперсії відповідного коефіцієнта регресії b_j. Оскільки сама коваріаційна матриця має вигляд:

$$\Sigma_b = \sigma^2\left(X^T X\right)^{-1},$$

то її діагональні елементи рівні:

$$\sigma_{jj} = \sigma_{b_j}^2 = \sigma^2\left[\left(X^T X\right)^{-1}\right]_{jj}. \qquad (2)$$

З іншого боку, експериментально отримана оцінка для σ^2 визначається виразом:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n - p - 1}.$$

Отже, оцінка для $\sigma_{b_j}^2$, тобто її значення, отримані в результаті експерименту, будуть рівні:

$$s_{b_j}^2 = s^2\left[\left(X^T X\right)^{-1}\right]_{jj} \qquad (3)$$

Таким чином, середнє квадратическое відхилення, тобто стандартна помилка коефіцієнта регресії прийме вид $s_{b_j} = \sqrt{s_{b_j}^2}$.

Для встановлення відповідності математичної моделі, що виражає залежність між змінними, тем даним, які отримані експериментально, перевіримо значимість коефіцієнтів регресії b_j. Це можна зробити, враховуючи, що статистика $t = \dfrac{b_j - \beta_j}{s_{b_j}}$ має t-розподіл

Стьюдента зі $k = n - p - 1$ ступенями волі. Інакше кажучи, отриманий коефіцієнт b_j значимо на рівні $\alpha = 1 - \beta$, якщо $|t| > t_{1-\alpha,\, n-p-1}$, де $t_{1-\alpha,\, n-p-1}$ – табличне значення t-критерію Стьюдента.

Звідси випливає, що довірчий інтервал для параметра β_j має вигляд:

$$b_j - t_{1-\alpha,\, n-p-1}\, s_{b_j} \le \beta_j \le b_j + t_{1-\alpha,\, n-p-1}\, s_{b_j}\,. \tag{4}$$

Поряд з інтервальним оцінюванням коефіцієнтів регресії досить важливим для оцінки точності прогнозу для залежної змінної є побудови довірчого інтервалу для функції регресії або, що те ж саме, для математичного очікування залежної змінної $M_x\left[Y\right]$. Із цією метою береться набір, що цікавить дослідника, значень $X_1, X_2, \ldots, X_p$ пояснюючих змінних, який задається матрицею-стовпцем:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{10} \\ x_{20} \\ \ldots \\ x_{p0} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Даний інтервал був отриманий для рівняння парної регресії. У розглянутому випадку він має аналогічний вигляд:

$$\hat{y} - t_{1-\alpha,\, n-p-1}\, s_{\hat{y}} \le M_x\left[Y\right] \le \hat{y} + t_{1-\alpha,\, n-p-1}\, s_{\hat{y}}\,, \tag{6}$$

де $\hat{y}$ – групова середня, обумовлена по рівнянню регресії; $s_{\hat{y}} = s\sqrt{X_0^T\left(X^T X\right)^{-1} X_0}$ – середнє квадратичне відхилення групової середньої.

Аналогічно рівнянню парної регресії довірчий інтервал для індивідуальних значень залежної змінної y_0 прийме вид:

$$\hat{y}_0 - t_{1-\alpha,\, n-p-1}\, s_{\hat{y}_0} \le y_0 \le \hat{y}_0 + t_{1-\alpha,\, n-p-1}\, s_{\hat{y}_0}\,, \tag{7}$$

де $s_{\hat{y}} = s\sqrt{1 + X_0^T\left(X^T X\right)^{-1} X_0}$.

Нарешті, довірчий інтервал для параметра σ^2 в множинній регресії будується також аналогічно парної моделі по формулі, пов'язаній з розподілом Пірсона χ^2:

$$\frac{n s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-p-1}} \le \sigma^2 \le \frac{n s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-p-1}}\,. \tag{8}$$

Слід мати на увазі, що при розв'язку конкретної задачі можуть бути отримані незначущі коефіцієнти регресії. У цьому випадку їх можна виключити з розгляду разом з відповідної їм змінної /. Однак перед можливим виключенням необхідно провести ретельний якісний аналіз, у результаті якого може виявитися, що дану пояснюючу змінну доцільно залишити.

2. ОЦІНКА ЗНАЧИМОСТІ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ. КОЕФІЦІЄНТИ ДЕТЕРМІНАЦІЇ R^2 Й $\hat{R}^2$

Як і у випадку парної регресії, у моделі множинної регресії загальна сума квадратів відхилень залежної змінної від середньої рівна

$$Q = Q_R + Q_e,$$

тобто пояснюється сумою квадратів відхилень, обумовленою регресією, і сумою квадратів відхилень, пов'язаної з помилками або неврахованими факторами.

Одержимо формули для суми квадратів відхилень Q, Q_R і Q_e у випадку множинної регресії.

Маємо:

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} = Y^T Y - n\,\overline{y}^2. \tag{9}$$

Для обчислення Q_e скористаємося тим, що аналогічне йому вираження вже було обчислено при використанні методу найменших квадратів у моделі множинної регресії:

$$Q_e = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = S = Y^T Y - 2b^T X^T Y + b^T X^T X\,b = Y^T Y - b^T X^T Y, \tag{10}$$

оскільки $Y = X\,b$.

Нарешті,

$$Q_R = Q - Q_e = Y^T Y - n\,\overline{y}^2 - \left(Y^T Y - b^T X^T Y\right) = b^T X^T Y - n\,\overline{y}^2. \tag{11}$$

Рівняння множинної регресії буде мати вигляд

$$F = \frac{Q_R\left(n-p-1\right)}{Q_e\,p} > F_{\alpha,\,p,\,n-p-1}, \tag{12}$$

де $F_{\alpha,\,p,\,n-p-1}$ – табличне значення F-критерію Фішера.

Введемо коефіцієнт детермінації / як одна з найбільш ефективних оцінок адекватності регресійної моделі, характеристика його прогностичної сили. Він рівний:

$$R^2 = \frac{Q_R}{Q} = \frac{b^T X^T Y - n\,\overline{y}^2}{Y^T Y - n\,\overline{y}^2}.$$

R^2 характеризує частку варіації залежною змінною, обумовленою регресією. Чим ближче R^2 до одиниці, тем краще регресія описує залежність між пояснюючими й результуючої змінними.

Разом з тим використання тільки одного коефіцієнта детермінації R^2 для вибору найкращого рівняння регресії може виявитися недостатнім. На практиці зустрічаються випадки, коли погано певна модель регресії може мати порівняно високий коефіцієнт R^2.

Недоліком коефіцієнта детермінації R^2 є те, що він збільшується при додаванні нової пояснюючої змінної, хоча це й не обов'язково означає поліпшення якості регресійної моделі. У цьому змісті переважніше використовувати скоректований, поправлений коефіцієнт детермінації /:

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}\left(1 - R^2\right). \qquad (13)$$

З (13) випливає, що чим більше число змінних, тем менше $\hat{R}^2$ у порівнянні с. R^2 На відміну від R^2 скоректований коефіцієнт $\hat{R}^2$ може зменшуватися при велінні в модель нових пояснюючих змінних, що не виявляють істотний вплив на залежну змінну. Однак навіть збільшення скоректованого коефіцієнта детермінації $\hat{R}^2$ при введенні в модель нової пояснюючої змінної не завжди означає, що її коефіцієнт регресії значимо, тобто збільшення $\hat{R}^2$ ще не означає поліпшення якості регресійної моделі.

Якщо відомий коефіцієнт детермінації R^2, то критерій значимості рівняння регресії може бути записаний у вигляді:

$$F = \frac{R^2\left(n-p-1\right)}{\left(1-R^2\right)p} > F_{\alpha,\, p,\, n-p-1}. \qquad (14)$$

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 9
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Мультиколеніарність та її вплив на параметри моделі»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.

Час проведення: 80 хвилин.

Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.

Мета лекції: визначити особливості визначення мультиколеніарності та лінійних регресійних моделей зі змінною структурою.

.

Загальні методичні вказівки

1. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
2. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
3. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Мультиколінеарність	40 хв.
2. Лінійні регресійні моделі зі змінною структурою. Фіктивні змінні	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Григорків В.С. Економетрика: Лінійні моделі парної та множинної регресії: навчальний посібник. - Чернівці: ЧНУ, 2009.-224 с.
2. Рабочая книга по прогнозированию / [Бестужев-Лада И.В., Саркисян С.А., Минаев Э.С. и др.]. – М.: Мысль, 1982. – 426 с.
3. Лисичкин В.А. Теория и практика прогностики. – М.: Дело, 1998. – 816 с.
4. Вентцель Е.С. Вероятностное прогнозирование деятельности человека. – М.: Наука, 1977. – 267 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 МУЛЬТИКОЛІНЕАРНІСТЬ

При розгляді класичної лінійної моделі парної й множинної регресії була проведена оцінка параметрів моделі, визначені довірчі інтервали, як для параметрів, так і для рівняння регресії, перевірені статистичні гіпотези про регресію. Однак при складанні моделі й рівняння регресії слід мати у виді можливі проблеми, пов'язані із практичним використанням моделі множинної регресії. До них належать мультиколінеарність, використання фіктивних змінних при включенні в регресійну модель якісних пояснюючих змінних і ін.

Під мультиколінеарністю розуміється висока взаємна корельованість або залежність пояснюючих змінних. Подібна ситуація виникає, якщо при створенні моделі як факторів одночасно використовуються такі показники, як витрати на одиницю продукції, собівартість, ціна. Мультиколінеарність може проявлятися в явній функціональної й схованої стохастичної формі.

При функціональній формі мультиколінеарності, принаймні, одна з парних зв'язків між пояснюючими змінними є лінійною функціональною залежністю. У цьому випадку матриця $X^T X$, яка використовується для обчислення оцінок коефіцієнтів рівняння регресії й коваріаційної матриці, перетворюється у вироджену, тому що містить лінійно залежні стовпці і її визначник дорівнює нулю. Але в цьому випадку неможливо знайти зворотну матрицю $\left(X^T X\right)^{-1}$ й, відповідно, знайти оцінки параметрів регресійної моделі.

В економічних дослідженнях мультиколінеарність частіше проявляється в стохастичної формі, коли хоча б між двома пояснюючими змінними існує тісний кореляційний зв'язок. Матриця $X^T X$ в цьому випадку не є виродженою, але її визначник дуже малий.

Однак, оскільки вектор оцінок $b = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$ і його коваріаційна матриця $\Sigma_b = \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1}$ пропорційні зворотному сволоку $\left(X^T X\right)^{-1}$, то виходять як більші значення самих коефіцієнтів b, так і значні їхні середні квадратичні відхилення. У цьому випадку оцінка їх значимості за критерієм Стьюдента не має змісту, хоча сама регресійна модель може виявитися значимою за критерієм Фішера.

Оцінки стають дуже чутливими до незначної зміни результатів спостережень і об'єму вибірки. Рівняння регресії в цьому випадку, як правило, не мають реального змісту, деякі з їхніх коефіцієнтів можуть мати неправильні з погляду економічної теорії знаки й невиправдано більші значення.

Точних кількісних критеріїв для визначення наявності або відсутності мультиколінеарності не існує. Проте, є деякі евристичні підходи по її виявленню.

Один з таких підходів полягає в аналізі кореляційної матриці між пояснюючими змінними $X_1, X_2, ..., X_p$ і виявленню пар змінних, що мають високі коефіцієнти кореляції (звичайно більше 0,8). Якщо такі змінні існують, то говорять про мультиколінеарність між ними.

Корисно також знаходити множинні коефіцієнти детермінації між однією з пояснюючих змінних і деякої групою з них. Наявність високого множинного коефіцієнта детермінації (більше 0,6) свідчить також про мультиколінеарність.

Ще один і найбільш простий з методів полягає в дослідженні матриці $X^T X$, яка обов'язково обчислюється в процесі визначення рівняння регресії. Якщо визначник матриці близький до нуля, то це говорить про мультиколінеарність.

Для усунення або зменшення мультиколінеарності використовується ряд методів. Найпростіший з них полягає в тому, що із двох пояснюючих змінних, що мають високий коефіцієнт кореляції, одну виключають із розгляду. При цьому, яку змінну залишити, а яку виключити, вирішують на підставі економічних міркувань. Якщо переваги не можна віддати ні однієї з них, то залишають ту, яка має більш високий коефіцієнт кореляції із залежної змінної.

Інший метод усунення або зменшення мультиколінеарності полягає в переході від незміщених оцінок для коефіцієнтів рівняння регресії b_j, які перебувають на підставі методу найменших квадратів, до зміщень, що мають при цьому менше розсіювання щодо оцінюваного параметра.

При використанні "гребньовій регресії" розглядають зміщені оцінки, що задаються вектором $\hat{\beta}_\tau = \left(X^T X + \tau E_{P+1} \right)^{-1} X^T Y$, де τ – деяке позитивне число, називане гребенем; E_{p+1} – одинична матриця $(p+1)$-го порядку. Число τ вибирають таким, щоб визначник матриці $X^T X + \tau E_{P+1}$ суттєво відрізнявся від нуля.

Ще одним з можливих методів усунення або зменшення мультиколінеарності є використання покрокових процедур відбору найбільш інформативних змінних. Наприклад, на першому кроці розглядається лише одна пояснююча змінна, що має із залежної змінної Y найбільший коефіцієнт детермінації. На другому кроці включається в регресію нова пояснююча змінна, яка разом зі спочатку відібраної утворює пари пояснюючих змінних, що має з Y найбільш високий скоректований коефіцієнт детермінації. На третьому кроці вводиться в регресію ще одна пояснююча змінна, яка разом із двома спочатку відібраними утворює трійку пояснюючих змінних, що має з Y найбільший скоректований коефіцієнт детермінації і т.д.

2 ЛІНІЙНІ РЕГРЕСІЙНІ МОДЕЛІ ЗІ ЗМІННОЮ СТРУКТУРОЮ. ФІКТИВНІ ЗМІННІ

Дотепер ми розглядали регресійну модель, у якій у якості пояснюючих змінних виступали кількісні змінні (число працюючих, рівень механізації й т.п.). Однак на практиці часто виникає необхідність дослідження впливу якісних ознак, що мають дві або кілька градацій. До таких ознак можна віднести: підлога (чоловічий, жіночий), утвір (початкове, середнє, вище), сезон (зима, весна, літо, осінь) і ін.

Якісні ознаки можуть суттєво впливати на структуру лінійних зв'язків між змінними й приводити до стрибкоподібної зміни параметрів регресійної моделі. У цьому випадку говорять про ***дослідження регресійних моделей зі змінною структурою або за неоднорідним даними***.

Підхід, що дозволяє оцінювати вплив значень кількісних змінних і рівнів якісних ознак за допомогою одного рівняння регресії. Цей підхід пов'язаний із уведенням ***фіктивних змінних***.

У якості фіктивних змінних звичайно використовуються бінарні або бульові змінні, які ухвалюють усього два значення "0" або "1".

У цьому випадку первісна регресійна модель буде мати вигляд:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \alpha z_i + \varepsilon_i , \qquad (1)$$

У принципі якісна відмінність можна формалізувати за допомогою будь-який змінної, що ухвалює два будь-які різні значення. Однак в економетрії практично завжди використовуються фіктивні змінні типу "0 - 1", оскільки інтерпретація таких результатів виглядає найбільше просто.

Якщо розглянута якісна ознака має більше двох рівнів градації ($k > 2$), то можна, у принципі, увести в модель дискретну змінну, що ухвалює таке ж кількість значень. Однак звичайно так не надходять також через складність інтерпретації відповідних коефіцієнтів регресії, а вводять $(k-1)$ бінарну змінну.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \alpha_1 z_{i1} + \alpha_2 z_{i2} + \varepsilon_i , \qquad (2)$$

При включенні фіктивних змінних усі процедури регресійного аналізу (оцінка параметрів регресійної моделі, перевірка значимості їх коефіцієнтів, визначення довірчих інтервалів і т.п.) проводяться так само, як і при звичайних кількісних змінних. Фіктивність змінних Z_i полягає в тому, що вони кількісним образом описують якісну ознаку.

Розглянута вище регресійна модель відбивала вплив якісних ознак (фіктивних змінних) тільки на значення залежної змінної Y. У більш складних моделях може бути відбите також вплив фіктивних змінних на самі параметри при змінних регресійній моделі. Наприклад, при наявності в моделі кількісного фактору X й фіктивних змінних Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, з яких Z_1, Z_2 впливають тільки на значення коефіцієнта при X, а Z_3, Z_4 – тільки на величину залежної змінної Y, регресійна модель прийме вид:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_{11}\left(z_{i1} x_i\right) + \beta_{12}\left(z_{i2} x_i\right) + \alpha_3 z_{i3} + \alpha_4 z_{i4} + \varepsilon_i . \qquad (3)$$

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 10
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Методологія прийняття управлінських рішень»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.
Час проведення: 80 хвилин.
Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.
Мета лекції: визначити особливості процедури прийняття рішень.
.

Загальні методичні вказівки

1. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
2. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
3. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ 8 хв.
1. Процедура прийняття рішень 40 хв.
2. Задача оптимізації 30 хв.
Закінчення . . . . 2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Кини Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Л.Кини, Х. Райфа. − М.: Радио и связь, 1981.
2. Р.Штойер Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления, приложения / Р. Штойер. − М.: Радио и связь, 1992.
3. Петров Е.Г. Методи і засоби прийняття рішень у соціально-економічних системах: Навч. посібн. / Е.Г. Петров, М.В. Новожилова, І.В. Гребеннік. – К.: Техніка, 2004. – 256 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 ПРОЦЕДУРА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Прийняття ефективних рішень – одна з найбільш актуальних проблем сучасності. Кожна людина щодня зустрічається з необхідністю прийняття розв'язків. Їхнім так багато й ухвалюють їх так часто, що в більшості випадків це просто не усвідомлюється. Тільки найбільш важливі й важкі рішення виділяються й стають предметом аналізу. При цьому підхід завжди один: прагнуть збирати точну, надійну інформація, а потім робиться вибір серед можливих рішень.

Прийняття рішень – це важлива функція будь-якої цілеспрямованої діяльності, що є вмінням, яким повинна опанувати кожна людина, що працює як у бізнесі так і в науці. Прийняття неоптимальних рішень у життєвих і виробничих ситуаціях приводить до нераціональної втрати значної частки можливостей і ресурсів. При цьому, чим складніше ситуація, тим більше втрати. Тому проблемі прийняття рішень приділяється особлива увага.

Процеси вибору й прийняття рішень є в певному змісті всеосяжними, оскільки в будь-якій цілеспрямованій дії людини можна виділити усвідомлений або несвідомий акт вибору й ухвалення рішення. Отже, процес вибору й ухвалення рішення не тільки деякий приватний аспект поведінки людину, але в певному змісті більш-менш універсальна модель, що дозволяє пояснити людську поведінку. Однак, найчастіше в конкретних умовах при створенні систем організаційного керування виникають серйозні труднощі пов'язані з побудовою конструктивних, тобто формалізованих процедур прийняття ефективних рішень.

Тому що рішення розглядається як деяка абстрактна система, у якості відправної точки розглянемо загальне визначення системи.

Залежно від цілей аналізу й рівня абстрагування відомі різні визначення системи. Самим загальним є теоретико-множиний опис. У цьому випадку під системою будемо розуміти множина однорідних або різнорідних елементів M, на якій реалізована деяка множина відносин R, що впорядковують елементи в структуру, що володіє деяким набором властивостей P, що дозволяють досягтися заданої мети. Таким чином, упорядковані множини елементів і відносин між ними утворюють деяку структуру

$$C = \{M, R\}, \qquad (1)$$

яка може бути інтерпретована як нецілеспрямована система. Це пов'язане з тим, що кожна структура має деякі властивості, у тому числі системними, тобто такими, які не випливають прямо із властивостей елементів, а є результатом упорядкування, взаємодії елементів на базі реалізованих відносин. Таким чином, будь-яка структура є нецілеспрямованою системою.

У тому випадку якщо задана мета системи, то її відображення на множину властивостей виділяє деяка їхня підмножина P, що дозволяє досягтися мети. У цьому випадку вирішується задача усвідомленого (цілеспрямованого) синтезу цілеспрямованої системи, тобто системи із властивостями, що забезпечують досягнення мети. Таким чином, цілеспрямована система може бути визначена як упорядкована множина

$$S = \rangle\{M, R\}, P\langle. \qquad (2)$$

Звідси випливає, що опис системи пов'язане із завданням множин M, R, P. При цьому множини є кінцевими й піддаються інформативному опису тільки в тому випадку, якщо визначений рівень деталізації множини елементів системи M.

Задачу синтезу системи можна структурувати на наступні етапи: визначення мети; аналіз мети й виділення властивостей, якими повинна мати система для її досягнення; визначення множини структур, що володіють необхідними властивостями й вибір з них кращого варіанта. Кожний з перерахованих етапів важливий, має свою методологію й формальний апарат рішень.

З формальної точки зору вибір найкращого варіанта системи є проблемою прийняття рішень. Незалежно від змістовної постановки вона може бути представлена у вигляді послідовності наступних задач:

- формування множини припустимих рішень X;
- вибір і обґрунтування системи оцінок, що дозволяють установити на множині X відношення порядку (задача оцінювання);
- визначення найкращого розв'язку $x^0 \in X$ (задача оптимізації). При цьому центральній з них є задача оцінювання. Трудноші її рішення полягає у тому, що у більшості випадків, при синтезі складних систем не вдається обрати єдиний критерій, що достатньо повно характеризує систему, у зв'язку із цим виникає необхідність:
- формування множини часткових критеріїв, що досить повно відбивають усі значимі властивості системи;
- вибору на множині часткових критеріїв метрики, що дозволяє встановлювати на множині рішень $x \in X$ відношення порядку.

Розглянемо методологічні підстави рішення кожної із цих задач.

Якість цілеспрямованих систем визначається ступенем досягнення мети, а тому що це у свою чергу залежить від властивостей системи, те кожне з них або групи виступають у якості часткових критеріїв. У сукупності вони характеризують якість (ефект) кожного з можливих варіантів структури. Позначимо цю підмножину критеріїв $К_К$. З іншої сторони очевидно, що далеко не байдуже якою “ціною” досягнуться цільовий ефект. Синтез будь-якого варіанта структури пов'язаний з використанням деякої множини елементів і реалізацією на них відносин. Конкретні елементи цих двох множин визначають витрати (у широкому змісті) на створення системи. Позначимо цю групу критеріїв $К_З$. Інтегральна оцінка ефективності варіанта системи повинна враховувати обидві групи часткових критеріїв:

$$К_Э = F[К_К, К_З]. \qquad (3)$$

Після того як обрані часткові критерії виникає задача ранжирування розв'язків $x \in X$. Ця задача не викликає утруднень тільки в тому випадку, якщо рішення погоджені, тобто для кожного рішення значення всіх або частини, при рівності інших, критеріїв краще або гірше, чим в інших. Підмножина таких рішень утворює область згоди $X^S \subset X$. Разом із цим існує підмножина рішень $X^C \subset X$, на якому жоден частковий критерій не може бути поліпшений без погіршення якості хоча б одного іншого критерію. Підмножина $x \in X^C$ називається областю компромісів (областю Парето або Парето-оптимальними рішеннями). У загальному випадку припустима множина рішень є композицією двох зазначених множин, при цьому

$$X = X^S \cup X^C, X^S \cap X^C = \varnothing. \qquad (4)$$

У конкретній ситуації X^S і X^C можуть мати різну потужність, у тому числі бути порожніми. Принципові труднощі виникають тільки при ранжируванні рішень $x \in X^C$. У цьому випадку вибір найкращого рішення може здійснюватися на основі одного із двох підходів:

- евристичного (неформального), коли лінійний порядок установлює ОПР на основі евристичних міркувань;
- конструктивного (формального), реалізація якого пов'язана з формуванням формального принципу оптимальності на множині суперечливих часткових критеріїв.

При реалізації кожного із зазначених підходів відповідно в неявній або явній формі враховується взаємозв'язок між групами критеріїв $К_К$ (ефектом) і $К_З$ (витратами). Ця залежність на якісному рівні описується логістичної (S-образної) кривій, що має вид, показаний на рис. 1.

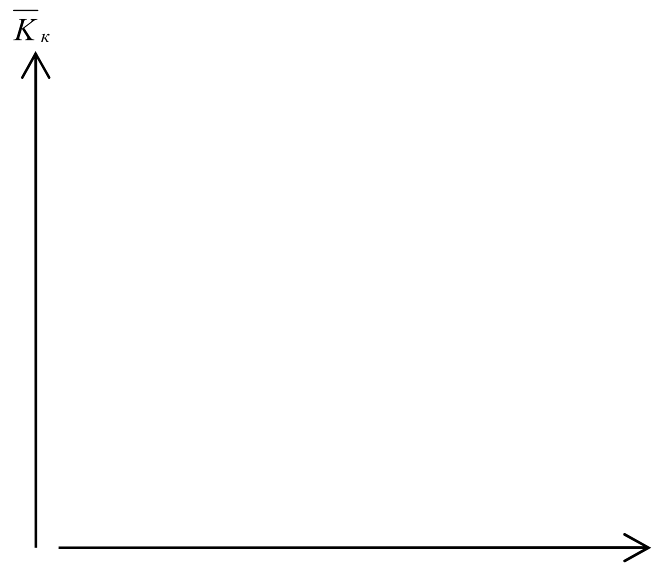

Рис.1 - Залежність ефекту $\overline{K}_к$ від $\overline{K}_з$

Оцінювання варіантів засноване на зіставленні очікуваних інтегральних ефекту ($\overline{K}_к$) і витрат ($\overline{K}_з$), тому підхід відомий як принцип “ефект-витрати”.

Критерії впорядкування в цьому випадку можуть мати вигляд:

$$К_{Э1} = \max_{x \in X} \overline{K}_к / \overline{K}_з, \qquad (5)$$

$$К_{Э2} = \max_{x \in X} (\overline{K}_к - \overline{K}_з) \qquad (6)$$

або при завданні відповідних обмежень:

$$К_{Э3} = \max_{\overline{K}_З \le \overline{K}^*_З} \overline{K}_к, \qquad (7)$$

$$К_{Э4} = \min_{\overline{K}_К \le \overline{K}^*_К} \overline{K}_з. \qquad (8)$$

Тут $\overline{K}_к$ і $\overline{K}_з$ - відповідно узагальнені скалярні оцінки на множинах часткових критеріїв $К_К$ і $К_З$, а зірочкою позначені їхні припустимі рівні. Існують і інші форми інтегральних оцінок, але загальною проблемою при їхній реалізації є необхідність формування багатокритеріальних скалярних оцінок.

Слід мати у виді, що логістична крива описує повний життєвий цикл системи, тому критерії частіше використовуються для “стратегічного” аналізу, наприклад, для визначення моментів модернізації системи, зняття з виробництва, порівняння принципів побудови і т.д. Завдання обмежень визначає деяку вузьку область на логістичній кривій, що відповідає задачам конкретного синтезу.

2 ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ

Вибір із припустимого множини ефективного (найкращого) рішення $\mathbf{x}^{\circ} \in \mathbf{X}$ (задача оптимізації). Кінцевою метою загальної задачі прийняття рішень є вибір із припустимого множини рішень $\boldsymbol{X}$ єдиного найкращого, тобто екстремального по обраних часткових критеріях рішень.

Як відомо, припустима множина рішень містить у загальному випадку підмножини погоджених X^S і суперечливих (компромісних) X^C рішень. Особливістю останніх є неможливість поліпшити жоден частковий критерій $k_j(x)$, $j = \overline{1,n}$ без погіршення якості хоча б одного часткового критерію. При цьому, по визначенню, ефективне рішення обов'язково належить області компромісів. Це означає, що задача багатокритеріальної оптимізації

$$x^{\circ} = \arg \underset{x \in X}{extr} < k_j(x) >, \forall j = \overline{1,n}, \qquad (9)$$

не має рішення, тобто є некоректною по Адамару, оскільки в загальному випадку не забезпечує визначення єдиного оптимального рішення із множини компромісів X^C.

Таким чином, перед дослідником виникає задача багатокритеріальної оптимізації.

Предметом теорії багатокритеріальної оптимізації є розробка теоретичних і обчислювальних засобів, що дозволяють знаходити ефективне рішення.

Основна ідея методів рішення багатокритеріальної задачі прийняття рішень полягає у виробленні деякої процедури, що дозволяє вибрати єдине рішення з області компромісів X^C. Можливі два підходи до реалізації такої задачі: евристичний, коли вибір рішень здійснює ОПР на основі свого досвіду, і формальний, заснований на деяких формальних правилах (схемах компромісу).

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 11
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Синтез моделі формування узагальненого критерію»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.
Час проведення: 80 хвилин.
Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.
Мета лекції: визначити особливості формування багатокритеріальних оцінок.

.

Загальні методичні вказівки

1. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
2. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
3. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Формування багатокритеріальних скалярних оцінок	40 хв.
2. Методи прийняття рішень при багатьох критеріях	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Кини Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Л.Кини, Х. Райфа. − М.: Радио и связь, 1981.
2. Р.Штойер Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления, приложения / Р. Штойер. − М.: Радио и связь, 1992.
3. Петров Е.Г. Методи і засоби прийняття рішень у соціально-економічних системах: Навч. посібн. / Е.Г. Петров, М.В. Новожилова, І.В. Гребеннік. – К.: Техніка, 2004. – 256 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 ФОРМУВАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ СКАЛЯРНИХ ОЦІНОК

Теоретичною основою формування багатокритеріальних скалярних оцінок є теорія корисності, яка припускає існування кількісної оцінки переваги рішень. Це означає, що якщо рішення $x, y \in X$ і $x \succ y$ (x переважніше y), те P(x) > P(y), де P(x), P(y) - функції корисності. У загальному випадку справедливо й зворотне твердження.

При цьому виникає задача обґрунтування правила (метрики), по якому формується функція корисності в просторі часткових критеріїв $k_i(x)$

$$P(x) = G\,[\,k_i(x)\,],\ \ i = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Принциповим є те, що об'єктивної метрики не існує, а принцип ранжирування рішень відбиває переваги конкретної особи, що приймає рішення (ОПР). У такий спосіб теорія корисності й вибір конкретного виду функцій корисності (оператора G) носить аксіоматичний характер, причому аксіоматика відбиває переваги конкретного ОПР. У зв'язку із цим може виникнути сумнів у доцільності реалізації конструктивного підходу, але слід урахувати, що формалізація процесу ранжирування рішень по-перше, допомагає ОПР усвідомити свої переваги (провести інтроспективний аналіз) або ідентифікувати їх якими-небудь методами, а по-друге, після вибору метрики оцінка всіх $x \in X$ проводиться в одному базисі, ця оцінка кількісна, а не якісна, процедура оцінки може реалізуватися без участі ОПР у тому числі й за допомогою ЕОМ, і її можна поширити на різні подібні ситуації.

Розглянемо системологичні підстави вибору метрики функції корисності.

Вибір конкретного виду функції корисності припускає, що ОПР розташовує більш-менш повною інформацією про "важливість" приватних критеріїв. Це означає, що формула (1) може бути записана у вигляді

$$P(x) = F\,[\,\lambda_i, k_i(x)\,],\ \ i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

де λ_i - оцінка важливості частки i-го критерію;

F - оператор, що визначає вид залежності.

Широко відомі дві форми функції корисності: адитивна

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ k_i(x) \qquad (3)$$

і мультиплікативна

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i\ k_i(x). \qquad (4)$$

Очевидно, що самої інформативної є ситуація, коли λ_i задані у вигляді чисельних значень. Тому що λ_i в цьому випадку є константами, те (4) можна представити у вигляді

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{i=1}^{n} k_i(x), \qquad (5)$$

звідки видне, що мультиплікативна форма не дозволяє врахувати інформацію про перевагу (важливості часткових критеріїв),

тому що $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ є постійним масштабним множником,

а отже всі критерії стають рівнозначними, що не відповідає вихідній інформації. Тому надалі будемо розглядати адитивну форму функції корисності (3).

Розглянемо цю форму більш докладно. Усі часткові критерії описують різні властивості системи, її елементи й відносини, а отже в загальному випадку мають різну розмірність, інтервали зміни, шкали виміру, тобто не порівнянні між собою.

Таким чином, формула (3) коректна тільки в тому випадку якщо λ_i враховують не тільки важливість часткових критеріїв, але і є коефіцієнтами ізоморфізму, тобто приводять різнорідні k_i до єдиних розмірності й інтервалу зміни. Прикладом такого коефіцієнта ізоморфізму є ціна, яка дозволяє привести до вартісного вираження деякий набір різнорідних товарів. Однак, у загальному випадку, визначення значень таких коефіцієнтів ізоморфізму утруднене. Ця обставина можна подолати якщо представити адитивну функцію корисності у формі

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, k_i^{H}(x), \qquad (6)$$

де a_i - відносні вагові коефіцієнти, для яких виконуються обмеження

$$0 \le a_i \le 1,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \qquad (7)$$

$k_i^{H}(x)$ - нормалізовані, тобто наведені до ізоморфного виду часткові критерії.

Модель оцінювання (6) слушна тільки в тому випадку якщо вагові коефіцієнти часткових критеріїв a_i задані точними кількісними значеннями. Як ми вже відзначали вище, носіями цієї інформації є ОПР, тому необхідні деякі процедури її одержання від них. По різних причинах одержання точної кількісної інформації про a_i не завжди можливо, тому в загальному випадку оцінювання доводитися робити в умовах більшої або меншої невизначеності про взаємну важливість часткових критеріїв.

У цьому випадку загальна модель визначення узагальненої корисності рішення $x \in X$ має вигляд

$$P(x) = F\,[\,J(a_i), k_i(x)\,], \quad i = \overline{1,n}, \qquad (8)$$

де $J(a_i)$ - інформація про взаємну важливість часткових критеріїв. Полярними ситуаціями є випадки, коли a_i задані у вигляді точних кількісних значень і коли інформація про перевагу часткових критеріїв повністю відсутня. Усі інші ситуації перебувають усередині цього інтервалу.

Таким чином, виникає проблема синтезу моделі оцінювання більш загальної чому адитивна функція корисності виду (6). Синтез такої моделі вимагає розв'язку наступних задач:

- нормалізації, тобто приведення до ізоморфного виду всіх часткових критеріїв $k_i(x)$;

- розробки методів параметричної ідентифікації моделі, тобто методів одержання від ОПР інформації про коефіцієнти взаємної важливості часткових критеріїв a_i;

- визначення структури моделі, тобто ідентифікації виду оператора F, що означає визначення принципу формування функції корисності (8).

2 МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ БАГАТЬОХ КРИТЕРІЯХ

Різні методи прийняття рішень при багатьох критеріях відрізняються способом перехід до скалярної оцінки корисності альтернатив. Можна умовно виділити ряд груп таких методів.

До першої групи можна віднести так звані аксіоматичні методи. У них визначається ряд властивостей, яким повинна задовольняти залежність загальної корисності альтернативи від оцінок по окремих локальних критеріях. Ці властивості (називані аксіомами) перевіряються шляхом одержання інформації від ЛПР. Відповідно до цієї інформації робиться висновок про ту або іншій формі залежності.

Друга група - прямі методи, у яких залежність корисності альтернативи від оцінок за окремими критеріями відома заздалегідь. Найчастіше використовується вид залежності, при якому визначаються чисельні показники важливості критеріїв (ваги), множені на оцінки за критеріями (метод зваженої суми оцінок критеріїв). З інших прямих методів випливає згадка про дерева рішень. Шляхом послідовного перегляду всіх варіантів вибору (наприклад, будувати ДПРЧ за схемою А або за схемою Б; при схемі А: будувати відділ за схемою В або за схемою Г и т. буд.) визначаються альтернативні варіанти рішень. Для кожного альтернативного варіанта підраховуються ймовірності здійснення, які множаться на його цінність (у деякому еквіваленті).

У третю групу можна виділити методи компенсації. У них намагаються зрівноважити (компенсувати) оцінки однієї альтернативи оцінками іншої, щоб знайти, які оцінки краще. По ідеї це найбільш простий метод, при якому людина виписує гідності й недоліки кожної з альтернатив і, викреслюючи попарно еквівалентні гідності (недоліки), вивчає те, що залишилося.

Четверта група - методи порогів незрівнянності, де задається деяке правило порівняння двох альтернатив (наприклад, оцінки першої по більшості критеріїв краще) і, потім, відповідно до цього правила альтернативи діляться (попарно) на порівнянні (одна краще іншої або еквівалентні) і непорівнянні. Змінюючи відношення порівнянності, одержуємо різне число пар порівнянних альтернатив.

І нарешті, до п'ятої групи можна віднести людино - машинні методи застосовувані в тому випадку, коли модель проблеми оцінювання альтернативних рішень відома частково. Людина взаємодіє з ЕОМ, визначаючи бажані співвідношення між критеріями.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 12
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Вимірювання та шкалювання часткових критеріїв»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.
Час проведення: 80 хвилин.
Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.
Мета лекції: визначити особливості вимірювання і шкалювання часткових критеріїв.
.

Загальні методичні вказівки

1. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
2. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
3. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Вимір і шкалювання часткових критеріїв	40 хв.
2. Опис функції корисності часткових оцінок	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Кини Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Л.Кини, Х. Райфа. − М.: Радио и связь, 1981.
2. Р.Штойер Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления, приложения / Р. Штойер. − М.: Радио и связь, 1992.
3. Петров Е.Г. Методи і засоби прийняття рішень у соціально-економічних системах: Навч. посібн. / Е.Г. Петров, М.В. Новожилова, І.В. Гребеннік. – К.: Техніка, 2004. – 256 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 ВИМІР І ШКАЛЮВАННЯ ЧАСТКОВИХ КРИТЕРІЇВ

По визначенню, у якості вихідної інформації задачі прийняття рішень задана припустима множина альтернатив (рішень) X. На цій множині необхідно встановити відношення порядку. У зв'язку із цим виникає необхідність оцінки "якості" розв'язків $x \in X$.

Оцінка "якості" альтернативи повинна враховувати дві групи факторів: властивості системи, які відбивають ступінь досягнення її мети, і витрати на її створення й функціонування, що залежать від конкретного набору елементів і відносин (структури). Обидві групи функціонально взаємозалежні, тому будемо вважати, що кожна конкретна альтернатива $x \in X$, характеризується деяким набором n факторів $f_i, i = \overline{1, n}$, називаними емпіричними, що досить повно описують її "якість". Вибір конкретного набору емпіричних факторів залежить від предметної області, специфіки ситуації, цілей аналізу і т.д. Тому методологія формування багатофакторної оцінки "якості" повинна бути інваріантної кількості й конкретному набору локальних факторів, що характеризують альтернативу.

Можливі два підходи до формування відносини порядку на множині припустимих альтернатив: відношення якісного порядку (ранжирування альтернатив по перевазі) і відношення кількісного порядку, що передбачає зіставлення кожному конкретному набору емпіричних факторів, що характеризує альтернативу, кількісної скалярної оцінки. Другий підхід є більш загальним, тому що крім порядку дозволяє вказати й "відстань" між альтернативами, дати кількісну оцінку ступеня переваги. Теоретичною базою цього підходу, як ми вже відзначали в першому розділі, є теорія корисності.

Головною умовою реалізації кількісного підходу є приведення всіх емпіричних факторів, не залежно від їхньої природи, до виду, що допускає кількісну скалярну оцінку $\varphi:\ f_i \rightarrow E^1$. Такі формалізовані фактори надалі будемо називати і-мі частковими критеріями k_i й позначати $k_i,\ i = \overline{1, n}$.

Труднощі такої формалізації (формування часткових критеріїв) пов'язана з тим, що в загальному випадку фактори f_i, що характеризують альтернативу, можуть мати різну природу й виникає проблема їх виміру.

Під виміром емпіричної ознаки (фактору) розуміється побудова шкал за допомогою ізоморфного відображення емпіричної системи з відносинами в чисельну систему з відносинами.

Позначимо множину розглянутих об'єктів буквою X. Кожний об'єкт заданий своїми значеннями ознак. Під ознакою f при цьому розуміється відображення $f: X \rightarrow B_f$, що ставить у відповідність кожному об'єкту $x \in X$ його значення f(x), що належить множині значень B_f ознаки f.

Множина значень B_f може мати різну природу. Структура співвідношень між значеннями ознаки, що характеризує можливості їх порівняння, відбиває тип ознаки. У найпростішому випадку значення ознаки можна розглядати просто як різні букви деякого алфавіту. Ці значення для різних об'єктів або збігаються, або різняться; ніякі більш тонкі співвідношення між значеннями не зафіксовані. Такі, наприклад, ознаки "стать" або "професія". У цьому випадку ознака називається номінальним або класифікаційним (часто говорять, що ознака обмірювана в шкалі найменувань). Така ознака дає лише нічим не зв'язані імена об'єктам (наприклад: чоловік, жінка), або задає тільки угруповання, або класифікацію, множини X, що полягає із груп об'єктів з однаковими іменами (значеннями) ознаки, не задаючи на них відношення переваги (домінування).

У багатьох випадках значення ознаки зв'язані природнім упорядкуванням по ступеню прояву, що виражається їм властивості. Наприклад, "дуже подобається", "подобається", "однаково", "не подобається", "дуже не подобається". Якщо ніякі інші співвідношення між значеннями ознаки не зафіксовані, то ознака називається ранговим або порядковим. Така ознака задає впорядковану по ступеню прояву властивості, тобто відповідно до впорядкованості значень ознаки, угруповання об'єктів, установлюючи на них відношення якісного порядку.

Таким чином, слід розрізняти спрямовані й ненаправлені шкали порядку, хоча б змістовно, як шкали домінування й подібності.

Якщо для значень ознаки осмислена операція порівняння (на або в скільки раз одне значення більше іншого), то ознака є кількісною. Інакше кажучи, множина значень кількісної ознаки наділене структурою числової осі.

Типізація шкал ознак і свідомість порівняння їх значень заснована на виставі ознаки сімейством відображень (а не єдиним відображенням) множини об'єктів у множину речовинних чисел. У цій теорії вважається, що значення ознак - числові, тобто для будь-якого f: $X \rightarrow B_f$ множина B_f - числове. Обмеження спільності не відбувається, тому що елементи множини B_f, що має потужність, невелику континууму, можна закодувати числами. При цьому відносини між значеннями ознаки повинні перейти у відповідні числові відносини: "і еквівалентно j" ($i \sim j$) - у відношення рівності ($i = j$); "і гірше j" ($i \prec j$) - у відношення "менше" ($i < j$) і т.п. Ознака, як відображення, задається разом із множиною своїх припустимих перетворень, а саме, фіксується множина Ф числових перетворень, значень, що не змінюють інформацію про перевагу, ознаки. Точніше кажучи, ознака задається не тільки відображенням f: $X \rightarrow B_f$, але й усілякими відображеннями виду φf, де $\varphi \in \Phi$. Нагадаємо, що для будь-якого об'єкта $x \in X$ значення $\varphi f(x)$ визначається як результат послідовного застосування обох перетворень: $\varphi f(x) = \varphi(f(x))$.

Якщо зрівняти сказане вище з визначенням функції корисності, то очевидний їхній взаємозв'язок. Формування оцінки фактору в будь-якій кількісній шкалі, тобто перетворення φ є по суті функцією корисності, що оцінює кількісно перевага значення фактору, а множина перетворень Ф являє собою множина різних функцій корисності.

Множина припустимих перетворень Ф характеризує тип шкали ознаки. Для множин, що часто зустрічаються, Ф прийняті спеціальні найменування. Якщо Ф складається із усіх перетворень, шкала називається номінальної, якщо Ф складається із усіх монотонно зростаючих перетворень, шкала називається рангової або порядкової. Серед кількісних шкал можна виділити наступні три типи. Шкала називається: інтервальною, якщо Ф складається із усіляких позитивних лінійних функцій виду $\varphi(f) = af + b$ ($a > 0$, b - кожне); шкалою відносин або подоби, якщо Ф складається з перетворень подоби виду $\varphi(f) = af$ ($a > 0$); абсолютної, якщо Ф складається з єдиного тотожного перетворення $\varphi(f) = f$.

Розглянуті типи шкал разом з визначальними їхніми класами припустимих перетворень представлено в таблиці 1.

Коротко обговоримо названі типи шкал. Усі шкали можна розділити на два класи: якісні й кількісні.
До якісних ставляться шкали найменувань (номінальна) і порядкова (рангова). Особливістю цих шкал є те, що вони в принципі не містять інформацію про домінування значень ознак і отже у вихідному виді не можуть бути використані для ранжирування альтернатив. Якісні шкали можуть бути використані тільки в тому випадку, якщо є додаткова інформація про домінування значень ознаки, а не просто про угруповання об'єктів.

Таблиця 1-вимірювальні шкали

Клас шкали	Тип шкали	Відношення порядку	Інформація про домінування	Тип перетворення Ф

Якісні	найменувань (номінальна)	не задане	відсутня	взаємооднозначні
	рангова (порядкова):			
	- ненаправлена	задане	відсутня	монотонно-зростаюче або спадаюче.
	- спрямована	задане	відсутня	монотонно-зростаюче
Кількісні	абсолютна	задане	кількісна	$\varphi(f) = f$
	відносин (подоби)	задане	кількісна	$\varphi(f) = af$ a>0
	інтервальна	задане	кількісна	$\varphi(f) = af + b$ a>0 b - будь-яке

На відміну від кількісних оцінок, що відповідають, як правило, об'єктивним вимірам показників, експертні оцінки, звичайно, характеризують суб'єктивні думки фахівців і найчастіше проводяться в бальних шкалах.

Значення (градації) бальної шкали являють собою обмежений, дискретний ряд чисел, що відстоять друг від друга на однаковій відстані. Звичайно при експертних оцінках у якості значень шкали беруть початковий відрізок натурального ряду або частина ряду цілих чисел, симетричну щодо нуля (0; ± 1; ± 2; ..., $\pm m$).

Приклад бальної оцінки - загальновідомі шкільні оцінки в п'ятибальній шкалі із градаціями (оцінками) 1, 2, 3, 4, 5.

Розглянемо кількісні шкали: інтервальну, відносин (подоби) і абсолютну.

В інтервальній шкалі конкретне лінійне перетворення $\varphi(f) = af + b$ ознаки f визначається вибором двох констант: a і b. Одна з них, $b = \varphi(0)$, характеризує нове місце розташування нуля, тобто крапку відліку, інша - масштаб. Усякий числовий інтервал (x, y) перетвориться в a раз переважаючий його інтервал ($\varphi(x)$, $\varphi(y)$); $\varphi(x) - \varphi(y) = a(x-y)$. У шкалі інтервалів відношення інтервалів між будь-якими значеннями залишається незмінним при будь-якому припустимому перетворенні: кожний міняється в одне й теж число a раз. Приклад шкали інтервалів - шкала виміру часу.

У шкалі подоби початок відліку не міняється: $\varphi(f) = af$, так що $b = 0$. Ознака, обмірюваний у цій шкалі, визначений з точністю до масштабу, як, наприклад, "маса", "довжина" і т.п.

В абсолютній шкалі виміряються кількості об'єктів.

Зустрічаються й інші типи кількісних шкал, наприклад, з $\varphi(f) = e^{af}$ $(a > 0)$. Логарифмуванням ця шкала зводиться до шкали відносин. До кількісних шкал природно відносити такі, у яких припустимі перетворення визначаються кінцевим числом кількісних параметрів.

Розглянемо унікальний клас ознак, множина значень кожного з яких полягає всього із двох елементів. Такі ознаки називаються дихотомічними, бульовими або бінарними.

Множина всіх взаємне однозначних перетворень дихотомічних ознак збігається із множиною лінійних перетворень. Дійсно, взаємно однозначна відповідність двох конкретних значень x_1, x_2, загалом кажучи, двом іншим значенням - y_1, y_2, може бути задано як лінійне з параметрами a і b, що задовольняють співвідношенням $y_i = ax_i + b$ (i = 1,2), які при $x_1 \neq x_2$ однозначно розв'язні відносно a і b; причому при $a \neq 0$ випливає $y_1 \neq y_2$. Це означає, що номінальна дихотомічна ознака насправді обмірювана в ненаправленій шкалі інтервалів. Аналогічно доводиться, що ранговий (по домінуванню) дихотомічна ознака насправді обмірювана в спрямованій шкалі інтервалів.

У такий спосіб якісні дихотомічні ознаки одночасно є кількісними.

Числове твердження є осмисленим (у загальній теорії вимірів використовується термін адекватність [63, 66]), якщо його істинність (хибність) не змінюється при будь-якому припустимому перетворенні вхідних у нього чисел. Тут мова йде саме про свідомість числових тверджень ("менше", "більше" і т.п.), а не числових операцій ("+", "∗ " і т.д.).

Питання про множину припустимих перетворень даного ознаки, тобто про тип даної шкали, досить складний. Допустимість перетворення конкретної ознаки визначається тими теоретичними закономірностями, у яких він бере участь. Перетворення припустиме, якщо закономірності не порушуються. У відповідності з усім сказаним вище, можна відзначити, що перетворення ознаки (або, більш загально, усієї сукупності даних) припустиме, якщо воно не міняє отриманих по цій сукупності описів.

2. ОПИС ФУНКЦІЇ КОРИСНОСТІ ЧАСТКОВИХ ОЦІНОК

Для комплексного аналізу даних, наприклад, для встановлення відносин порядку (ранжирування) множини альтернатив необхідний перехід до одному типу даних, числовому або якісному. У цей час не розроблені підходи до комплексного аналізу даних без такого переходу. Тому надалі вважаємося, що всі емпіричні характеристики альтернатив обмірювані або наведені шляхом експертних оцінок до чисельного виду. Такі кількісні оцінки параметрів альтернативи $x \in X$ будемо називати частковими критеріями й позначати $k_i(x)$, $i = \overline{1, n}$. Часткові критерії утворюють множина $K = \{k_1(x), ..., k_n(x)\}$ оцінок. При цьому його структура однакова для всіх $x \in X$, тобто передбачається, що задане відображення $\varphi: x \to K$. Таким чином, усі альтернативи $x \in X$ у принципі порівнянні між собою.

Вистава всіх емпіричних характеристик у вигляді чисельних критеріїв не вичерпує всіх труднощів ранжирування множини альтернатив, що належать множині Парето. На множині суперечливих альтернатив (області компромісів) ранжирування пов'язане з формуванням деякої узагальненої скалярної оцінки, що враховує всі частки критерії (оцінки) і формализує вистави ОПР про перевагу альтернатив. Побудова такої скалярної оцінки можливо в рамках теорії корисності.

У цей час зложилося два основні підходи до реалізації процедури багатокритеріального оцінювання:

- синтез єдиної узагальненої оцінки;

- проведення ранжирування на основі реалізації послідовності однокритеріальних оцінок. В обох випадках одна із труднощів конструктивної реалізації полягає в тому, що в загальному випадку критерії $k_i(x)$ мають різний сенс, розмірність, інтервал і шкали виміру, тобто не порівнянні між собою. Тому спочатку їх необхідно привести до деякого загального базису (ізоморфному виду). При цьому це приведення повинне бути однотипним для всіх критеріїв, не залежати від їхнього змісту й відбивати вистава ОПР про перевагу різних значень оцінки. Отже, така базова оцінка може бути інтерпретована як якась функція корисності часткових критеріїв р[$k_i(x)$], де р: $k_i(x) \rightarrow E^1$, $i=\overline{1,n}$. Обґрунтуємо вибір виду функції р.

Бажане, щоб функція корисності часткових критеріїв була універсальної й добре пристосованої для обліку особливостей конкретних систем, їх цілей і критеріїв. Для цього вона повинна відповідати наступним вимогам: мати єдиний інтервал зміни [0; 1]; бути безрозмірної й інваріантної до виду екстремуму часткового критерію (мінімум або максимум). Останнє означає, що незалежно від виду екстремуму, його найкращому значенню на множині X повинне відповідати максимальне (рівне 1), а найгіршому - мінімальне (рівне 0) значення функції корисності. Крім того, функція корисності приватного фактору повинна дозволяти реалізувати як лінійні, так і нелінійні неубутні опуклі нагору або вниз залежності корисності від абсолютного значення фактору.

Задача вибору функції корисності, що відповідає зазначеним вище вимогам відома в теорії багатокритеріального оцінювання й оптимізації як задача нормалізації часткових критеріїв. При її розв'язку передбачається за замовчуванням, що залежність корисності від абсолютного значення приватного критерію завжди лінійна й вибір функцій корисності здійснюється із класу лінійних функцій. Найчастіше використовуються кількісна інтервальна шкала, якої відповідає перетворення виду:

$$p(k_i) = b_i\, k_i(x) + c_i, \qquad (1)$$

де $b_i > 0$, c_i - будь-які. Це можна пояснити тим, що задача нормалізації часткових критеріїв розглядається формально як задача вторинного шкалювання (вибір єдиної шкали для всіх часткових критеріїв), а не як задача формалізації інформації про ступінь домінування альтернатив або переваг ОПР. В останньому випадку перераховані вище традиційні вимоги до функції корисності повинні бути доповнені вимогою того, що вона повинна дозволяти реалізовувати поряд з лінійними, монотонні, опуклі нагору й униз нелінійні залежності.

Кожна альтернатива $x \in X$ характеризується декількома частковими критеріями, які мають свій інтервал і "область" виміру. Тому конкретна система може описуватися нелінійностями різного типу. Це необхідно врахувати при виборі виду функцій корисності часткових критеріїв.

Усім перерахованим вимогам відповідає функція корисності виду:

$$p_i[k_i(x)] = \left(\frac{k_i(x) - k_{інх}}{k_{інл} - k_{інх}} \right)^{\alpha_i}, \qquad (2)$$

де $k_i(x)$ - значення часткового критерію;

$k_{інл}$, $k_{інх}$ - відповідно найкраще й найгірше значення часткового критерію, яке він ухвалює на області припустимих розв'язків $x \in X$. Залежно від виду екстремуму (напрямку домінування)

$$k_{інл} = \begin{cases} \max\limits_{x \in X} k_i(x), \text{ если } k_i(x) \rightarrow \max \\ \\ \min\limits_{x \in X} k_i(x), \text{ если } k_i(x) \rightarrow \min \end{cases}, \qquad (3)$$

$$k_{iнх} = \begin{cases} \min\limits_{x \in X} k_i(x), \text{ если } k_i(x) \to \max \\ \\ \max\limits_{x \in X} k_i(x), \text{ если } k_i(x) \to \min \end{cases}. \qquad (4)$$

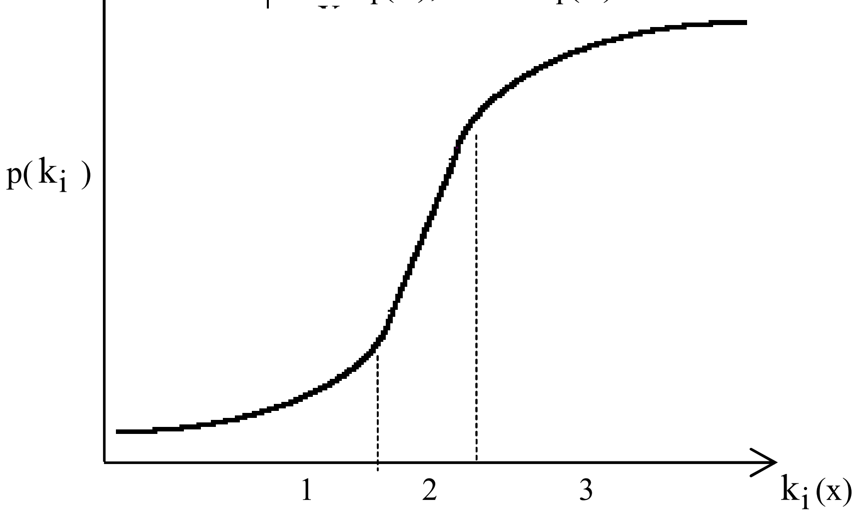

Рис. 1 - Залежність корисності від абсолютного значення часткового критерію

Параметр α_i визначає вид залежності: при 0 < α_i < 1 - опукла нагору; при α_i = 1 - лінійна; при α_i > 1 - опукла вниз, відповідно. Характер залежності при різних α_i показано на рис. 1.

У зв'язку з тим, що на обмеженій множині альтернатив $X\, k_{iнл}$, $k_{iнх}$ - є константами, функція корисності (2) може бути записана у вигляді

$$p_i[k_i(x)] = [b_i k_i(x) - c_i]^{\alpha_i}, \qquad (5)$$

де $b_i = 1/(k_{iнл} - k_{iнх})$, $c_i = k_{iнх}/(k_{iнл} - k_{iнх})$.

Таким чином, обрана функція корисності часткових критеріїв є зростаючою-зростаючій-монотонно-зростаючої нелінійною шкалою з адаптованими до конкретної ситуації параметрами b_i, c_i, α_i. Причому при α_i = 1 вона перетворюється в інтервальну шкалу.

Усі часткові критерії, незалежно від того в якій шкалі вони обмірювані повинні бути перетворені в шкалу (5). Ця процедура не викликає утруднень якщо частковий критерій $k_i(x)$ обмірюваний у кожній з кількісних шкал: абсолютної, відносної або інтервальній. Ці шкали містять об'єктивну, кількісну (з точністю до точності виміру) інформацію про значення критерію, інтервалі його можливої зміни, максимальному й мінімальному значеннях, напрямку домінування. Ця інформація дозволяє по формулі (5) обчислити об'єктивні значення коефіцієнтів b_i і c_i. ОПР повинен установити тільки силу переваги різних значень критерію, визначити характер залежності корисності від абсолютних значень критерію, тобто призначити значення параметра α_i.

Відзначимо, що можлива ситуація, коли на інтервалі можливої зміни оцінного фактору (критерію) задано два напрямки домінування. Наприклад, проводиться оцінка якості джерела електропостачання й у якості приватного критерію розглядається стабільність напруги на виході джерела. Очевидно, що найкращим ($k_{iнл}$) буде номінальна напруги, а відхилення як у більшу, так і меншу сторону небажані.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 13
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Задача прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.

Час проведення: 80 хвилин.

Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.

Мета лекції: визначити особливості задачі прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності.

.

Загальні методичні вказівки

1. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
2. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
3. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Види невизначеності	40 хв.
2. Задача прийняття рішень в умовах невизначеності	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Федорович О. Е. Методы и модели принятия решений при управлении сложными производственными компаниями / О. Е. Федорович, Н. В. Нечипорук, А. В. Прохоров. – Харьков: Из-во «ХАИ», 2005. – 235 с.
2. Таха Х. А. Введение в исследование операций: [пер. англ.] / Х. А. Таха. – М. : ИД «Вильямс», 2001. – 912 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 ВИДИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

В умовах широкого і інтенсивного впровадження обчислювальної техніки як інструменту автоматизації інтелектуальної діяльності, формалізація процесів прийняття рішень багато в чому визначає перспективи розвитку автоматизованих інформаційно –управляючих систем, міру їх ефективності і інтелектуалізації. Більшість досліджень по проблемах прийняття рішень присвячена аналізу і обґрунтуванню принципів і критеріїв прийняття рішень в умовах детермінізму , тобто в умовах, коли всі функціональні залежності і параметри системи, для яких ухвалюються рішення, однозначно визначені.

Разом з цим існує великий клас систем, наприклад підприємства, установи, функціонування яких в сучасних умовах проходить нестаціонарно, високодинамічно, з погано прогнозованою динамікою розвитку, тобто систем, для яких характерний високий ступінь невизначеності початкових даних.

Очевидно, перша спроба прийняття рішень в умовах невизначеності булла зроблена Яковом Бернуллі (1654-1705) в його книзі «Искусство предположений». Саме на принцип недостатньої підстави Я. Бернуллі (який свідчить, що якщо розподіл ймовірності станів природи невідомий, то немає причин вважати їх різними) спирається критерій Байєса-Лапласа.

Можливо, найбільший внесок в розвиток теорії прийняття рішень в умовах невизначеності вніс А. Вальд. Відзначимо також роботи Севіджа, Гурвіца, Ходжа-Лемана. Найважливіше поняття теорії прийняття рішень в умовах невизначеності, а саме «оптимальність по Парето», було введено італійським економістом і соціологом Вільфредо Парето(1848-1923).

Завдяки роботі Л. Заде «Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений» (1973), невизначеність більше не розглядається як деяка зовнішня перешкода в поведінці складної системи, а трактується як її

невід'ємна характеристика.

У роботі Л. Заде ввів клас множин з неточно визначеними межами – клас нечітких множин («Fuzzy Sets»). Ризик почав досліджуватися в основному у зв'язку з комерційною і управлінською діяльністю, біржовою грою, прибутком тощо.

Дж. М. Кейнс обґрунтував ідею, що у вартість товару повинні входити можливі витрати, спричинені непередбаченими обставинами.

На його думку, в економічному житті доцільно враховувати три основні види ризику:

– ризик підприємця;
– ризик кредитора;
– зменшення вартості грошової одиниці.

У класичній теорії ризику (Дж. Милль, Н. І. Сеніор) ризик визначається як збиток, який завдається здійсненням вибраного рішення.

У30-ті роки А. Маршалл і А. Пігу розробили неокласичну теорію ризику. По ній підприємство, що працює в умовах невизначеності, повинне керуватися двома критеріями:

– розмірами очікуваного прибутку;
– величиною її можливих коливань.

Угорські економісти Т. Бачкаї, Д. Мессен та інші бачать ризик в можливості відхилення від мети,заради якої ухвалюється рішення.

Серед дослідників немає єдиної думки щодо визначення ризику.

Його визначають як збиток, недоотримання прибутку, діяльність по зняттю невизначеності.

Ризик найбільш пов'язаний з прийняттям рішень.

Тому його вивченню приділяється велике значення.

Можна виділити два основні види невизначеності:

Структурну, коли не визначений вид критерію ефективності, число часних критеріїв, їх взаємозв'язок тощо, і параметричну, коли не визначені параметри моделі, наприклад, вагові коефіцієнти критерію ефективності, або параметри обмежень, що визначають область допустимих розв'язків X.

Тому при синтезі систем управління в умовах невизначеності виникають проблеми структурної і параметричної ідентифікації моделі.

Синтез системи прийняття рішень при управлінні такими системами, як підприємство, в умовах невизначеності розпадається на такі задачі:

– синтез моделі прийняття рішень;

– обґрунтування і розробка методів і засобів прийняття рішень (ефективних, оптимальних, компромісних) з урахуванням особливостей моделі, які можуть полягати в точності, ефективності, визначеності структури і параметрів.

У свою чергу, задача синтезу моделі розпадається на підзадачі:

– синтезу структурно-параметричного багатокритеріального цільового функціоналу (синтез функціоналу багатофакторного оцінювання);

– ідентифікації параметрів обмежень, що визначають область допустимих розв'язків X;

– структурно-параметрична ідентифікація моделі зовнішнього середовища.

Параметрична невизначеність у загальному вигляді є обмеженим інтервалом можливих значень параметра.

Межі можуть бути чіткими, заданими чисельно з різним ступенем точності, і нечіткими, заданими лінгвістичними змінними.

В даний час розвинена теорія управління для випадків, коли модель управління детермінована, а зовнішні дії є фіксованими (математичне програмування) або детермінованими випадковими величинами (статистичні характеристики є точними детермінованими значеннями, тобто отримані на нескінченно великій статистичній вибірці).

Залежно від інформованості особи, яка приймає рішення (ОПР), інтервальну невизначеність можна класифікувати на ризики і невизначеність.

Ризики – це коли відомі імовірнісні характеристики моделі (функція щільності розподілу, математичне очікування, дисперсія).

Вони можуть бути детермінованими (точними, визначеними на дуже великій вибірці) або інтервальними (визначеними на обмеженій вибірці і заданими з довірчою вірогідністю).

Визначення вказаних статистичних параметрів ризику вимагає наявності представницької однорідної, тобто отриманої в незмінних умовах, статистичної вибірки. В умовах стійкості економіки (розвинені капіталістичні країни) це можливо.

В умовах економіки України, що розвивається, це практично неможливо по багатьом типам ризиків: зміни законів, зміни пріоритетів, політики центробанку тощо.

У цих умовах необхідно переходити від управління ризиками до управління невизначеностями, які можуть бути задані у вигляді інтервалів [min, max] значень.

При цьому інформація про розподіл значень в середині інтервалів не є об'єктивною (як у класичного ризику), а суб'єктивна, що генерується експертами у вигляді суб'єктивних функцій щільності розподілу, функцій приналежності розмитих множин, інтервальної невизначеності. Це викликає необхідність розвитку спеціальних, проблемно-орієнтованих на економіку, що розвивається, методів управління ризиками.

Невизначеність можна , у свою чергу, класифікувати на:

1) суб'єктивну інтервальну невизначеність, коли значення в середині інтервалу визначаються експертами на основі суб'єктивного неформалізованого досвіду (неформалізованої статистики).

Вони можуть бути точковими або інтервальними, заданими за допомогою нечітких множин, або суб'єктивного ризику, коли думки експертів розглядаються як випадкові значення, які суб’єктивно (евристично) апроксимуються деякою функцією щільності розподілу ймовірності;

2) об’єктивну інтервальну невизначеність, коли переваги в середині інтервалу відсутні.

Нині прийняття рішень управління в умовах інтервального ризику, суб’єктивній і об’єктивній інтервальній невизначеності перебувають у стадії становлення і є актуальною науковою проблемою.

Проблема управління в умовах детермінізму і в умовах детермінованого ризику (задачі дослідження операцій) традиційно розв’язується в рамках програмного, термінального управління із зворотнім зв’язком по відхиленню або збуренню.

Для цього визначаються точкові ризики (можливих зовнішніх збурень) і для них визначаються резервні ресурси, які використовуються для управління діями збурень або викликаних ними відхилень від планових траєкторій.

Управління стійким функціонуванням спрямоване на парирування збурюючих дій зовнішнього середовища і підтримку виконання функцій системи.

За рахунок цього управління забезпечується перерозподіл ресурсів в середині системи для досягнення цілей функціонування.

Задачі управління стійким функціонуванням можна розглядати як вид задач адаптивного оптимального управління «у великому», що припускає оптимальне використання на кожному етапі функціонування всіх ресурсів, які має в своєму розпорядженні система (трудових, енергетичних, інформаційних тощо) для досягнення головної на даному етапі мети при дотриманні безлічі обмежень.

Такий підхід орієнтований на термінальне управління і технологію «just in time» (JIT). В умовах невизначеності традиційні підходи вимагають значного резервування ресурсів і суттєво погіршують показники функціонування об’єкту.

Ресурсна надмірність є принциповим обмеженням такого підходу, що призводить до необхідності відмови від термінального управління і переходу до явного управління з нефіксованим кінцевим станом за часом.

2 ЗАДАЧА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

У реальних складних системах типу підприємства завжди присутньо декілька видів невизначеності, яка змінюється залежно від горизонту планування, тому необхідне універсальне гнучке управління – явно - програмне, таке, що адаптується до міри невизначеності.

Сформулюємо узагальнену постановку задачі прийняття рішень для підприємства в умовах ризику, інтервального ризику, суб’єктивної і об’єктивної невизначеності.

Проблема прийняття рішень у загальному випадку може бути структурована на наступні три основні етапи:

– формування безлічі допустимих розв'язків X;
– визначення метрики, в якій проводиться порівняння допустимих розв'язків $x \in X$ (задача оцінювання);
– вибір з допустимої множини ефективного (найкращого) розв'язку $x^0 \in X$ (задача оптимізації).

Множина допустимих розв'язків X задається на основі змістовного аналізу конкретної задачі, найчастіше в неявному вигляді як підобласть області існування системи, обмежена співвідношеннями у вигляді нерівностей

$$h_i(x, q_i) \leq 0; \; i = \overline{1, S} \tag{1}$$

і рівності

$$g_j(x, q_j) = 0; \; j = \overline{1, L}, \tag{2}$$

де x – N-мірна ($x \in R^N$) керована змінна; h_i, g_j – оператори, що визначають структуру математичної моделі відповідного обмеження; q_i, q_j – вектори кількісних параметрів відповідних обмежень.

Рішення задачі оптимізації, тобто визначення найкращого розв'язку $x^0 \in X$ пов'язане з формалізацією поняття «найкраще». Для цього необхідно визначити метрику, в якій проводиться порівняння якості розв'язків $x \in X$. Нехай у загальному випадку кожне розв'язання $x \in X$ описується n різними кількісними характеристиками (часними критеріями) $K_i(x), i = \overline{1, n}$. Вважатимемо, що на множині $\{K_i(x)\}$ існує модель оцінювання, що дозволяє отримати скалярну, кількісну оцінку будь-якого розв'язку $x \in X$ (функція корисності)

$$P(x) = G[a_i, K_i(x)], \tag{3}$$

де G – оператор моделі, що визначає її структуру; a_i – кількісні параметри моделі, наприклад коефіцієнти важливості приватних критеріїв: ціни тощо.

У загальному випадку (3) є функцією мети системи.

З урахуванням співвідношень (1)÷(3) задачу умовної оптимізації (математичного програмування) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & x^0 = \arg \underset{x \in X}{extr}\, P(x); \; x \in R^N; \\ & h_i(x, q_i) \leq 0; \; i = \overline{1, S}; \\ & g_j(x, q_j) = 0; \; j = \overline{1, L}. \end{aligned} \tag{4}$$

У традиційній постановці задача математичного програмування передбачає детермінованість об'єкту, а, отже, і математичної моделі (4), що означає визначеність структури і кількісних характеристик моделі на інтервалі планування. Це не виключає наявність більшої або меншої невизначеності та інформації про структуру і параметри моделі, яка відбивається в завданні параметрів у вигляді інтервалів можливих значень за допомогою статистичних характеристик або розмитими множинами.

Для підприємства як системи, що розвивається, характерна динамічна зміна в процесі функціонування структури, складу і кількісних значень параметрів, переваг цільових установок тощо.

Для них необхідно вибрати ефективну стратегію поведінки, тобто реалізувати задачу прийняття рішення. Проблема містить три задачі:

– синтез адекватної імітаційної математичної моделі системи;
– визначення цільового функціонала;
– вибір правила (алгоритму) прийняття рішення.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 14

з навчальної дисципліни

«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Імітаційна модель в умовах ризику та невизначеності»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.

Час проведення: 80 хвилин.

Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.

Мета лекції: визначити особливості імітаційної моделі в умовах ризику та невизначеності.

.

Загальні методичні вказівки

4. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
5. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
6. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Імітаційна модель в умовах ризику та невизначеності	40 хв.
2. Метод Монте-Карло	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

3. Федорович О. Е. Методы и модели принятия решений при управлении сложными производственными компаниями / О. Е. Федорович, Н. В. Нечипорук, А. В. Прохоров. – Харьков: Из-во «ХАИ», 2005. – 235 с.

4. Таха Х. А. Введение в исследование операций: [пер. англ.] / Х. А. Таха. – М. : ИД «Вильямс», 2001. – 912 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 ІМІТАЦІЙНА МОДЕЛЬ В УМОВАХ РИЗИКУ Й НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Для формування аналога матриці платежів, яка використовується в якості вихідної інформації при прийнятті розв'язків в умовах ризику й невизначеності традиційними методами необхідно:

- сформувати оптимальні опорні розв'язки;
- оцінити їхня чутливість і ефективність в умовах варіацій сценаріїв поведінки зовнішнього середовища.

А. Формування множини опорних розв'язків.

Припускаємо, що для розглянутої системи відома оптимізаційна модель, яка розглядалася на минулій лекції, яку для зручності подальшого аналізу представимо у вигляді

$$x^{\circ} = \arg \underset{x}{\text{extr}}\, F\ [a_i, k_i(x), y, t], x \in E_N, y \in E_M;$$

$$h_s(x, q_h, y, t) \le 0,\ s = \overline{1, S}; \qquad (1)$$

$$g_l(x, q_g, y, t) = 0,\ l = \overline{1, L}.$$

Цільова настанова на момент ухвалення рішення t_0 є незмінною й не залежить від сценарію поведінки зовнішнього середовища y(t). Це означає, що перелік керованих змінних x, структура цільової функції (оператор F) і склад приватних критеріїв $k_i(x),\ \ i = \overline{1, n}$ залишаються стабільними. У цьому випадку y(t) впливає на кількісні значення параметрів a_i, структуру й параметри моделей обчислення часткових критеріїв $k_i(x)$, тобто

$$a_i = f_a[y(t)];\ \ k_i(x) = f_k(x, y, t). \qquad (2)$$

Що стосується обмежень, то залежно від зовнішнього середовища можуть змінюватися структура обмежень, тобто вид операторів h_s, g_l, кількість обмежень, т.б. S і L, і значення параметрів $q_h,\ q_g$.

Наявність моделі системи (1) дозволяє визначити для кожного конкретного сценарію поведінки зовнішнього середовища $y_j(t)$, що $j = \overline{1, m}$ відповідає йому оптимальний розв'язок x_j°, який надалі будемо називати опорним. Відзначимо, що в окремому випадку y(t) може не залежати від часу на інтервалі $t \in [t_0, t_k]$, а бути постійним, наприклад, $y(t) = y(t_0)$.

Таким чином, визначення множини опорних розв'язків $x_j,\ \ j = \overline{1, m}$ пов'язане з формуванням вихідних сценаріїв поведінки зовнішнього середовища $y_j(t)$. Можливі два підходи до розв'язку цієї задачі:

- евристичний;
- формальний.

У першому випадку можливі конкретні сценарії поведінки зовнішнього середовища, їх кількість і параметри формуються експертами-аналітиками на інтуїтивному рівні, що не виключає використання на різних етапах попереднього аналізу формальних процедур. Другий підхід орієнтований на створення деяких більш-менш глибоко формалізованих процедур формування сценаріїв $y_j(t)$. Розглянемо більш докладно цей підхід.

Як ми вже відзначали, зовнішнє середовище є не повністю керованої й контрольованої навіть із позиції метасистеми, наприклад, держави в цілому. Тому стосовно будь-якої локальної системи вона може розглядатися як середовище з випадковими характеристиками. Будемо вважатися, що виконуються наступні досить природні гіпотези.

1. Зовнішнє середовище характеризується багатомірним вектором змінних $y = \{y_m\}$, $m = \overline{1, M}$, де кількість М и функціональний зміст змінної індивідуальні для кожної конкретної системи й задачі.

2. Компоненти y_m змінної у є взаємно незалежними. Очевидно, що існують групи залежних змінних.

У кожній такій групі виділяється базова змінна, але базові змінні вважаються незалежними.

3. Компоненти y_m випадкової змінної у можуть бути:

- випадковими подіями;
- випадковими величинами;
- випадковими функціями;
- детермінованими змінними.

У загальному випадку у є конкретною композицією зазначених типів змінних.

Крім того вважаємося, що для кожної з компонентів випадкової змінної у з більшою або меншою визначеністю відома інформація про статистичні параметри, наприклад, таких як імовірність появи випадкової події, закон розподілу ймовірностей, математичне очікування, дисперсія й т.п. Для кожного конкретного компонента зазначена інформація може бути

- задана точно;
- задана приблизно у вигляді інтервалів можливих значень або за допомогою лінгвістичних змінних (розмитих множин);
- невідома.

Для цих умов необхідно розробити алгоритм формування зміною y(t) зовнішнього середовища, що описує поведінка.

Очевидні труднощі реалізації евристичного підходу, що полягає в тому, що по кожному компоненту змінної у необхідно на основі аналізу відомої інформації вибрати рівні можливих значень і потім сформувати їхні різні комбінації. Більш перспективної є формалізована процедура формування можливих значень змінної Y. В основу синтезу такого алгоритму можна покласти ідеї методу Монте-Карло (статистичних випробувань).

2 МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Метод Монте-Карло є інструментальним засобом дослідження стохастичних систем. Його ідея полягає в тому, що на вході детермінованої математичної моделі формується випадкова реалізація вхідного впливу. Для цього вхідного впливу визначаються значення вихідних змінних, які, незважаючи на детермінізм основної моделі, є випадковими величинами в силу випадковості вхідних змінних. Багаторазове повторення описаної процедури моделювання дозволяє одержати вибірку випадкових значень вихідних змінних, на основі аналізу якої визначаються закон розподілу й статистичні параметри вихідного процесу.

У даній задачі випадковим входом детермінованої моделі (1) є багатомірна змінна $y \in E_M$ - сценарій поведінки зовнішнього середовища, а результатом моделювання - стану системи в момент часу t_k, який позначимо $x_k \in E_N$. Таким чином, задача формування опорних розв'язків однозначно може бути інтерпретована в термінах методу статистичних випробувань. Необхідно конкретизувати алгоритм формування випадкових реалізацій вектора y(t).

Загальна блок-схема формування опорних розв'язків x° показана на рис.1.

Рис. 1 - Блок-схема обчислення опорних розв'язків методом Монте-Карло

Блок 1. Інтерфейс користувача призначений для введення необхідної вихідної інформації й керування обчислювальним процесом. Перед початком обчислень користувач формує всю необхідну інформацію про якісні й кількісні характеристики моделі (1), структурі вектора вхідних змінних Y, закони розподілу й статистичні параметри його компонент і т.д. В окремому випадку користувач може безпосередньо сформувати й увести конкретну реалізацію вектора вхідних змінних, тобто реалізувати евристичну процедуру формування y(t).

Блок 2 являє собою бібліотеку алгоритмів формування конкретної реалізації компонент вектора вхідних змінних y(t). У якості таких компонентів можуть виступати випадкові події з неспільної групи, випадкові величини, розподілені за заданим законом з певними статичними параметрами, випадкові процеси, детерміновані значення й параметри, задані лінгвістичними змінними (розмитими множинами). Тому бібліотека містить підпрограми формування змінних із заданими характеристиками, якісні й кількісні значення яких зберігаються в блоці 3. Загальною ідеєю цих алгоритмів є перетворення випадкових чисел, розподілених за законом рівної ймовірності в інтервалі від 0 до 1. Джерелом таких чисел є датчик псевдовипадкових чисел (блок 4), що представляє собою детерміновану алгоритмічну процедуру. Ці алгоритми широко відомі й тут не розглядаються.

Блок 5 формує випадкову реалізацію вектора зовнішніх впливів y(t). Для цього послідовно за допомогою підпрограм з бібліотеки (блок 2) формування змінних реалізуються випадкові значення компонентів вектора y(t). Результуючий випадковий вектор надходить на вхід моделі (1) (блок 6) і в результаті моделювання визначається опорний розв'язок x°.

Аналіз загальної блок-схеми показує, що центральною ланкою розглянутого підходу є блок 2, тобто алгоритми формування конкретних реалізацій випадкових значень компонент вектора y(t). Формування альтернативних розв'язків x_k і оцінка їх якості.

Метою справжнього етапу є оцінка ефективності (стійкості) опорних розв'язків в умовах зміни сценарію поведінки зовнішнього середовища y(t).

У результаті реалізації попереднього етапу будуть визначено кілька опорних розв'язків x°. Кожне із цих оптимально в рамках коректності моделей (1) і конкретного сценарію y(t). Для простоти подальшого аналізу, але без втрати спільності, розглянемо один опорний розв'язок x°. Воно отримане для конкретної реалізації сценарію зміни характеристик зовнішнього середовища $y_0(t)$ й характеризується значеннями керованих змінних $x^\circ = \{x_v\}$, $v = \overline{1, N}$, які на інтервалі ухвалення рішення $t \in [t_0, t_k]$ по визначенню залишаються незмінними. У силу зазначеної вище нестабільності зовнішнього середовища реальний сценарій її змінюється, $y_k(t)$ буде відрізнятися від $y_0(t)$, тому розв'язок x° для умов $y_k(t)$ є неоптимальним. Необхідно визначити якісні й кількісні наслідки (необов'язково негативні) цієї неоптимальності. Для цього необхідно синтезувати математичну модель оцінки цих наслідків.

Аналіз математичної моделі (1) показує, що варіації сценарію y(t) можуть привести до наступних формальних наслідків.

1. Зміні цільового функціонала без зміни обмежень, що визначають область припустимих значень керованих змінних.

2. Трансформації обмежень при незмінному цільовому функціоналі.

3. Одночасній зміні цільового функціонала й обмежень.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 15

з навчальної дисципліни

«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Постановка задачі чисельного пошуку екстремуму»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.

Час проведення: 80 хвилин.

Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.

Мета лекції: визначити особливості задачі безумовної оптимізації та методів її вирішення.

Загальні методичні вказівки

7. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
8. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
9. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Задача безумовної оптимізації: основні поняття	40 хв.
2. Методи виключення інтервалів	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

5. Нефьодов Ю.М., Балицька Т.Ю.Методи оптимізації в прикладах і задачах: Навчальний посібник. –К.: Кондор, 2011. –324 с.
6. Зайченко Ю. П.Исследование операций. – К.: Вища шк., 1988.
7. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. Либідь. 1996. – 288 с.
8. Крылов В. И. и др. Численные методы . – М.: Наука, 1978. – 1979. – Т. 2. – 400 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 ЗАДАЧА БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ: ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ.

Теорію задач на пошук найбільших и найменших величин називають теорією екстремальних задач. Слово maximum на латині означає «найбільший», слово minimum – «найменший». Обидва ці терміни об'єднуються словом «екстремум» (extr).

Слово «екстремум», як термін, що об'єднує поняття «максимум» і «мінімум», ввів для вживання Дюбуа-Реймон.

Запис задачі в вигляді f(x) → extr значить, що ми повинні розв'язати задачу на мінімум і задачу на максимум.

Задачу на максимум завжди можна звести до задачі на мінімум, якщо замінити задачу f(x) →max на задачу [-f(x)]→min, тобто задача пошуку максимуму функції f(x) зводиться до задачі пошуку мінімуму шляхом зміни знаку перед функцією на протилежний:

$$f(x^*) = \max f(x) = -\min\left[-f(x)\right]$$

При вивчені будь-якого типу задач оптимізації важливе місце займає питання про умови оптимальності, або умови екстремуму.

Розрізняють необхідні умови оптимальності, тобто ті умови, яким повинна задовольняти точка, яка є розв'язком задачі і достатні умови оптимальності, тобто ті умови, із яких випливає, що саме ця точка є розв'язком задачі.

Цікавість до умов оптимальності пояснюється тим, що вони, по-перше, складають основу якісних методів теорії оптимізації, тобто методів, що направлені на вивчення властивостей екстремальних задач, по-друге використовуються при побудові і обґрунтуванні чисельних методів розв'язку цих задач, по-третє, дають можливість в простих випадках явно розв'язати задачу.

Або, іншими словами, в зв'язку з кожною екстремальною задачею виникають питання: які необхідні умови екстремуму, які достатні умови, чи існує розв'язок задачі і як знайти цей розв'язок - явно (аналітично) або чисельно.

Постановка задачі пошуку мінімуму функції однієї змінної містить:

- цільову функцію $f(x),\ x \epsilon R^1$
- множину допустимих рішень X, серед елементів якої здійснюється пошук мінімуму.

Потрібно знайти таку точку x^* із множини допустимих розв'язків, якій відповідає мінімальне значення цільової функції на цій множині

$$f(x^*) = \min_{x\in X} f(x) \qquad (1)$$

Означення 1. Точка $x^* \epsilon X$ називають точкою глобального мінімуму функції $f(x)$ на множині X, якщо функція досягає в цій точці свого найменшого значення

$$f(x^*) \le f(x), \forall x \epsilon X$$

Означення 2. Точка називається точкою локального мінімуму ($x^* \epsilon\ locmin\ f$) функції $f(x)$ на множині X

Якщо існує $\varepsilon > 0$, таке, що якщо $|x - x^*| \le \varepsilon\ \ ma\ x\epsilon X,$ то $f(x^*) \le f(x)$

Зауваження 1

1. Якщо X=[a,b], то розв'язується задача на знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку [a,b]
2. Якщо X=R^1, то розв'язується задача пошуку безумовного мінімуму.

3. В означенні 1. точка порівнюється по величині функції із всіма точками із множини допустимих розв'язків X, а в означенні 1.2. – тільки з точками , що входять в $\varepsilon - кіл$ точки x^*
4. Якщо в означеннях 1. і2. знак нерівності ≤ замінити на ≥, то отримаємо означення глобального максимуму і локального максимуму.

На рис.1. дано графічне зображення функції $f(x)$, яка має локальний мінімум в точці x_1^*, глобальний мінімум у точці x_3^*, та точку перегину x_4^*

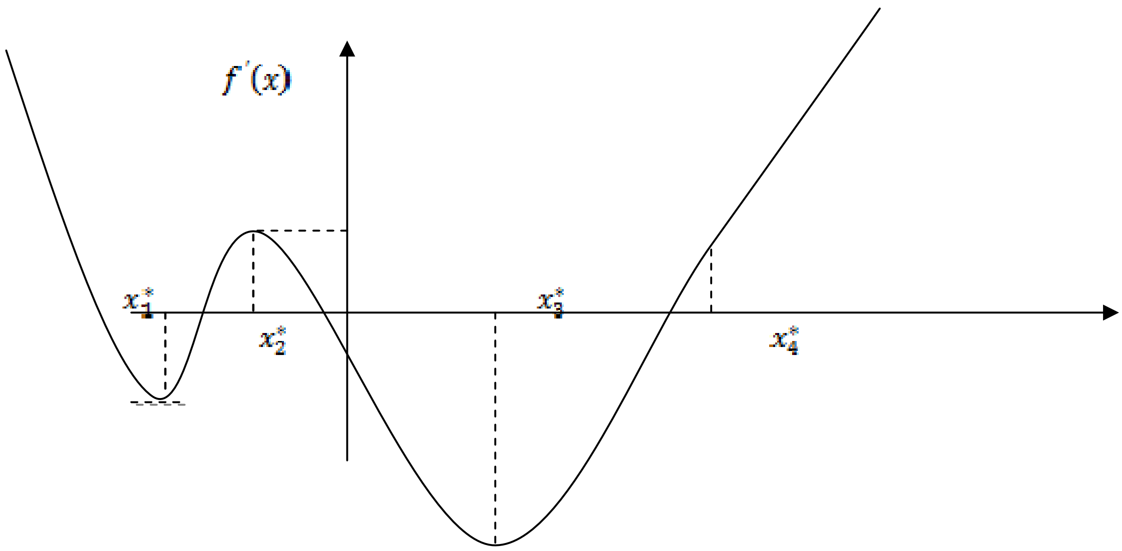

Рис. 1 - графічне зображення функції $f(x)$, яка має локальний мінімум в точці x_1^*, глобальний мінімум у точці x_3^*, та точку перегину x_4^*

Класичний підхід в задачі знаходження значень x_1^* і x_3^* полягає в пошуку рівнянь, яким вони повинні задовольняти

Зображена на рис 1. функція і її похідна неперервні і видно, що в точках x_1^* і x_3^* похідна $f'(x) = 0$ таким чином x_1^* і x_3^* будуть рішеннями рівняння

$$f'(x) = 0 \qquad (2)$$

Точка x_3^* , в якій досягається $locmax\, f$ і точка x_4^*, в якій функція f має перегин теж задовольняють рівнянню 1.2.

Таким чином, рівняння 2. є лише необхідною умовою мінімуму, але не є достатньою умовою мінімуму.

Очевидно, що в точках x_1^* і x_3^* похідна $f'(x)$ змінює знак з додатнього на від'ємний.

В той час як в точці x_4^* він не змінюється.

Таким чином, похідна $f'(x)$ в мінімумі є зростаючою функцією, а оскільки зростання $f'(x)$ вимірюється другою похідною, можливо очікувати, що $f''(x_1^*) > 0,\ f''(x_3^*) > 0$, тоді як $f''(x_3^*) < 0$

Але якщо друга похідна рівна нулю ситуація лишається невизначеною.

Одержані вище результати можуть знайти надійне обґрунтування, якщо розглянути означення (1) і розкладати функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в точки x_1^* (або x_2^* , або x_3^*), що звісно потребує неперервності $f(x)$ і її похідних.

Теорема 1 (Необхідна умова екстремуму першого порядку)

Нехай функція $f(x){:}\, R^1 \to R^1$ - функція однієї дійсної змінної. Якщо $x^* \epsilon\, locextr\, f$ - точка локального екстремуму $f(x)$ і $f'(x) \in C'(x^*)$ диференційована в точці x^*, то $f'(x) = 0$

Доведення

По означенню диференційованості

$$f(x^*+h)=f(x^*)+f'(x^*)h+r(h), \qquad (1.3)$$

$r(h)=o(h)+o(1)h$ при малих $h, |h|<\varepsilon$.

Таким чином

$$f(x^*+h)-f(x^*)=(f'(x^*)+o(1))h \qquad (1.4)$$

Якщо б $f'(x^*)\neq 0$, то при h достатньо близьких до нуля, величина $f'(x^*)=o(1)$ мала би знак $f'(x^*)$ оскільки $o(1)\to 0$ при $h\to 0$.

Саме ж h може приймати як додатні так і від'ємні значення.

Виходить, що різниця $f(x^*+h)-f(x^*)$ в (1.4) може бути як більше, так і менше нуля.

Це суперечить тому, що $f(x^*+h)-f(x^*)\geq 0$ при $x^*\epsilon\ locmin\ f$ і $f(x^*+h)-f(x^*)\leq 0$ при $x^*\epsilon\ locmax\ f$.

Геометрично **Теорема 1** (Теорема Ферма) стверджує, що в точці екстремуму диференційованості функції дотична до її графіку - горизонтальна.

Теорема 2 (**Необхідна умова екстремуму другого порядку**)

Нехай функція $f(x)$ визначена, неперервна і двічі диференційована $f(x)\in C^2(x^*)$. Якщо $x^*\epsilon\ locmin\ f$ - точка локального мінімуму функції, то $f'(x^*)=0$, $f''(x^*)\geq 0$

Якщо $x^*\epsilon\ locmax\ f$ – точка локального максимуму функції, то $f'(x^*)=0$; $f''(x^*)\leq 0$

Теорема 3(Достатні умови екстремуму)

Нехай функція $f(x)\in C^2(x^*)$ двічі диференційована.

- Якщо в точці $x=x^*$ виконуються умови $f'(x^*)=0$; $f''(x^*)>0$, то $x^*\epsilon\ locmin\ f$ - точка локального мінімуму функції $f(x)$
- Якщо в точці $x=x^*$ виконуються умови $f'(x^*)=0$; $f''(x^*)<0$, то $x^*\epsilon\ locmax\ f$ – точка локального максимуму функції

доказ (для мінімуму)

По формулі Тейлора

$$f(x^*+h)=f(x^*)+f'(x^*)h+\frac{1}{2}f''(x^*)h^2+r(h), \quad r(h)=0(h^2)$$

необхідність

Нехай $x^*\epsilon\ locmin\ f$, тоді, по-перше, за необхідною умовою екстремуму 1-го порядку для функції однієї змінної (теорема Ферма) $f'(x^*)=0$, по-друге, $f(x^*+h)-f(x^*)\geq 0$, при достатньо малих h (по означенню)

Тому за формулою Тейлора

$$f(x^*+h)-f(x^*)=\frac{1}{2}f''(x^*)h^2+r(h), \quad r(h)=0(h^2)$$

При малих h. Розділимо обидві частини останньої нерівності на h^2 і направимо h до нуля.

Так як $\frac{r(h)}{h}\to 0$,то отримаємо, що $f''(x^*)\geq 0$.

достатність

Нехай $f'(x)=0$, $f''(x^*)>0$ тоді за формулою Тейлора в силу умови

$r(h)=0(h^2)\leftrightarrow |r(h)|\leq \varepsilon h^2 \Rightarrow r(h)\geq -\varepsilon h^2$ для будь-якого $\varepsilon>0$ при достатньо малих h маємо

$$f(x^*+h)-f(x^*)=\frac{1}{2}f''(x^*)h^2+r(h)\geq (\frac{f''(x^*)}{2}-\varepsilon)h^2\geq 0$$

Якщо $\varepsilon\leq\frac{f''(x^*)}{2}$

Таким чином, $x^*\epsilon\ locmin\ f$

Для локального максимуму нерівності мають протилежний вид:

$f''(x^*) \le 0$ і $f''(x^*) < 0$ відповідно

Теорема 4

Нехай функція $f(x) \in c^m(x^*)$ m-раз диференційована в точці x^*, то точка $x^* \epsilon\ locmin(max)\ f$ – точка локального мінімуму(максимуму) функції $f(x)$ тоді і тільки тоді, коли m-парне і m-порядок першої похідної, що не перетворює в нуль похідну в цій точці.

Якщо $f^{(m)}(x^*) > 0$ то в точці $x^* \epsilon\ locmin\ f$

Якщо $f^{(m)}(x^*) < 0$ то в точці $x^* \epsilon\ locmax\ f$

Якщо m -число не непарне, то в точці x^* екстремуму немає.

Доведення

Нехай для визначеності $x^* \epsilon\ locmin\ f$ по формулі Тейлора

$$f(x^*+h) = f(x^*) + f'(x^*)h + \frac{1}{2}f''(x^*)h^2 + \dots + \frac{1}{m}f^{(m)}(x^*)h^m + r(h)$$

$$r(h) = 0(h^m)$$

$$\left(\frac{r(h)}{h^m} \to 0, при\ h \to 0\right)$$

необхідність при m=1 виходить із теореми Ферма. Нехай далі m>1

Тоді або $f'(x^*) = \dots = f^{(m)}(x^*) = 0$

або $f'(x^*) = \dots = f^{(l-1)}(x^*) = 0;\ f^{(l)}(x^*) \ne 0; l \le m$

таким чином

$$f(x^*+h) - f(x^*) = \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(x^*)}{k!}h^k + r(h) = \frac{f^{(\ell)}(x^*)}{\ell!}h^\ell + r_1(h), r_1(h) = 0(h^\ell)$$

Так як

$x^* \epsilon\ locmin\ f$, то

$$f(x^*+h) - f(x^*) = \frac{f^{(\ell)}(x^*)}{\ell!}h^\ell + r_1(h) \ge 0$$

При достатньо малих по модулю h. Так як $f^{(\ell)}(x^*) \ne 0$, то звідси випливає, що $\ell - парне$ і $f^{(\ell)}(x^*) > 0$

Властивість опуклості та увігнутості функції являється фундаментальною в математиці поряд з такими властивостями як монотонність, неперервність, диференційованість і т.д., особливо широко використовується в теорії екстремальних задач.

Поняття увігнутості та опуклості необхідні для визначення того, при яких умовах локальне оптимальне рішення являється також глобальним оптимальним рішенням, що є важливим у випадку множини оптимумів.

Функція $\varphi(x)$ називається **опуклою** в області R, якщо для будь-яких векторів $x_1 \in R$; $x_2 \in R$ виконується нерівність

$$\varphi[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \le \alpha\varphi(x_1) + (1-\alpha)\varphi(x_2) \qquad (1)$$

де α - скаляр, що змінюється в діапазоні $0 \le \alpha \le 1$.

Функція $\varphi(x)$ називається **увігнутою** в області R, якщо виконується нерівність

$$\varphi[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \ge \alpha\varphi(x_1) + (1-\alpha)\varphi(x_2) \qquad (2)$$

де $x_1 \in R$; $x_2 \in R$; $0 \le \alpha \le 1$.

Функція $\varphi(x)$ являється **строго опуклою**, якщо для $x_1 \ne x_2$ у виразі (1.4.9.1.) використовується знак нерівності $<$. Векторна нерівність $x \ge y$ означає, що $x_i \ge y_i$ для кожного елементу; у випадку $x > y$ справедлива нерівність $x_i > y_i$ для всіх i.

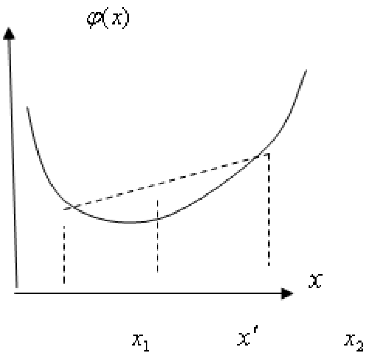

Рис. 2. Опукла функція

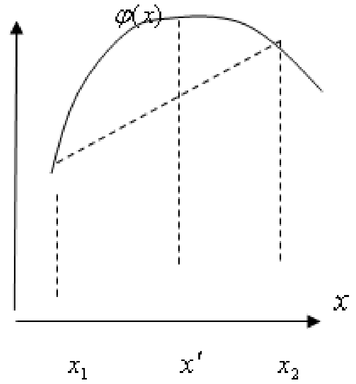

Рис. 3. Увігнута функція

На рис. 2. геометрично зображена строго опукла функція однієї незалежної змінної; опукла функція не може приймати значення більше, ніж значення функції, отриманої лінійною інтерполяцією між $\varphi(x_1)$ та $\varphi(x_2)$.

Функція $\varphi(x)$ являється **строго увігнута**, якщо для $x_1 \neq x_2$ у виразі (.2.) використовується знак нерівності $>$. Графічне відображення строго увігнутої функції на рис. 3. Таким чином, функція $\varphi(x)$ увігнута (строго увігнута), а функція $-\varphi(x)$ – опукла (строго опукла). Лінійні функції одночасно увігнуті та опуклі.

2 МЕТОДИ ВИКЛЮЧЕННЯ ІНТЕРВАЛІВ

Загальна постановка задачі для методів одновимірної оптимізації :

нехай значення параметра X знаходиться на відрізку [a,b], а цільова функція унімодальна в області, яка досліджується. Більшість чисельних методів одновимірної оптимізації - це методи звуження відрізка, а саме: метод розділення інтервалу навпіл, метод золотого перерізу, метод Фібоначчі.

В процесі одновимірної оптимізації цільової функції можна виділити два етапи:

1) встановлення меж відрізка, на якому реалізується процедура пошуку оптимуму;

2) зменшення відрізка до заданої похибки обчислення.

Методи пошуку, які дозволяють визначити оптимум функції однієї змінної шляхом послідовного виключення подінтервалів носять загальну назву методи виключення інтервалів.

Метод ділення інтервалу навпіл

Суть метода полягає в постійному діленні відрізка дослідження цільової функції [a, b] навпіл і визначенні на ньому координат трьох точок x_1, x_2, x_m. При чому значення їх визначаються як:

$$x_m = \frac{a+b}{2};\ L = b - a;\ x_1 = a + L/4;\ x_2 = b - L/4.$$

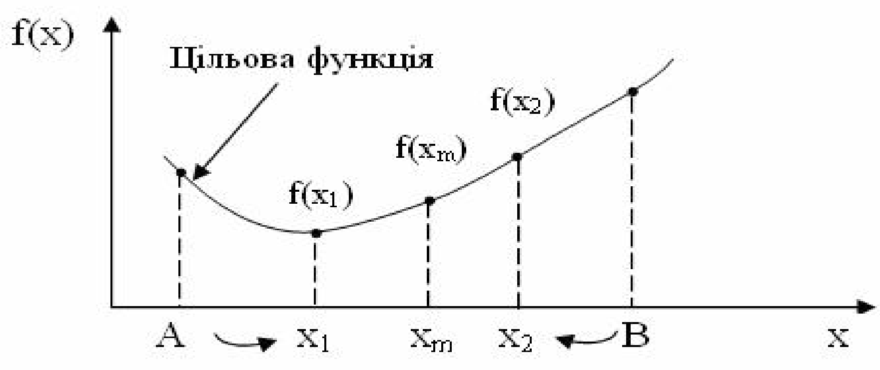

Рис. 4 – Метод ділення інтервалу навпіл (метод діхотомії)

Метод «золотого» перетину

В методі золотого перетину цільова функція обчислюється в точках інтервалу невизначеності, які розташовані таким чином, щоб кожне обчислене значення цільової функції давало нову корисну інформацію.

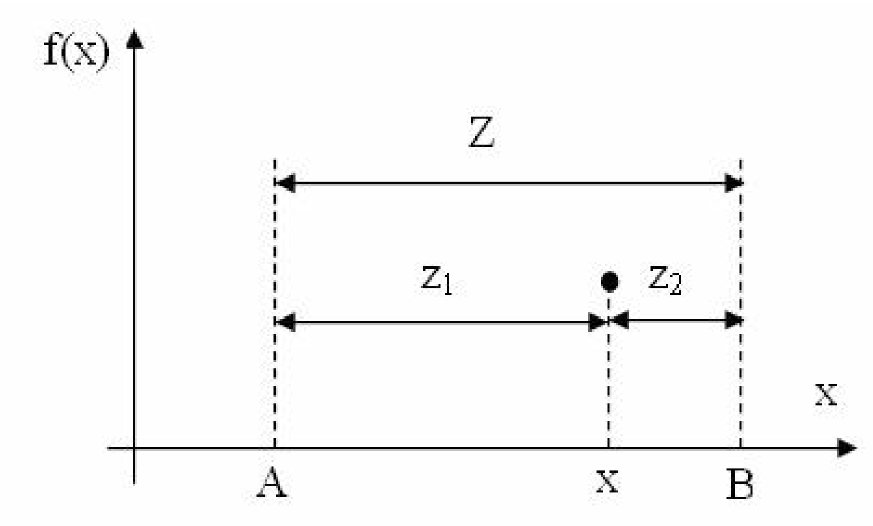

Рис. 5 – Метод «золотого» перетину

Інтервал невизначеності ділиться на дві нерівні частини, відношення довжини більшого відрізку до довжини всього інтервалу дорівнює відношенню довжини меншого відрізку до довжини більшого відрізку. На рис.5 показаний інтервал невизначеності Z, який складається з відрізків z1 і z2, відношення довжин яких визначається правилом золотого перетину.

$$\frac{z_1}{Z} = \frac{z_2}{z_1} = 0{,}618$$

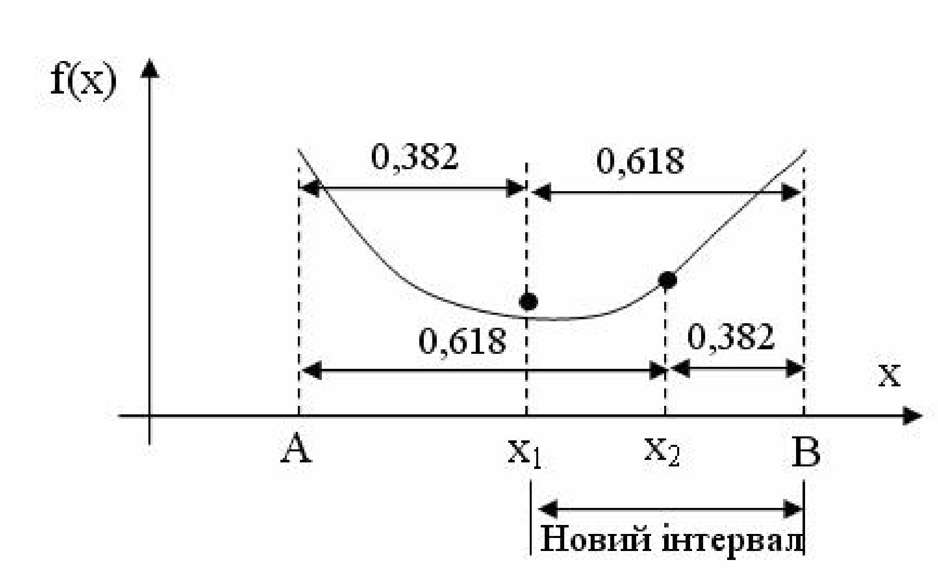

Рис. 6 – Пропорція методу «золотого» перетину

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 16
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Чисельні методи пошуку екстремуму функції багатьох змінних»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.
Час проведення: 80 хвилин.
Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.
Мета лекції: визначити особливості використання методів першого порядку для функції багатьох змінних.

Загальні методичні вказівки

10. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
11. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
12. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Методі першого порядку	40 хв.
2. Модифікації алгоритмів градієнтного методу	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

9. Нефьодов Ю.М., Балицька Т.Ю.Методи оптимізації в прикладах і задачах: Навчальний посібник. –К.: Кондор, 2011. –324 с.
10. Зайченко Ю. П.Исследование операций. – К.: Вища шк., 1988.
11. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. Либідь. 1996. – 288 с.
12. Крылов В. И. и др. Численные методы . – М.: Наука, 1978. – 1979. – Т. 2. – 400 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 МЕТОДИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.

В основі методів першого порядку або градієнтних методів лежить основна властивість градієнта диференційованої функції — визначати напрям найшвидшого зростання цієї функції. Ідея методу полягає у переході від однієї точки до іншої в напрямку градієнта з деяким наперед заданим кроком.

Вектор градієнта скалярної функції $f(\vec{u})$ визначається як вектор-стовпець перших частинних похідних функції по незалежним змінним:

$$gradf(\vec{u}^{(k)}) = \nabla f(\vec{u}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\vec{u}^{(k)})}{\partial u_1} \\ ---- \\ \dfrac{\partial f(\vec{u}^{(k)})}{\partial u_n} \end{bmatrix}.$$

Частинні похідні функцій обчислюються в точці $\vec{u} = \vec{u}^{(k)}$.

Вводиться поняття одиничного вектора градієнта $\vec{S}$.

$$\vec{S}^{(k)} = \frac{\nabla f(\vec{u}^{(k)})}{\left\|\nabla f(\vec{u}^{(k)})\right\|},$$

де ‖ ‖- норма вектора градієнта.

Компоненти одиничного вектора визначаються співвідношенням :

$$S_i^{(k)} = \frac{\dfrac{\partial f(\vec{u}^{(k)})}{\partial u_1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f(\vec{u}^{(k)})}{\partial u_i}\right)^2}}.$$

Градієнт $\nabla f(\vec{u})$ у кожній точці області визначення повністю описує поведінку функції.

Він спрямований по нормалі до поверхні рівня, проведеної через розглянуту точку, а по абсолютній величині дорівнює похідній функції по напрямку нормалі. Через те, що найшвидша зміна функції відбувається при переміщенні по нормалі до поверхні рівня, напрямок градієнта збігається з напрямком найшвидшого зростання функції. Природно, що напрямок антиградієнта збігається з напрямком найшвидшого зменшення значення функції.

Сутність градієнтного методу оптимізації полягає в тому, що задаються довільно, або виходячи з наявної апріорної інформації про положення точки екстремуму, початковим значенням вектора незалежних змінних $\vec{u}^{(0)}$.

Потім виконується зміна $\vec{u}^{(0)}$ на $\Delta\vec{u}^{(0)}$,тобто роблять крок $\Delta\vec{u}^{(0)}$ з метою наблизитися до точки екстремуму u_{OPT}. Потім роблять новий крок $\Delta\vec{u}^{(1)}$ і т.д.

Таким чином, на кожній ітерації обчислюється значення вектора для наступної ітерації:

$$\vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} + \Delta\vec{u}^{(k)}.$$

Оскільки напрямок вектора градієнта вказує напрямок найшвидшого збільшення функції, то кроки Δu виконують у напрямку градієнта при пошуку максимуму й антиградієнта при пошуку мінімуму. Надалі, для визначеності, будемо розглядати задачу на мінімум. Тоді $\Delta\vec{u}^{(k)} = -\lambda\vec{S}^{(k)}$, де λ- множник, що визначає величину кроку $\Delta\vec{u}^{(k)}$;$\vec{S}^{(k)}$-одиничний вектор градієнта; k - номер ітерації. Знак "-" указує на напрямок антиградієнта.

У такий спосіб:

$$\vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} - \lambda \vec{S}^{(k)} .$$

Алгоритм градієнтного пошуку часто застосовують у наступному виді:

$$\vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} - h\nabla f(\vec{u}^{(k)}) . \qquad (1)$$

У цьому випадку величина кроку $h\nabla f(\vec{u}^{(k)})$ змінюється автоматично відповідно до зміни величини градієнта.

Величина h зветься параметром кроку й залишається постійною. Алгоритм має ту перевагу, що при наближенні до точки мінімума довжина кроку автоматично зменшується.

Ітераційна формула (1.1) може бути записана в наступній формі:

$$\begin{bmatrix} u_1^{(k+1)} \\ --- \\ --- \\ --- \\ u_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(k)} \\ --- \\ --- \\ --- \\ u_n^{(k)} \end{bmatrix} - h \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(u^{(k)})}{\partial u_1} \\ ----- \\ \dfrac{\partial f(u^{(k)})}{\partial u_n} \end{bmatrix},$$

або в скалярному виді:

$$u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} - h\frac{\partial f(\vec{u}^{(k)})}{\partial u_i} = u_i^{(k)} - h \cdot grad_{u_i} f(\vec{u}^{(k)}) \cdot$$

Вплив величини кроку на градієнтний пошук.

Питання вибору величини кроку є досить важливим і в остаточному підсумку визначає працездатність і швидкість збіжності алгоритму.

Якщо розмір кроку обраний занадто малим, то рух до оптимуму буде довгим через необхідність обчислення частинних похідних у багатьох точках.

При великому кроці в районі оптимуму можуть виникнути незатухаючі коливання незалежних змінних і знижується точність знаходження екстремуму.

При дуже великому кроці можливі розбіжні коливання.

На рис.1 зображені лінії постійного рівня функції $f(u_1,u_2)$.

Процес пошуку при великому h зображений послідовністю точок A_0, A_1, A_2, A_3.

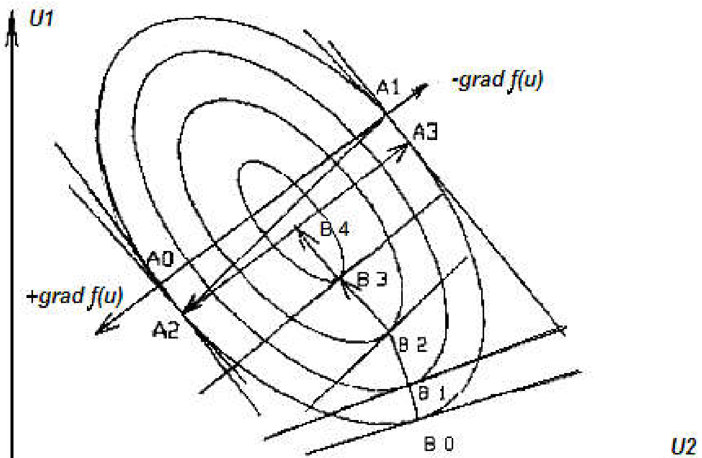

Рис. 1.

Як видно з рис.1 при цьому можуть виникати незатухаючі коливання незалежних змінних. При меншому значенні параметра кроку h процес пошуку зображений послідовністю точок B_0, B_1, B_2, B_3, B_4.

Недоліки градієнтного методу.

1. Можна виявити тільки локальний екстремум.
2. Невисока швидкість досягнення екстремуму.
3. Мала швидкість збіжності поблизу екстремальної точки.
4. Залежність методу від масштабу змінних. Якщо гіперпростір витягнутий так, що утвориться яр, то процедура градієнтного методу сходиться занадто повільно.
5. Відсутні методи обчислення оптимального значення параметра кроку h.

2 МОДИФІКАЦІЇ АЛГОРИТМІВ ГРАДІЄНТНОГО МЕТОДУ

Вибір величини параметра кроку в градієнтному алгоритмі досить важливий. Відомі модифікації градієнтного алгоритму, у яких параметр кроку h змінюється автоматично в процесі пошуку. У випадку погано організованої функції масштабують змінні.

Нижче наведені деякі алгоритми з адаптивним параметром кроку.

1. $u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} - h^{(k)} sign \dfrac{\partial f(\vec{u}^{(k)})}{\partial u_i}$;

$$h^{(k+1)} = \begin{cases} h^{(k)}, f(\vec{u}^{(k)}) \le f(\vec{u}^{(k-1)}) \\ -\dfrac{h^{(k)}}{2}, f(\vec{u}^{(k)}) > f(\vec{u}^{(k-1)}) \end{cases};$$

2. $u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} - h^{(k)} \dfrac{\partial f(\vec{u}^{(k)})}{\partial u_i}$;

$$h^{(k+1)} = \begin{cases} 2h^{(k)}, a^{(k)} < a_{\min} \\ h^{(k)}, a_{\min} \le a^{(k)} \le a_{\max} \\ \dfrac{h^{(k)}}{3}, a^{(k)} > a_{\max} \end{cases};$$

$$\cos a^{(k)} = \frac{\sum_i \dfrac{\partial f(\vec{u}^{(k)})}{\partial u_i} \cdot \dfrac{\partial \vec{u}^{(k-1)}}{\partial u_i}}{\sqrt{\sum_i \left(\dfrac{\partial f(\vec{u}^{(k)})}{\partial u_i} \right)^2 \cdot \sum_i \left(\dfrac{\partial f(\vec{u}^{(k-1)})}{\partial u_i} \right)^2}},$$

де a^k - кут повороту градієнта на k-тому кроці пошуку, причому

$\cos a_{\min} \approx 0.2$; $\cos a_{\max} \approx 0.8$

Метод найшвидшого спуску

Метод найшвидшого спуску (МНС) називають також методом Коші. У МНС на кожній ітерації параметр кроку вибирають із умови мінімуму оптимізуємої функції по напрямку градієнта.

Алгоритм МНС має вигляд:

$$u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} - h^{(k)} \nabla f(\vec{u}^{(k)}),$$
$$h^{(k)} = \arg\min_h f(\vec{u}_i^{(k)} - h \nabla f(\vec{u}^{(k)})).$$

Одна з головних переваг методу пов'язана з його стійкістю, а такожв тому, що він забезпечує виконання нерівності $f(\vec{u}^{(k+1)}) \le f(\vec{u}^{(k)})$ в процесі пошуку.

Метод Коші дозволяє, як правило, істотно зменшити значення цільової функції уже з початкової точки, розташованої на значній відстані від екстремуму.

Тому МНС часто використовується як початкова процедура при реалізації градієнтних методів. Основним недоліком його є низька швидкість збіжності поблизу екстремуму. Тому метод рідко використовується як серйозна самостійна оптимізуюча процедура.

Метод Гельфанда

Евристична схема, запропонована І.М. Гельфандом, полягає в наступному.

$\widetilde{x}_0$ $\widetilde{x}_0$ $\widetilde{u}_0$ $\widetilde{u}_0$ $\widetilde{x}_1$ x_0

Нехай x_0 і - дві довільні близькі крапки. З x_0 роблять звичайний градієнтний спуск із постійним кроком і після декількох ітерацій з малим крокомαпотрапимо в точкуu$_0$. Теж саме робимо для крапки, одержуючи крапку . Дві крапки u, лежать в околиці «дна яру». З'єднуючи їх прямій, робимо «великий крок»λв отриманому напрямку, переміщаючись «уздовж дна яру» (крок λ називають яружним кроком). У результаті одержуємо крапку x_1. У її околиці вибираємо крапку й повторюємо процедуру.

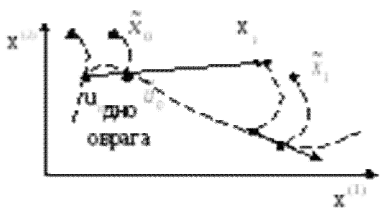

Рис. 1 – Схема методу Гельфанда

Крок 1.

Уводяться початкове наближення x_0, точність розв'язку ε_1 і ε_3, крок α для градієнтного спуска, початкове значення λ для яружного кроку. Із крапки x_0 здійснюється градієнтний спуск із постійним кроком α на дно яру. У результаті виходить крапка u_0. Покладається до=0.

Крок 2.

В околиці $x_к$ береться крапка й з неї здійснюється градієнтний спуск. У результаті виходить нова крапка.

Крок 3.

Нова крапка $x_{к+1}$визначається в такий спосіб. По формулі

$$x'_{k+1} = u_k + \lambda \frac{(\tilde{u}_k - u_k)}{\|\tilde{u}_k - u_k\|}, \text{при } f(\tilde{u}_k) < f(u_k)$$

або обчислюється крапка x'_{k+1}. З неї здійснюється градієнтний спуск і ми одержуємо крапку u'_{k+1}. Якщо (u'_{k+1})<f(uk), те вважаємося xk_{+1}= x'_{k+1} иu_{k+1}= u'_{k+1} .

Інакше зменшуємо яружний крок ((наприклад в 2 рази(=(/2)і повторюємо крок 3.

Крок 4.

Якщо $||u_{k+1} - u_k|| \leq \varepsilon_1$ і $||f(u_{k+1})|| \leq \varepsilon_3$, то вважається: $\tilde{x} = u_{k+1}, \tilde{y} = f(u_{k+1})$

і пошук мінімуму на цьому закінчується, інакше до= до+1 і переходимо до кроку 2.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 17
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Пошук екстремуму функції багатьох змінних методами другого порядку»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.

Час проведення: 80 хвилин.

Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.

Мета лекції: визначити особливості застосування методів другого порядку для функції багатьох змінних.

Загальні методичні вказівки

13. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
14. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
15. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Методі другого порядку	40 хв.
2. Модифікації методу Ньютона	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

13. Нефьодов Ю.М., Балицька Т.Ю.Методи оптимізації в прикладах і задачах: Навчальний посібник. –К.: Кондор, 2011. –324 с.
14. Зайченко Ю. П.Исследование операций. – К.: Вища шк., 1988.
15. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. Либідь. 1996. – 288 с.
16. Крылов В. И. и др. Численные методы . – М.: Наука, 1978. – 1979. – Т. 2. – 400 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 МЕТОДИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Алгоритм методу Ньютона, що враховує другі похідні від функції, має вигляд:

$$\vec{u}_i^{(k+1)} = \vec{u}_i^{(k)} - \nabla^2 f(\vec{u}^{(k)})^{-1} \nabla f(\vec{u}^{(k)}).$$

Він може бути одержаний на основі квадратичної апроксимації критерію оптимізації за умови досягнення нуля градієнта апроксимуючої функції. У зв'язку із цим задача мінімізації квадратичної функції вирішується за одну ітерацію.
Приклад. Розглянемо функцію

$$f(\vec{u}) = 8u_1^2 + 4u_1u_2 + 5u_2^2.$$

Обчислимо градієнт $\nabla f(\vec{u})$

$$\nabla f(\vec{u}) = \left[16u_1 + 4u_2; 10u_2 + 4u_1\right]^T.$$

Визначимо матрицю других похідних

$$\nabla^2 f(\vec{u}) = H = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Як початкову точку візьмемо

$$\vec{u}^{(0)} = \left[10,10\right]^T.$$

Відповідно до методу Ньютона маємо

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} - \nabla^2 f(u^{(0)})^{-1} \cdot \nabla f(\vec{u}^{(0)}).$$

Обчислимо градієнт у точці $\vec{x}^{(0)}$

$$\nabla f(\vec{u}) = \left[16\cdot 10 + 4\cdot 10; 10\cdot 10 + 4\cdot 10\right]^T = \left[200,140\right]^T.$$

Обчислимо матрицю $\nabla^2 f(\vec{u}^{(0)})^{-1} = H^{-1}$

$$H^{-1} = \frac{1}{144}\cdot\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Згідно алгоритму Ньютона одержимо

$$\vec{u}^{(1)} = \left[10,10\right]^T - \frac{1}{144}\cdot\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix}\cdot\left[200;140\right]^T = \left[0,0\right]^T$$

Таким чином, задача мінімізації вирішується за допомогою однієї ітерації при будь-якій початковій точці.

2 МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ НЬЮТОНА

При оптимізації неквадратичних функцій метод Ньютона не відрізняється високою надійністю. Якщо початкова точка перебуває на значній відстані від екстремуму, то крок по методу Ньютона може бути надмірно великим, що може привести до відсутності збіжності. Модифікація методу дозволяє істотно підвищити його ефективність:

$$\vec{u}_i^{(k+1)} = \vec{u}_i^{(k)} - h^{(k)} H^{-1} \nabla f(\vec{u}^{(k)}),$$

$$h^{(k)} = \arg\min_h f(u^{(k)} - h\nabla f(\vec{u}^{(k)})).$$

Методи Ньютона використовуються, якщо обчислення точних значень перших і других похідних не зв’язане із істотними труднощами.

Методи змінної метрики.

Ідея методу полягає у використанні інформації про градієнт критерію оптимальності для наближеного обчислення зворотної матриці других похідних. Пошук ведеться по формулі:

$$\vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} - \lambda^{(k)}\eta^{(k)}\nabla f(\vec{u}^{(k)}),$$

де $\eta^{(k)}$ - приблизно зворотна матриця Гессе; К-параметр кроку.

Головна перевага методу змінної метрики перед методом Ньютона - відмова від обчислення матриці Гессе на кожній ітерації. Методи змінної метрики відрізняються, в основному, способом обчислення матриці $\eta^{(k)}$. У методі Девідона-Флетчера-Пауелла (ДФП) матриця $\eta^{(k)}$ обчислюється по формулі:

$$\eta^{(k)} = \eta^{(k-1)} + \frac{\Delta\vec{u}^{(k)}(\Delta\vec{u}^{(k)})^T}{(\Delta\vec{u}^{(k)})^T \Delta\vec{g}^{(k)}} - \frac{\eta^{(k)}\Delta\vec{g}^{(k)}(\Delta\vec{g}^{(k)})^T(\eta^{(k)})^T}{(\Delta\vec{g}^{(k)})^T \eta^{(k)}\Delta\vec{g}^{(k)}} \text{Ж};$$

де $\Delta\vec{u}^{(k)} = \vec{u}^{(k-1)} - \vec{u}^{(k)}; \Delta\vec{g}^{(k)} = \nabla f(\vec{u}^{(k+1)}) - \nabla f(\vec{u}^{(k)})$.

Матриця $\eta^{(k)}$ зветься метрикою. Вона змінюється на кожній ітерації. Тому методи називаються методами змінної метрики. Таким чином, алгоритм ДФП має вигляд:

$$\vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} - \lambda^{*(k)}\eta(\vec{u}^{(k)}) \cdot \nabla f(\vec{u}^{(k)});$$

$$\lambda^{*(k)} = \arg\min_{\lambda} f(\vec{u}^{(k)} - \lambda \cdot \eta(\vec{u}^{(k)}) \cdot \nabla f(\vec{u}^{(k)}));$$

$$\Delta\vec{g}^{(k)} = \nabla f(\vec{u}^{(k+1)}) - \nabla f(\vec{u}^{(k)});$$

$$\Delta\vec{u}^{(k)} = \vec{u}^{(k+1)} - \vec{u}^{(k)};$$

$$\eta^{(k+1)} = \eta^{(k)} + A^{(k)} - B^{(k)};$$

$$A^{(k)} = \frac{\Delta\vec{u}^{(k)} \cdot (\Delta\vec{u}^{(k)})^T}{(\Delta\vec{u}^{(k)})^T \cdot \Delta\vec{g}^{(k)}};$$

$$B^{(k)} = \frac{\eta^{(k)} \cdot \Delta\vec{g}^{(k)} \cdot (\Delta\vec{g}^{(k)})^T (\eta^{(k)})^T}{(\Delta\vec{g}^{(k)})^T \eta^{(k)} \Delta\vec{g}^{(k)}}.$$

Критерій зупинки:

$$\left|\frac{\Delta u_i^{(k)}}{u^{(k)}}\right| < \varepsilon_1, \quad \text{або} \quad \begin{array}{l} \left|\Delta u_i^{(k)}\right| < \varepsilon_2; \\ \left|\Delta\vec{g}^{(k)}\right| < \varepsilon_3; \end{array}$$

Недоліки і переваги методу ДФП.

1.Схильність до нагромадження похибок обчислень при перерахуванні матриці $\eta^{(k)}$. Тому матрицю треба під час розрахунків періодично поновлювати, тобто штучно робити одиничною.

2.Висока чутливість до точності визначення перших похідних.

При тестових випробуваннях алгоритмів метод ДФП виявив себе як найбільш ефективний за кількістю необхідних кроків пошуку.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,

к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 18

з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Задача умовної оптимізації. Узагальнення методу Лагранжа»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.

Час проведення: 80 хвилин.

Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.

Мета лекції: визначити особливості формування задачі умовної оптимізації та застосування методу множників Лагранжа.

Загальні методичні вказівки

16. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
17. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
18. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Задача умовної оптимізації	40 хв.
2. Узагальнення методу Лагранжа	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

17. Нефьодов Ю.М., Балицька Т.Ю.Методи оптимізації в прикладах і задачах: Навчальний посібник. –К.: Кондор, 2011. – 324 с.
18. Зайченко Ю. П.Исследование операций. – К.: Вища шк., 1988.
19. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. Либідь. 1996. – 288 с.
20. Крылов В. И. и др. Численные методы . – М.: Наука, 1978. – 1979. – Т. 2. – 400 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 ЗАДАЧА УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ.

Задача f(x)→min є задачею умовної оптимізації, якщо X – множина допустимих значень змінних, що визначаються деяким набором додаткових умов (обмежень) на області існування функції

У загальному вигляді:

$$f(x) \to \min$$
$$hi(x) \le 0,$$
$$gi(x) = 0.$$

Класифікація задач математичного програмування:

Задачі математичного програмування діляться на задачі лінійного і нелінійного програмування. При цьому якщо всі функції лінійні, то відповідна задача є задачею лінійного програмування. Якщо ж хоча б одна з зазначених функцій нелінійна, то відповідна задача є задачею нелінійного програмування.

Найбільш вивченим розділом є лінійне програмування. Для розв'язання задач лінійного програмування розроблений цілий ряд ефективних методів, алгоритмів і програм.

Серед задач нелінійного програмування найглибше вивчені задачі випуклого програмування. Це задачі, в результаті розв'язання яких визначається мінімум або максимум випуклої (увігнутої) функції, заданої на випуклій замкнутій множині.

У свою чергу, серед задач випуклого програмування детальніше досліджені задачі квадратичного програмування. В результат! розв'язання таких задач вимагається в загальному випадку знайти максимум (або мінімум) квадратичної функції за умови, що її змінні задовольняють деякій системі лінійних нерівностей або лінійних рівнянь або деякій системі, що містить як лінійні нерівності, так і лінійні рівняння.

Окремими класами задач математичного програмування є задач! цілочисельного, параметричного і дробово-лінійного програмування.

У задачах цілочисельного програмування невідомі можуть приймати лише цілочисельні значення.

У задачах параметричного програмування цільова функція або функції, що визначають ділянку можливих змін змінних, або те й інше, залежать від деяких параметрів.

У задачах дробово-лінійного програмування цільова функція є відношенням двох лінійних функцій, а функції, що визначають ділянку можливих змін змінних, також є лінійними.

Виділяють окремі класи задач стохастичного і динамічного програмування.

Якщо в цільовій функції або у функціях, що визначають ділянку можливих змін змінних, містяться випадкові величини, то така задача відноситься до задачі стохастичного програмування.

Задача, процес знаходження розв'язання якої є багатоетапним, належить до задачі динамічного програмування.

Канонічна форма задачі лінійного програмування

Нехай необхідно знайти максимум (або мінімум) лінійної функції $f(x)$ n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, тут лінійна функція $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ - критерій якості обраних змінних – критеріальна функція при обмеженнях, накладених на змінні $x_1, x_2, ..., x_n$.

Канонічна форма задачі лінійного програмування має вигляд:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (1)$$

$$g_i(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,, \quad i=\overline{1,m} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0\,; \quad j=\overline{1,n} \qquad (3)$$

(1)- цільова лінійна функція;

(2) і (3) – обмеження у вигляді лінійних рівнянь та нерівностей, що являються областю визначення задачі лінійного програмування.

Необхідно знайти вектор невід'ємних значень змінних x, який перетворює в оптимум (2.1.1) при дотриманні обмежень (2) і (3).

Лінійність функції $f(x_1 x_2,...x_n)$ вносить в екстремальну задачу певну специфіку. Лінійна функція, задана в обмеженій області, досягає свого максимуму або мінімуму на границі області в точках, в яких відповідні частинні похідні, не перетворюються в нуль. Це означає, що класичні методи диференційного числення, розроблені для відшукання екстремальних точок всередині області визначення функції, не можуть бути тут використані.

Лінійність також передбачає наявність двох властивостей:

- *пропорційності* – означає, що вклад кожної змінної в цільову функцію та загальний об'єм споживання відповідних ресурсів прямо пропорційний рівню (величині) цієї змінної;

адитивності – полягає в тому, що цільова функція представляє собою суму внесків від різних змінних. Аналогічно ліва сторона кожного обмеження повинна представляти собою суму витрат , кожна складова якої пропорційна величині відповідної змінної.

2 УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ЛАГРАНЖА

Ідея методу множників Лагранжа при знаходженні розв'язку задачі нелінійного програмування, полягає в заміні початкової задачі дещо простішою. Для цього цільову функцію замінюють іншою, з більшою кількістю змінних і яка включає в себе умови, що подані як обмеження. Після такого перетворення подальше розв'язування задачі полягає в знаходженні екстремуму нової функції, на змінні якої не накладено ніяких обмежень. Тобто від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі відшукання безумовного екстремального значення іншої функції, яке визначається з допомогою необхідної умови існування екстремуму. Тобто, для розв'язування задачі необхідно знайти вирази частинних похідних нової цільової функції за кожною змінною і прирівняти їх до нуля. В результаті отримаємо систему рівнянь. Її розв'язок визначає так звані стаціонарні точки, серед яких є і шукані екстремальні значення функції.

Далі, розглянемо даний процес більш детально, та застосуємо метод множників Лагранжа для розв'язування задачі нелінійного програмування, що має вигляд:

$$max(min)\,F=f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \quad (1)$$

при наступних обмеженнях:

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=b_1; \\ g_2(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=b_2; \\ g_3(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=b_m; \end{cases} \quad (2)$$

де функції $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$та $g_i(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)\ (i=\overline{1,m})$мають бути диференційовними. Ввівши далі набір змінних $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_m$(називаються множниками Лагранжа), кількість яких дорівнює кількості рівнянь системи обмежень (2), замінюємо цільову функцію (1) на складнішу. Ця функція називається функцією Лагранжа і має наступний вигляд:

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(b_i - g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\big) \quad (3)$$

Знайдемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_j} = 0, (j = \overline{1,n}); \\ b_i - g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, (i = \overline{1,m}); \end{cases} \quad (4)$$

Друга група рівнянь системи (4) забезпечує виконання умов (2) початкової задачі нелінійного програмування. Система (4), як правило, нелінійна. Розв'язками її є $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \dots, \lambda_m^*)$ — стаціонарні точки. Оскільки, ці розв'язки отримані з необхідної умови існування екстремуму, то вони визначають максимум (мінімум) задачі (1) — (2) або можуть бути точками перегину (сідловими точками).

Для діагностування стаціонарних точок і визначення типу екстремуму необхідно перевірити виконання достатніх умов екстремуму, тобто дослідити в околі стаціонарних точок диференціали другого порядку (якщо для функцій $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ та $g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ $(i = \overline{1,m})$ існують другі частинні похідні і вони неперервні).

Узагальнення достатньої умови існування локального екстремуму для функції n змінних приводить до такого правила: за функцією Лагранжа виду (3) будується матриця Гессе, що має блочну структуру розмірністю $(m+n) \times (m+n)$:

$$H = \begin{pmatrix} O & P \\ P' & Q \end{pmatrix};$$

де O — матриця розмірності $m \times m$, що складається з нульових елементів; P — матриця розмірності $m \times n$, елементи якої визначаються наступним чином:

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix};$$

P' — транспонована матриця до матриці P розмірності $n \times m$; Q — матриця розмірності $n \times n$ наступного виду:

$$Q = \left\| \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n});$$

Розглянемо ознаки виду екстремуму розв'язку системи (4). Нехай стаціонарна точка має координати $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \dots, \lambda_m^*)$.

1. Точка X^* є точкою максимуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку $(m+1)$, наступні $(n-m)$ головних мінорів матриці H утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником $(-1)^{m+1}$.
2. Точка X^* є точкою мінімуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку $(m+1)$, знак наступних $(n-m)$ головних мінорів матриці H визначаються множником $(-1)^m$.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 19
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Задачі лінійного програмування»**

м. Харків

<u>Місце проведення:</u> аудиторія за розкладом занять.

<u>Час проведення:</u> 80 хвилин.

<u>Матеріальне забезпечення:</u> мультимедійний проектор.

<u>Мета лекції:</u> визначити особливості задачі оптимізації міжгалузевих зв'язків та транспортної задачі.

<u>Загальні методичні вказівки</u>

19. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
20. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
21. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

<u>План лекції:</u>

Вступ	8 хв.
1. Задача оптимізації міжгалузевих зв'язків	40 хв.
2. Транспортна задача	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

21. Нефьодов Ю.М., Балицька Т.Ю.Методи оптимізації в прикладах і задачах: Навчальний посібник. –К.: Кондор, 2011. – 324 с.
22. Зайченко Ю. П.Исследование операций. – К.: Вища шк., 1988.
23. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. Либідь. 1996. – 288 с.
24. Крылов В. И. и др. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 1979. – Т. 2. – 400 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ МІЖГАЛУЗЕВИХ ЗВ'ЯЗКІВ

У сучасній економіці утворилися складні взаємозв'язки між окремими галузями. Ефективне ведення національного господарства передбачає наявність балансу між ними. Кожна галузь при цьому виступає подвійно – з одного боку, як виробник деякої продукції, а з іншого – як споживач продукції, що виробляється іншими галузями. Виникає доволі непроста задача розрахунку зв'язків між галузями через випуск та споживання продукції різних видів. Таку задачу вирішив американський економіст В.В. Леонтьев, який у 30-і роки XX ст. запропонував економіко-математичну модель міжгалузевого балансу (метод «витрати-випуск»), яка пізніше була названа в його честь.

Динамічна модель Леонтьєва є деталізованою моделлю росту валового суспільного продукту й національного доходу. Базою для динамічної моделі В. Леонтьева служить статична модель міжгалузевого балансу в грошовому вираженні, що відбиває виробництво й розподіл валового суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв'язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення й розподіл національного доходу (НД). Кожна галузь у балансі розглядається двічі – як споживач і як виробник. Це й визначає матричну структуру балансу. В основі статичної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між нагромадженням і приростом валового продукту. При побудові динамічної моделі В. Леонтьєва, як і для моделі міжгалузевого балансу, можуть бути наступні припущення:

1) у кожній галузі є єдина технологія виробництва;

2) норми виробничих витрат не залежать від обсягу продукції, що випускається;

3) не допускається заміщення у виробництві одних видів продукції іншими.

При цих припущеннях величина міжгалузевого потоку $\boldsymbol{x}$ виявляється пов'язаною з валовою продукцією галузі в такий спосіб:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j;$$

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j},$$

де a_{ij} — коефіцієнт прямих матеріальних витрат, за допомогою якого виміряються технологічні зв'язки між галузями. Коефіцієнт a_{ij} показує, скільки одиниць продукції і-той галузі безпосередньо затрачається на випуск одиниці валової продукції j-той галузі. Так, при $i = j$ маємо коефіцієнт витрат власної продукції галузі на одиницю її валового випуску. Всі коефіцієнти прямих матеріальних витрат утворюють квадратну матрицю А:

$$A=[a_{ij}],\ i= 1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n.$$

Статична модель міжгалузевого балансу у матричні формі має вигляд:

$$X= AX +Y,$$

де А — матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат; X— стовпець валових обсягів випуску продукції (ВОП); Y— стовпець кінцевого продукту (КП).

2 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Транспортна задача — це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів.

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min; \qquad (1)$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \;\left(i = \overline{1,m}\right); \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \;\left(j = \overline{1,n}\right); \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0 \;\left(i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}\right), \qquad (4)$$

де x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться від *i*-го постачальника до *j*-го споживача; c_{ij} — вартість перевезення одиниці продукції від *i*-го постачальника до *j*-го споживача; a_i — запаси продукції *i*-го постачальника; b_j — попит на продукцію *j*-го споживача.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (5)$$

то таку транспорту задачу називають ***збалансованою,*** або ***закритою***. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають ***незбалансованою,*** або ***відкритою***.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (2)—(4) транспортної задачі, який позначають матрицею $x = \left(x_{ij}\right)$ $\left(i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}\right)$.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = \left(\vec{x}^{\,*}_{ij}\right)$ $\left(i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}\right)$, яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція (1) набуває найменшого значення.

Теорема (умова існування розв'язку транспортної задачі). Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Методи побудови опорного плану.

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв'язування ефективніший метод, який повторює, по суті, кроки симплекс-алгоритму. Таким є ***метод потенціалів***.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів.

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита).
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі.
3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.
4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв'язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.
5. Новий план знову перевіряють на оптимальність, тобто повторюють дії п. 3, і т. д.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

1. Якщо під час перевірки збалансованості (5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це виконується введенням фіктивного умовного

постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} , або фіктивного споживача B_{n+1} . вважається такою, що дорівнює нулю.

2. Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує кілька методів: північно-західного кута; мінімальної вартості; подвійної переваги; апроксимації Фогеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції є рядками, а споживачі — стовпчиками.

Побудову першого плану за **методом північно-західного кута** починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці (x_{11}), в яку записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітинки в рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнювати таблицю у правій нижній клітинці.

Ідея **методу мінімальної вартості** полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Метод подвійної переваги. Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці. Серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Після побудови першого опорного плану одним із розгляну тих методів у таблиці має бути заповнено $(m + n - 1)$ клітинок, де m — кількість постачальників; n — кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають ***не виродженим***. Якщо кількість заповнених клітинок перевищує $(m + n - 1)$, то початковий план побудовано неправильно і він є не опорним. ***Ознакою опорності*** плану транспортної задачі є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу. ***Циклом*** у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці.

Якщо заповнених клітинок у таблиці менш як $(m + n - 1)$, то опорний план називають ***виродженим***. У такому разі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення», але так, щоб при цьому не порушилася ациклічність плану.

3. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j відповідно постачальників та споживачів.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 20
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Основні поняття теорії подвійності»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.
Час проведення: 80 хвилин.
Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.
Мета лекції: визначити особливості подвійності задач лінійного програмування.

Загальні методичні вказівки

22. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
23. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
24. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Основна та двоїста задачі як пара взаємоспряженних задач ЛП	40 хв.
2. Двоїсті оцінки. Стійкість оптимальних планів прямої та двоїстої задач	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

25. Нефьодов Ю.М., Балицька Т.Ю.Методи оптимізації в прикладах і задачах: Навчальний посібник. –К.: Кондор, 2011. – 324 с.
26. Зайченко Ю. П.Исследование операций. – К.: Вища шк., 1988.
27. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. Либідь. 1996. – 288 с.
28. Крылов В. И. и др. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 1979. – Т. 2. – 400 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 ОСНОВНА ТА ДВОЇСТА ЗАДАЧІ ЯК ПАРА ВЗАЄМОСПРЯЖЕННИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Кожній задачі лінійного програмування відповідає ***двоїста,*** що формується за допомогою певних правил безпосередньо з умови прямої задачі.

Якщо пряма задача лінійного програмування має вигляд

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \le b_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,n},$$

то двоїста задача записується так:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

за обмежень

$$\begin{cases} \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{m1}y_m \le c_1, \\ \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{m2}y_m \le c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}y_1 + \alpha_{2n}y_2 + \ldots + \alpha_{mn}y_m \le c_n, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,m},$$

Порівнюючи ці дві сформульовані задачі, доходимо висновку, що ***двоїста задача лінійного програмування утворюється з прямої задачі за такими правилами.***

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.
2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.
3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі — на визначення найменшого значення (min), і навпаки.
4. Коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.
5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі.
6. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків — рядками.

2 ДВОЇСТІ ОЦІНКИ. СТІЙКІСТЬ ОПТИМАЛЬНИХ ПЛАНІВ ПРЯМОЇ ТА ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧ

Двоїсті пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У симетричних задачах обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У несиметричних задачах обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої — лише як нерівності. У цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком.

Різні можливі форми прямих задач лінійного програмування та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач наведено далі.

Симетрична задача.

Пряма задача.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i;$$

$$x_j \ge 0.$$

Двоїста задача

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \ge c_j;$$

$$y_j \ge 0.$$

Несиметрична задача.

Пряма задача.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i; i \in \{1, ..., m_1\}, m_1 \le m; \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = b_i; i \in \{m_1 + 1, ..., m\}; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j \in \{1, ..., n_1\}, n_1 \le n,$$

$$x_j \textit{ приймає будь-яке значення коли } j \in \{n_1 + 1, ..., n\}$$

Двоїста задача

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_j \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \ge c_j; j \in \{1, ..., n_1\}, n_1 \le n; \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i = c_j; j \in \{n_1 + 1, ..., n\}; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, i \in \{1, ..., m_1\}, m_1 \le m,$$

$$y_i \textit{ приймає будь-яке значення коли } i \in \{m_1 + 1, ..., m\}.$$

Основні теореми двоїстості задач.

Між прямою та двоїстою задачами лінійного програмування існує тісний взаємозв'язок, який випливає з наведених далі теорем.

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має розв'язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто $\max Z = \min F$, і навпаки.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то друга задача взагалі не має розв'язків.

Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план X^*, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y^* визначається зі співвідношення

$$Y^* = \vec{c}_{баз} D^{-1},$$

де $\vec{c}_{баз}$ — вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані; $\boldsymbol{D}^{-1}$ — матриця, обернена до матриці $\boldsymbol{D}$, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі. Обернена матриця $\boldsymbol{D}^{-1}$ завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач лінійного програмування знаходять розв'язок іншої задачі.

Друга теорема двоїстості. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний i-й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-й компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне i-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Третя теорема двоїстості. Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 21
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Задача оптимального управління»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.
Час проведення: 80 хвилин.
Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.
Мета лекції: визначити особливості задачі оптимального управління.

Загальні методичні вказівки

25. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
26. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
27. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Постановка задачі оптимального управління	20 хв.
2. Принцип максимуму	20 хв.
3. Чисельні методи рішення задач оптимального управління	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

29. Нефьодов Ю.М., Балицька Т.Ю.Методи оптимізації в прикладах і задачах: Навчальний посібник. –К.: Кондор, 2011. – 324 с.
30. Зайченко Ю. П.Исследование операций. – К.: Вища шк., 1988.
31. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. Либідь. 1996. – 288 с.
32. Крылов В. И. и др. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 1979. – Т. 2. – 400 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ

Під динамічною оптимізацією будемо розуміти оптимізацію таких режимів технологічних процесів, у яких всі або частина змінних змінюються в часі, а рішення задачі оптимізації є функцією часу, задачі цього типу відносяться до задач оптимізації функціоналів.

Розглянуті тут методи застосовуються для знаходження рішень задач, у яких функціональна складова рішення залежить не тільки від часу, але може залежати й від просторового аргументу.

Математичний апарат, розроблений для рішення задач оптимізації функціоналів, називається варіаційним обчисленням, методи називають також варіаційними методами оптимального керування й оптимізації.

Математичне формулювання задачі

Об'єкт управління задається рівнянням стану

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t) \qquad (1)$$

Відомі крайові (граничні) умови в моменти часу $t_н$, $t_к$

$$\vec{x}(t_н) \in x_н;\ \vec{x}(t_к) \in x_к, \qquad (2)$$

де $x_н$, $x_к$ - деякі задані множини обмежень на лівий і правий кінець траєкторії руху об'єкта.

На вектор управління й вектор стану накладаються обмеження

$$\vec{x} \in V_x;\ \vec{u} \in V_u, \qquad (3)$$

у загальному випадку залежні від часу, причому

$$V_x \subseteq R^n;\ V_u \subseteq R^m \qquad (4)$$

У загальному випадку області V_x й V_u можуть бути замкнуті або відкриті.

Необхідно визначити оптимальне програмне (розімкнуте) керування $\vec{u}_{опт}(t)$ або оптимальне керування зі зворотним зв'язком (замкнуте керування) $\vec{u}_{опт}(x(t))$ і відповідну оптимальному керуванню траєкторію руху об'єкта $x_{опт}(t)$, які доставляють екстремум функціоналу

$$I = I(\vec{x},\ \vec{u},\ \dot{\vec{x}},\ \dot{\vec{u}},\ \vec{x}(t_к),\ t_к, t), \qquad (5)$$

тобто необхідно знайти

$$\min_{u \in V_u} I(\vec{x},\ \vec{u},\ \dot{\vec{x}},\ \dot{\vec{u}},\ \vec{x}(t_к),\ t_к, t) = I_{\min}$$

Геометрична інтерпретація задачі оптимального управління

Введені поняття простору станів і простору керуючих впливів дозволяє додати геометричну наочність задачам оптимального управління.

Будь-який процес управління відображається одночасно у двох просторах R^n і R^m. Траєкторія $\vec{u}(t)$ знаходиться в результаті рішення задачі оптимізації. Траєкторія $\vec{x}(t)$ для розглянутої системи визначається вибором $\vec{u}(t)$ і може розглядатися як наслідок останньої.

Обмеження, накладені на координати, виділяють у просторі станів замкнуту область V_x припустимих станів, а обмеження на керування виділяють замкнуту V_u область припустимих керувань.

Нехай на кожну координату накладене обмеження. Обмежуючі поверхні в цьому випадку будуть плоскими взаємно ортогональними.

Для двовимірної системи V_x область буде являти собою прямокутник (рис.1,а).

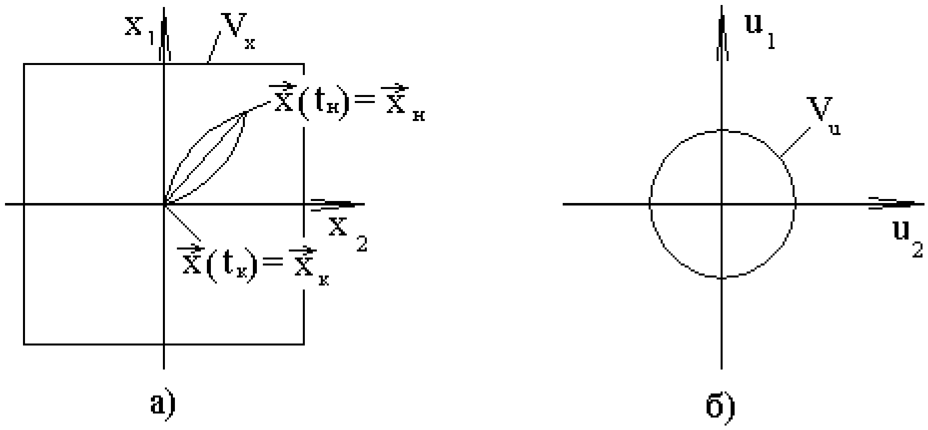

Рис.1.

Якщо граничні значення взаємозалежні, то обмежуюча поверхня може виявитися досить складною, наприклад:

$$u_1^2 + u_2^2 - 1 \le 0$$

Припустима область обмежена окружністю, рис. 1,б.

Будь-який рух системи відображається траєкторіями в V_x і V_u області.

Існує нескінченна множина траєкторій, розташованих усередині V_x області та з'єднуючих точки початкового й кінцевого станів $\vec{x}(t_н)$, $\vec{x}(t_к)$.

Припустимими є тільки ті, які відповідають припустимим керуванням, тобто керуванням, що не виходять за межі V_u області.

Задача оптимального управління полягає в тому, щоб із числа припустимих траєкторій вибрати таку, яка забезпечить екстремальне значення прийнятого критерію оптимальності.

2. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ

В 1956 р. в роботах Понтрягіна Л.С. був сформульований і доведений метод рішення задач оптимального управління, названий принципом максимуму.

Принцип максимуму є розширенням класичного варіаційного обчислення на випадки, коли керуючі впливи обмежені і являють собою кусково-безперервні функції.

Так як функції управління $u_j(t)$ допускають розриви першого роду, то координати $x_i(t)$ не є гладкими, і канонічні рівняння Гамільтона не можна застосовувати для знаходження оптимальних керувань у тому виді, у якому вони представлені в класичному варіаційному обчисленні.

Через розриви першого роду варіація функції $u(t)$ може бути великою, тоді буде великою також варіація функціонала, і при обчисленні його приросту треба враховувати нелінійні члени.

Було введене поняття *голчастої варіації*, що являє собою імпульс малої тривалості τ, і обмеженої амплітуди. Оптимальне управління з такими голчастими варіаціями буде кусково-безперервне, тобто належить до того класу функцій, у якому шукається керування.

Строге доведення принципу максимуму з використанням поняття голчастої варіації керування досить складне й докладно викладено в літературі.

Ми розглянемо тільки деякі наочні докази, які пояснюють принцип максимуму.

Слід зазначити, що принцип максимуму створювався спеціально для рішення задач керування. Тому на відміну від класичного варіаційного обчислення, де функції $\vec{u}(t)$ й $\vec{x}(t)$ рівноправні, у принципі максимуму розглядають роздільно простір керування розмірності m й простір станів розмірності n, у яких виділяє області $V_u \in R_m$, $V_x \in R_n$, причому V_u - замкнута, і $\vec{u}(t)$ належить до класу кусково-безперервних функцій, а V_x може бути відкритою або замкнутою залежно від постановки задачі, а $\vec{x}(t)$ - безперервні функції. Приналежність функцій $\vec{u}(t)$ і $\vec{x}(t)$ до різних класів має принципове значення й викликає необхідність розглядати простори R_m й R_n.

При доведенні принципу максимуму варіації піддається тільки управління, а результат розглядається на траєкторіях $\vec{x}(t)$.

Постановка задачі

Об'єкт управління заданий рівнянням

$$\begin{gathered} \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}), \\ \vec{u}(t) \in V_u,\ \vec{x}(t) \in V_x, \end{gathered} \tag{6}$$

де V_u - замкнута область;

V_x - обмежена відкрита область;

$\vec{u}(t)$ - належить до класу кусково-безперервних функцій.

Нехай $\vec{x}(t_к) = \vec{x}_к$ - стан об'єкта в робочому режимі.

$\vec{x}(t_н) = \vec{x}_н$ - довільний стан, у який об'єкт попадає під дією несподіваного збурювання.

Задача керування полягає в тому, щоб повернути об'єкт із будь-якої точки $\vec{x}_н$ в робочий стан $\vec{x}_к$, забезпечивши мінімум критерію

$$I = \int_{t_н}^{t_к} f_0(\vec{x},\ \vec{u})\, dt. \tag{7}$$

Формулювання необхідних умов оптимальності видозмінюється залежно від постановки задачі.

Розрізняють задачі з вільним або фіксованим часом, вільними або фіксованими границями.

Тип задачі може визначатися видом критерію оптимальності.

У класичному варіаційному обчисленні однією з необхідних умов існування екстремума функціонала є виконання рівності

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Це справедливо для гладкої функції, заданої у відкритій області.

Для замкнутої області зміни аргументу u, у якій $\partial H / \partial u \neq 0$, максимальне (мінімальне) значення функції H буде досягатися тільки на границі припустимої області V_u, тобто при $u_{\max}$ або $u_{\min}$, якщо в області V_u $\partial H / \partial u \neq 0$. Ця гіпотеза одержала назву «принцип максимуму» і потім була строго доведена.

У принципі максимуму вводиться в розгляд функція Гамільтона некласичного варіаційного обчислення

$$H^*(\vec{x}, \vec{u}, \vec{\psi}, t) = \vec{\psi}^T(t) \cdot \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i \cdot f_i(\vec{x}, \vec{u}) \tag{8}$$

Допоміжні змінні $\psi_i(t)$ задовольняють системі рівнянь

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j(\vec{x}, \vec{u})}{\partial x_i} \cdot \psi_j \tag{9}$$

Система (9) називається спряженою стосовно системи (6). Вектор-функції $\vec{x}(t)$, $\vec{\psi}(t)$ безперервні всюди, мають безперервні похідні за винятком точок, у яких припустиме керування терпить розрив.

При оптимальній $\vec{u}^{опт}(t)$ функція H^* досягає максимуму на екстремалях $\vec{x}^{опт}(t)$, $\vec{u}^{опт}(t)$, $\vec{\psi}^{опт}(t)$, звідки й випливає принцип максимуму: необхідно так підібрати $\vec{u} \in V_u$, де V_u - замкнута область, щоб H^* досягала максимального значення.

Вздовж всієї траєкторії $\vec{x}(t)$ справедлива основна умова принципу максимуму

$$H^*(\vec{x}, \vec{u}, \vec{\psi}, t) = const \tag{10}$$

Вектор $\vec{\psi}$ пов'язаний з поверхнями рівня функціонала I так само, як вектор $\vec{\lambda}$ у класичному варіаційному обчисленні. $\vec{\psi}$ дорівнює по модулю градієнту функціонала $I(x)$, але протилежно спрямований. Однак цей зв'язок при доведенні принципу максимуму не використовується. Для доведення важливо лише існування якихось функцій $\vec{\psi}(t)$, що задовольняють сполученій системі й умові максимуму. Тому принцип максимуму вільний від обмежень, що накладаються характером $I(x)$.

3 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ

Для $\overrightarrow{u_{опт}}(t)$ і $\overrightarrow{u_{опт}}(x)$ розроблена велика кількість чисельних методів.

Серед них можна виділити прямі методи, у яких управління $\vec{u}(t)$ і кінцевий момент часу оцінюються як початкові наближення, а потім ітераційно уточнюються в напрямку мінімізації функціонала.

Найбільш уживаний є метод градієнта і його різновиди. Широко застосовуються непрямі методи, у яких ітераційно вирішуються рівняння об'єктів і спряжені рівняння

Метод градієнта ефективний при рішенні оптимальних задач із вільним правим кінцем. Він має більшу область збіжності. Цим методом легко вирішуються задачі з обмеженнями на управління.

Постановка задачі.

Розглянемо задачу з інтегральним критерієм і вільним правим кінцем

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}), \ \vec{x}(t_н) = \vec{x}_n$$
$$I = \int_{t_н}^{t_к} f_0(\vec{x}, \vec{u})dt \tag{11}$$

Введемо додаткову змінну

$$x_0 = \int_{t_н}^{t_к} f_0(\vec{x}, \vec{u})dt$$
$$\dot{x}_0 = f_0(\vec{x}, \vec{u}), \ x_0(t_н) = 0 \tag{12}$$

Складемо Гамільтоніан

$$H = f_0 + \psi_0 + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i \tag{13}$$

Нехай відомо оптимальне керування $\vec{u}^{опт}(t)$ і оптимальна траєкторія $\vec{x}^{опт}$.

Довільне керування представимо як варіацію оптимального

$$\vec{u} = \vec{u}^{опт} + \delta\vec{u}$$
$$\vec{x} = \vec{x}^{опт} + \delta\vec{x} \tag{14}$$

При досить малих варіаціях $\delta\vec{u}$ розглянемо лінійне наближення рівняння об'єкта. Тоді одержимо

$$\frac{d(S\vec{x})}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\delta\vec{x} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}}\delta\vec{u};\ \delta\vec{x}(t_н) = \delta\vec{x}_н \tag{15}$$

Перша варіація функціонала має вигляд

$$\delta I = \int_{t_н}^{t_к} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\delta\vec{x} + \frac{\partial f_0}{\partial u}\delta\vec{u} \right) dt \tag{16}$$

Беручи до уваги (15) запишемо

$$\int_{t_н}^{t_к} \vec{\psi}^T \left[\frac{d(S\vec{x})}{dt} - \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\delta\vec{x} - \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\delta\vec{u} \right] dt \tag{17}$$

З рівнянь (16) і (17) одержимо

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_н}^{t_к} \left\{ \left(\frac{\partial f_0}{\partial \vec{x}} - \vec{\psi}^T \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right)\delta\vec{x} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial \vec{u}} - \vec{\psi}^T \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}} \right) + \vec{\psi}^T \frac{d(S\vec{x})}{dt} \right\} = \\ &= -\int_{t_н}^{t_к} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \vec{x}}\delta\vec{x} + \frac{\partial H}{\partial \vec{u}}\delta\vec{u} + \vec{\psi}^T \frac{d(S\vec{x})}{dt} \right\} \end{aligned} \tag{18}$$

Проінтегруємо останній доданок

$$\partial I = \vec{\psi}^T S\vec{x}\Big|_{t_н}^{t_к} - \int_{t_н}^{t_к} \frac{d\vec{\psi}}{dt}\delta\vec{x} - \int_{t_н}^{t_к} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right)^T \delta\vec{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \right)^T \delta\vec{u} \right) dt \tag{19}$$

Через те, що $\frac{d\vec{\psi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}$ одержимо вираз для δI:

$$\delta I = \int_{t_н}^{t_к} \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \right)^T \delta\vec{u}\ dt \tag{20}$$

$\vec{\psi}^T(t_н) \cdot \delta\vec{x}(t_н) = 0$, тому що лівий кінець траєкторії закріплений.

$\vec{\psi}^T(t_к) \cdot \delta\vec{x}(t_к) = 0$, тому що для вільного правого кінця $\vec{\psi}(t_к) = 0$.

Для того, щоб при зміні рівняння $\delta\vec{u}$ забезпечити рух до екстремуму функціонала I, необхідно, щоб δI було від'ємним. Для цього варто вибрати

$$\delta\vec{u} = \frac{\partial H}{\partial \vec{u}} h,$$

де

$$h > 0\ . \tag{21}$$

Таким чином, визначаючи на кожному кроці поправку $\delta\vec{u} = \Delta\vec{u}^k$ згідно (15), одержимо

$$\vec{u}^{k+1} = \vec{u}^k + \Delta\vec{u}^{k+1} = \vec{u}^k + h\frac{\partial H}{\partial \vec{u}^k},\ h > 0\ , \tag{22}$$

а δI при цьому будемо мати від'ємне значення.

Тоді для ітеративно поставленої задачі необхідно виконати послідовність дій, записаних у вигляді наступного алгоритму.

1) Задають початкове наближення $\vec{u}^{(0)} = \vec{u}^0(t),\ t_н \le t \le t_к$.
2) На кожному кроці k=0,1,… вирішують рівняння об'єкта (12) і одержують
3) Використовуючи $\vec{u}^k$ й $\vec{x}^k$ вирішують сполучену систему у зворотному часі від $t=t_К$ до $t=t_н$ і знаходять $\vec{\psi}^k(t)$.

4) Для знаходження $\vec{u}^k$, $\vec{x}^k$, $\vec{\psi}^k$ обчислюють $\frac{\partial H}{\partial \vec{u}^k(t)}$.

5) Вибирають $h_{опт}$, для чого обчислюють $\vec{u}^{k+1}$ і $I\left(\vec{u}^{k+1}\right)$ згідно (12), (22) для різних h і визначають квадратичне наближення $I(H)$, по якому знаходять.

6) Обчислюють $\vec{u}^{k+1}$ для $h_{опт}$.

7) Перевіряємо умову $\left|\Delta I^k\right| \le E_{зад}$, де $E_{зад}$ – мале наперед задане число. При недотриманні цієї умови переходять до розрахунку по п.2.

При виконанні умови розрахунок припиняється.

Область застосування.

Метод градієнта широко використовується для рішення задач типу Майєра й Больца з вільним правим кінцем, а так само при наявності обмеження на керування.

У задачах з декількома локальними екстремумами необхідно задаватися початковими значенням $\vec{u}$ близькими до $\vec{u}_{опт}$, або ж робити розрахунок для декількох початкових $\vec{u}$.

Повільна збіжність в області екстремума призводить до великого часу розрахунку, тому часто градієнтний метод використовують у сполученні з методами другого порядку. Вдалині від екстремума використовується градієнтний метод, а поблизу - метод другого порядку.

При заданих кінцевих умовах зазвичай потрібно багато машинного часу, тому градієнтний метод застосовується тоді, коли $\vec{u}$ обмежене і ніякий інший спосіб не може бути використаний.

Іншим підходом до визначення оптимальних керувань чисельними методами є рішення двохточкової крайової задачі ДТКЗ.

З умови максимуму функції Гамільтона визначають $\vec{u}_{опт} = \vec{u}(\vec{x}, \vec{\psi}, t)$ і підставляють у рівняння об'єкта і спряжені рівняння.

Таким чином, оптимізація завершена. Залишається тільки знайти рішення крайової задачі.

$$\begin{gathered} \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\psi}, t),\ \dot{\vec{\psi}} = g(\vec{x}, \vec{\psi}, t), \\ G_k\left(\vec{x}(t_н), t_к\right) = 0,\ G_н\left(\vec{x}(t_н), t_н\right) = 0 \end{gathered} \tag{23}$$

У загальному випадку дана задача нелінійна й може бути вирішена тільки ітеративно. Для цього застосовують метод Н'ютона-Рафсона, квазілінеаризації та ін.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА УПРАВЛІННЯ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ У СФЕРІ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ

Лекція № 22
з навчальної дисципліни
«Моделювання у сфері цивільного захисту»

Тема: **«Безперервні системи. Рівняння Беллмана»**

м. Харків

Місце проведення: аудиторія за розкладом занять.
Час проведення: 80 хвилин.
Матеріальне забезпечення: мультимедійний проектор.
Мета лекції: визначити особливості вирішення рівняння Беллмана.

Загальні методичні вказівки

28. Перевірити наявність здобувачів на занятті.
29. Записати на дошці тему лекції та навчальні питання, викласти навчальний матеріал.
30. Вибірково перевірити якість ведення конспекту.

План лекції:

Вступ	8 хв.
1. Принцип оптимальності	20 хв.
2. Безперервні системи. Рівняння Беллмана	20 хв.
3. Рішення рівняння Беллмана	30 хв.
Закінчення	2 хв.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА:

33. Нефьодов Ю.М., Балицька Т.Ю.Методи оптимізації в прикладах і задачах: Навчальний посібник. –К.: Кондор, 2011. – 324 с.
34. Зайченко Ю. П.Исследование операций. – К.: Вища шк., 1988.
35. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. Либідь. 1996. – 288 с.
36. Крылов В. И. и др. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 1979. – Т. 2. – 400 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЇ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ПРОВЕДЕННЯ

1 ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТІ

У техніці існує великий клас об'єктів і процесів, керування якими здійснюється на основі обмеженого числа рішень, прийнятих послідовно в деякі фіксовані моменти часу.

Визначення закону керування для таких процесів пов'язане з рішенням так званої задачі багатокрокового вибору. Керування дискретними системами може бути прикладом таких багатокрокових процесів.

Кожний безперервний процес можна представити як багатокроковий, якщо розглядати його в дискретні моменти часу.

Підхід, що дозволяє знайти оптимальне рішення на основі багатокрокових процесів ухвалення рішення, одержав назву динамічного програмування.

В основі методу динамічного програмування лежить принцип оптимальності, сформульований Беллманом Р.

Оптимальна стратегія визначається лише станом системи в даний момент і не залежить від того, як система прийшла в дану точку (рис. 1).

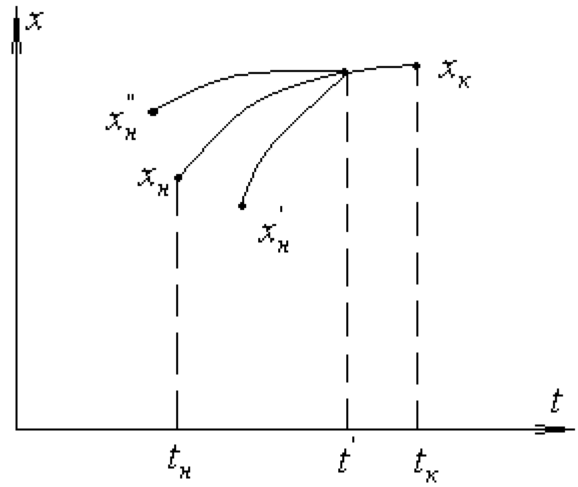

Рис. 1.

Під стратегією ми розуміємо правило прийняття рішень.

Принцип оптимальності може бути сформульований і по-іншому.

Якщо траєкторія системи оптимальна на відрізку часу $[t_н,\ t_к]$, то кінцева ділянка цієї траєкторії на відрізку $[t',\ t_к]$ у свою чергу є оптимальною траєкторією, де $t_н \le t' \le t_к$ – довільний момент часу.

Із принципу оптимальності можна одержати необхідні умови оптимальності для безперервних і дискретних систем.

2 БЕЗПЕРЕРВНІ СИСТЕМИ. РІВНЯННЯ БЕЛЛМАНА

Об'єкт описується рівнянням

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x},\vec{u},t),\ x(t_н) = x_н,\ u \in V_u \tag{1}$$

Визначити керування $\vec{u}$ і траєкторію $\vec{x}(t)$, що доставляють екстремум функціоналу

$$I = \int_{t_н}^{t_к} f_0(\vec{x},\vec{u},t)dt \tag{2}$$

де $t_к$ –фіксовано,

V_u –відкрита область.

Нехай відома оптимальна траєкторія $\vec{x}(t)$, рис 2. Розглянемо ділянку $t - t_к$.

Відповідно до принципу оптимальності функціонал (2) досягає на ньому мінімум.

Введемо позначення

$$S\left[\vec{x}(t_н), t_н\right] = \min_{u \in V_u} I(\vec{x}, \vec{u}, t) = I(\vec{x}, \vec{u}_{опт}, t) \qquad (3)$$

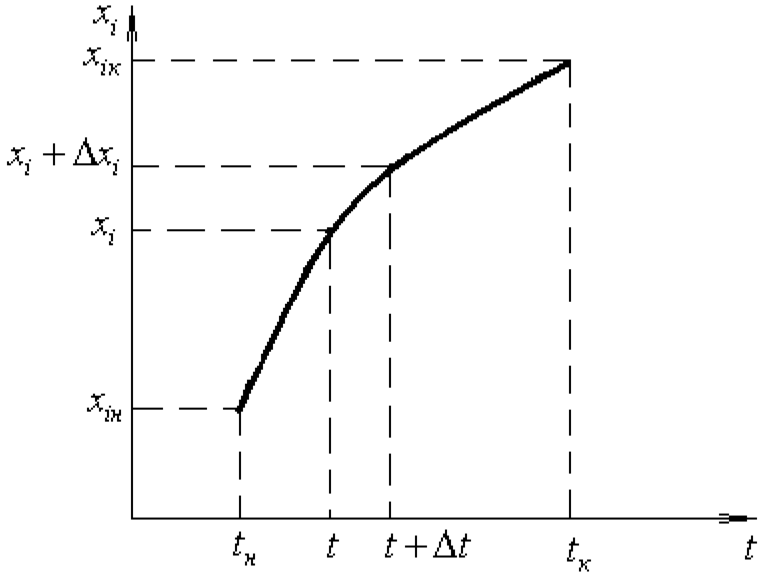

Рис. 2.

При певному керуванні мінімальне значення функціонала залежить тільки від $\vec{x}_н$ і $t_н$.

Функція $S(\vec{x})$ називається функцією Беллмана.

Розглянемо дві близькі точки оптимальної траєкторії $\vec{x}(t)$ й $\vec{x}(t) + \overrightarrow{\Delta x}(t)$.

Точка $\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}$ перебуває ближче до кінцевого стану. Тому, дотримуючись принципу оптимальності, ділянка траєкторії від $\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}$ до $\vec{x}_к$ вже оптимальна.

$$S(\vec{x}, t) = \min_{u \in V_u} \left\{ \int_{t_н}^{t+\Delta t} f_0(\cdot) dt + \min \int_{t+\Delta t}^{t_к} f_0(\cdot) dt \right\} \qquad (4)$$

Відповідно до теореми про середнє можна записати

$$\int_{t_н}^{t+\Delta t} f_0(\cdot) dt = f_0(\cdot) \Delta t \qquad (5)$$

У такий спосіб

$$S(\vec{x}, t) = \min_{u \in V_u} \left\{ f_0(\cdot) \Delta t + S(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}, t + \Delta t) \right\} \qquad (6)$$

Приймемо допущення, що функція $S(\vec{x}, t)$ має частинні похідні по всіх координатах x_i і за часом t .

Тоді, розклавши $S(\vec{x}, t)$ в ряд Тейлора, одержимо

$$S(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}, t + \Delta t) = S(\vec{x}, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i + \frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} \cdot \Delta t \qquad (7)$$

Згідно (1), запишемо

$$\dot{x}_i \cdot \Delta t = f_i(\cdot) \Delta t = \Delta x_i$$

Тоді (7) приймає наступний вид

$$S(\vec{x}+\overrightarrow{\Delta x}, t+\Delta t) = S(\vec{x},t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial x_i} \cdot f_i(\cdot)\Delta t + \frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial t} \cdot \Delta t \qquad (8)$$

Підставимо (8) в (6) $S(\vec{x},t)$ і одержимо

$$S(\vec{x},t) = \min_{u \in V_u} \left\{ f_0(\cdot)\Delta t + S(\vec{x},t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial x_i} \cdot f_i(\cdot)\Delta t + \frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial t} \cdot \Delta t \right\} \qquad (9)$$

Беручи до уваги, що $S(\vec{x},t)$ і $\dfrac{\partial S}{\partial t}$ не залежать від $\vec{u}$, (3.9) можна перетворити до виду

$$\frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial t} + \min_{u \in V_u} \left\{ f_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial x_i} \cdot f_i(\cdot) \right\} \cdot \Delta t = 0 \qquad (10)$$

У результаті одержуємо

$$-\frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial t} = \min_{u \in V_u} \left\{ f_0(\cdot) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial x_i} \cdot f_i(\cdot) \right\}, \qquad (11)$$

Або у векторній формі

$$-\frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial t} = \min_{u \in V_u} \left\{ f_0(\cdot) + \nabla_x^T S(\vec{x},t) \cdot \vec{f}(\vec{x},\vec{u},t) \right\}, \qquad (12)$$

Це рівняння в частинних похідних, називається рівнянням Беллмана. Рівняння Беллмана – аналітичний вираз принципу оптимальності для безперервних процесів. Він обґрунтований лише за умови, що існують частинні похідні функції $S(\vec{x},t)$ по всіх координатах x_i і часу t. Випадки, коли це допущення не виконується, зустрічаються досить часто. Наприклад, допущення не виконується для лінійних систем у точках, що належить лінії (поверхні) перемикання.

За допомогою рівняння (11) можуть бути отримані оптимальні керування й траєкторії. Однак процедура аналітичного рішення рівняння в частинних похідних, ускладненого умовою мінімуму, представляє більші труднощі.

3 РІШЕННЯ РІВНЯННЯ БЕЛЛМАНА

Рівняння Беллмана являє собою диференціальне рівняння в частинних похідних, рішенням якого є функція $S(\vec{x},t)$.

Величина $\vec{u}$, що входить у праву частину рівняння виключається з нього в результаті мінімізації. Якщо $\vec{u}_{опт}$ перебуває усередині припустимої області зміни $\vec{u}$, то необхідною умовою мінімуму виразу у фігурних дужках служить рівність нулю похідної цього виразу по $\vec{u}$. Таким чином, рівняння Беллмана може бути замінено системою рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_0(\vec{x},\vec{u},t)}{\partial u_l} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial f_i(\vec{x},t)}{\partial u_l} = 0, \ l = 1,2,\dots n, \\ -\dfrac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial t} = f_0(\vec{x},\vec{u}_{on},t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial x_i} \cdot f_i(\vec{x},\vec{u}_{on},t) \end{cases} \qquad (13)$$

де u_{on} – оптимальне керування.

Ця система рівнянь не повністю еквівалентна рівнянню Беллмана оскільки умові мінімуму по $\vec{u}$ можуть задовольняти не тільки оптимальні керування, але й керування, які надають функціоналу максимальне значення, а також керування, що визначають локальні екстремуми цього функціонала.

Таким чином, отримана система рівнянь є лише необхідною умовою оптимальності, тоді як рівняння Беллмана містить і достатню вимогу у формі вимоги мінімізації.

Однак на практиці для відшукання оптимальних керувань часто досить розглянути рішення системи рівнянь, одержуваної з рівняння Беллмана.

Якщо область визначення керування u замкнена і можливі оптимальні значення розташовані на границі припустимої області, то рівняння Беллмана варто записати

$$-\frac{\partial S(\vec{x},t)}{\partial t}=\inf_{u\in V_u}\left\{f_0(\vec{x},\vec{u},t)+\nabla_x S(\vec{x},t)\cdot\vec{f}(\vec{x},\vec{u},t)\right\} \tag{14}$$

Ця умова є також і достатньою.

У тому випадку, коли розглядається автономна система, тобто рівняння об'єкта й підінтегральна функція $f_0(\cdot)$ явно не залежать від часу, початковий і кінцевий стани фіксовані, а час $t_к$ вільний, рівняння Беллмана набуває наступного виду:

$$0=\min_{u\in Vu}[f_0(\vec{x},\vec{u})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}f_i(\vec{x},\vec{u})] \tag{15}$$

Для задач оптимальної швидкодії можна записати

$$-1=\min_{u\in Vu}\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}f_i(\vec{x},\vec{u})\}. \tag{16}$$

Відповідно до визначення функцій Беллмана на правому кінці задовольняє рівності

$$S(\vec{x}(t_k),t_k)=0, \tag{17}$$

а для задачі Больца

$$S(\vec{x}(t_k),t_k)=G_0(\vec{x}(t_k),t_k). \tag{18}$$

Дискретна форма методу динамічного програмування

Розглянемо об'єкт керування, рух якого описується диференціальним рівнянням

$$\dot{x}=f_1(x(t),u(t)),x(t_i)=x_i\,,n=m=1\,. \tag{19}$$

Потрібно знайти керування, що доставляє мінімум функціоналу

$$I=\int_{t_i}^{t_k}\hat{f}_0(x(t),u(t))dt, \tag{20}$$

де t_k - фіксовано.

Представимо задачу(19)-(20) у дискретній формі. Розділимо інтервал часу $[t_i\,,t_{\hat{e}}]$ на N різних частин T і розглянемо дискретні значення функцій x(t), u(t) у вигляді $x=x[k],u=u[k]$, де к=0,1,2…...N у моменти часу t=0,T,2T...NT.

Поставлена задача в дискретному варіанті приймає вид

$$x[k+1]=x[k]+f_1(x[k],u[k]), \tag{21}$$

$$I=\int_{k=0}^{N-1}f_0(x[k],u[k]),$$

$$x[0]=x_н,f_1(\cdot)\cdot T=f(\cdot),\hat{f}_0(\cdot)\cdot T=f_0(\cdot) \tag{22}$$

На кожному з часових інтервалів T керуючий вплив U[k]=Uk зберігає незмінне значення. Таким чином оптимальний процес буде визначений, якщо будуть знайдені значення керуючих впливів в усі дискретні моменти часу k=0,1,.., N-1 причому, U[k]$\in$ Vu і мінімізує суму (22) . Отже, критерій оптимальності є функцією N змінних Uk і задача може бути вирішена шляхом відшукання мінімуму складної функції великого числа змінних.

Метод динамічного програмування дозволяє звести цю задачу до простішої: до послідовної мінімізації деяких функцій тільки однієї змінної.

Метод динамічного програмування широко застосовується для оптимізації дискретних систем. Істотним недоліком методу є великий об'єм обчислень і необхідної пам'яті для зберігання проміжних результатів при рішенні задач на ЕОМ, причому, вимоги до пам'яті сильно зростають при збільшенні розмірності задачі.

При оптимізації об'єктів з безперервними процесами застосовується рівняння Беллмана, рішення якого викликає значні утруднення.

Функція Беллмана $S(t,\vec{x})$ повинна бути диференціюємою, а ця вимога не виконується при наявності обмежень.

$S(t,\vec{x})$ заздалегідь невідома й немає загального способу визначення її в явній аналітичній формі, тому кожна задача вимагає особливого підходу.

Для лінійних задач із квадратичними функціоналами вид $S(\vec{x})$ відомий і рішення виходить у замкнутому виді.

При чисельному рішенні рівняння Беллмана можна порівняно легко враховувати обмеження на $\vec{u},\vec{x}$.

Переваги методу динамічного програмування (ДП).

1) ДП являє собою, насамперед, засіб рішення задач, які можуть бути вирішені й іншими методами.

Цінність же методу полягає в іншому підході: багатокроковий процес прийняття рішень заміняється послідовністю однокрокових процесів ухвалення рішення.

2) ДП дає математичний апарат для рішення задач, які раніше не вміли вирішувати. Зокрема, варіаційні задачі з обмеженнями типу нерівностей, рішення яких пов'язане зі значними труднощами, легко вирішуються методом ДП.

3) ДП має велику загальність і може застосовуватись для широкого кола задач.

Лекцію підготували:

начальник кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
д.т.н., с.н.с. О.М. Соболь

доцент кафедри управління та організації
діяльності у сфері цивільного захисту,
к.т.н., доцент О.О. Писклакова

Обговорена та схвалена на засіданні кафедри «__» _______ 20__ р.