Національний університет цивільного захисту України

Кафедра фізико-математичних дисциплін

Горонескуль М. М

Методичні вказівки (рекомендації)
для проведення практичних занять
з навчальної дисципліни
ВИЩА МАТЕМАТИКА
1-й семестр

підготовки за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти

в галузі знань 10 «Природничі науки»

спеціальність 101 «Екологія»

спеціалізація «Екологічна безпека»

МАТРИЦІ І ВИЗНАЧНИКИ.

Контрольні питання

1. Що називається матрицею розміру $m \times n$?
2. Яка матриця називається квадратною, нульовою, діагональною, одиничною, транспонованою до даної матриці A?
3. Що називається визначником другого порядку, третього порядку, n–го порядку?
4. Що називається мінором та алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника n–го порядку?
5. Наведіть основні властивості визначників.
6. Запишіть формулу розкладання визначника за елементами 1–го рядка.

Рекомендована література: 1, 3, 7, 8, 9, 11,12, 14.

Приклад 1. Знайти транспоновану матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

Приклад 2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 8 + 3 = 11.$

Відповідь: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11.$

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання: $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{matrix} =$

$= 2 \cdot 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 0 - (-2) \cdot 3 \cdot 1 = = 8 + 4 + 0 + 4 - 0 + 6 = 22.$

Відповідь: $\Delta = 22.$

Приклад 4. За правилом «трикутників» обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 2\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 0 + (-2)\cdot 2\cdot(-1) - \\ -1\cdot 4\cdot(-1) - (-2)\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 0 = 22 \end{matrix}.$

Відповідь: $\Delta = 22$.

Приклад 5. Задано визначник $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Обчислити мінори M_{11}, M_{12} та M_{13} до елементів a_{11}, a_{12} та a_{13} відповідно.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Відповідь: $M_{11} = 4$; $M_{12} = 5$; $M_{13} = 4$.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називають число, що визначається $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Приклад 6. Задано визначник $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Обчислити алгебраїчні доповнення A_{11}, A_{12} та A_{13} відповідно до елементів a_{11}, a_{12} та a_{13}.

Розв'язання:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 = 4; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 5 = -5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 = 4.$$

Відповідь: $A_{11} = 4$; $A_{12} = -5$; $A_{13} = 4$.

Приклад 7. За елементами першого рядка обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 2\cdot A_{11} + (-2)\cdot A_{12} + 1\cdot A_{13} = \\ = 2\cdot 4 + (-2)\cdot(-5) + 1\cdot 4 = 8 + 10 + 4 = 22, \end{matrix}$

де $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 4=4$;

$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot 5=-5$;

$A_{12}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 4=4$.

Відповідь: $\det A=22$.

Приклад 8. Задано визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 10\end{vmatrix}.$$

Розв'язання: Розкладемо визначник за елементами 3–го стовпця:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 10\end{vmatrix}=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}+a_{43}A_{43}=63.$$

Відповідь: $\det A=63$.

§ 3 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1.2.1. Обчислити визначники другого порядку:

1) $\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -5 & 2\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$.

Завдання 1.2.2. Обчислити визначники третього порядку:

1) $\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 5\\ 4 & 1 & 6\end{vmatrix}$.

Завдання 1.2.3. Обчислити визначники четвертого порядку:

1) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 6 & 1\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}2 & 3 & -3 & 4\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 6 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -5\end{vmatrix}$.

МАТРИЦІ ТА ДІЇ З НИМИ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ.

§ 2 Контрольні питання

1. Що називається матрицею розміру $m \times n$?
2. Яка матриця називається квадратною, нульовою, діагональною, одиничною, транспонованою до даної матриці A?
3. Що називається сумою двох матриць, їх різницею?
4. Що називається добутком числа λ на матрицю A?
5. Які матриці називаються узгодженими?
6. Що називається добутком матриць?
7. Що називається многочленом матриці A?
8. Дайте означення оберненої матриці до даної матриці A?
9. Сформулюйте необхідну та достатню умову існування оберненої матриці.
10. Наведіть формулу, за якою знаходиться обернена матриця та сформулюйте її властивості.

Рекомендована література: 1, 3, 7, 8, 9, 11,12, 14.

Дії з матрицями

Приклад 1.1.2. Знайти $2A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: $2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

Приклад 1. Знайти суму матриць A та B, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 7 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 7 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$

Приклад 2. Знайти $2A - 3B + C$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 8\\ -1 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$2A-3B+C=2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 8\\ -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & -2\\ 0 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 15 & 24\\ -3 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -2\\ -10 & -24\\ 4 & -5\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $2A-3B+C=\begin{pmatrix}13 & -2\\ -10 & -24\\ 4 & -5\end{pmatrix}.$

Приклад 3. Знайти AB та BA, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Оскільки матриці $A_{2,2}$ та $B_{2,3}$ є узгодженими, то $A_{2,2}B_{2,3}=C_{2,3}$. Отже,

$$C=AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot5 & 1\cdot2+0\cdot0 & 1\cdot4+0\cdot(-1)\\ 3\cdot1+(-5)\cdot5 & 3\cdot2+(-5)\cdot0 & 3\cdot4+(-5)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -22 & 6 & 17\end{pmatrix}$$

Відповідь: $C=AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -22 & 6 & 17\end{pmatrix}.$

Приклад 4. Знайти значення многочлена $f(x)$ при $x=A$, де A – задана матриця: $f(x)=x^2-3x+5,\quad A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$

Розв'язання: $f(A_{2,2})=A_{2,2}^2-3A_{2,2}+5E_{2,2}$, де E – одинична матриця другого порядку.

$$f(A)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Оскільки $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-3 & -2-1\\ 6+3 & -3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 9 & -2\end{pmatrix}$, то

$$f(A)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}1 & -3\\ 9 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -3\\ 9 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Оскільки $f(A)=O$, то матриця A є коренем даного многочлена.

Відповідь: $f(A)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$

ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Приклад 5. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Обчислимо визначник матриці A:

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{matrix}=-34.$$

Оскільки $\det A \neq 0$, то існує обернена матриця $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}$, де $\tilde{A}$ – приєднана матриця до заданої матриці A. Обчислимо приєднану матрицю $\tilde{A}$ до матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Приєднана матриця $\tilde{A}$ складається з A_{ij} – алгебраїчних доповнень елементів a_{ij} матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1-6)=-7,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(2+2)=-4,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot(6-1)=5,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(2+3)=-5,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(3-1)=2,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(9+2)=-11,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot(4-1)=3,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(6+2)=-8,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-3-4)=-7.$$

Одержимо,

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} -7 & -4 & 5 \\ -5 & 2 & -11 \\ 3 & -8 & -7 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\tilde{A}=\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}$ – приєднана матриця до матриці *A*.

Обернена матриця $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}$.

Остаточно, $A^{-1} = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}$.

Обернену матрицю знайдено вірно, якщо виконується рівність:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E\,.$$

Знайдемо $A^{-1}A = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -21-10-3 & -14+5+9 & 7-10+3 \\ -12+4+8 & -8-2-24 & 4+4-8 \\ 15-22+7 & 10+11-21 & -5-22-7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -34 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 0 \\ 0 & 0 & -34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E\,.$$

Відповідь: $A^{-1} = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}$.

§ 3 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Обчислити $3A + 2B$, якщо:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Обчислити:

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $\qquad$ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти значення многочлена $f(A)$ від матриці A:

1) $f(x) = 3x^2 - 4$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Знайти обернені матриці для заданих матриць:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; $\qquad$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

§ 2 Контрольні питання

1. Яка система рівнянь називається лінійною?
2. Що називається рангом матриці?
3. Що називається основною матрицею та розширеною матрицею системи?
4. Сформулюйте теорему Кронекера–Капеллі – критерій сумісності системи.
5. В якому випадку система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок; безліч розв'язків; не має розв'язків?
6. Які перетворення матриць називаються елементарними?

Рекомендована література: 1, 3, 7, 8, 9, 11,12, 14.

Приклад 1. За формулами Крамера розв'язати задану систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання: Для даної системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Формулами Крамера мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де $$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -34.$$

Визначники Δ_i $(i = \overline{1,3})$, одержується з визначника Δ шляхом заміни i-го стовпця стовпцем вільних членів. Отже,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 11 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -34; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 2 & 11 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 34;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 11 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -136.$$

Таким чином, за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-34}{-34} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{34}{-34} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-136}{-34} = 4.$$

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 4$.

Приклад 2. Методом Гаусса розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання: Запишемо розширену матрицю системи і приведемо її до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень розширеної матриці, які виконують над рядками:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 11 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \text{поміняємо 1-й} \\ \text{та 3-й рядок} \\ \text{місцями} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 11 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \sim \left[\begin{array}{c} \text{одержимо під} \\ \text{елементом} \\ \text{a}_{11}\text{=-1 нулі} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 11 \\ 0 & 11 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \text{одержимо новий третій рядок :помножемо} \\ \text{елементи другого рядка на (-2) та додамо} \\ \text{з відповідними елементами третього рядка} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \text{поміняємо 2-й} \\ \text{та 3-й рядок} \\ \text{місцями} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \sim \left[\begin{array}{c} \text{одержимо} \\ \text{під a}_{22}\text{=1} \\ \text{нуль} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \\ 0 & 0 & 34 & 136 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Оскільки $RgA = Rg\overline{A} = 3$, де $n = 3$ – кількість невідомих, то системасумісна і має єдиний розв'язок.

Ставимо у відповідність розширеній матриці систему, еквівалентну вихідній, розв'язання якої здійснюємо знизу уверх:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ \qquad x_2 - 6x_3 = -25; \\ \qquad\qquad x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 + x_3; \\ x_2 = 6x_3 - 25; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 + 4; \\ x_2 = 24 - 25; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 + 4; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + 4; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 4$.

Приклад 3. Розв'язати задану систему матричним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання: Запишемо систему рівнянь у вигляді матричного рівняння $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Із матричного рівняння $AX = B$, звідки $X = A^{-1} \cdot B$.

Розв'язання матричним методом можливе за умови, якщо $\det A = \Delta \neq 0$, тобто матриця A невироджена:

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -34 \neq 0$, тому існує обернена матриця, отже, і єдиний розв'язок системи.

Обернена матриця (див. **приклад 1.2.8**) має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}$$

Знайдемо матрицю невідомих: $X = A^{-1} \cdot B$.

$$X = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} 21-55+0 \\ 12+22+1 \\ -15-121+0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -34 \\ 34 \\ -136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Отже, $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 4$.

Перевірка. Підставимо отриманий розв'язок у систему:

$$\begin{cases} 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) - 4 = -3; \\ 2\cdot 1 - (-1) + 2\cdot 4 = 11; \\ -1 + 3\cdot(-1) + 4 = 0. \end{cases}$$

Систему рівнянь розв’язана вірно.

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 4$.

§ 3 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. За формулами Крамера розв'язати системи:

1) $\begin{cases} 3x - 5y = 13; \\ 2x + 7y = 81; \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x - 4y = -6; \\ 3x + 4y = 18; \end{cases}$.

3) $\begin{cases} x + y - 2z = 6; \\ 2x + 3y - 7z = 16; \\ 5x + 2y + z = 16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$.

Завдання 2. Методом Гаусса розв'язати системи:

1) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$.

Завдання 3. Матричним методом розв'язати системи:

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

ВЕКТОРИ. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Контрольні питання

1. Що називається вектором?
2. Які вектори називаються колінеарними, компланарними?
3. Які операції з векторами називаються лінійними?
4. Що називається сумою двох векторів?
5. Дайте означення добутку вектора $\vec{a}$ на число λ. Як у залежності від λ буде спрямований вектор $\lambda\vec{a}$.
6. Що називається розкладом вектора за базисом у множині геометричних векторів $\mathbf{V}_3$?
7. Який базис називається ортонормованим?
8. Що називається декартовою прямокутною системою координат у просторі?
9. Задані координати векторів $\vec{a}=(x,y,z)$ та $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ у прямокутному базисі. Чому дорівнюють координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$ у тому ж базисі?
10. Задані координати вектора $\vec{a}=(x,y,z)$ у прямокутному базисі. Чому дорівнюють координати вектора $\lambda\vec{a}$ у тому ж базисі?
11. Нехай у декартовій прямокутній системі координат задано точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$. Чому дорівнюють координати вектора $\overrightarrow{AB}$ у цій же системі координат?
12. Нехай у декартовій прямокутній системі координат дано точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$. Чому дорівнюють координати точки $C(x, y, z)$, яка ділить відрізок $\overrightarrow{AB}$ у відношенні λ?
13. Наведіть означення скалярного добутку двох векторів?
14. Перелічите основні властивості скалярного добутку векторів.
15. Як виражається скалярний добуток векторів через координати векторів у декартовій прямокутній системі координат?
16. Як визначити кут між ненульовими векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$?

Сформулюйте умову ортогональності (перпендикулярності) векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; умова колінеарності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$?

Рекомендована література: 1, 3, 7, 8, 9, 11,12, 14.

Приклад 1. Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$, якщо $\vec{x}=(2,5,0)$, $\vec{p}=(1,2,-1)$, $\vec{q}=(3,6,1)$, $\vec{r}=(3,9,3)$

Розв'язання: Оскільки $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 6 & 1\\ 3 & 9 & 3\end{vmatrix}\neq 0$, то вектор $\vec{x}$ можна розкласти за базисом $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.

Знайдемо коефіцієнти розкладу $\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}=\vec{x}$. Підставимо координати векторів у рівність та одержимо: $\alpha(1,2,-1)+\beta(3,6,1)+\gamma(3,9,3)=(2,5,0)$.

Запишемо у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases}\alpha+3\beta+3\gamma=2;\\ 2\alpha+6\beta+9\gamma=5;\\ -\alpha+\beta+3\gamma=0.\end{cases}$$

Із системи $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=\frac{1}{3}$.

Зробивши перевірку, впевнюємося у правильності розв'язання системи. Отже, шуканий розв'язок має такий вигляд $\vec{x}=1\cdot\vec{p}+0\cdot\vec{q}+\frac{1}{3}\cdot\vec{r}$.

Відповідь: $\vec{x}=\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{r}$.

Приклад 2. Визначити довжину вектора $\vec{a}=(2,3,0)$.

Розв'язання: Довжина вектора $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{4+9+0}=\sqrt{13}$.

Відповідь: $|\vec{a}|=\sqrt{13}$.

Приклад 3. Задано точки $A(3,4,12)$ і $B(6,8,0)$. Визначити координати вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, його довжину $|\vec{a}|$, напрямні косинуси, та орт $\vec{a}_0$.

Розв'язання: Знайдемо $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$, отже $\vec{a}=(6-3;\ 8-4;\ 0-12)=(3;\ 4;\ -12)$, $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2+(-12)^2}=13$,

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{3}{13},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{4}{13},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{12}{13}.$$

Оскільки $\vec{a}_0=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$, то

$$\vec{a}_0=\left(\frac{3}{13};\frac{4}{13};-\frac{12}{13}\right)\text{ або }\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}_0|}=\frac{3\vec{i}+4\vec{j}-12\vec{k}}{13}=\left(\frac{3}{13};\frac{4}{13};-\frac{12}{13}\right).$$

Відповідь: $\vec{a}=(3;\ 4;\ -12)$; $|\vec{a}|=13$; $\vec{a}_0=\left(\frac{3}{13};\frac{4}{13};-\frac{12}{13}\right)$.

Приклад 4. У базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ задані вектори $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ та $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

Розв'язання: $2\vec{a}=2\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$;

$3\vec{b}=3\left(\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}\right)=3\vec{i}+9\vec{j}-12\vec{k}$;

$\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}=\left(4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}\right)+\left(3\vec{i}+9\vec{j}-12\vec{k}\right)=7\vec{i}+7\vec{j}-10\vec{k}$.

Відповідь: $\vec{c}=7\vec{i}+7\vec{j}-10\vec{k}$.

Приклад 5. Точка $C(2,2,4)$ ділить відрізок AB у відношенні $\lambda=\frac{2}{3}$. Знайти координати точки B, якщо $A(-2,4,0)$.

Розв'язання: Нехай $B(x_B,y_B,z_B)$. Враховуючи, що точка C ділить відрізок AB у відношенні $\lambda=\frac{2}{3}$, маємо:

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\ \Rightarrow 2=\frac{-2+\frac{2}{3}x_B}{1+\frac{2}{3}},\ \Rightarrow x_B=8;$$

$$y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda},\ \Rightarrow 2=\frac{-4+\frac{2}{3}\cdot x_B}{1+\frac{2}{3}},\Rightarrow y_B=-1;$$

$$z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda},\Rightarrow 4=\frac{0+\frac{2}{3}\cdot x_B}{1+\frac{2}{3}},\ \Rightarrow z_B=10.\quad \textit{Відповідь}:\ B(8,-1,10).$$

Приклад 6. У трикутнику з вершинами $A(2,-1,3)$, $B(-2,2,5)$, $C(1,2,3)$ знайти косинус кута при вершині A.

Розв'язання: $\cos\varphi=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$;

$\overrightarrow{AB}=(-4,3,2)$; $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+3^2+2^2}=\sqrt{29}$;

$\overrightarrow{AC}=(-1,3,0)$; $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+3^2+0^2}=\sqrt{10}$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4\cdot(-1)+3\cdot3+2\cdot0=13$;

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{13}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{10}}\approx 0,763.$$

Відповідь: $\cos\varphi\approx 0,763$, $\varphi\approx 40^\circ$.

§ 3 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Задано вектори $\vec a=2\vec i+3\vec j$, $\vec b=-3\vec j-2\vec k$, $\vec c=\vec i+\vec j-\vec k$. Знайти:

а) координати орт вектора $\vec a_0$ та напрямні косинуси вектора $\vec a$;

б) координати вектора $\vec d=\vec a-\frac{1}{2}\vec b+\vec c$;

в) розклад вектора $\vec f=\vec a+\vec b-2\vec c$ за базисом $\beta=(\vec i,\vec j,\vec k)$;

г) $Пр_{\vec j}\left(\vec a-\vec b\right)$ – проекцію вектора $\left(\vec a-\vec b\right)$ на вісь орт вектора $\vec j$.

Завдання 2. За яких значень α та β вектори $\vec a=-2\vec i+3\vec j+\alpha\vec k$ та $\vec b=\beta\vec i-6\vec j+2\vec k$ колінеарні?

Завдання 3. Відрізок з кінцями у точках $A(3,-2)$ та $B(6,4)$, розділений на три рівні частини. Знайти координати точок ділення.

Завдання 4. Для заданих векторів $\vec a$, $\vec b$ та $\vec c$ обчислити $Пр_{\vec c}\left(2\vec a-3\vec b\right)$:

а) $\vec a=-\vec i+2\vec j+\vec k$, $\quad\vec b=3\vec i+\vec j+\vec k$, $\quad\vec c=4\vec i+3\vec j$;

б) $\vec a=\vec i-2\vec j+3\vec k$, $\quad\vec b=-3\vec i+2\vec j-\vec k$, $\quad\vec c=6\vec i+2\vec j+3\vec k$.

Завдання 1.3.5. Обчислити роботу *А* сили $\vec F=-\vec i+2\vec j+\vec k$ при переміщенні матеріальної точки з положення $M_1(-1,2,0)$ у положення $M_2(2,1,3)$.

ВЕКТОРНИЙ І МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Контрольні питання

1. Що називається векторним добутком двох векторів?
2. Який геометричний зміст модуля векторного добутку двох неколінеарних векторів?
3. Перелічите основні властивості векторного добутку векторів.
4. Запишіть формулу, за якою обчислюється векторний добуток векторів $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ та $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.
5. Що називається мішаним добутком векторів?
6. Який геометричний зміст модуля мішаного добутку некомпланарних векторів?
7. У чому полягає необхідна та достатня умова компланарності трьох векторів?
8. Як виражається мішаний добуток трьох векторів через координати векторів у декартовій системі координат?

Рекомендована література: 1, 3, 7, 8, 9, 11,12, 14.

Приклад 1. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ та $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Розв'язання:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} = (-7,3,1).$$

Відповідь: $\vec{a}\times\vec{b} = (-7,3,1)$.

Приклад 2. Обчислити площу трикутника ABC, де $A(2,-1,3)$, $B(-2,2,5)$, $C(1,2,3)$.

Розв'язання: Площа $S_\blacktriangle$ трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислюється за формулою $S_\blacktriangle = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Врахуємо, що $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-4,3,2)$ та $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (-1,3,0)$, тоді

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 2\vec{j} - 9\vec{k} = (-6,-2,-9);$$

$$S_\blacktriangle = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{121} = 5,5 \text{ (кв.од.).}$$

Відповідь: $S_\blacktriangle = 5,5$ (кв.од.).

Приклад 3. Задані вершини трикутної піраміди $ABCD$, де $A(3,2,1)$, $B(-2,1,-2)$, $C(-1,2,3)$ та $D(1,-2,3)$. Знайти її об'єм.

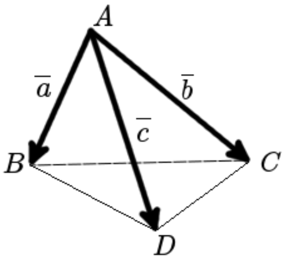


Рис. 1.

Розв'язання. Об'єм $V_\blacktriangle$ трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ обчислюється за формулою $V_\blacktriangle = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$. Оскільки $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-5,-1,-3)$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (-4,0,2)$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = (-2,-4,2)$, тоді:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -92;$$

Відповідь. Отже, $V_\blacktriangle = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\cdot 92 = \frac{46}{3}$ (куб.од.).

Приклад 4. Задано вектори $\vec{a}=(2,3,0)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$, $\vec{c}=(3,2,1)$. Визначити:

1) $|\vec{a}|$ – довжину вектора $\vec{a}$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ – скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

3) $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ – косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

4) $\vec{a}\times\vec{b}$ – векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

5) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ – мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

6) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

7) чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Розв'язання:

1) довжина вектора $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{4+9+0}=\sqrt{13}$;

2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2\cdot1+3\cdot(-2)+0\cdot2=4$;

3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{1+4+4}}=-\dfrac{4}{3\sqrt{13}}$;

4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}==\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}==6\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}=(6,-4,-7);$$

5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=3$$

або $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=(6,-4,-7)(3,2,1)=18-8-7=3$

6) умова колінеарності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$, отже,

$$\frac{2}{1}\neq\frac{3}{-2}\neq\frac{0}{2}\ \Rightarrow\ \vec{a}\text{ та }\vec{b}\text{ не колінеарні;}$$

7) умова компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$, отже, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=3\neq0$,

тому вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарні.

§ 3 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти координати вектора $\vec{x}$, колінеарного вектору $\vec{a}=(2,1,-1)$ і такого, що задовольняє умові $\vec{a}\cdot\vec{x}=3$.

Завдання 2. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ і $C(1,3,-1)$, та знайти висоту $h=|\overrightarrow{BD}|$.

Завдання 3. Сили $\vec{F}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ прикладена до точки $A(4,-2,3)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $O(3,2,-1)$.

Завдання 4. Встановити, чи утворюють вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ базис у множині всіх векторів, якщо:

а) $\vec{a}_1 = (2,3,-1)$, $\vec{a}_2 = (1,-1,3)$, $\vec{a}_3 = (1,9,-11)$;

б) $\vec{a}_1 = (3,-2,-1)$, $\vec{a}_2 = (2,1,2)$, $\vec{a}_3 = (3,-1,-2)$.

Завдання 5. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

Завдання 6. Знайти довжину висоти паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, якщо за основу прийняти паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Завдання 7. У піраміди з вершинами у точках $A(1,1,1)$, $B(2,0,2)$, $C(2,2,2)$ та $D(3,4,-3)$ обчислити висоту $h = |\overrightarrow{DE}|$.

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

Контрольні питання

1. Записати загальне рівняння прямої на площині.
2. Який геометричний зміст в загальному рівнянні прямої на площині мають коефіцієнти при x та y?
3. Записати рівняння прямої на площині, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B)$.
4. Записати канонічне рівняння прямої на площині та вказати геометричний зміст параметрів, що в нього входять.
5. Записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом і вказати геометричний зміст параметрів, що в нього входять.
6. Записати умови паралельності двох прямих.
7. Записати умови перпендикулярності двох прямих.
8. Як обчислити кут між прямим?

Рекомендована література: 1, 3, 7, 8, 9, 11,12, 14.

Приклад 1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1,2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (3,-5)$.

Розв'язання: Використаємо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n} = (A, B)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Маємо: $3(x-1) - 5(y-2) = 0$. Після розкриття дужок і спрощення одержимо $3x - 5y + 7 = 0$.

Відповідь: $3x - 5y + 7 = 0$ – шукане рівняння прямої.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1,2)$ паралельно вектору $\vec{s} = (6,1)$.

Розв'язання: Використаємо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{s} = (m, p)$ (канонічне рівняння): $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{p}$. Маємо: $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-2}{1}$. Звідки $x - 1 = 6(y-2)$, а після спрощення одержимо $x - 6y + 11 = 0$.

Відповідь: $x - 6y + 11 = 0$ – шукане рівняння прямої.

Приклад 3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1,2)$ та $M_2(3,5)$.

Розв'язання: Використаємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Маємо: $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-2}{5-2}$ або $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3}$. Після спрощення одержимо $3x - 2y + 1 = 0$.

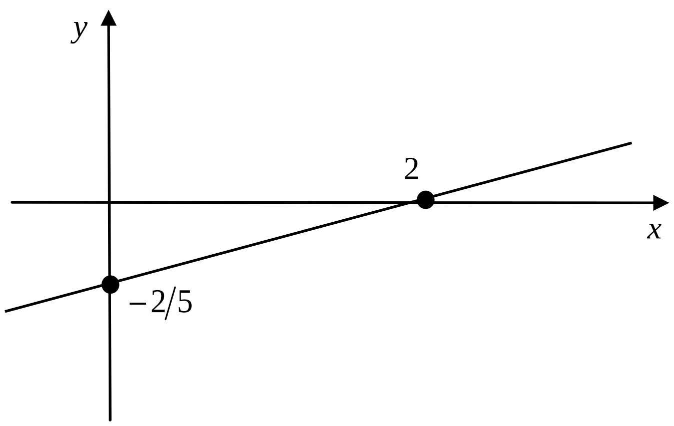
Відповідь: $3x - 2y + 1 = 0$ – шукане рівняння прямої.

Приклад 4. Задано рівняння прямої $x - 5y - 2 = 0$. Записати його у вигляді:

а) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;

б) рівняння прямої у відрізках, зробити малюнок.

Розв'язання: Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$, де $k = \mathrm{tg}\alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої, α – кут між прямою і додатним напрямом осі Ox, b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy.



Зведемо рівняння прямої $x-5y-2=0$ до означеного вигляду $5y=x-2$, звідки $y=\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}$, де $k=\frac{1}{5}$ та $b=-\frac{2}{5}$.

Рівняння прямої у відрізках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де a та b – величини напрямлених відрізків, які відтинає пряма на координатних осях.

Спочатку подамо рівняння прямої у вигляді: $x-5y=2$. Розділимо ліву і праву частину рівняння на 2: $\frac{x}{2}-\frac{5y}{2}=\frac{2}{2}$. Звідки шукане рівняння набуде вигляду: $\frac{x}{2}+\frac{y}{\left(-2/5\right)}=1$, де $a=2$ та $b=-\frac{2}{5}$.

Відповідь: $y=\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}$ – рівняння заданої прямої з кутовим коефіцієнтом; $\frac{x}{2}+\frac{y}{\left(-2/5\right)}=1$ – рівняння прямої у відрізках.

Приклад 5. Знайти кут між прямими $l_1: x+y-9=0$ та $l_2: 3x-4y+1=0$.

Розв'язання: Спосіб 1. Кут між прямими визначимо з формули: $\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$.

Для заданих прямих $\vec{n}_1=(1,1)$ та $\vec{n}_2=(3,-4)$ відповідно.

Маємо: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_1=(1,1)\cdot(3,-4)=3-4=-1$;

$|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_1|=\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}=5\sqrt{2}$;

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{-1}{5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Звідки $\varphi=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}\approx 1,71$ або $\varphi\approx 98^\circ$.

Спосіб 2. Кут між прямими визначимо за формулою $\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, де $k_1\cdot k_2\neq -1$. Для заданих прямих маємо $k_1=-1$ та $k_2=\frac{3}{4}$ відповідно.

Обчислимо: $k_2-k_1=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$ та $1+k_1\cdot k_2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. Отже, $\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{7/4}{1/4}=7$, $\varphi=\mathrm{arctg}\,(7)\approx 1,43$; $\varphi\approx 82^\circ$ – гострий суміжний кут, або $\phi\approx(180-82)^\circ=98^\circ$ – відповідний тупий суміжний кут.

Відповідь: $\varphi\approx 82^\circ$ – відповідний гострий суміжний кут, або $\phi\approx 98^\circ$ – тупий кут між прямими.

Приклад 6. Задано рівняння прямої $l_1: 4x+y-8=0$ та точка $M(-4,7)$. Знайти рівняння l_2, що проходить через точку M:

а) паралельно прямій l_1;

б) перпендикулярно прямій l_1.

Розв'язання: Рівняння заданої прямої l_1 подамо у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Отже, $l_1: y=-4x+8$, де $k_1=-4$. З умови паралельності двох прямих: $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$. Отже $k_1=k_2=-4$.

Рівняння шуканої прямої l_2, що проходить через точку M запишемо у вигляді: $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$. Маємо, $y-7=-4(x+4)$, після спрощення рівняння прямої l_2 набуде вигляду $y=-4x+9$.

З умови перпендикулярності двох прямих: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2=-1$. Отже $k_1 \cdot k_2=-1$, звідси $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{1}{4}$.

Рівняння шуканої прямої l_2, що проходить через точку M запишемо у вигляді: $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$.

Маємо, $y-7=\dfrac{1}{4}(x+4)$, після спрощення рівняння прямої l_2 набуде вигляду $y=\dfrac{1}{4}x+8$.

Відповідь: $y=-4x+9$ – рівняння прямої, паралельної заданій прямі l_1; $y=\dfrac{1}{4}x+8$ – рівняння прямої, що перпендикулярна заданій прямі l_1.

Приклад 7. Знайти відстань від прямої $l: 6x-8y+13=0$ до точки $M_0\left(1,2\right)$.

Розв'язання: Відстань від заданої точки до даної прямої обчислимо за формулою:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Отже, $d=\dfrac{|6\cdot 1-8\cdot 2-13|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\dfrac{23}{10}=2,3$.

Відповідь: $d=2,3$ – відстань від заданої точки до даної прямої.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Пряма l задана точкою $M_0(x_0,y_0)$ та нормальним вектором $\vec{n}=(A,B)$. Написати рівняння прямої, звести його до:

1) загального вигляду;
2) вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом;
3) рівняння прямої у відрізках, побудувати пряму.

Якщо,

а) $M_0(-1,2)$, $\vec{n}=(3,2)$;

б) $M_0(2,1)$, $\vec{n}=(2,-1)$.

Завдання 2. Пряма l задана точкою $M_0(x_0,y_0)$ та напрямним вектором $\vec{s}=(m,n)$. Написати рівняння прямої у канонічному вигляді, звести його до:

1) загального вигляду;
2) параметричного вигляду;
3) рівняння прямої у відрізках, побудувати пряму.

Якщо,

а) $M_0(-3,1)$, $\vec{s}=(1,-4)$;

б) $M_0(1,1)$, $\vec{s}=(0,-1)$.

Завдання 3. Пряма l задана двома точками $M_1(x_1,y_1)$ та $M_2(x_2,y_2)$.

Написати рівняння прямої, звести його до:

1) канонічного вигляду;
2) параметричного вигляду;
3) загального вигляду, побудувати пряму. Якщо,

а) $M_1(1,2)$, $M_2(-1,0)$;

б) $M_1(1,1)$, $M_2(1,-2)$.

Завдання 4. Задана пряма l та точка $M_0(x_0, y_0)$. Необхідно написати рівняння прямої, звести його до:

1) обчислити відстань d від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої l;

2) написати рівняння прямої l', яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно заданій прямій l;

3) написати рівняння прямої l'', яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно заданій прямій l. Якщо,

а) $l: -2x + y - 1 = 0$, $M_0(-1,2)$;

б) $l: 2y + 1 = 0$, $M_0(1,0)$;

в) $l: x + y + 1 = 0$, $M_0(0,-1)$.

Завдання 5. Визначити кут між прямими:

а) $l_1: 5x - y + 7 = 0$, $l_2: 2x - 3y + 1 = 0$;

б) $l_1: 3x + 2y = 0$, $l_2: 6x + 4y + 9 = 0$;

в) $l_1: 3x - 4y = 6$, $l_2: 8x + 6y = 11$.

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Контрольні питання

1. Що називається еліпсом?
2. Записати канонічне рівняння еліпса. Вказати його осі симетрії, вершини, фокуси.
3. Що називається гіперболою?
4. Записати канонічне рівняння гіперболи. Вказати її осі симетрії, вершини, фокуси, дійсну вісь, уявну вісь, асимптоти.
5. Що називається параболою?
6. Записати канонічне рівняння параболи. Вказати її вершину, фокус, вісь симетрії.
7. Що називається ексцентриситетом еліпса; гіперболи; параболи?

Рекомендована література: 1, 3, 7, 8, 9, 11,12, 14.

Приклад 1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між його фокусами $2c$, що лежить на осі $\boldsymbol{Ox}$, дорівнює 24, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{4}$.

Розв'язання: Для того, щоб скласти канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, необхідно знати параметри a та b.

Враховуючи, що ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, а $2c = 24$, маємо $\frac{3}{4} = \frac{12}{a}$, звідки $a = 16$.

Використовуючи співвідношення $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, отримаємо $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16^2 - 12^2} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$.

Отже, шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{16^2}+\frac{y^2}{\left(4\sqrt{7}\right)^2}=1$

Відповідь: канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{16^2}+\frac{y^2}{\left(4\sqrt{7}\right)^2}=1$.

Приклад 2. Задана гіпербола $9x^2 - 16y^2 = 144$. Знайти ексцентриситет гіперболи та рівняння її асимптот.

Розв'язання: Поділивши обидві частини заданого рівняння на 144, отримаємо канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, з якого видно, що $a^2 = 16$ та $b^2 = 9$, тобто $a = 4$ та $b = 3$. Використовуючи співвідношення для гіперболи $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, отримаємо $c = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$. Оскільки ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то $\varepsilon = \frac{5}{4}$. Підставивши в рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}x$ значення $a = 4$ та $b = 3$, отримуємо рівняння асимптот заданої гіперболи $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Відповідь: $\varepsilon = \frac{5}{4}$ – ексцентриситет заданої гіперболи та $y = \pm\frac{3}{4}x$ – рівняння її асимптот.

Приклад 3. Скласти рівняння параболи, яка симетрична відносно осі $\boldsymbol{Ox}$ і проходить через точки $O(0,0)$ та $A(2,3)$.

Розв'язання: Оскільки парабола симетрична відносно осі $\boldsymbol{Ox}$ і проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд:

$$y^2 = 2px.$$

Враховуючи, що парабола проходить через точку $A(2,3)$, маємо $3^2 = 2p \cdot 2$ або $9 = 4p$, звідки $p = \frac{9}{4}$. Отже, $y^2 = 2 \cdot \frac{9}{4} x$ або $y^2 = \frac{9}{2} x$ – шукане рівняння.

Відповідь: рівняння параболи $y^2 = \frac{9}{2} x$.

Приклад 4. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

Розв'язання: Оскільки загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, то у нашому випадку $A = 4$, $B = 0$, $C = 9$, $D = -8$, $E = -36$, $F = 4$.

Обчислимо дискримінант рівняння: $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 0 & 9 & -36 \\ -8 & -36 & 4 \end{vmatrix} = -5616 \neq 0$.

Обчислимо дискримінант старших членів рівняння: $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 36 > 0$.

Оскільки $\Delta \neq 0$ та $\delta > 0$, то рівняння визначає фігуру еліптичного типу. Перетворимо задане рівняння таким чином:

$$4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y = -4,$$

$$4\left(x^2 - 2x\right) + 9\left(y^2 - 4y\right) = -4,$$

$$4\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) + 9\left(y^2 - 4y + 4 - 4\right) = -4,$$

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36,$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \text{ або } \frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1.$$

Одержане рівняння є рівнянням еліпсу з центром у точці з координатами $(1,2)$ та параметрами $a = 3$ та $b = 2$. Якщо зробити паралельний перенос осей координат, прийнявши за новий початок координат точку $O_1(1,2)$ та скористатися формулами перетворення координат $x_1 = x - 1$, $y_1 = y - 2$, то відносно нових осей координат рівняння еліпса матиме вигляд:

$$\frac{x_1^2}{3^2} + \frac{y_1^2}{2^2} = 1.$$

Відповідь: $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ – еліпс.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Встановити, що кожне з наступних рівнянь визначає еліпс, знайти його: а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис. Зробити рисунок:

1) $9x^2 + 4y^2 = 36$; 2) $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Завдання 2. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо:

1) $a = 3$, $b = 2$; 2) $a = 5$, $c = 4$;

3) $c = 3$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$; 4) $b = 5$, $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

Завдання 3. Встановити, що кожне з наступних рівнянь визначає гіперболу, знайти її: а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот; д) рівняння директрис. Зробити рисунок:

1) $16x^2 - 9y^2 = 144$; 2) $16x^2 - 9y^2 = -144$.

Завдання 4. Написати канонічне рівняння гіперболи, що має дійсною вісь *Ox*, якщо:

1) $a = 2$, $b = 3$; 2) $b = 4$, $c = 5$;

Завдання 5. Написати канонічне рівняння гіперболи, що має дійсною вісь *Oy*, якщо:

1) $c = 3,\ \varepsilon = \dfrac{3}{2}$; 2) $a = 8,\ \varepsilon = \dfrac{5}{4}$.

Завдання 6. Побудувати наступні параболи та визначити їх параметри:

1) $y^2 = 6x$; 2) $x^2 = 5y$;

3) $y^2 = -4x$; 4) $x^2 = -y$.

Завдання 7. Написати рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо відомо, що:

1) парабола розташована у лівій півплощині симетрично відносно осі $\boldsymbol{Ox}$ та $p = \dfrac{1}{2}$;

2) парабола розташована симетрично відносно осі *Oy* та проходить через точку $\boldsymbol{M}(4, -8)$;

3) фокус параболи знаходиться в точці $F(0, -3)$.

Завдання 8. Встановити яку криву визначає кожне з наступних рівнянь:

1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

2) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

3) $y^2 = 4x - 8$.

ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Контрольні питання

1. Дайте означення функції.
2. Що називається областю визначення та областю значень функції?
3. Яка функція називається обмеженою?
4. Яка функція називається монотонною, строго монотонною?
5. Дайте означення парної (непарної) функції.
6. Що таке періодична функція, період?
7. Які функції називаються елементарними, перелічите основні елементарні функції.
8. Що називається числовою послідовністю?
9. Наведіть означення границі числової послідовності та тлумачення її геометричного змісту.
10. Наведіть властивості збіжних числових послідовностей.
11. Що таке число e, який логарифм називають натуральним?
12. Наведіть арифметичні властивості збіжних числових послідовностей.
13. Дайте означення еквівалентних нескінченно малих та еквівалентних нескінченно великих послідовностей.
14. Дайте означення границі функції.
15. Дайте означення однобічних границь.

Рекомендована література: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15.

Приклад 1. Знайти область визначення функції $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$.

Розв'язання: Функція $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$ визначена, якщо $x-1\neq 0$ та $1+x>0$, тобто якщо $x\neq 1$ та $x>-1$.

Відповідь: область визначення функції $f(x)$ є об'єднання двох інтервалів $D(f)=(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Приклад 2. Знайти множину значень функції $f(x)=2+3\sin x$.

Розв'язання: Оскільки $|sin\,x|\leq 1$ або $-1\leq sin\,x\leq 1$, то $-3\leq 3sin\,x\leq 3$. Отже, $2-3\leq 2+3sin\,x\leq 2+3$, тому $-1\leq 2+3sin\,x\leq 5$.

Відповідь: $E(f)=[-1,5]$.

Приклад 3. Встановити парність або непарність функції $f(x)=2^x+2^{-x}$.

Розв'язання: Оскільки $f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^x=f(x)$.

Отже, $f(-x)=f(x)$, тому функція $f(x)=2^x+2^{-x}$ - парна.

Відповідь: $f(x)=2^x+2^{-x}$ - парна.

Приклад 4. Встановити парність або непарність функції $f(x)=x^3$.

Розв'язання: Оскільки $f(-x)=(-x)^3=-(x^3)=-f(x)$.

Отже, $f(-x)=-f(x)$, тому функція $f(x)=x^3$ - непарна.

Відповідь: $f(x)=x^3$ - непарна.

Приклад 5. Встановити парність або непарність функції $f(x)=x^2+5x$.

Розв'язання: Оскільки $f(-x)=(-x)^2+5(-x)=x^2-5x$.

Отже, $f(-x)\neq f(x)$ та $f(-x)\neq -f(x)$, тому функція $f(x)=x^2+5x$ не є ні парною, ні непарною.

Відповідь: $f(x)=x^2+5x$ не є ні парною, ні непарною.

Приклад 6. Знайти період функції $f(x)=cos\,8x$.

Розв'язання: Згідно з означенням періодичної функції

$$cos\,8(x+T)=cos\,8x,\ 8(x+T)=8x+2\pi,\ 8x+8T=8x+2\pi,\ 8T=2\pi.$$

Відповідь: $T=\dfrac{\pi}{4}$.

Приклад 7. Арифметична прогресія $1,2,3,\dots,n,\dots=\{n\}$.

Приклад 8. Геометрична прогресія: $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dots,\dfrac{1}{2^n},\dots=\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$.

Приклад 9. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n+1}{2n^2-5n+7}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n+1}{2n^2-5n+7}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\begin{bmatrix}\text{при } n\to\infty\\ 3n^2+4n+1\sim 3n^2\\ 2n^2-5n+7\sim 2n^2\end{bmatrix}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{2n^2}=\dfrac{3}{2}$.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n+1}{2n^2-5n+7}=\dfrac{3}{2}$.

Приклад 10. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\begin{bmatrix}\text{при } n\to\infty\\ n^2+4n\sim n^2\\ n^3-3n^2\sim n^3\end{bmatrix}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2}}{\sqrt[3]{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n}=1$.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n}=1$.

Приклад 11. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^3+1}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^3+1}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|==\begin{bmatrix}\text{при } n\to\infty\\ n^3+1\sim n^3\end{bmatrix}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^3+1}=0$.

Приклад 12. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n+5}{n^2+1}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n+5}{n^2+1}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|==\begin{bmatrix}\text{при } n\to\infty\\ n^3+n+5\sim n^3\\ n^2+1\sim n^2\end{bmatrix}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n+5}{n^2+1}=\infty$.

Приклад 13. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n}}{\dfrac{3^n-2}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{1-\underbrace{\left(\dfrac{2}{3^n}\right)}_{0}}=\dfrac{5}{1}=5$.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}=5$.

Приклад 14. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 1}(x+2)$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=\lim\limits_{x\to 1}(1+2)=3$.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$.

Приклад 15. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+6}=\dfrac{2}{7}$.

$$x^2+5x-6=(x-1)(x+6),$$

оскільки $D=b^2-4ac=5^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25+24=49$, тому

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5+7}{2}=1,\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5-7}{2}=-6.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}=\dfrac{2}{7}$.

Приклад 16. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2+2}{\sqrt{2^2+5}+3}=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\dfrac{2}{3}$.

Приклад 17. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{5x^2-x-4}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{5x^2-x-4}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|==\begin{bmatrix}\text{при }\ x\to\infty\\ 2x^2+x+1\sim 2x^2\\ 5x^2-x-4\sim 5x^2\end{bmatrix}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{5x^2}=\dfrac{2}{5}$.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{5x^2-x-4}=\dfrac{2}{5}$.

Приклад 18. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+2}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x-3}{2x^3+4x+2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|==\begin{bmatrix}\text{при }\ x\to\infty\\ 10x-3\sim 10x\\ 2x^3+4x+2\sim 2x^3\end{bmatrix}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=\frac{5}{\infty}=0.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+2}=0$.

Приклад 19. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|==\left[\begin{array}{c}\text{при } x\to-\infty\\ 2x^5+3x^3-4x\sim 2x^5\\ 3x^2-4x+2\sim 3x^2\end{array}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{3}=\frac{-\infty}{3}=-\infty\,.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}=-\infty$.

Приклад 20. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|==\left[\begin{array}{c}\text{ï ðè } x\to+\infty\\ \sqrt{x^2+1}\sim\sqrt{x^2}=x\\ \sqrt[3]{x^6+1}\sim\sqrt[3]{x^6}=x^2\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2}{x^2}=4$.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}=4$.

Приклад 21. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x-5}\right)$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x-5}\right)=|\,\infty-\infty\,|=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x-5}\right)\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x-5}\right)}{\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x-5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+8x+3-(x^2+4x-5)}{\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x-5}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+8}{\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x-5}\right)}$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{ï ðè } x\to+\infty\\ 4x+8\sim 4x\\ \sqrt{x^2+8x+3}\sim\sqrt{x^2}=x\\ \sqrt{x^2+4x-5}\sim\sqrt{x^2}=x\end{array}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x}=2\,.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x-5}\right)=2$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти область визначення функцій:

1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x}$; 2) $f(x)=\arccos\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$.

Завдання 2. Знайти множину значень функцій:

1) $f(x)=-x^2+8x-13$; 2) $f(x)=1-3\cos x$.

Завдання 3. Встановити парність або непарність функцій:

1) $f(x)=x^4-3x^2+x$; 2) $f(x)=x^3+x$;

3) $f(x)=x^4\sin 7x$. 4) $f(x)=\lg\cos x$

Завдання 4. Знайти періоди функцій:

1) $f(x)=\sin 5x$; 2) $f(x)=\lg\cos 2x$.

Завдання 5. Обчислити задані границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{3n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n+1}{100n^2+15n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

Завдання 6. Обчислити границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3}{x^2-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

Завдання 7. Обчислити границі функцій, розкривши невизначеність типу $\left|\dfrac{0}{0}\right|$:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

Завдання 8. Обчислити границі функцій (ірраціональний вираз під знаком границі), розкривши невизначеність типу $\left|\dfrac{0}{0}\right|$:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Завдання 9. Обчислити границі функцій, розкривши невизначеність типу $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

Завдання 10. Обчислити границі функцій, розкривши невизначеність типу $|\infty-\infty|$:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ.

Контрольні питання

1. Сформулюйте означення 1-ї чудової границі.
2. Наведіть наслідки 1-ї чудової границі.
3. Сформулюйте означення 1-ї чудової границі.
4. Наведіть наслідки 1-ї чудової границі.
5. Запишіть таблицю еквівалентних нескінченно малих

Приклад 1. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin x\cdot \mathrm{arctg}3x}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin x\cdot \mathrm{arctg}3x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x\cdot\sin x}{\sin x\cdot \mathrm{arctg}3x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{\mathrm{arctg}3x}=\begin{bmatrix}\text{при } \ x\to 0\\ \sin 2x\sim 2x\\ \mathrm{arctg}3x\sim 3x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot 2x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin x\cdot \mathrm{arctg}3x}=\dfrac{4}{3}$.

Приклад 2. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}=|\ \infty\cdot 0\ |=\left[\sin\dfrac{1}{x^2}\sim\dfrac{1}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}=0$.

Приклад 3. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=\begin{bmatrix}\text{при } \ x\to 0\\ 2x\to 0\\ \sin 2x\sim 2x\end{bmatrix}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{x}\right)^{1+x}=2^1=2$.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=2$.

Приклад 4. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}=\begin{bmatrix}x\to 0\\ x+1\sim x\\ 2x+1\sim 2x\end{bmatrix}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty}=0.$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}=0$.

Приклад 5. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\left|1^\infty\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{2x}{2x-3}-1\right)\right)^{2-5x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}(2-5x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2x-3}(2-5x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6-15x}{2x-3}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6-15x}{2x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-15x}{2x}}=e^{\frac{-15}{2}}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=e^{\frac{-15}{2}}$.

§ 3 Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.1.11. Обчислити границі функцій, застосовуючи першу важливу "чудову" границю і її наслідки, та еквівалентність нескінченно малих:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Завдання 3.1.12. Обчислити границі функцій, застосовуючи першу та другу важливі "чудові" границі, їх наслідки, та еквівалентність нескінченно малих та нескінченно великих:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}$; 2) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$. 9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{arctg(x-1)}{x^2-1}$.

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ. КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК РОЗРИВУ ФУНКЦІЇ

Контрольні питання

1. Сформулюйте означення неперервності
2. Дайте означення умови неперервності
3. Сформулюйте умову неперервності функції в області.
4. Дайте означення точки розриву
5. Наведіть класифікацію точок розриву:
6. Сформулюйте умову існування точки усувного розриву;
7. Сформулюйте умову існування точки розриву першого роду
8. Сформулюйте умову існування точки розриву другого роду.
9. Запишіть властивості неперервних на відрізку функцій.

Приклад 1 Дослідити на неперервність функцію: $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Розв'язання: Функція визначена для всіх x, крім $x=3$, і є неперервною на інтервалах $(-\infty,3)$, $(3,+\infty)$.

Обчислимо $f(3+0)$ та $f(3-0)$.

$$f(3+0)=\lim_{x\to3+0}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3+0}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3+0}(x+3)=6,$$

$$f(3-0)=\lim_{x\to3-0}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3-0}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3-0}(x+3)=6.$$

Оскільки $f(3+0)=f(3-0)\neq f(3)$, бо при $x=3$ функція невизначена.

Відповідь: $x=3$ - точка розриву першого роду.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію: $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$.

Розв'язання: Функція визначена для всіх x, крім $x=0$, і є неперервною на інтервалах $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$.

Обчислимо $f(0+0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $f(0-0)=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{-x}=-\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=-1$.

Оскільки $f(0+0)\neq f(0-0)$, отже $x=0$ - точка розриву першого роду, типу "стрибок". Величина стрибка $\Delta f=f(0+0)-f(0-0)=1-(-1)=2$.

Відповідь: $x=0$ - точка розриву першого роду, типу "стрибок".

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію: $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$.

Розв'язання: У точці $x=2$ функція невизначена. Отже функція неперервна на інтервалах $(-\infty,2)$, $(2,+\infty)$. Обчислимо**:**

$$f(2+0)=\lim_{x\to2+0}3^{\frac{1}{x-2}}=3^{\frac{1}{+0}}=3^{+\infty}=+\infty,\quad f(2-0)=\lim_{x\to2-0}3^{\frac{1}{x-2}}=3^{\frac{1}{-0}}=3^{-\infty}=\frac{1}{3^{\infty}}=0.$$

Оскільки $f(2+0)=\infty$, то $x=2$ - точка розриву другого роду.

Відповідь: $x=2$ - точка розриву другого роду.

Приклад 4. За якого параметра A функція

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}, & x\neq5;\\ A, & x=5.\end{cases}$$ буде неперервною?

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}.$$

Враховуючи, що функція неперервна за умови, що

$$f(5+0) = f(5-0) = f(5) \text{ та}$$

$$f(5+0) = f(5-0) = \frac{1}{4}, \text{ то } f(5) = A = \frac{1}{4}.$$

Відповідь: функція $f(x)$ неперервна при $A = \frac{1}{4}$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Дослідити задану функцію на неперервність, знайти точки розриву та встановити їх характер:

1) $f(x) = \frac{|3x-5|}{3x-5}$;   2) $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$;   3) $f(x) = (1+x)\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x^2}$.

Завдання 2. Для заданої функції $f(x)$ визначити, за якого вибору параметра A, що входить в її означення, функція буде неперервною:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+2}{x-1}, & x \neq 1; \\ A, & x = 1. \end{cases}$$

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Контрольні питання

1. Дайте означення похідної.
2. Наведіть геометричний та механічний зміст похідної.
3. Сформулюйте основні правила диференціювання.
4. Наведіть похідні основних функцій.
5. Як знаходиться похідна від складної функції?

Рекомендована література: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = 5x^3 + \sqrt{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 7$.

Розв'язання: Застосовуючи правило диференціювання суми (різниці) функцій, маємо:

$$y' = 5\left(x^3\right)' + \left(\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{1}{x^3}\right)' + 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' + (7)'$$

$$= 5\left(x^3\right)' + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{-3}\right)' + 2\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' =$$

$$= 5\cdot 3\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-4} - 2\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{5}{3}}.$$

Відповідь: $y' = 15\cdot x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^4} - \frac{4}{3\cdot\sqrt[3]{x^5}}$.

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = x^3 \cdot \mathrm{arctg} x$.

Розв'язання: Застосовуючи правило диференціювання добутку функцій, маємо:

$$y' = \left(x^3\right)' \cdot \mathrm{arctg}x + x^3 \cdot \left(\mathrm{arctg}x\right)' = 3x^2 \cdot \mathrm{arctg}x + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

Відповідь: $y' = 3x^2 \cdot \mathrm{arctg}x + \frac{x^3}{1+x^2}$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \frac{x^2-1}{\cos x}$.

Розв'язання: Застосовуючи правило диференціювання частки функцій, маємо:

$$y' = \frac{\left(x^2-1\right)'\cos x - \left(x^2-1\right)\left(\cos x\right)'}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x + \left(x^2-1\right)\sin x}{\cos^2 x}$$

Відповідь: $y' = \frac{2x\cos x + \left(x^2-1\right)\sin x}{\cos^2 x}$.

Приклад 4. Знайти похідну складної функції $y = e^{5x}$.

Розв'язання: Застосовуючи правило диференціювання складної функцій, маємо: $y' = e^{5x} \cdot (5x)' = 5e^{5x}$.

Відповідь: $y' = 5e^{5x}$.

Приклад 5. Знайти похідну складної функції $y = \sin^4 x$.

Розв'язання: Застосовуючи правило диференціювання складної функцій, маємо:

$y' = \left((\sin x)^4\right)' = 4(\sin x)^3 (\sin x)' = 4(\sin x)^3 \cos x$.

Відповідь: $y' = 4\sin^3 x \cos x$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти похідні вказаних функцій:

1) $y = 3x^2 - 5x + 1$;

2) $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x$;

3) $y = x + 2\sqrt{x}$;

4) $y = 6 \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{8}{\sqrt[4]{x^3}}$;

5) $y = \frac{10}{x^3}$;

6) $y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{5x^5}$;

7) $y = x - \sin x$;

8) $y = 3x^5 - \mathrm{tg} x$;

9) $y = x^2 \cos x$;

10) $y = \left(x^3 + 1\right) \mathrm{ctg} x$;

11) $y = e^x \left(x^2 - 3\right)$;

12) $y = (x - 2)\ln x$;

13) $y = \frac{\cos x}{x^2}$;

14) $y = \frac{\mathrm{tg} x}{\sqrt{x}}$.

Завдання 2. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$. Обчислити $f'(2)$.

Завдання 3. Знайти похідні складних функцій:

1) $y = \sin 6x + \sin\sqrt{x}$;

2) $y = \sin(5x + 1) + 7\cos\frac{x}{2}$;

3) $y = (1 - 5x)^4$;

4) $y = \sqrt[3]{(4 + 3x)^2}$;

5) $y = \frac{10}{\left(1 - x^2\right)^5}$;

6) $y = \sqrt{\cos 4x}$;

7) $y = \ln^2 x$;

8) $y = \ln \mathrm{tg} 3x$

9) $y = \arcsin\frac{1}{x}$;

10) $y = \mathrm{arc\,tg}\, x^2$;

11) $y = \left(\frac{1 + x^2}{1 + x}\right)^5$;

12) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + x^2}}$.

ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Контрольні питання

1. Сформулюйте означення диференціала.
2. Який геометричний зміст диференціала.
3. Як знаходяться похідні і диференціали вищих порядків?
4. Наведіть приклад застосування диференціала до наближених обчислень.

Приклад 1. Знайти диференціал dy функції $y = \sin 4x$.

Розв'язання: Згідно з означенням $dy = y'dx$.

$y' = (\sin 4x)' = 4\cos 4x$. Отже, $dy = 4\cos 4x$.

Відповідь: $dy = 4\cos 4x$.

Приклад 2. Знайти диференціал $d(\mathrm{arctg}x)$.

Розв'язання: Згідно з означенням $dy = y'dx$.

$d(\mathrm{arctg}x) = (\mathrm{arctg}x)'\,dx$. Отже, $d(\mathrm{arctg}x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$.

Відповідь: $d(\mathrm{arctg}x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Приклад 3. Обчислити наближено значення $\sqrt[3]{27{,}1}$.

Розв'язання: Покладемо $x = 27$, $\Delta x = 0{,}1$ та $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Оскільки $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, то

$$\sqrt[3]{27{,}1} \approx f(27) + f'(27)\cdot\Delta x,$$

де $f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$,

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},$$

$$f'(27) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}.$$

Отже, $\sqrt[3]{27{,}1} \approx 3 + \dfrac{1}{27}\cdot 0{,}1 = 3{,}0037$. *Відповідь*: $\sqrt[3]{27{,}1} \approx 3{,}0037$.

Приклад 4. Знайти похідну другого порядку від функції $y = \ln x$.

Розв'язання: Знаходимо першу похідну $y' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Тоді $y'' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Відповідь: $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Приклад 5. Знайти d^2y від функції $y = e^{3x}$.

Розв'язання: Згідно з означенням $d^2y = y''dx^2$, тому знаходимо y' та y'': $y' = 3e^{3x}$, звідси $y'' = 9e^{3x}$. Отже, $d^2y = 9e^{3x}dx^2$.

Відповідь: $d^2y = 9e^{3x}dx^2$.

§ 3 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти диференціали:

1) $d(x^2)$ 2) $d(x^3+5)$;
3) $d(\sin x)$; 4) $d(\cos x)$;
5) $d(e^x)$; 6) $d(\ln x)$;
7) $d(\mathrm{tg}x)$; 8) $d(\arcsin x)$.

Завдання 2. Обчислити наближено:

1) $\arcsin 0,05$; 2) $\mathrm{arc\,tg}0,97$;
3) $\sqrt{5}$; 4) $\mathrm{tg}44^\circ$.

Завдання 3. Знайти похідні другого порядку від вказаних функцій:

1) $y=x^2-3x+2$; 2) $y=\left(x^2+1\right)^3$.

Завдання 3.2.7. Знайти $f''(1)$, якщо $f(x)=\mathrm{arctg}x$.

Завдання 3.2.8. Знайти $f''(0)$, якщо $f(x)=e^{2x-1}$.

Розкриття невизначеностей за правило Лопіталя [1, С.354-356].

Контрольні питання

1. Сформулюйте правило Лопіталя для розкриття невизначеностей типів $\left|\frac{0}{0}\right|$ та $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$.
2. Як розкриваються невизначеності типів $\left|0\cdot\infty\right|$ та $\left|\infty-\infty\right|$ з використанням правила Лопіталя?

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$, використовуючи правило Лопіталя.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. *Відповідь*: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$, використовуючи правило Лопіталя.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{3(x^2)'}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\begin{bmatrix} x\to 0\\ \sin x\sim x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

У цьому прикладі правило Лопіталя було використане двічі.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$.

Приклад 3. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границю $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=|\infty\cdot 0|=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=0$.

Приклад 4. Знайти задану границю, використовуючи правило Лопіталя: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\text{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$

.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\text{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin x}{\cos x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-\pi}{2\cos x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x\cdot\sin x-\pi)'}{(2\cos x)'}==\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+2x\cos x}{-2\sin x}=-1.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\text{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=-1$.

§ 3 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Використовуючи правило Лопіталя, обчислити границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$;

2) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to +0} x\ln^3 x$;

4) $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ. ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

Загальна схема дослідження функції

1. Знайти ОДЗ функції.
2. Перевірити парність та непарність функції (симетрію графіка).
3. З'ясовують періодичність функції
4. Знайти точки перетину функції із осями координат.
5. Визначити вертикальні асимптоти
6. Визначити похилі (горизонтальні) асимптоти.
7. За допомогою першої похідної визначити інтервали монотонності і дослідити на локальні екстремуми.
8. За допомогою другої похідної визначити інтервали опуклості (вгнутості) та знайти точки перегину.
9. Провести необхідні додаткові дослідження: сталості знаку функції, розташування графіка відносно осей координат (вище, нижче), дослідити поведінку функції при $x \to \pm\infty$
10. Побудувати графік функції.

Приклад. Дослідити функцію та побудувати її графік $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$

1) ОДЗ: $x \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$. На інтервалі $(-\infty;2)$ $f(x)<0$, на інтервалі $(2;+\infty)$ $f(x)>0$.
2) Функція не є парною і не є непарною, оскільки

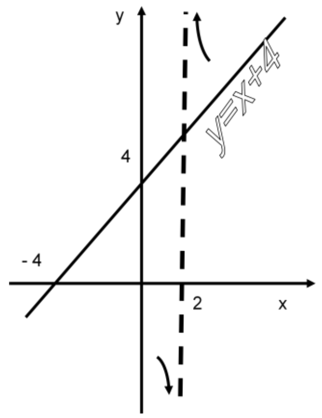
$$f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{-x-2} = -\frac{(-x+1)^2}{x+2},$$

3) Функція не періодична.
4) Точки перетину з осями координат. З віссю OY: якщо $x=0$, то

$$f(0) = \frac{(0+1)^2}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

Маємо точку перетину з віссю OY, точку $A(0;-\frac{1}{2})$

З віссю OX: якщо $y=0$, то $\dfrac{(x+1)^2}{x-2} = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$
Маємо точку перетину з віссю OX, точку $B(-1;0)$
5) $x=2$ - точка розриву функції другого роду, оскільки



$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \frac{(2+1)^2}{2-0-2} = \left[\frac{9}{-0}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \frac{(2+1)^2}{2+0-2} = \left[\frac{9}{+0}\right] = +\infty$$

6) Похила асимптота $y=kx+b$, де

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^2}{(x-2)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

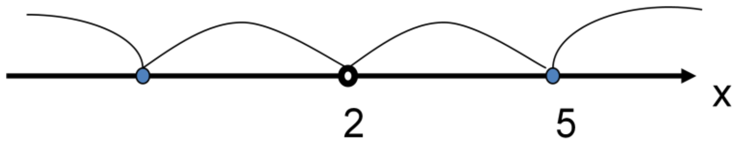
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - k\cdot x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x+1)^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+1}{x-2} = 4$$

Отже, $y=x+4$ - похила асимптота
7) Знаходимо точки екстремуму та визначаємо інтервали монотонності ф-ї.

$$f'(x) = \left(\frac{(x+1)^2}{x-2} \right)' = \frac{2(x+1)(x-2) - (x+1)^2}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$$

Для знаходження критичних точок розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2} = 0$

$$\left[\begin{array}{l}(x+1)(x-5)=0\\(x-2)^2\neq 0\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x_1=-1,\ x_2=5\\x\neq 2\end{array}\right.$$



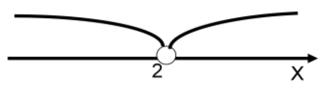
x	(-∞;-1)	-1	(-1;2)	2	(2;5)	(5;+∞)
y'	+	0	-	не ∃	-	+
y	↗	0	↘	не ∃	↘	↗
		max		т.р.		

Отже, у точці B(-1, 0) – функція має мінімум, а у точці C(5, 12) - функція має максимум

1) Знаходимо точки перегину та визначаємо інтервали опуклості.

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-\left(x^2-4x-5\right)2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{18}{(x-2)^3}$$

Оскільки чисельник – константа, то $f''(x)\neq 0$



Необхідно врахувати ОДЗ, з якого $x\neq 2$

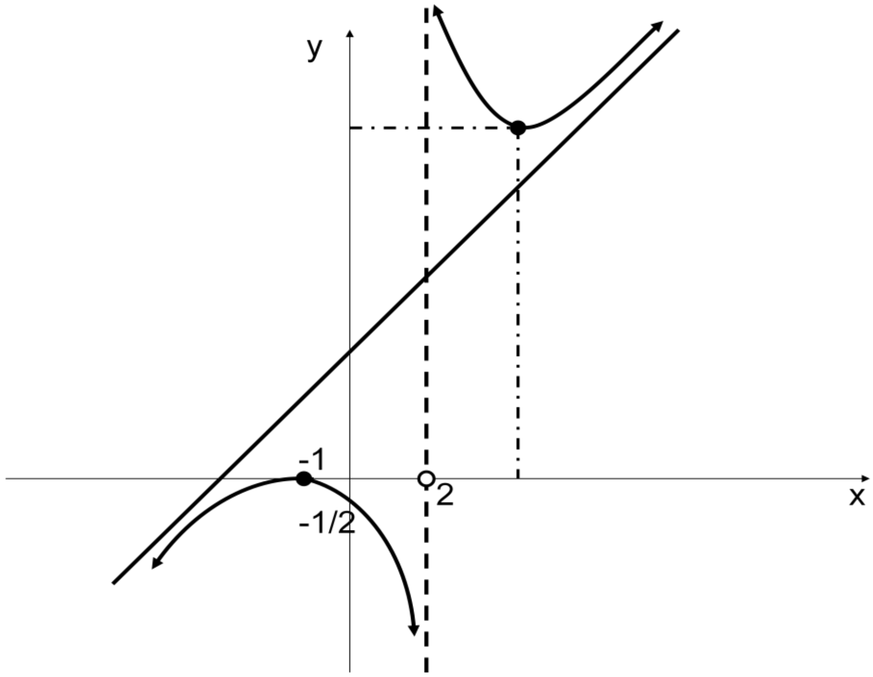
x	(-∞;2)	2	(2;+∞)
y''	-	не ∃	+
y		не ∃	
	опукла	точка розриву	вгнута

2) Проводимо додаткові дослідження: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x-2}$ >0

а) на (-∞, 2) f(x)<0 – графік функції нижче осі OX, на (2, +∞) f(x)>0 – графік функції вище осі OX,

б) дослідимо поведінку функції на нескінченності:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$



Завдання для самостійної роботи

Дослідити функцію та побудувати її графік

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.1. - Харків: ХНУРЕ; Фактор, 2004. – 592 с.
2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. - Харків: ХНУРЕ; 2002. – 440с.
3. Басманов О.Є., Кириченко І.К., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Вища математика. Х.: АПБУ, 2003 – 136 с.
4. Білоусова Л.І. Горонескуль М.М. Курс вищої математики у середовища Maple : Навчальний посібник. – Х.: УЦЗУ, КП «Міська друкарня», 2009. – 412с.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 446 с.
6. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1969. – 736 с.
7. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1980. – 432 с.
8. Глаголева А.А., Солнцев Т.В. Курс высшей математики. – М.: Высш. школа, 1971. – 656 с.
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.І. – М.: Высш. шк., 1986. – 304с.
10. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1970. – 472 с.
11. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1984. 302 с.
12. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1969 – 256 с.
13. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.
14. Овчинников П.Ф. и др. Высшая математика. К.: Вища школа, 1987. – 552 с.
15. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. – М.: Наука, 1985. – 551 с.
16. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.3. - Харків: ХНУРЕ; 2002. – 440с.