МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Модуль № 1

Завдання 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 1. \end{cases}$$

Розв'язання.

Складемо визначник системи із коефіцієнтів при невідомих *x, y, z*. Обчислимо його за елементами першого рядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=1(0\cdot2-1\cdot1)-2(2\cdot2-1\cdot3)-3(2\cdot1-0\cdot3)=-1+2-6=-5.$$

Визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z утворюємо, замінюючи відповідно перший, другий і третій стовпчики стовпчиком вільних членів.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=-3(0\cdot2-1\cdot1)-2(0\cdot2-1\cdot1)-1(0\cdot1-0\cdot1)=3+2-0=5.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=1(0\cdot2-1\cdot1)+3(2\cdot2-1\cdot3)-1(2\cdot1-0\cdot3)=-1+3-2=0.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=1(0\cdot1-0\cdot1)-2(2\cdot1-0\cdot3)-3(2\cdot1-0\cdot3)=0-4-6=-10.$$

За формулами Крамера отримаємо рішення:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1;$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-5} = 0; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2.$$

Завдання 2. Задані точки A(1; -2; 3), B(-3; -6; 1), C(3; 5; 4). Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$: .

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$. Для цього із координат кінця вектора – точки B – віднімемо координати початку вектора – точки A.

$$\overrightarrow{AB} = (-3-1;\ -6-(-2));\ 1-3) = (-4; -4; -2).$$

Аналогічно знаходяться координати вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = (3-1; 5-(-2); 4-3) = (2; 7; 1).$$

Кут φ між векторами $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ знаходиться за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|},$$

де $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ – скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|, \left|\overrightarrow{AC}\right|$ – їх модулі.

Модуль вектора дорівнює квадратному корню із суми квадратів його координат:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6;$ $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

Скалярний добуток векторів, що задані своїми координатами, дорівнює сумі добутків відповідних координат:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4\cdot2+(-4)\cdot7+(-2)\cdot1 = -38.$$

Отже, $\cos\varphi = \frac{-38}{6\cdot3\sqrt{6}} = \frac{-19}{9\sqrt{6}} = -0{,}86$.

Завдання 3. Дано загальне рівняння прямої.

1) Написати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

2) Написати рівняння прямої "у відрізках".

3) Написати рівняння прямої, паралельної даній, що проходить через точку M_0.

4) Написати рівняння прямої, перпендикулярної даній, що проходить через точку M_0.

2x+3y-2=0; $M_0(2; -3)$.

Розв'язання.

Загальне рівняння прямої на площині має вигляд Ax+By+C=0.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом – це рівняння виду y=kx+b, де k – кутовий коефіцієнт прямої, або тангенс кута нахилу прямої до осі OX, b – відрізок, який відсікає пряма на осі OY.

Рівняння прямої "у відрізках" має вигляд $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де a, b – відрізки, які відсікає пряма на координатних осях OX, OY.

Умова паралельності двох прямих: $k_1=k_2$, де k_1, k_2 – кутові коефієнти відповідно першої і другої прямої.

Умова перпендикулярності двох прямих: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

В нашому прикладі задано загальне рівняння прямої 2х+3у-2=0. Тут А = 2, В = 3, С = -2.

1) Щоб написати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, розв'яжемо це рівняння відносно у: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$. В цьому рівнянні $k = -\frac{2}{3}$; $b = \frac{2}{3}$.

2) Щоб написати рівняння прямої "у відрізках", загальне рівняння прямої запишемо у вигляді 2х+3у =2 та поділемо його на 2:
$\frac{x}{1} + \frac{3y}{2} = 1$. Тут а = 1, b = $\frac{2}{3}$.

3) Напишемо рівняння прямої, паралельної прямій 2х+3у-2=0, що проходить через точку $M_0(2; -3)$. Ми вже отримали рівняння цієї прямої з кутовим коефіцієнтом $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$. Із умови паралельності прямих

$k_1 = k_2 = -\frac{2}{3}$. Тоді потрібне нам рівняння записується таким чином:

$y = -\frac{2}{3}x + b$. Щоб знайти b, в це рівняння підставимо координати точки $M_0(2; -3)$:

$-3 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + b$. Звідси $b = -\frac{5}{3}$.

Отже, наше рівняння має вигляд $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$.

4) Напишемо рівняння прямої, перпендикулярної прямій 2х+3у-2=0, що проходить через точку $M_0(2; -3)$. Із умови перпендикулярності прямих
$-\frac{2}{3} \cdot k_2 = -1$, $k_2 = \frac{3}{2}$. Тоді рівняння, що шукається, має вигляд $y = \frac{3}{2}x + b$.

Знаходимо b аналогічно пункту 3): $-3 = \frac{3}{2} \cdot 2 + b$; b = -6. Отже, отримуємо рівняння $y = \frac{3}{2}x - 6$.

Завдання 4. Визначити тип кривої, знайти основні характеристики, зробити рисунок:

$6x^2 + 9y^2 = 54$.

Розв'язання.

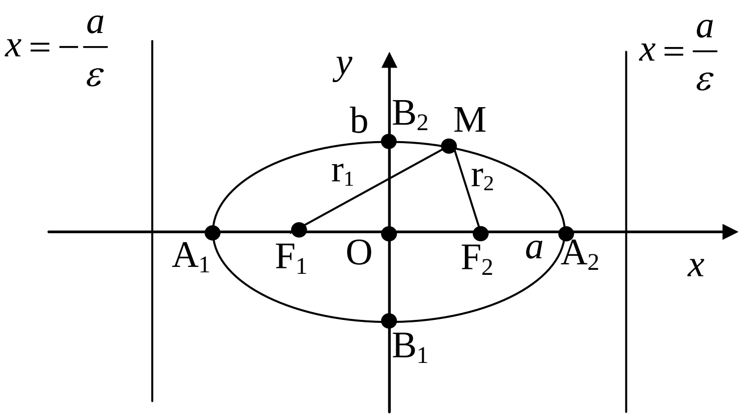
Наведені в цьому завданні рівняння визначають одну з кривих 2-го порядку – еліпс, або гіперболу, або параболу.

Приведемо рівняння до канонічного вигляду, для чого поділимо його ліву і праву частини на 144.

Отримуємо рівняння $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$. Це рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, у якого $a^2=9$, $b^2=6$. Отже, велика піввісь a = 3, мала піввісь $b=\sqrt{6}\approx 2{,}4$.

Фокальна відстань $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}\approx 1{,}7$. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{1{,}7}{3}$ $\approx 0{,}6$. Рівняння директрис $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{3}{0{,}6}\approx\pm 5$. Отже, одне рівняння x=-5, друге – x=5.

Цей еліпс має такий вид, як на рисунку.



Завдання 5. **Обчислити границі функцій.**

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$.

Розв’язання.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}=\frac{2\cdot 1+1-3}{1+1-2}=\left|\frac{0}{0}\right|$.

Отримуємо невизначеність. Треба позбавитися її. Розкладаємо чисельник і знаменник на множники.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+3/2)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x+2}=\frac{2\cdot 1+3}{1+2}=\frac{5}{3}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}=\frac{5}{3}$.

Обчислити похідні функцій

б) $y=\sin 5x\cdot\ln(3x+4)$;

Розв’язання.

а) $y=\sin 5x\cdot\ln(3x+4)$ – дана функція являє собою добуток складних функцій, отже за правилами диференціювання 3 і 5

$$y'=[\sin 5x\cdot\ln(3x+4)]'=(\sin 5x)'\cdot\ln(3x+4)+\sin 5x\cdot[\ln(3x+4)]'=$$

$$=\cos 5x\cdot(5x)'\cdot\ln(3x+4)+\sin 5x\cdot\frac{1}{3x+4}\cdot(3x+4)'=5\cdot\cos 5x\cdot\ln(3x+4)+$$

$$+\sin 5x\cdot\frac{3}{3x+4}.$$

Обчислити інтеграли

в) $\int\limits_1^2 (x^3-5x+3-\cos 4x+e^{6x})dx$.

Розв'язання. Для обчислення визначеного інтегралу використовується формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Скориставшись цією формулою, таблицею інтегралів та правилами інтегрування, одержуємо:

$$\int\limits_1^2 (x^3-5x+3-\cos 4x+e^{6x})dx=\left(\frac{x^4}{4}-5\frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{6}e^{6x}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{2^4}{4}-\frac{5\cdot 2^2}{2}+3\cdot 2-\frac{1}{4}\sin 4\cdot 2+\frac{1}{6}e^{6\cdot 2}-\frac{1^4}{4}+\frac{5\cdot 1^2}{2}-3\cdot 1+\frac{1}{4}\sin 4\cdot 1-\frac{1}{6}e^{6\cdot 1}=$$

$$=4-10+6-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}-3-\frac{1}{4}(\sin 8-\sin 4)+\frac{1}{6}(e^{12}-e^{6})=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}(\sin 8-\sin 4)+\frac{1}{6}(e^{12}-e^{6}).$$

Модуль № 2.

Завдання 1. Дана вибірка, добута з генеральної сукупності.

x_i -2 4 5 6 10

n_i 20 10 30 30 10

1) Обчислити незміщену оцінку генеральної середньої.
2) Обчислити виправлену дисперсію.
3) Визначити емпіричну функцію розподілу, побудувати її графік.
4) Побудувати полігон відносних частот.

Розв'язання.

1) Незміщена оцінка генерального середнього – це вибіркове середнє. Воно знаходиться за формулою $\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$, де x_i – варіанта вибірки, n_i – частота варіанти, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – обсяг вибірки. У нашому випадку $n = 20 + 10 + 30 + 30 + 10 = 100$;

$$\bar{x}_в = \frac{-2 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 30 + 6 \cdot 30 + 10 \cdot 10}{100} = 4{,}3.$$

2) Виправлена дисперсія є незміщеною оцінкою генеральної дисперсії. Вона обчислюється таким чином:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в, \text{ де}$$

$$D_в = \bar{x}_в{}^2 - [\bar{x}_в]^2,$$

$$\bar{x}_в{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2 n_i}{n}.$$

Ми вже знайшли у першому пункті $\bar{x}_в$, знайдемо тепер $\bar{x}_в{}^2$:

$$\bar{x}_в{}^2 = \frac{(-2)^2 \cdot 20 + 4^2 \cdot 10 + 5^2 \cdot 30 + 6^2 \cdot 30 + 10^2 \cdot 10}{100} = 30{,}7.$$

Тоді $D_в = 30{,}7 - (4{,}3)^2 = 12{,}21$; $S^2 = \frac{100}{99} \cdot 12{,}21 = 12{,}33$.

3) Емпіричною функцією розподілу називається функція $F^*(x)$, що визначає для кожного x відносну частоту події $X < x$: $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де n_x – кількість варіант, менших ніж x.

При $x \le -2$ відбувається подія $X < x \le -2$. У нас значень варіант $X < 2$ немає, тому на цьому проміжку $F^*(x) = 0$.

Значення $X < 4$, а саме $x_1 = -2$, спостерігалось 20 разів, отже $F^*(x) =$
$= 20/100 = 0,2$ при $-2 < x \le 4$.

При $4 < x \le 5$ значення $X < 5$, а саме $x_1 = -2$ та $x_2 = 4$ спостерігались $20+10 = 30$ разів, отже $F^*(x) = 30/100 = 0,3$.

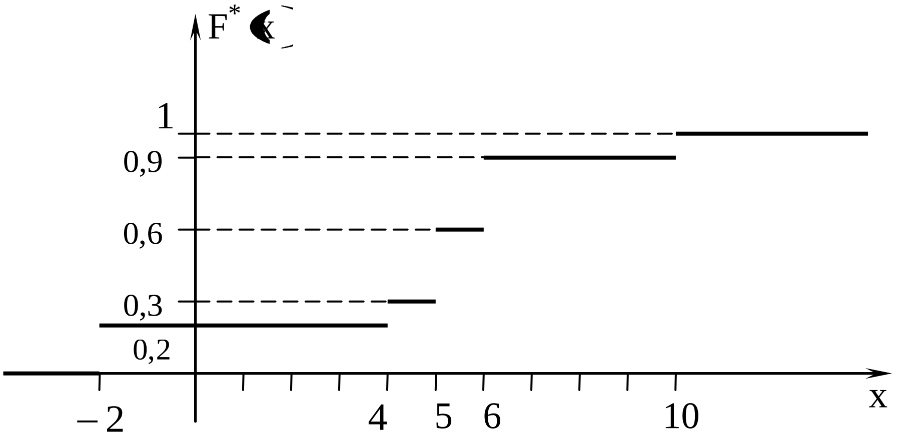
При $5 < x \le 6$ значення $X < 6$, а саме $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ та $x_3 = 5$ спостерігались $20 + 10 + 30 = 60$ разів, тому $F^*(x) = 60/100 = 0,6$.

Аналогічно, при $6 < x \le 10$ значення $X < 6$, а саме $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$ та $x_4 = 6$ спостерігались $20 + 10 + 30 + 30 = 90$ разів, тому $F^*(x) =$
$= 90/100 = 0,9$.

При $x > 10$ для усіх варіант виборки $X < x < 10$, отже $F^*(x) = (20+10+30+30+10)/100 = 100/100 =1$.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0,2 & 2 < x \le 4 \\ 0,3 & 4 < x \le 5 \\ 0,6 & 5 < x \le 6 \\ 0,9 & 6 < x \le 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

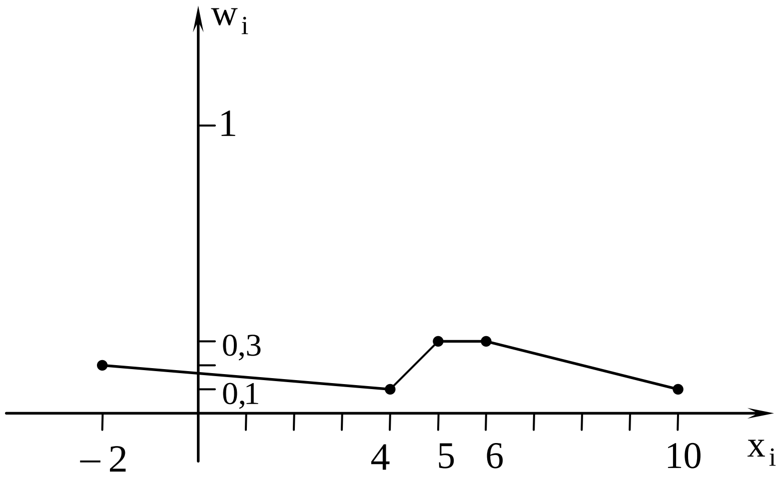
Будуємо графік емпіричної функції розподілу (рис. 1).



4) Полігон відносних частот – це ламана лінія, відрізки якої з'єднують точки $(x_1;w_1)$, $(x_2;w_2)$,…, $(x_k;w_k)$, де x_i – варіанти вибірки, w_i – відповідні їм відносні частоти.

Відносні частоти знаходяться за формулою $w_i = \frac{n_i}{n}$. У нашому випадку w_1 = 20/100 = 0,2; w_2 = 10/100 = 0,1; w_3 = 30/100 = 0,3; w_4 = =30/100 = 0,3; w_5 = 10/100 = 0,1.

Відкладаємо на осі абсцис варіанти x_i, на осі ординат – відповідні їм відносні частоти w_i. З'єднуючи точки $(x_i; w_i)$ відрізками прямих, отримуємо полігон відносних частот.



Завдання 2. За двома незалежними вибірками, що одержані із нормальних генеральних сукупностей X та Y за рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити $H_0 : D\ X\ = D\ Y$ при конкуруючій $H_1 : D\ X\ > D\ Y$, якщо:

Обсяги вибірок	$n_X = 12$	$n_Y = 15$
Виправлені вибіркові дисперсії	$s_X^2 = 11,41$	$s_Y^2 = 6,52$

Розв'язання. Оскільки виправлені вибіркові дисперсії вже дано то обчислимо $F_{емп}$:

$$F_{емп} = \frac{S^2_{більшої}}{S^2_{меншої}} = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = \frac{11,41}{6,52} = 1,75.$$

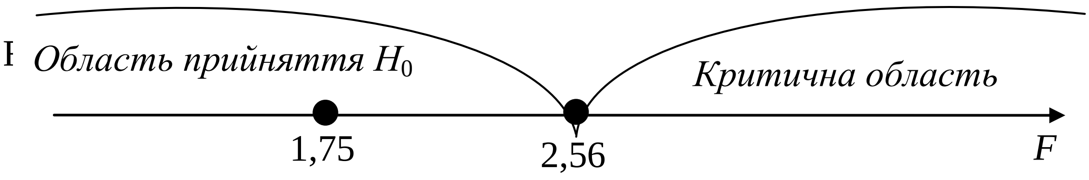
Числа ступенів вільності: $k_1 = 11$ та $k_2 = 14$ - число ступенів вільності

- $k_1 = n_1 - 1$, де n_1 - обсяг вибірки, за якою обчислена $S^2_{більша}$, отже $k_1 = n_1 - 1 = 12 - 1 = 11$;
- $k_2 = n_2 - 1$, де n_2 - обсяг вибірки, за якою обчислена $S^2_{менша}$, отже $k_2 = n_2 - 1 = 15 - 1 = 14$.

Оскільки конкуруюча гіпотеза має вигляд $H_1 : D(X) > D(Y)$, значить кричнa область – правобічна, тому за заданим рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ і числам ступенів вільності $k_1 = 11$ та $k_2 = 14$ знайти критичну точку:

$F_{кр}(p = \alpha, k_1, k_2) = F_{кр}(p = 0{,}05; 11; 14) = 2{,}56$.

Подуємо правобічну критичну область:



Висновок: Немає підґрунтя відхиляти гіпотезу H_0 про рівність генеральних дисперсій.

Завдання 3. Встановити чи існує деякий зв’язок виміряних показників.

X	13	9	8	9
У	12	11	8	12

Розв'язання.

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \bar{x}) \quad \text{та}$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \bar{y}),$$

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	13	12	156	169	144
2	9	11	99	81	121
3	8	8	64	64	64
4	9	12	108	81	144
5	7	9	63	49	81
Суми	$\sum x_i$ **=46**	$\sum y_i$ **=52**	$\sum x_i y_i$ **=490**	$\sum x_i^2$ **=444**	$\sum y_i^2$ **=554**
Середні ариф	$\bar{x}$ =9,2	$\bar{y}$ =10,4			
Ср.кв.відх	$\sigma_X = 2{,}04$	$\sigma_Y = 1{,}63$			

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{46}{5} = 9{,}2,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{52}{5} = 10{,}4,$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - \ \overline{x}^{\ 2} = \frac{444}{5} - 9,2^2 = 88,8 - 84,64 = 4,16\,,\ \sigma_X = \sqrt{4,16} = 2,04$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i^2) - \ \overline{y}^{\ 2} = \frac{554}{5} - 10,4^2 = 110,8 - 108,16 = 2,64\,,\ \sigma_Y = \sqrt{2,64} = 1,63$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\cdot\sigma_X\sigma_Y} = \frac{490 - 5\cdot 9,2\cdot 10,4}{5\cdot 2,04\cdot 1,63} = \frac{11,6}{16,626} = 0,698 \approx 0,7$$ - додатній помірний зв’язок

б) $\overline{y}_x - \overline{y} = r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\ \ x - \overline{x}$	$\overline{x}_y - \overline{x} = r\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}\ \ y - \overline{y}$
$\overline{y}_x - 10,4 = 0,7\cdot\dfrac{1,63}{2,04}\ \ x - 9,2$	$\overline{x}_y - 9,2 = 0,7\dfrac{2,04}{1,63}\ \ y - 10,4$
$\overline{y}_x - 10,4 = 0,56\ \ x - 9,2$	$\overline{x}_y - 9,2 = 0,88\ \ y - 10,4$
$\overline{y}_x = 0,56x + 5,25$	$\overline{x}_y = 0,88y + 0,05$