

Міністерство оборони України  
Харківський військовий університет

Мількевич Є.О., Франков В.М., Медведєв М.Ю.

# **ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ**

Частина 1

Аналіз простих лінійних кіл  
в усталеному режимі

Навчальний посібник

Харків – 2003

УДК 621.372(075.8)

Мількевич С.О., Франков В.М., Медведєв М.Ю. Основи теорії кіл:  
Навчальний посібник. Ч.1. Аналіз простих лінійних кіл в усталеному режимі.  
- Харків: ХВУ, 2003. - 186 с.

В першій частині навчального посібника, який за своїм змістом відповідає робочій програмі дисципліни “Основи теорії кіл”, викладено основні відомості про фундаментальні поняття електро- та радіотехніки, проаналізовано моделі ідеалізованих та реальних елементів електричних кіл і розглянуто роботу в усталеному режимі простих лінійних кіл, включаючи широко використовувані в радіотехніці та вимірювальній техніці типові RC- і RL-кола а також одиночні та зв’язані коливальні контури.

Навчальний посібник призначений для курсантів та студентів радіотехнічних спеціальностей і може бути корисним науковим співробітникам, аспірантам та інженерам відповідних спеціальностей,

Л. 139 , бібліогр.: 8 назв.

## Зміст

Розділ 1. Основні поняття та закони електрорадіокіл.....	7
1.1. Предмет та задачі навчальної дисципліни .....	7
1.2.Основні визначення теорії електричних кіл .....	8
1.2.1. Електричне коло .....	8
1.2.2.Схема електричного кола та його елементи .....	10
1.2.3.Закони Ома та Кірхгофа в дійсній формі .....	13
1.3.Класифікація електричних кіл .....	16
1.4.Властивості ідеалізованих пасивних елементів кіл.....	17
1.4.1.Опір.....	17
1.4.2.Індуктивність .....	18
1.4.3.Ємність .....	21
1.5.Реальні активні та пасивні елементи кола.....	22
1.5.1.Реальні активні елементи кола .....	22
1.5.2.Реальні пасивні елементи кола.....	25
1.6. Основні поняття та визначення гармонічних електричних величин .....	26
1.6.1. Гармонічні струми і напруги та їх основні параметри.....	26
1.6.2. Середнє та діюче значення гармонічних електричних величин .....	29
1.6.3. Комплексне представлення гармонічних електричних величин.....	31
1.6.4.Математичні операції над гармонічними електричними величинами ...	33
1.7. Поняття про комплексний опір та комплексну провідність кола .....	35
1.8. Пасивні елементи електричних кіл при гармонічній дії.....	38
1.8.1.Опір при гармонічній дії.....	38
1.8.2.Ємність при гармонічній дії .....	40
1.8.3.Індуктивність при гармонічній дії .....	43
1.9. Закони Ома та Кірхгофа в комплексній формі .....	45
1.10. Енергетичні співвідношення в електричному колі при гармонічній дії .....	48
1.10.1. Миттєва, активна, реактивна та повна потужність електричного кола.....	48
1.10.2. Комплексна повна потужність електричного кола.....	50
1.10.3. Оцінка якості електричних кіл та їх елементів.....	51
1.10.4. Узгодження джерела енергії з навантаженням .....	52
1.10.5. Баланс потужностей в електричному колі .....	55
Розділ 2. Методи аналізу електричних кіл .....	57
2.1. Еквівалентні перетворення схем заміщення кіл .....	57
2.1.1. Задачі аналізу електричних кіл .....	57
2.1.2. Послідовне з'єднання елементів кола .....	57
2.1.3. Паралельне з'єднання елементів кола.....	59
2.1.4. Змішане з'єднання елементів кола .....	61
2.1.5.Перетворення з'єднання елементів трикутником в еквівалентне з'єднання зіркою та навпаки .....	61
2.1.6. Еквівалентні ділянки кола з послідовним та паралельним з'єднанням ..	63
2.2. Найпростіші RL- та RC-кола при гармонічній дії .....	64
2.2.1.Аналіз послідовного RL-кола.....	64

2.2.2. Аналіз паралельного RL-кола .....	66
2.2.3. Аналіз послідовного RC-кола .....	67
2.2.4. Аналіз паралельного RC-кола .....	68
2.3. Аналіз послідовного та паралельного RLC-кола при гармонічній дії.....	69
2.3.1. Аналіз послідовного RLC-кола. Основні співвідношення для послідовного RLC-кола .....	69
2.3.1.1. Енергетичні процеси в послідовному RLC-колі.....	72
2.3.2. Аналіз паралельного RLC-кола.....	73
2.4. Методи розрахунку електричних кіл.....	76
2.4.1. Розрахунок кіл методом рівнянь Кірхгофа .....	76
2.4.2. Розрахунок кіл методом контурних струмів.....	78
2.4.3. Розрахунок кіл методом вузлових напруг.....	81
2.4.4. Розрахунок кіл методом накладання .....	84
2.4.5. Розрахунок кіл методом еквівалентного генератора.....	86
2.4.6. Метод взаємності.....	89
Розділ 3. Частотні характеристики лінійних електричних кіл .....	90
3.1. Комплексні частотні характеристики кіл .....	90
3.1.1. Поняття про комплексні частотні характеристики кіл .....	90
3.1.2. Методи знаходження комплексних частотних характеристик кіл.....	92
3.1.3. Основні різновидності частотних характеристик кіл.....	93
3.1.3.1 Амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики кола.....	94
3.1.3.2 Амплітудно-фазова характеристика кола .....	95
3.1.3.3 Логарифмічні частотні характеристики кіл .....	96
3.2. Частотні характеристики типових кіл .....	97
3.2.1. Поняття про ідеалізовані типові кола .....	97
3.2.2. Реальні типові кола .....	99
3.2.2.1 Кола інтегруючого типу.....	99
3.2.2.2 Кола диференціюючого типу .....	102
3.2.2.3 Частотно-незалежні подільники напруги.....	104
3.2.2.4 Мостові фазозсовуючі кола .....	106
3.3. Послідовний коливальний контур .....	108
3.3.1. Еквівалентна схема послідовного коливального контура та його первинні і вторинні параметри.....	108
3.3.2. Енергетичні процеси в послідовному коливальному контурі .....	111
3.3.3. Вхідні частотні та резонансні характеристики послідовного коливального контура .....	113
3.3.3.1 Вхідні частотні характеристики послідовного коливального контура .....	113
3.3.3.2 Вхідна резонансна характеристика послідовного коливального контура .....	116
3.3.4. Передатні частотні характеристики послідовного коливального контура .....	118
3.3.5. Вибірні властивості послідовного коливального контура.....	122

3.3.5.1 Вплив внутрішнього опору джерела на частотно-вибірні властивості послідовного коливального контура .....	123
3.3.5.2 Способи підключення навантаження до послідовного коливального контура .....	125
3.4. Паралельний коливальний контур .....	128
3.4.1. Визначення, види та еквівалентна схема паралельного коливального контура .....	128
3.4.2. Еквівалентний опір паралельного коливального контура та умови резонансу .....	129
3.4.3. Еквівалентний опір паралельного коливального контура при резонансі .....	132
3.4.4. Струми паралельного коливального контура при резонансі .....	133
3.4.5. Вхідні частотні та резонансні характеристики паралельного коливального контура першого виду .....	135
3.4.6. Передатні частотні характеристики паралельного коливального контура першого виду .....	137
3.4.7. Вхідні частотні характеристики складних паралельних коливальних контурів .....	139
3.4.8. Вибірні властивості паралельних коливальних контурів .....	142
3.4.8.1 Вплив внутрішнього опору джерела на параметри паралельного коливального контура .....	143
3.4.8.2 Способи підключення навантаження до паралельного коливального контура .....	145
Розділ 4. Індуктивно зв'язані кола .....	148
4.1. Поняття про взаємну індуктивність .....	148
4.2. Узгоджене та зустрічне включення магнітно зв'язаних котушок індуктивності .....	150
4.3. Рівняння Кірхгофа для індуктивно зв'язаних кіл .....	151
4.4. Послідовне з'єднання магнітно зв'язаних котушок індуктивності .....	152
4.5. Паралельне з'єднання магнітно зв'язаних котушок індуктивності .....	153
4.6. Поняття про лінійний трансформатор .....	154
4.6.1. Рівняння Кірхгофа для лінійного трансформатора .....	155
4.6.2. Еквівалентна схема лінійного трансформатора .....	157
4.6.3. Ідеальний лінійний трансформатор та його властивості .....	158
4.6.3.1 Коефіцієнти зв'язку та трансформації ідеального трансформатора .....	158
4.6.3.2 Перетворення опору трансформатором .....	159
Розділ 5. Зв'язані коливальні контури .....	162
5.1. Визначення та види зв'язку в системах зв'язаних коливальних контурів .....	162
5.2. Еквівалентна схема та коефіцієнт зв'язку системи зв'язаних коливальних контурів .....	163
5.3. Схеми заміщення системи зв'язаних коливальних контурів .....	165
5.4. Вторинний струм в системі зв'язаних коливальних контурів .....	168
5.5. Резонанси в системі зв'язаних коливальних контурів .....	169

5.5.1. Часткові резонанси в системі зв'язаних коливальних контурів.....	169
5.5.2. Основний або індивідуальний резонанс.....	171
5.5.3. Складні резонанси в системі зв'язаних коливальних контурів.....	172
5.5.4. Оптимальний коефіцієнт зв'язку між контурами та фактор зв'язку ..	175
5.6. Частотна вибірність системи зв'язаних коливальних контурів .....	176
5.6.1. Частотні характеристики системи зв'язаних коливальних контурів ....	176
5.6.2. Вибірні властивості системи зв'язаних коливальних контурів.....	180
5.7. Енергетичні співвідношення в системі зв'язаних коливальних контурів .....	184
Список літератури .....	186

# РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАКОНИ ЕЛЕКТРОРАДІОКІЛ

## 1.1. Предмет та задачі навчальної дисципліни

Електротехніка та радіотехніка - це науки, що вивчають фізичні процеси в електромагнітному полі, а також технічні методи використання його енергії для практичних цілей.

Електротехніка вивчає методи передавання та використання електромагнітного поля для приведення в дію потужних машин і механізмів, джерел світла, тепла, а також для інших енергетичних перетворень.

Радіотехніка вивчає методи використання електромагнітного поля для передавання на відстань різного роду інформації. Аналогічні цілі переслідує і електропровідний зв'язок - електрозв'язок.

Спільними для електротехніки і радіотехніки є три основні задачі:

- генерування електромагнітного поля генераторами;
- передавання електромагнітного поля від генератора до споживача через лінію передачі;
- перетворення та використання переданого генератором або передавачем електромагнітного поля для тих або інших практичних цілей за допомогою приймального пристрою.

Електричні та магнітні явища розглядають, використовуючи два різних підходи: з точки зору теорії поля та з точки зору теорії кіл.

Теорія поля розглядає такі явища як випромінювання електромагнітної енергії, розповсюдження радіохвиль, розподілення об'ємних зарядів, густини струмів і т.і.

Елементами, що розглядаються в теорії поля, є елементарні об'єми середовища - діелектрика, провідника, напівпровідника, які характеризуються своїми параметрами: діелектричною проникністю  $\epsilon$ , магнітною проникністю  $\mu$ , питомою електричною провідністю  $\sigma$  та іншими.

Як електричні та магнітні величини в теорії поля використовують вектори напруженості електричного і магнітного полів, густину струму та інші. Ці величини та параметри середовища зв'язані рівняннями Максвелла, які відображають закони електромагнітних явищ, спільні для різних середовищ.

Теорія кіл застосовується в тих випадках, коли досліджувані явища носять просторово обмежений характер. Елементами, що в даному випадку розглядаються, тут служать уже не елементарні об'єми середовища, а опори, індуктивності та ємності. Ці елементи кіл враховують магнітні та електричні поля навкруги провідників і виділення тепла, обумовлене проходженням струму через них.

Теорія кіл оперує наступними електричними величинами: напругою, струмом, зарядом. Ці параметри, так само як і елементи кіл, є інтегральними

величинами по відношенню до тих, які розглядаються в теорії поля і носять диференціальний характер.

## 1.2. Особливі визначення теорії електричних кіл

### 1.2.1. Електричне коло

Одним із основних понять фізики є електричний заряд. Кількісно заряди оцінюються кількістю електрики  $q$ , яка вимірюється в кулонах (Кл). Із нерухомим зарядом пов'язане електричне поле, що являє собою електричну складову електромагнітного поля. Це поле характеризується вектором напруженості електричного поля  $\vec{E}$ , яка визначається силою, що діє на одиничний заряд. Вимірюється напруженість  $\vec{E}$  в вольтах на метр (В/м).

Якщо заряди знаходяться в русі, то з ними пов'язують і магнітне поле, тобто магнітну складову електромагнітного поля. Вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  визначають як силу, що діє на одиницю кількості магнетизму, хоча остання є величиною фіктивною. Вимірюється напруженість  $\vec{H}$  в амперах на метр (А/м).

Будь-який рух заряджених частинок (зарядів) називається електричним струмом. Рух зарядів у провідному середовищі називається струмом провідності, у вільному середовищі - струмом переносу. При наявності змінного електричного поля в діелектрику чи пустоті існує так званий струм зміщення.

Якщо через деяку поверхню середовища за проміжок часу  $\Delta t$  переноситься кількість електрики  $\Delta q$ , то миттєве значення струму, тобто його значення в конкретний момент часу

$$i(t) = i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} .$$

Таким чином, струм визначається як скалярна величина, що дорівнює границі відношення кількості електрики, що переноситься зарядженими частинками через розглядаєму поверхню на протязі деякого проміжку часу, до величини цього проміжку, коли останній наближається до нуля. Вимірюється струм в амперах (А).

Якщо струм в часі не змінюється, його називають постійним струмом і позначають літерою  $I$ .

Постійний струм дорівнює кількості електрики, що переноситься через розглядаєму поверхню середовища в одиницю часу

$$I = \frac{q}{t} ,$$

де  $q$  - кількість електрики, яка перенесена за час  $t$ .

Якщо струм є функцією часу  $i=F(t)=i(t)$  та має різну величину в різні моменти часу, то його називають змінним.



Сукупність пристроїв, що призначені для проходження в них електричних струмів, називається електричним колом.

Будь-яке коло містить в собі одне або декілька джерел (генераторів) електромагнітної енергії, які називаються активними елементами кола. Всі інші ділянки кола носять назву пасивних елементів.

Для переносу елементарного заряду  $dq$  через деяку пасивну ділянку кола необхідно затратити енергію

$$dw = u dq, \quad [\text{Дж}] \quad (1.1)$$

де  $u$  - миттєве значення напруги (різниці потенціалів) на затискачах пасивної ділянки кола.

Із виразу (1.1) видно, що миттєву напругу можна визначити як границю відношення роботи сил електричного поля при перенесенні заряду через задану пасивну ділянку кола до величини цього заряду, коли останній наближається до нуля.

$$u(t) = u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{dw}{dt}.$$

Вимірюється миттєва напруга  $u$  в вольтах (В).

Напруга - скалярна величина, яка в загальному випадку є функцією часу

$$u = F(t) = u(t).$$

Якщо напруга не залежить від часу, то її називають постійною і позначають  $U$ . Постійна напруга  $U$  дорівнює роботі сил електричного поля в разі переносу одиничного заряду вдовж заданої ділянки кола

$$U = \frac{W}{q},$$

де  $W$  - робота сил поля, затрачена для переносу заряду  $q$ .

Енергія, що визначається виразом (1.1), надається активним елементом (генератором) і зазнає наступних перетворень:

при протіканні по колу струму відбувається витрата енергії,

тобто її перетворення в інші види;

деяка частина енергії, що надходить від генератора, запасється (накопичується) в електричному та магнітному полях елементів кола.

Миттєве значення швидкості змінювання енергії, яка надходить в коло, називається миттєвою потужністю

$$p(t) = p = \frac{dw}{dt}.$$

У відповідності із співвідношенням (1.1) миттєва потужність

$$p(t) = u \frac{dq}{dt} = u \cdot i. \quad (1.2)$$

Ця потужність вимірюється в джоулях за секунду (Дж/с) або в ватах (Вт).

Хоча струм та напруга і скалярні величини, та в зв'язку з необхідністю розрахунків кіл їм надають напрямку.

Вважають, що струм в колі має напрямок від точки з більш високим потенціалом до точки з більш низьким потенціалом. Це відповідає напрямку руху позитивних зарядів у колі .

Позитивним напрямком напруги також вважається напрямок від точки з більш високим потенціалом до точки з більш низьким потенціалом. Знак напруги й знак струму визначаються порівнянням їх напрямків з позитивними напрямками.

В будь-якому замкненому колі струм усередині джерела енергії і в зовнішньому колі зберігають свій напрямок по відношенню до вибраного позитивного напрямку. При цьому в зовнішньому колі напрямок струму і напруги співпадають, а всередині джерела вони протилежні. Переміщення позитивних зарядів від точки з меншим потенціалом до точки з більшим потенціалом тут відбувається за рахунок особливого поля, яке називається стороннім. Це поле виникає в джерелі за рахунок перетворення неелектромагнітної енергії в електромагнітну.

Напруженість стороннього поля визначає електрорушійну силу (ЕРС) джерела, що чисельно дорівнює роботі, яка затрачується стороннім полем на переміщення одиниці позитивного заряду від негативного полюса джерела до позитивного.

Постійна ЕРС дорівнює

$$E_{\Gamma} = \frac{W_{\text{с}}}{q},$$

де  $W_{\text{с}}$  - робота сил стороннього поля при переміщенні заряду  $q$ .

Миттєве значення ЕРС

$$e_{\Gamma} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{dw}{dq}$$

ЕРС - величина скалярна і вимірюється в вольтах. Позитивний напрямок ЕРС джерела протилежний позитивному напрямку напруги, тобто вона спрямована від точки з меншим потенціалом до точки з більшим потенціалом.

На закінчення відзначимо, що в колах змінного струму умовились вважати позитивними напрямками електричних величин ті напрямки, які вони мають при позитивних значеннях.

### ***1.2.2.Схема електричного кола та його елементи***

Окремі пристрої, що складають електричне коло і виконують в ньому певні функції, називаються елементами кола.

Послідовним з'єднанням елементів називають таке з'єднання, при якому в них протікає один і той самий струм.

В разі паралельного з'єднання елементів електричного кола до них прикладена одна і та ж напруга.

Графічне зображення електричного кола, що включає умовні позначення його елементів і характеризує зв'язки між ними, називається схемою кола.

Основними елементами електричного кола є джерела та споживачі електромагнітної енергії, які з'єднуються між собою провідниками електричного струму.

Джерела електромагнітної енергії відносять до активних елементів кола. Споживачі електромагнітної енергії відносять до пасивних елементів кола і підрозділяють на власне споживачі та накопичувачі.

За кількістю точок підключення до електричного кола або полюсів розрізняють двополюсні елементи (двополюсники), триполюсні (триполюсники), чотириполюсні (чотириполюсники) та багатопольсні (багатопольсники). Умовні позначення цих елементів приведені на рис. 1.1.

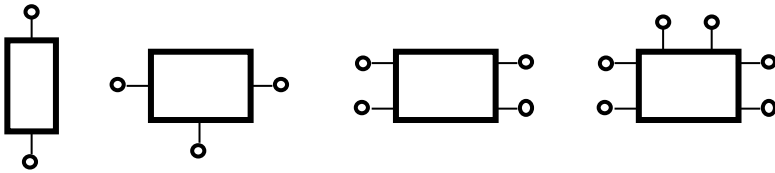


Рис.1.1. Умовні позначення дво-, три-, чотири- та шестипольсника

В теорії кіл використовують ідеалізовані активні двополюсники: ідеалізоване джерело напруги (ідеалізований генератор ЕРС) та ідеалізоване джерело струму (ідеалізований генератор струму). Графічні позначення цих елементів приведені на рис. 1.2.

Ідеалізованим джерелом напруги або ідеалізованим генератором ЕРС називається активний елемент з двома затискачами, напруга на якому не залежить від протікаючого через нього струму.

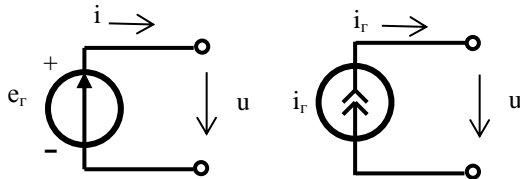


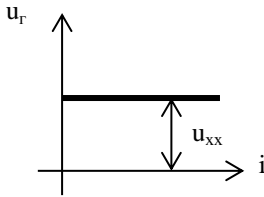
Рис.1.2. Умовні позначення ідеалізованих джерел напруги та струму

Як видно із зовнішньої характеристики генератора ЕРС,  $u_r = F(i)$ , що приведена на рис.1.3., при будь-якому струмі напруга на затискачах ідеалізованого джерела напруги залишається незмінною, тобто  $u_r = u_{xx}$ ,

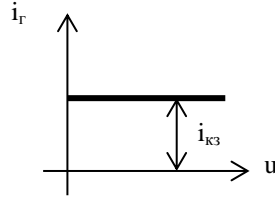
де  $u_{xx}$  - напруга на затискачах генератора в режимі холостого ходу, коли його затискачі розімкнені.

Внутрішній опір ідеалізованого генератора ЕРС вважають дорівнюючим нулю, а генеруєму ним потужність нескінченно великою,

оскільки при  $i \rightarrow \infty$  потужність  $p = u_r \cdot i \rightarrow \infty$ . Очевидно, що ідеалізований генератор ЕРС не може бути реалізований фізично.



**Рис.1.3.** Зовнішня характеристика ідеалізованого генератора ЕРС

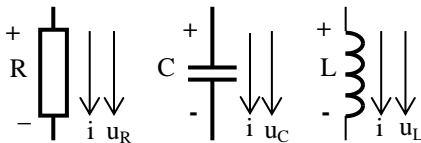


**Рис.1.4.** Зовнішня характеристика ідеалізованого генератора струму

Ідеалізоване джерело струму - це ідеалізований активний елемент, струм якого не залежить від напруги на його затискачах.

Вважають, що внутрішній опір такого ідеального джерела струму нескінченно великий, тому параметри зовнішнього кола не впливають на його струм (рис. 1.4). Тобто, при будь-якій напрузі на затискачах  $i_r = i_{kz}$ , де  $i_{kz}$  - струм короткого замикання джерела. Генератор струму також не можна реалізувати фізично, оскільки він, як і ідеальний генератор ЕРС, має необмежену потужність. Якщо  $u \rightarrow \infty$ , а струм  $i_r = \text{const}$ , то значить  $p = i_r \cdot u \rightarrow \infty$ .

Ідеалізовані джерела струму та напруги можуть бути незалежними (некерованими) або залежними (керованими). В першому випадку параметри



**Рис.1.5.** Ідеалізовані пасивні елементи

джерел не залежать ні від яких інших струмів та напруг в колі, а в другому випадку вони залежать від напруги або струму деякої ділянки кола.

Реальні генератори ЕРС та струму відрізняються своїми властивостями від ідеалізованих.

До ідеалізованих пасивних елементів електричних кіл відносять опір, ємність та індуктивність. Графічні позначення цих елементів приведені на рис 1.5.

Опір - це ідеалізований елемент кола, в якому відбувається лише необоротне перетворення електромагнітної енергії в тепло або інші види енергії, а накопичення енергії в електричному або магнітному полях виключене.

Ємність - це ідеалізований елемент кола, що має можливість накопичувати енергію в електричному полі. Магнітне поле в такому елементі відсутнє, а перетворення електромагнітної енергії в тепло або інші види енергії виключене.

Індуктивність - це ідеалізований елемент, що може накопичувати енергію в магнітному полі. Електричне поле в індуктивності відсутнє, а перетворення електромагнітної енергії в тепло або інші види енергії виключене.

Реальними елементами електричних кіл, які близькі за своїми властивостями до розглянутих ідеалізованих елементів, є резистор, конденсатор та котушка індуктивності відповідно. Кожен з цих елементів має всі розглянуті вище властивості, однак за допомогою спеціальних методів розробки та конструювання досягають значної переваги основної властивості. Наприклад, для резистора намагаються зменшити паразитні ємність та індуктивність виводів, для конденсатора - знизити втрати в діелектрику і також індуктивність виводів та самої конструкції, а для котушки індуктивності зменшують паразитну ємність та опір дроту обмотки.

Головним предметом дослідження теорії кіл є схеми електричних кіл, що в загальному випадку являють собою з'єднання окремих елементів будь-якої складності.

Основними структурними поняттями електричного кола є вітка, вузол та контур.

Вітка електричного кола - це вся ділянка кола, вздовж якої в будь-який момент часу протікає один і той самий струм.

Вузол електричного кола - це місце з'єднання трьох або більшого числа віток.

Узагальнений вузол - це будь-яка частина складного кола, обмежена замкнутою лінією або поверхнею.

Контур електричного кола - це будь-який замкнений шлях, що проходить вздовж декількох віток кола.

Контури можуть бути простими та складними. Складний контур має всередині себе розгалуження у вигляді однієї або декількох віток, що не входять безпосередньо в контур. Простий контур розгалужень не має.

### ***1.2.3. Закони Ома та Кірхгофа в дійсній формі***

Закон Ома вперше був сформульований у 1826 році німецьким фізиком Омом. Згідно з цим законом миттєвий струм в послідовному колі, що не має джерел ЕРС, дорівнює

$$i = \frac{u}{\sum_{k=1}^N R_k} = \frac{u}{R},$$

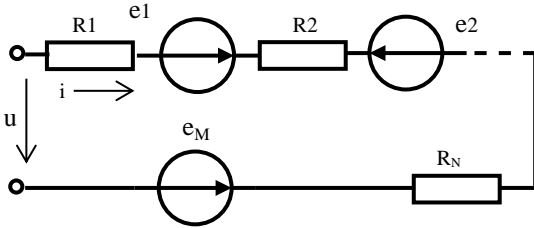
де  $u$  - миттєва напруга, прикладена до кола;  $R$  - опір послідовно з'єднаних опорів кола.

Якщо ж послідовне коло окрім опорів  $R$  має в складі ще й джерела ЕРС (рис.1.6), то струм в ньому знаходять за допомогою узагальненого закону Ома

$$i = \frac{u + \sum_{i=1}^M e_i}{\sum_{k=1}^N R_k}. \quad (1.3)$$

В рівнянні (1.3)  $\sum_{i=1}^M e_i$  - алгебраїчна сума діючих в послідовному колі

ЕРС, причому ЕРС які співпадають зі струмом за напрямком, записують з додатнім знаком, а в протилежному випадку - з від'ємним.



Якщо в результаті розрахунку згідно з співвідношенням (1.3) отримаємо від'ємне значення струму, то дійсний напрямок струму протилежний до вибраного. На жаль закони Ома в дійсній формі складно застосовувати

Рис.1.6. Послідовне коло, що має джерела

для аналізу кіл з ємностями та індуктивностями.

Для розрахунку розгалужених складних кіл застосовують перший та другий закони Кірхгофа.

Перший закон Кірхгофа випливає із закону збереження заряду, стосується вузлів кола і формулюється наступним чином:

Алгебраїчна сума миттєвих струмів в будь-якому вузлі кола дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^N i_k = 0. \quad (1.4)$$

де  $N$ - число віток, що з'єднуються у вузлі.

В рівнянні (1.4) струми, що спрямовані до вузла, входять з одним знаком, а ті, що спрямовані від вузла, - з протилежним. Цей закон справедливий і для узагальненого вузла.

Другий закон Кірхгофа випливає із закону збереження енергії, стосується контурів електричного кола і формулюється наступним чином:

В будь-якому контурі електричного кола алгебраїчна сума спадів миттєвих напруг на пасивних елементах кола дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих ЕРС цього ж контура

$$\sum_{i=1}^N u_i = \sum_{k=1}^M e_k. \quad (1.5)$$

де  $N$  - число пасивних елементів, а  $M$ -число джерел ЕРС в контурі.

В рівнянні (1.5) додатні знаки мають напруги та ЕРС позитивні напрямки яких співпадають з довільно вибраним напрямком обходу розглядаемого контура. Якщо ж напрямки напуг та ЕРС не співпадають з напрямком обходу контура, то вони входять в рівняння (1.5) з від'ємним знаком.

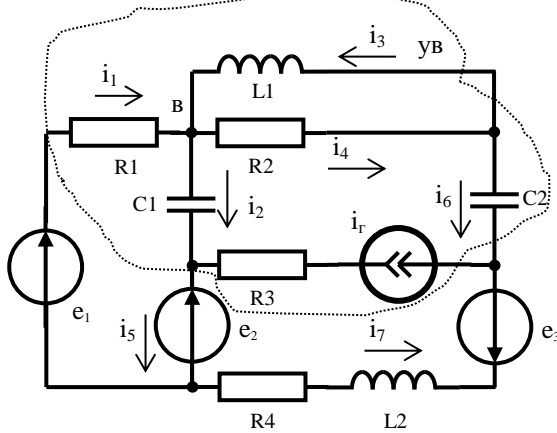


Рис.1.7. Приклад лінійного

Для прикладу складемо рівняння за законами Кірхгофа для вузла "в", узагальненого вузла "ув" та контура схеми, що приведена на рис.1.7.

Спочатку позначимо струми у вітках, які можуть мати довільні напрямки. Складемо рівняння за першим законом Кірхгофа для вузла "в"

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0.$$

Тепер складемо аналогічне рівняння для узагальненого вузла "ув", який обмежений на рис.1.7 пунктирною лінією

$$i_1 + i_3 - i_3 - i_6 + i_r - i_5 = 0.$$

Остаточно

$$i_1 - i_6 + i_r - i_5 = 0.$$

А для складного контура, який включає елементи  $e_1, R1, R2, C2, e_3, L2, R4$ , при його обході за годинниковою стрілкою згідно з другим законом Кірхгофа маємо

$$u_{R1} + u_{R2} + u_{C2} - u_{L2} - u_{R4} = e_1 + e_3.$$

Зазначимо, що для контурів, які мають в своєму складі ідеалізовані джерела струму рівняння за другим законом Кірхгофа не складають.

### 1.3.Класифікація електричних кіл

Електричні кола класифікуються за різними ознаками. Електричне коло, яке має в своєму складі джерела електромагнітної енергії, називається активним , а коло, що не має джерел енергії, - пасивним .

Коло, в якому всі ЕРС, напруги та струми є незмінними в часі, називають колом постійного струму. Якщо ж у колі протікають змінні струми і діють змінні напруги та ЕРС, то маємо коло змінного струму.

Оскільки електромагнітні коливання в будь-якій електричній системі, в тому числі і в колі, розповсюджуються з обмеженою швидкістю, то при деяких розмірах пристрою в кожний момент часу миттєві струми не будуть однаковими вздовж ділянки кола з послідовним з'єднанням елементів. Таким чином, струми та напруги в такому колі є функціями не тільки часу, але й координат.

Електричні кола, в яких спостерігаються такі явища, називаються колами з розподіленими параметрами. Опори, ємності та індуктивності в цих колах треба вважати розподіленими вздовж кола. Геометричні розміри пристроїв з розподіленими параметрами та їх елементів не можна вважати безмежно малими. Прикладами таких пристроїв можуть служити різні типи ліній передачі, антенні пристрої та інші пристрої, геометричні розміри яких сумірні з довжинами хвиль використовуваних в них сигналів.

В електрорічних колах із зосередженими параметрами опори, ємності та індуктивності вважаються зосередженими на окремих ділянках. Це означає, що з достатньою для практики точністю можна вважати електричне поле, магнітне поле, а також необоротний процес поглинання електромагнітної енергії зосередженими на окремих ділянках кола. При розрахунках таких кіл використовуються лише параметри елементів і не враховуються геометричні розміри останніх. Практично коло вважають колом із зосередженими параметрами, якщо лінійні розміри пристрою, в який входить коло, задовольняють умові

$$l_{\max} < 0,01\lambda ,$$

де  $l_{\max}$  - найбільші геометричні розміри пристрою;

$\lambda$  - довжина хвилі електромагнітного коливання, що розповсюджується в колі.

Електричні кола розділяють також на лінійні та нелінійні. Лінійним називається електричне коло, в якому параметри елементів не залежать від величини та напрямку протікаючих струмів і прикладених напруг. Якщо навіть один елемент кола нелінійний, то й електричне коло вважається нелінійним.

Критерієм лінійності кола є виконання принципу суперпозиції: реакція кола на суму дій дорівнює сумі реакцій на кожен дію окремо.



Якщо параметри всіх пасивних елементів кола не залежать від часу, то таке електричне коло називають колом з постійними параметрами або стаціонарним колом.

Якщо ж один або декілька пасивних елементів мають параметри, що залежать від часу, то такі кола називають колами зі змінними параметрами або параметричними колами. Ці кола відносять до лінійних, оскільки опори, ємності та індуктивності в них залежать не від величин і напрямків струмів та напруг, а змінюються за рахунок дії зовнішніх факторів.

## 1.4. Властивості ідеалізованих пасивних елементів кіл

### 1.4.1. Опір

Як відомо, в опорі відбувається необоротний процес поглинання електромагнітної енергії, для кількісної оцінки якого вводять параметр, що називається опором  $R$ . Миттєві струм та напруга цього елемента зв'язані законом Ома

$$i = \frac{u}{R}; \quad i = G \cdot u. \quad (1.6)$$

Якщо опір  $R$  вимірюється в омах (Ом), то величина, обернена до опору  $G=1/R$  називається провідністю і вимірюється в сименсах (См).

Миттєва потужність, що надходить в опір, дорівнює

$$p_R = ui = Ri^2 = Gu^2. \quad (1.7)$$

Електромагнітна енергія, що надходить в опір  $R$ , починаючи з моменту часу  $t=0$  до деякого моменту  $t$

$$w_R = \int_0^t p_R dt = \int_0^t Ri^2 dt = \int_0^t Gu^2 dt.$$

Якщо струм в опорі постійний

$$w_R = R \cdot I^2 \cdot t. \quad (1.8)$$

Перетворення електромагнітної енергії  $w_R$  у теплову було виявлено Джоулем та Ленцем, які встановили тепловий еквівалент електричної енергії 0,24 кал/Дж. Таким чином, теплота, еквівалентна витраченій енергії, дорівнює

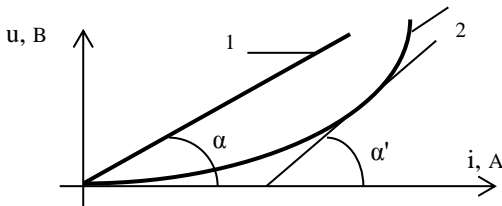
$$Q_T = 0,24 W_R.$$

До шкідливих дій струму відносять теплові втрати електричної енергії у дротах, електричних машинах та апаратах, псування ізоляції дротів від нагріву та інші.

В загальному випадку параметр  $R$  залежить від струму  $i$ . Залежність виду  $u = F(i)$  називається вольт-амперною характеристикою опору  $i$  в загальному випадку є нелінійною.

Якщо величина опору  $R$  не залежить від величини струму, що тече через нього, то маємо лінійну залежність  $u = F(i)$ , яка відповідає закону Ома. Опір у цьому випадку є лінійним елементом кола.

На рис.1.8 приведені вольт-амперні характеристики лінійного та нелінійного опорів.



**Рис.1.8.** Вольт-амперні характеристики лінійного(1) та нелінійного (2) опорів

Для лінійного опору параметр  $R$  визначається величиною тангенса кута нахилу  $\alpha$  прямої вольт-амперної характеристики до осі струму. Для нелінійного опору величина  $R$  залежить від величини струму  $i$  визначається тангенсом кута  $\alpha'$

нахилу  $\alpha$  дотичної до нелінійної вольт-амперної характеристики в точці, яка нас цікавить.

#### 1.4.2. Індуктивність

Оскільки індуктивність - це елемент, в якому накопичується енергія магнітного поля, то для кількісної оцінки цього явища використовується параметр  $L$ , що визначається струмом в даному елементі та потোকозчепленням самоіндукції.

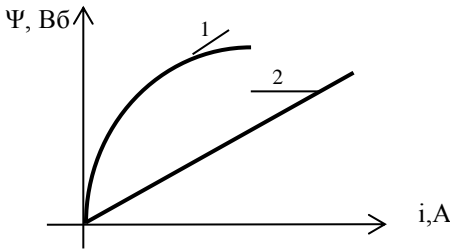
$$L = \frac{\Psi}{i}, \left[ \frac{В \cdot с}{А} \right]. \quad (1.9)$$

Потокозчепленням самоіндукції кола  $\Psi$  називається сума добутків магнітних потоків, обумовлених струмом в цьому колі, на число витків, з якими вони зчеплені. Якщо всі витки котушки індуктивності пронизані одним і тим самим магнітним потоком  $\Phi$ , то потокозчеплення  $\Psi$  дорівнює

$$\Psi = w \cdot \Phi = L \cdot i, \quad (1.10)$$

де  $w$  - число витків котушки індуктивності.

Потокозчеплення  $\Psi$  вимірюється в веберах (Вб), а індуктивність  $L$  – в генрі (Гн). Співвідношення (1.9) та (1.10) є справедливими у випадку лінійного кола, що має лінійну залежність  $\Psi=F(i)$ .



**Рис.1.9. Нелінійна (1) та лінійна (2) залежність потокозчеплення від струму**

В загальному випадку залежність потокозчеплення від струму нелінійна (рис.1.9). В цьому випадку маємо нелінійну індуктивність, величина якої залежить від струму в колі. Якщо ж залежність  $\Psi=F(i)$  лінійна, то індуктивність  $L$  елемента - стала величина.

На основі закону електромагнітної індукції Фарадея-Максвелла змінювання

потокозчеплення самоіндукції  $\Psi$  викликає ЕРС самоіндукції

$$e(t) = -\frac{d\Psi}{dt}. \tag{1.11}$$

За законом Ленца, що відображає принцип електромагнітної інерції, ця ЕРС протидіє змінюванню потокозчеплення, що враховується знаком мінус у виразі (1.8).

Якщо індуктивність  $L$  лінійна, то вираз (1.11) приймає вигляд

$$e_L(t) = -L \frac{di}{dt}. \tag{1.12}$$

Напруга на індуктивності

$$u_L = -e_L(t) = L \frac{di}{dt} \tag{1.13}$$

співпадає з позитивним напрямком струму. На основі виразу (1.13) струм в індуктивності

$$i = \frac{1}{L} \int u_L dt \tag{1.14}$$

або інакше

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L dt + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt. \tag{1.15}$$

Миттєва потужність, що надходить в індуктивність

$$p_L = u_L \cdot i = L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} \quad (1.16)$$

Енергія магнітного поля в довільний момент часу  $t$

$$w_L = \int_{-\infty}^t p_L dt = \int_0^i L \cdot i di = \frac{L \cdot i^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2 \cdot L} \quad (1.17)$$

Тут враховано, що в разі, коли  $t \rightarrow -\infty$ , струм  $i(-\infty) = 0$ .

Якщо частина магнітного потоку, зв'язаного з індуктивним елементом, одночасно зв'язана з іншим індуктивним елементом, то ці два елементи окрім параметрів  $L_1$  та  $L_2$  характеризуються параметром  $M$ , який називається взаємною індуктивністю (рис.1.10).

Цей параметр являє собою відношення потокозчеплення взаємної індукції одного з елементів до струму іншого елемента

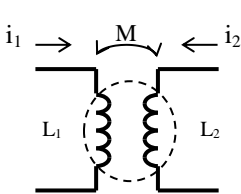


Рис.1.10.Магнітно зв'язані котушки індуктивності

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} \quad (1.18)$$

де  $\Psi_{12}$  - потокозчеплення першого елемента, обумовлене струмом другого елемента;

$\Psi_{21}$  - потокозчеплення другого елемента, обумовлене струмом першого елемента.

В цьому випадку в першому і другому елементах наводяться ЕРС взаємної індукції,

які дорівнюють

$$e_{1M} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \cdot \frac{di_2}{dt}; \quad e_{2M} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \cdot \frac{di_1}{dt} \quad (1.19)$$

Вирази (1.19) одержані для випадку, коли взаємна індуктивність  $M$  не залежить від струмів  $i_1$  та  $i_2$ .

Так само, як і індуктивність  $L$ , взаємна індуктивність вимірюється в генрі. Однак, на відміну від індуктивності  $L$ , взаємна індуктивність  $M$  - це не є самостійний елемент кола, а лише характеристика магнітного зв'язку між індуктивними елементами.

### 1.4.3.Ємність

Ємність - це ідеалізований елемент електричного кола, що наближено замінює конденсатор, в якому накопичується енергія електричного поля. В цьому разі ємність  $C$  кількісно оцінюється співвідношенням

$$C = \frac{q}{u_c} \quad (1.20)$$

де  $q$  - заряд ємності;  $u_c$  - напруга на ємнісному елементі.

Ємність  $C$  вимірюється в фарадах (Ф). Залежність заряду  $q$  ємності  $C$  від величини напруги  $u_c$  в загальному випадку нелінійна (рис.1.11), і ємність  $C$  залежить від величини напруги  $u_c$ .

Коли ж залежність  $q=F(u_c)$  лінійна, ємність  $C$  є сталою величиною. В останньому випадку струм через ємність визначається швидкістю змінювання напруги на ній

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}. \quad (1.21)$$

Цей струм розглядають як струм провідності в виводах ємнісного елемента, що переходить в струм зміщення в діелектрику цього елемента. Струм зміщення - це величина, яка прямо пропорційна швидкості змінювання напруженості електричного поля, якщо воно однорідне. Завдяки введенню поняття струму зміщення, струм в колі з ємністю виглядає замкненим через діелектрик.

Напруга на ємності дорівнює

$$u_c = \frac{1}{C} \int i \cdot dt,$$

або інакше

$$u_c = \frac{1}{C} \int i \cdot dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i \cdot dt + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt. \quad (1.22)$$

Миттєва потужність, що надходить в ємність

$$p_c = u_c \cdot i = C \cdot u_c \frac{du_c}{dt}. \quad (1.23)$$

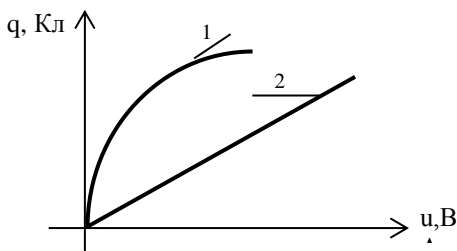


Рис.1.11. Залежність заряду від напруги для нелінійної (1) та лінійної (2)

Вона пов'язана з процесом накопичення або зменшення електричного заряду в ємності.

Якщо до ємності прикладена напруга  $u_c$ , то енергія електричного поля в момент часу  $t$  визначається виразом

$$w_c = \int_{-\infty}^t p_c dt = \int_0^{u_c} C \cdot u_c \cdot du_c = \frac{C \cdot u_c^2}{2} = \frac{q^2}{2 \cdot C}. \quad (1.24)$$

У виразі (1.24) враховано, що при  $t=-\infty$  напруга  $u_c(-\infty)=0$ .

## 1.5. Реальні активні та пасивні елементи кола

### 1.5.1. Реальні активні елементи кола

Розглянуті раніше ідеалізовані джерела ЕРС та струму не можна реалізувати фізично, оскільки вони повинні були б мати нескінченно велику потужність. В теорії електричних кіл реальні джерела електромагнітної енергії представляють наближеними моделями: реальним джерелом напруги та реальним джерелом струму.

Реальним джерелом напруги або ЕРС називається джерело, у якого внутрішній опір  $R_i$  набагато менший, ніж опір навантаження  $R_H$  (рис. 1.12,а). Як відомо, у ідеалізованого джерела ЕРС  $R_i=0$ .

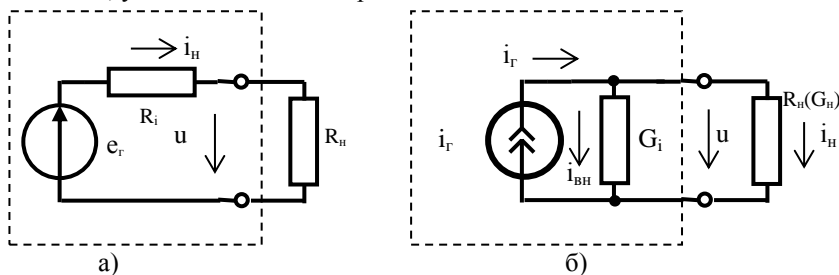


Рис.1.12. Схеми кіл з реальними джерелами ЕРС (а) та струму (б)

Завдяки виконанню співвідношення  $R_i \ll R_H$  при підключенні до реального джерела ЕРС навантаження зміна опорів останнього мало впливає на величину напруги на затискачах генератора

$$u_H = e_r - i_H R_i. \quad (1.25)$$

При цьому струм в колі

$$i_H = \frac{e_r}{R_i + R_H}.$$

Джерела (генератори) струму також діляться на реальні та ідеалізовані.

Реальним джерелом струму називається таке джерело, у якого внутрішній опір значно перевищує опір навантаження. Нагадаємо, що для ідеалізованого джерела струму  $R_i = \infty$ .

У реального джерела струму зміна величини опору навантаження практично не впливає на струм в колі. Оскільки внутрішній опір джерела струму дуже великий, то в паралельній еквівалентній схемі його замінюють малою провідністю (рис. 1.12,б)

$$G_i = \frac{1}{R_i}.$$

Тоді згідно зі схемою, яка зображена на рис.1.12,б, маємо

$$i_r = i_n + i_{вн} = \frac{u}{R_n} + u \cdot G_i.$$

При розрахунках складних кіл, які мають декілька джерел ЕРС і декілька джерел струму, виникає необхідність перетворення джерел ЕРС в еквівалентні джерела струму або навпаки.

При цьому в еквівалентному генераторі напруга та струм повинні залишатися такими ж, як і в джерелі-прототипі, а характеристики джерела-прототипа повинні відповідати характеристикам еквівалентного джерела.

Розглянемо генератор струму (рис. 1.12,б) і визначимо його параметри, еквівалентні параметрам джерела ЕРС (рис. 1.12,а).

Для джерела ЕРС маємо

$$e_r = u_n + i_n R_i. \quad (1.26)$$

Поділимо рівняння (1.26) почленно на  $R_i$  і врахуємо, що  $1/R_i = G_i$ . Тоді одержимо

$$\frac{e_r}{R_i} = \frac{u_n}{R_i} + i_n. \quad (1.27)$$

Або інакше

$$e_r \cdot G_i = u_n \cdot G_i + i_n; \quad i_r = i_{вн} + i_n. \quad (1.28)$$

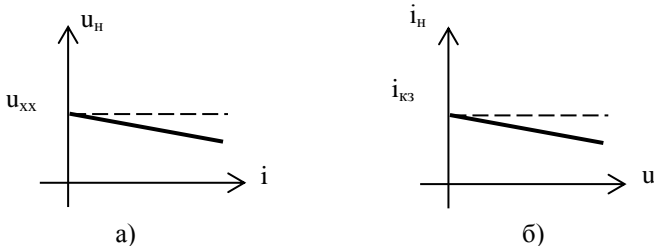


Рис.1.13. Зовнішні характеристики реального джерела ЕРС (а) і джерела струму (б)

де  $i_{вн}$  - внутрішній струм генератора струму.

Із співвідношень (1.27) і (1.28) видно, що перехід від джерела ЕРС до джерела струму можна здійснити, якщо розрахувати струм еквівалентного генератора і його еквівалентну провідність в відповідності з співвідношеннями

$$i_{гекв} = \frac{e_{г}}{R_i}; \quad G_{іекв} = \frac{1}{R_i}. \quad (1.29)$$

Для переходу від джерела струму до джерела ЕРС можна скористатись співвідношеннями

$$e_{гекв} = \frac{i_{г}}{G_i}; \quad R_{іекв} = \frac{1}{G_i}. \quad (1.30)$$

Якщо скористатись рівняннями для напруги на виході реального джерела ЕРС (1.25) та для струму реального джерела струму

$$i_{н} = i_{г} - i_{вн}, \quad (1.31)$$

то можна одержати зовнішні характеристики обох реальних активних елементів (рис.1.13).

При навантаженні джерела напруги опором  $R_{н}$ , напруга на його затискачах зменшується пропорційно зростанню струму в навантаженні (рис.1.13,а). Аналогічно зменшується при збільшенні опору навантаження струм в зовнішньому колі джерела струму (рис.1.13,б). На цих же рисунках пунктирними лініями показані зовнішні характеристики ідеалізованих джерел ЕРС і струму.

Розглянуті схеми джерел ЕРС і струму є еквівалентними при розрахунках напруг та струмів в зовнішньому по відношенню до них колі.

Схемою джерела ЕРС більш зручно користуватись у випадку генератора з малим внутрішнім опором і при послідовному з'єднанні елементів кола. Якщо ж внутрішній опір генератора великий, і коло складається з елементів, з'єднаних паралельно, то перевагу треба віддати схемі джерела струму.



### 1.5.2. Реальні пасивні елементи кола

Кожний із розглянутих раніше ідеалізованих пасивних елементів електричного кола (опір, індуктивність та ємність) має реальний прототип: опір - резистор, індуктивність - котушку індуктивності, ємність - конденсатор. Процеси, що протікають в реальних пасивних елементах складніші, ніж в ідеалізованих. Зокрема в кожному реальному елементі разом з основним енергетичним процесом мають місце також і два інші, хоча і не так яскраво виражені як основний.

Внаслідок наявності цих, так званих, паразитних процесів схеми заміщення реальних пасивних елементів в загальному випадку складаються із декількох ідеалізованих елементів різних типів.

Вигляд схеми заміщення та параметри ідеалізованих елементів, що входять до неї, суттєво залежать від конструкції елемента, технології його виготовлення та особливостей застосовуваних матеріалів. Чим вища необхідна точність розрахунків, тим більше число факторів треба приймати до уваги і тим більш складною буде схема заміщення. Однак надмірна складність схем заміщення суттєво підвищує трудомісткість розрахунків і

тому при дослідженні та розрахунках кіл намагаються використовувати спрощені схеми заміщення (рис.1.14)

На цих схемах позначено:  $L_R, C_R$  - індуктивність виводів та ємність між виводами резистора;  $L_B, R_B$  - індуктивність та активний опір виводів конденсатора;  $R_{вит}$  - опір витікання між обкладками конденсатора

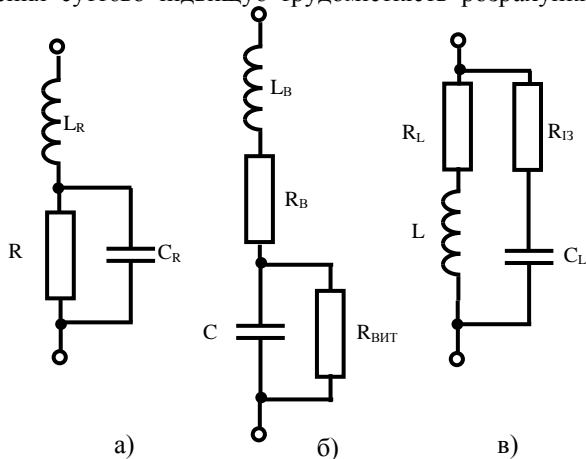


Рис.1.14. Спрощені схеми заміщення резистора (а), конденсатора (б), та котушки індуктивності (в).

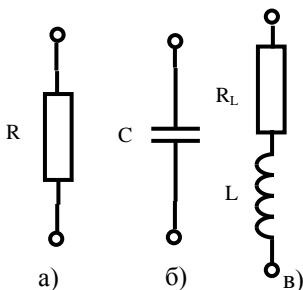


Рис.1.15. Спрощені схеми заміщення резистора (а), конденсатора (б), та котушки індуктивності (в) для низьких частот.

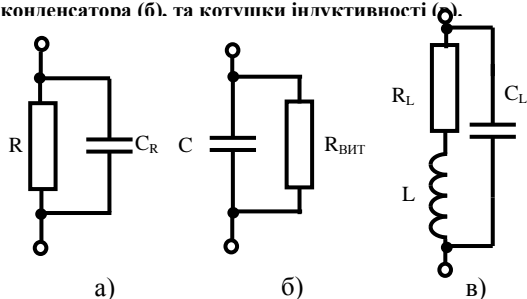


Рис.1.16. Спрощені схеми заміщення резистора (а), конденсатора (б), та котушки індуктивності (в) для середніх частот.

сатора;  $R_L$  - активний опір дроту котушки індуктивності;  $C_L R_{13}$  - ємність та опір ізоляції між витками котушки індуктивності.

Слід відмітити, що схема заміщення одного й того ж елемента може мати різний вигляд в залежності від робочого діапазону частот, в якому працює елемент. Так, наприклад, в діапазоні низьких частот при помірних вимогах до точності розрахунків схема заміщення резистора може складатися лише з одного елемента - опору  $R$ . Схема заміщення котушки індуктивності - з індуктивності та опору втрат  $R_L$  в дротах її обмотки, а схема заміщення конденсатора - із ємності  $C$  (рис.1.15).

В діапазоні середніх частот для резистора бажано додатково врахувати паразитну ємність  $C_R$ , для конденсатора - опір витікання  $R_{\text{вит}}$  між обкладками конденсатора, а для котушки індуктивності - паразитну ємність  $C_L$  між витками (рис.1.16).

В діапазоні помірно високих частот можна користуватись схемами, що зображені на рис.1.14. Якщо ж робоча частота пристрою перевищує 100 МГц, то схеми заміщення його елементів потребують значного ускладнення, що обумовлено необхідністю додаткового врахування цілого ряду паразитних процесів.

## **1.6. Основні поняття та визначення гармонічних електричних величин**

### ***1.6.1. Гармонічні струми і напруги та їх основні параметри.***

Розглянемо основні поняття, що відносяться до змінних струмів та напруг. Змінним струмом називається струм, що змінюється з часом за величиною.

Значення струму в будь-який момент часу називають миттєвим та позначають малою буквою  $i$ . Напрямок струму, для якого його миттєві значення додатні, називають позитивним напрямком струму. Струм вважається повністю визначеним, якщо задана його залежність в часі  $i=F(t)$  та вказаний його позитивний напрямок. Все вищезгадане справедливе і для змінних напруг.

Електромагнітний процес в електрорадіоколі, при якому миттєві значення напруг та струмів повторюються через рівні проміжки часу називається періодичним.

Найменший проміжок часу, на протязі якого миттєві значення періодичної величини повторюються, називається періодом.

Якщо  $F(t)$  - періодичний процес, то для будь-якого додатнього або від'ємного значення аргумента  $t$  справедлива рівність

$$F(t + nT) = F(t); \quad (n=1,2,\dots), \quad (1.32)$$

де  $T$  - інтервал часу, що називається періодом.

Величина, обернена до періоду, яка чисельно дорівнює числу періодів за одиницю часу, називається циклічною частотою або просто частотою

$$f = \frac{1}{T}. \quad (1.33)$$

Частота має розмірність  $1/c$ , а одиницею вимірювання частоти служить герц (Гц).

Найпоширенішим видом періодичного процесу в електроричних колах є гармонічний, коли всі напруги та струми являють собою синусоїдні або косинусоїдні функції однакової частоти.

Із курсу математики відомо, що гармонічна величина є найпростішою періодичною функцією. Більшість інших негармонічних періодичних функцій можна розкласти в нескінченний ряд синусоїд або косинусоїд, які мають кратні частоти. Сукупність гармонічних складових довільного періодичного коливання називається спектром цього коливання. З курсу фізики відомо, що джерела гармонічних ЕРС та струму є найекономічнішими і використовуються найчастіше як в електротехніці, так і в радіотехніці. Тому для дослідження процесів в колах змінного струму в першу чергу необхідно вивчати особливості кіл гармонічного струму.

Миттєве значення синусоїдного струму визначається виразом

$$i = I_m \sin \left( \frac{2\pi}{T} t + \psi_i \right), \quad (1.34)$$

де  $I_m$  - максимальне значення або амплітуда струму;  $\left( \frac{2\pi}{T} t + \psi_i \right)$  - аргумент синуса, що називається фазою або повною фазою;  $\psi_i$  - кут, який дорівнює фазі в початковий момент часу ( $t=0$ ), і називається початковою фазою струму;  $\frac{2\pi}{T} t$  - поточна фаза струму.

З плином часу фаза безперервно зростає і на протязі періоду  $T$  збільшується на  $2\pi$ .

Величина  $2\pi/T$  характеризує швидкість змінювання фази і позначається буквою  $\omega$ . Оскільки  $f=1/T$ , то

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (1.35)$$

В результаті величину  $\omega$  назвали кутовою частотою, оскільки  $\omega$  вимірюється числом радіанів, на яке збільшується фаза за одну секунду. Таким чином, вираз (1.34) приймає вигляд

$$i = I_m \sin (\omega t + \psi_i) \quad (1.36)$$

Для миттєвої синусоїдної напруги можна аналогічно записати

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (1.37)$$

де  $U_m$  - амплітуда напруги;  $\psi_u$  - її початкова фаза.

Миттєві значення синусоїдних струму та напруги можна записати і у вигляді косинусоїдних функцій часу

$$\begin{aligned} i &= I_m \cos(\omega t + \psi_i - \pi/2) = I_m \cos(\omega t + \Theta_i); \\ u &= U_m \cos(\omega t + \psi_u - \pi/2) = U_m \cos(\omega t + \Theta_u), \end{aligned} \quad (1.38)$$

де  $\Theta_i = (\psi_i - \pi/2)$  - початкова фаза косинусоїдного струму;

$\Theta_u = (\psi_u - \pi/2)$  - початкова фаза косинусоїдної напруги.

На рис. 1.17 побудовані графіки гармонічних струмів однакової частоти, але з різними амплітудами та початковими фазами.

Вздовж осі абсцис відкладають або час  $t$ , або пропорційну йому величину  $\omega t$ . Початкова фаза відраховується від точки на осі абсцис, яка відповідає початку синусоїди або косинусоїди, до початку координат.

При цьому початковою точкою синусоїди вважають найближчу до початку координат точку її нульового значення при переході від від'ємних до додатніх значень, а початковою точкою косинусоїди - найближчу до осі

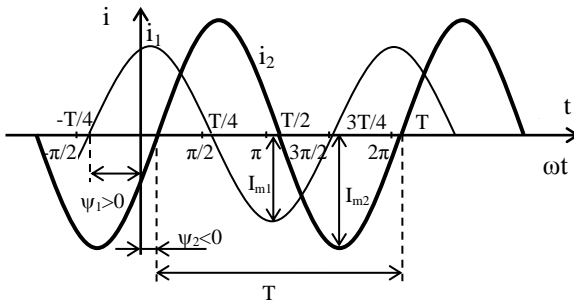


Рис. 1.17. Гармонічні струми, що мають різні амплітуди і початкові фази

ордиат точку додатнього максимуму. Початкова фаза позитивна, якщо напрямок її відрахунку співпадає з позитивним напрямком осі аргумента ( $t$  або  $\omega t$ ). Якщо ж напрямок відрахунку початкової фази протилежний, то початкова фаза негативна. На рис.1.17 показаний відрахунок початкових фаз струмів  $i_1$  та  $i_2$  у випадку їх запису як синусоїдних функцій часу. Як видно, в разі, коли початкова фаза  $\psi > 0$ , початок гармонічної функції зсунутий вліво, а коли  $\psi < 0$  - вправо від початку координат.

Якщо у декількох гармонічних функцій однакової частоти початкові точки не співпадають, то кажуть, що вони зсунуті одна відносно іншої за фазою. Зсув фаз вимірюється різницею фаз, яка, очевидно, дорівнює різниці початкових фаз. Наприклад, на рис.1.17  $\psi_1 - \psi_2 > 0$ , тобто струм  $i_1$

випереджає за фазою струм  $i_2$  на кут  $\psi_1 - \psi_2$ . І навпаки,  $\psi_2 - \psi_1 < 0$ , а значить струм  $i_2$  відстає за фазою від струму  $i_1$  на такий же кут.

Початковій точці синусоїдного струму  $i_1$  відповідає момент часу  $t_1 = -\frac{\psi_1}{\omega}$ , а початку струму  $i_2$  - момент часу  $t_2 = -\frac{\psi_2}{\omega}$ . Тоді різниці фаз  $\psi_2 - \psi_1$  відповідає часовий зсув

$$t_3 = t_2 - t_1 = -\frac{\psi_2 - \psi_1}{\omega}.$$

Якщо у гармонічних функцій однієї і тієї ж частоти початкові фази однакові, то говорять, що вони співпадають за фазою. Якщо різниця їх фаз дорівнює  $\pm \pi$ , то говорять, що вони протилежні за фазою або протифазні. А в разі різниці фаз  $\pm \pi/2$  говорять, що гармонічні величини знаходяться в квадратурі.

### 1.6.2. Середнє та діюче значення гармонічних електричних величин

Середнє значення періодичної функції  $F(t)$  за період  $T$  можна визначити за допомогою співвідношення

$$F_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt. \quad (1.39)$$

У відповідності з геометричним смислом інтегралу середнє значення функції  $F(t)$  за період чисельно дорівнює висоті прямокутника з основою  $T$ , площа якого дорівнює площі, що обмежена функцією  $F(t)$  та віссю абсцис на інтервалі в один період. Для синусоїдної та косинусоїдної функцій середнє значення за період дорівнює нулю, оскільки інтеграл виду (1.39) для гармонічних функцій дорівнює нулю.

Тому в цьому випадку використовують поняття середнього значення функції  $F(t)$ , що береться за абсолютною величиною, або, що одне і те ж, середнього значення за напівперіод.

В відповідності з викладеним середнє значення гармонічного струму дорівнює

$$I_{\text{сеп}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} (-\cos \omega t) \Big|_0^{T/2} = \frac{2I_m}{\pi}.$$

$$I_{\text{сеп}} = \frac{2I_m}{\pi} \approx 0,637I_m. \quad (1.40)$$

Середнє значення змінного струму за напівперіод дорівнює такому постійному струму, при якому за цей інтервал часу по колу проходить така сама кількість зарядів, як і при даному змінному струмі.

Аналогічно для середнього значення синусоїдної напруги одержимо

$$U_{\text{сеп}} = \frac{2U_m}{\pi} \approx 0,637U_m . \quad (1.41)$$

Середнє значення струму та напруги за період можна виміряти за допомогою вимірювальних приладів магнітоелектричної системи, які для вимірювання середнього напівперіодного значення, що відповідає позитивній напівхвилі, комплектуються випрямними пристроями. Тому часто середнє значення гармонічної величини називають середньовипрямленим.

Теплова дія струму, а також механічна сила взаємодії між двома провідниками з однаковими струмами, пропорційна квадрату струму. Тому про величину струму часто судять по так званому діючому (середньоквадратичному) значенню за період.

Діюче значення періодичної функції за період знаходять із співвідношення

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [F(t)]^2 dt} . \quad (1.42)$$

У відповідності з (1.42) діюче значення періодичного струму

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} . \quad (1.43)$$

Якщо піднести (1.43) до квадрату та домножити обидві частини рівняння на  $RT$ , то одержимо

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2 dt . \quad (1.44)$$

Врахувавши (1.8), можна зробити висновок, що діюче значення періодичного струму дорівнює за величиною такому постійному струму, який, проходячи через сталий опір  $R$ , за інтервал часу  $T$  виділяє таку саму кількість тепла, як і даний змінний струм .

Аналогічно діюче значення періодичної напруги

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} . \quad (1.45)$$

В разі синусоїдного струму

$$I = \sqrt{\left( \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt \right)} = \sqrt{\left( \frac{I_m^2}{2T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt \right)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} .$$

Тобто

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707I_m \quad (1.46)$$

Такий самий результат отримаємо і в разі косинусоїдного струму. Аналогічно діюче значення гармонічної напруги

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707U_m \quad (1.47)$$

Для вимірювання діючих значень струму та напруги застосовуються прилади теплової, електромагнітної, електродинамічної та інших систем.

### 1.6.3. Комплексне представлення гармонічних електричних величин

Розрахунок кіл змінного струму значно полегшується, якщо гармонічні струми, напруги, ЕРС та інші величини зображати у вигляді векторів або комплексних чисел.

Нехай деяка величина  $v$  змінюється за гармонічним законом

$$v = V_m \sin(\omega t + \psi).$$

Візьмемо прямокутну систему координат  $MON$  (рис.1.18) і розташуємо в ній під кутом  $\psi$  відносно горизонтальної осі  $OM$  вектор  $\vec{V}_m$  довжина якого в заданому масштабі дорівнює амплітуді  $V_m$ . Додатні кути  $\psi$  відкладаються проти, а від'ємні - в напрямку руху годинникової стрілки.

Якщо вектор  $\vec{V}_m$  обертається навкруги точки  $O$  проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $\omega$ , то в момент часу  $t$  він складе з віссю  $OM$  кут  $(\omega t + \psi)$ . Проекція цього вектора на вісь  $NN'$  дорівнює в заданому масштабі миттєвому значенню розглядаємої величини  $v$ . Аналогічний результат можна одержати

і в разі нерухомого вектора  $\vec{V}_m$ , якщо обертати, починаючи з моменту часу  $t=0$ , вісь  $NN'$  за годинниковою стрілкою з кутовою швидкістю  $\omega$ . В цьому випадку вісь  $NN'$  називають лінією часу. Таким чином, між миттєвим значенням  $v$  та вектором  $\vec{V}_m$  існує однозначний зв'язок. На основі цього вектор  $\vec{V}_m$  називають вектором, що зображує гармонічну функцію часу, або вектором гармонічної величини  $v$ . При цьому мають на

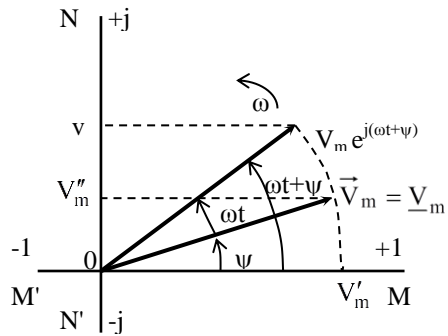


Рис.1.18. Представлення гармонічної функції часу в вигляді вектора

увазі вектори напруги, ЕРС, струму, магнітного потоку та інші. Сукупність векторів, що зображають розглядаємі гармонічні функції часу, називається векторною діаграмою.

Якщо вважати осі  $MM'$  та  $NN'$  осями дійсних та уявних величин на комплексній площині, то вектор  $\vec{V}_m$  буде відповідати комплексному числу  $\underline{V}_m$ , модуль якого дорівнює амплітуді гармонічної величини  $V_m$ , а аргумент – її початковій фазі  $\psi$ . Це комплексне число називається комплексною амплітудою гармонічної величини і може бути представлене в показниковій, тригонометричній та алгебраїчній формах

$$\underline{V}_m = V_m e^{j\psi} = V_m(\cos\psi + j\sin\psi) = V'_m + jV''_m, \quad (1.48)$$

де  $V'_m, V''_m$ , - дійсна та уявна частини комплексної амплітуди;  $j$  - уявна одиниця;

$V_m = \sqrt{(V'_m)^2 + (V''_m)^2}$  - модуль комплексної амплітуди, що дорівнює амплітуді гармонічної величини;  $\psi$  - аргумент комплексної амплітуди.

Причому

$$\psi = \begin{cases} \arctg\left(\frac{V''_m}{V'_m}\right), \text{ якщо } V'_m > 0; \\ \pi + \arctg\left(\frac{V''_m}{V'_m}\right), \text{ якщо } V'_m < 0. \end{cases}$$

Якщо вектор  $\underline{V}_m$ , починаючи з момента часу  $t=0$ , обертається проти ходу годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $\omega$ , то йому відповідає комплексна функція часу, яка називається комплексною миттєвою величиною або миттєвим комплексом дійсної функції часу

$$\underline{v} = \underline{V}_m e^{j\omega t} = V_m e^{j(\omega t + \psi)}. \quad (1.49)$$

Множник  $e^{j\omega t}$  в рівнянні (1.49) являє собою оператор обертання, оскільки множення  $\underline{V}_m$  на  $e^{j\omega t}$  означає поворот вектора  $\underline{V}_m$  на кут  $\omega t$  проти годинникової стрілки.

Таким чином, миттєвим комплексом величини  $v$  називається комплексна функція, модуль якої дорівнює амплітуді, а аргумент - повній фазі гармонічної величини.

З урахуванням формули Ейлера

$$e^{j\psi} = \cos\psi + j \sin\psi$$

співвідношення (1.49) можна записати у вигляді

$$\underline{v} = V_m \cos(\omega t + \psi) + jV_m \sin(\omega t + \psi) = \operatorname{Re} [\underline{V}_m e^{j\omega t}] + j \operatorname{Im} [\underline{V}_m e^{j\omega t}]. \quad (1.50)$$



Тобто, гармонічна величина  $v$  та комплексна миттєва величина  $\underline{v}$  однозначно зв'язані співвідношенням

$$v = \text{Im}(\underline{v}) = V_m \sin(\omega t + \psi). \quad (1.51)$$

Якщо гармонічну величину представити у вигляді косинусоїдної функції, то її миттєве значення

$$v = \text{Re}(\underline{v}) = V_m \cos(\omega t + \psi). \quad (1.52)$$

В цьому випадку миттєве значення  $v$  визначається графічно як проекція вектора  $\underline{V}_m e^{j\omega t}$  на вісь дійсних величин.

Метод розрахунку кін гармонічного струму, оснований на зображенні гармонічних функцій часу комплексними функціями, називається методом комплексних амплітуд.

Розв'язання задачі аналізу кола методом комплексних амплітуд має наступні етапи:

1. Перехід від миттєвих напруг та струмів до їх комплексних зображень-комплексних амплітуд.
2. Визначення зображень (комплексних амплітуд) шуканих величин за встановленими правилами операцій над комплексними величинами.
3. Зворотний перехід від знайдених величин (зображень) до миттєвих значень (оригіналів).

#### 1.6.4. Математичні операції над гармонічними електричними величинами

Використовуючи метод комплексних амплітуд, можна значно спростити виконання лінійних математичних операцій над гармонічними величинами однакової частоти, в тому числі і одержання суми гармонічних функцій часу однакової частоти з різними фазами.

Всі математичні операції над періодичними функціями часу, в тому числі і над гармонічними величинами, діляться на лінійні та нелінійні.

Лінійними називають такі операції над функціями часу, при яких у спектрі результуючого коливання не з'являються складові з новими частотами. А спектр – це сукупність гармонічних складових сигналу.

Нелінійними є операції множення та ділення гармонічних величин, оскільки в спектрі результуючого коливання з'являються складові з новими частотами.

Лінійні операції над функціями часу – це множення на постійне число, додавання, віднімання, диференціювання та інтегрування. Цим операціям

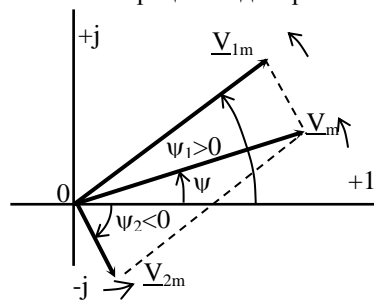


Рис.1.19 Визначення суми гармонічних функцій часу з допомогою векторної діаграми

відповідають операції над комплексними амплітудами величин з однаковими частотами. Це є можливим оскільки

$$v_1 + v_2 = \text{Im}(v_1) + \text{Im}(v_2) = \text{Im}(v_1 + v_2) = \text{Im}(\underline{V}_1 e^{j\omega t} + \underline{V}_2 e^{j\omega t}).$$

Розглядаючи вектори гармонічних сигналів як комплексні амплітуди  $\underline{V}_{1m}$  та  $\underline{V}_{2m}$ , можна одержати суму цих векторів як геометрично (рис.1.19), так і аналітично за допомогою зображеної на рис.1.19 діаграми

$$\underline{V}_m = \underline{V}_{1m} + \underline{V}_{2m}. \quad (1.53)$$

Щоб знайти суму (1.53) необхідно комплексні величини  $\underline{V}_{1m}$  та  $\underline{V}_{2m}$  представити в алгебраїчній формі

$$\underline{V}_{1m} = V'_{1m} + jV''_{1m}; \quad \underline{V}_{2m} = V'_{2m} + jV''_{2m},$$

де  $V'_{1m}, V''_{1m}, V'_{2m}, V''_{2m}$  - проєкції векторів  $\underline{V}_{1m}$  і  $\underline{V}_{2m}$  на дійсну та уявну осі.

Якщо додати комплексні амплітуди  $\underline{V}_{1m}$  та  $\underline{V}_{2m}$ , то одержимо

$$\underline{V}_m = V'_{1m} + jV''_{1m} + V'_{2m} + jV''_{2m} = V'_m + jV''_m, \quad (1.54)$$

де  $V'_m = V'_{1m} + V'_{2m}; V''_m = V''_{1m} + V''_{2m}$ .

Звідси для модуля та аргумента сумарного коливання маємо

$$V_m = \sqrt{(V'_m)^2 + (V''_m)^2};$$

$$\psi = \begin{cases} \arctg\left(\frac{V''_m}{V'_m}\right), & \text{якщо } V'_m > 0; \\ \pi + \arctg\left(\frac{V''_m}{V'_m}\right), & \text{якщо } V'_m < 0. \end{cases}$$

Замість комплексних амплітуд при використанні гармонічних функцій часто вводять комплексні діючі значення

$$\underline{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = V e^{j\psi}. \quad (1.55)$$

В разі використання комплексного представлення гармонічних величин значно спрощуються операції диференціювання та інтегрування, які в силу своєї лінійності також не змінюють характеру величини.

Якщо  $v = V_m \sin(\omega t + \psi)$ , а треба знайти похідну  $dv/dt$ , то

$$s = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \text{Im}[\underline{V}_m e^{j\omega t}] = \text{Im}\left[\frac{d}{dt} \underline{V}_m e^{j\omega t}\right] = \text{Im}[j\omega \underline{V}_m e^{j\omega t}].$$

Це означає, що комплексна амплітуда нового гармонічного коливання

$$\underline{S}_m = j\omega \underline{V}_m, \quad (1.56)$$

а миттєвий комплекс

$$\underline{s} = j\omega \underline{v} = j\omega \underline{V}_m e^{j\omega t}. \quad (1.57)$$

Уявний множник  $j = e^{j\pi/2}$  означає, що аргумент вектора  $\underline{S}_m$  перевищує аргумент вектора  $\underline{V}_m$  на  $\pi/2$  радіанів, тобто коливання  $s$  на  $\pi/2$  випереджає

коливання  $v$ , знаходячись з ним в часовій квадратурі. Тобто при диференціюванні

$$s(t) = \omega V_m \sin(\omega t + \psi + \pi/2) = S_m \sin(\omega t + \psi + \pi/2).$$

Нехай  $s$  є невизначений інтеграл від гармонічного коливання  $v$

$$s = \int v dt = \int \text{Im}[\underline{V}_m e^{j\omega t}] dt = \text{Im}[\underline{V}_m \int e^{j\omega t} dt] = \text{Im}\left[\frac{\underline{V}_m}{j\omega} e^{j\omega t}\right]$$

Колівання  $s$  також гармонічне тієї ж частоти, що і коливання  $v$ . Його комплексна амплітуда

$$\underline{S}_m = \frac{\underline{V}_m}{j\omega}, \quad (1.58)$$

а миттєвий комплекс

$$\underline{s} = \frac{1}{j\omega} \underline{V}_m e^{j\omega t}. \quad (1.59)$$

Оскільки множник  $1/j = -j = e^{-j\pi/2}$ , то очевидно, що коливання  $s$  відстає за фазою від коливання  $v$  на кут  $\pi/2$  радіанів. Тобто при інтегруванні

$$s = (V_m/\omega) \sin(\omega t + \psi - \pi/2) = S_m \sin(\omega t + \psi - \pi/2).$$

Таким чином, завдяки застосуванню методу комплексних амплітуд, коли гармонічні величини замінюють їх умовними комплексними зображеннями, операції інтегрування та диференціювання перетворюються на операції ділення та множення комплексної величини на оператор  $j\omega$ .

На жаль розглянутий метод не можна застосовувати при множенні та діленні гармонічних величин, оскільки це нелінійні математичні операції і

$$\begin{aligned} \text{Im}(\underline{v}_1) \cdot \text{Im}(\underline{v}_2) &\neq \text{Im}(\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2); \\ \text{Im}(\underline{v}_1) / \text{Im}(\underline{v}_2) &\neq \text{Im}(\underline{v}_1 / \underline{v}_2). \end{aligned}$$

На останок зазначимо, що при додаванні та відніманні комплексних чисел і функцій краще використовувати алгебраїчну форму їх представлення. Інші ж математичні операції (в тому числі і нелінійні) виконуються набагато простіше при показниковій формі представлення комплексних функцій і величин.

## 1.7. Поняття про комплексний опір та комплексну провідність кола

В разі аналізу кіл змінного струму необхідно враховувати не тільки опори, але й ємності та індуктивності. Такий аналіз набагато складніший, ніж аналіз кіл постійного струму, коли індуктивність еквівалентна короткому замиканню а ємність – розриву кола. Застосування методу комплексних амплітуд дозволяє значно спростити розв'язок цієї задачі.

На рис.1.20 приведена функціональна схема кола змінного струму з генератором гармонічних коливань і пасивним двополюсником П.

Нехай в колі двополюсника протікає струм  $i$ , комплексна амплітуда якого  $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ , а напруга на ньому  $u$  має комплексну амплітуду  $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ .

Відношення комплексних амплітуд напруги  $\underline{U}_m$  та струму  $\underline{I}_m$  пасивного двополюсника називається комплексним опором кола змінному струму і позначається  $\underline{Z}$

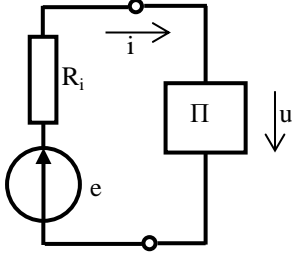


Рис.1.20. Функціональна схема кола змінного струму

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}. \quad (1.60)$$

Із виразу (1.60) виходить, що

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}}. \quad (1.61)$$

Формула (1.61) є виразом закону Ома в комплексній формі. В загальному випадку опір  $\underline{Z}$  комплексний і залежить від параметрів елементів та частоти коливань  $\omega$ , тобто

$$\underline{Z} = Z(j\omega).$$

З урахуванням значень комплексних амплітуд напруги та струму одержимо

$$\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi_z} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi}. \quad (1.62)$$

Відношення амплітудних або діючих значень напруги і струму називається повним опором кола

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}, \quad (1.63)$$

а кут  $\varphi = \psi_u - \psi_i$  являє собою зсув фаз між напругою та струмом, тобто

$$\underline{Z} = Z^{j\varphi_z} = Z^{j\varphi}. \quad (1.64)$$

Комплексний опір  $\underline{Z}$  можна також записати в алгебраїчній та тригонометричній формах

$$\underline{Z} = R + jX = Z \cos\varphi + jZ \sin\varphi. \quad (1.65)$$

У виразі (1.65)  $R = Z \cos\varphi$  – дійсна частина комплексного опору  $\underline{Z}$ , яка називається активною складовою цього опору. Уявна частина комплексного опору кола  $X = Z \sin\varphi$  називається реактивною складовою опору  $\underline{Z}$ .

Оскільки через обидві складові комплексного опору протікає один і той же струм  $\underline{I}_m$ , то коло, що має опір  $Z=R+jX$ , можна еквівалентно представити у вигляді послідовного з'єднання елементів з опором  $R$  та  $X$ .

Повний опір кола – це модуль комплексного опору  $\underline{Z}$ .

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (1.66)$$

а оскільки завжди  $R > 0$  і  $Z > 0$ , то аргумент комплексного опору  $\underline{Z}$

$$\varphi = \varphi_Z = \arctg \frac{X}{R} = \arccos \frac{R}{Z} = \arcsin \frac{X}{Z}. \quad (1.67)$$

В деяких випадках опір кола може бути чисто активним, коли  $\underline{Z} = R$  ( $X=0$ ), або чисто реактивним, коли  $\underline{Z} = jX$  ( $R=0$ ).

Із виразу (1.63) випливає, що

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \quad (1.68)$$

або

$$I = \frac{U}{Z}. \quad (1.69)$$

Вирази (1.68) та (1.69) є співвідношеннями закону Ома для амплітудних та діючих значень напруги і струму.

Комплексною провідністю електрорадіокола називається відношення комплексних амплітуд або діючих значень струму та напруги кола

$$\underline{Y} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U}. \quad (1.70.)$$

В алгебраїчній та тригонометричній формах

$$\underline{Y} = G + jB = Y \cos\varphi + jY \sin\varphi, \quad (1.71)$$

де  $G$  - активна складова комплексної провідності;  $B$  - реактивна складова комплексної провідності;  $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$  - повна провідність;

$\varphi_Y = \arctg \frac{B}{G}$  - аргумент комплексної провідності.

Оскільки на обох складових комплексної провідності діє одна і та ж напруга  $U_m$ , то елемент, що має провідність  $Y=G+jB$ , можна представити у вигляді паралельного з'єднання елементів з провідностями  $G$  та  $B$ .

В показниковій формі

$$\underline{Y} = Y e^{j\varphi_Y} \quad (1.72)$$

Повна провідність  $Y$  може бути визначена через амплітудні або діючі значення струму та напруги

$$Y = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U} \quad (1.73)$$

Комплексна провідність зв'язана оберненою залежністю з комплексним опором

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi_Z}. \quad (1.74)$$

Звідки виходить, що

$$Y = \frac{1}{Z}; \quad \varphi_Y = -\varphi_Z = -\varphi. \quad (1.75)$$

Перепишемо (1.74) у вигляді

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}. \quad (1.76)$$

З урахуванням того, що  $Z^2 = R^2 + X^2$ , одержимо

$$G = \frac{R}{Z^2}; \quad B = -\frac{X}{Z^2}, \quad (1.77)$$

або з урахуванням (1.67)

$$G = \frac{1}{Z} \cos \varphi; \quad B = -\frac{1}{Z} \sin \varphi. \quad (1.78)$$

Вирази (1.77) та (1.78) дозволяють перерахувати складові комплексного опору в складові провідності. Аналогічно викладеному можна отримати вирази для R та X, записані через G та B. Корисно відмітити, що в загальному випадку  $G \neq 1/R$  і  $B \neq -1/X$ , хоча  $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$  і  $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ .

## 1.8. Пасивні елементи електричних кіл при гармонічній дії

### 1.8.1. Опір при гармонічній дії

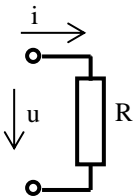


Рис. 1.21.  
Коло з  
опором

Нехай на опорі R (рис. 1.21) діє гармонічна напруга

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Оскільки струм  $i(t)$  та напруга  $u(t)$  в розглядаємому колі зв'язані законом Ома, то

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (1.79)$$

Із цього виразу видно, що струм, як і напруга, має гармонічну форму. Його амплітуда

$$I_m = \frac{U_m}{R}, \quad (1.80)$$

а початкова фаза  $\psi_i$  дорівнює початковій фазі напруги  $\psi_u$ . Різниця фаз між напругою та струмом дорівнює нулю, тобто вони співпадають за фазою (рис. 1.22).

Здійснимо той же розрахунок символічним методом (методом комплексних амплітуд). Комплексні амплітуди напруги та струму в колі з опором

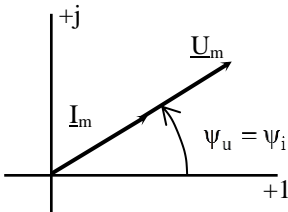


Рис.1.22. Векторна  
діаграма кола з опором

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}; \quad \underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = \frac{U_m}{R} e^{j\psi_u}.$$

Оскільки кут зсуву фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$ , то комплексний опір кола є величина дійсна

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = Z_R = R,$$

а його реактивна складова  $X=0$ . Рівняння закону Ома для комплексних амплітуд в цьому випадку має вигляд

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{R}. \quad (1.81)$$

На рис.1.22 приведена векторна діаграма, а на рис. 1.23 приведені часові діаграми напруги  $u(t)$  струму  $i(t)$  та миттєвої потужності  $p(t)$  в колі з опором. Як видно, гармонічні функції, що відображають миттєві значення напруги та струму, співпадають за фазою. Миттєва потужність  $p(t)$ , яка розсіюється в опорі  $R$

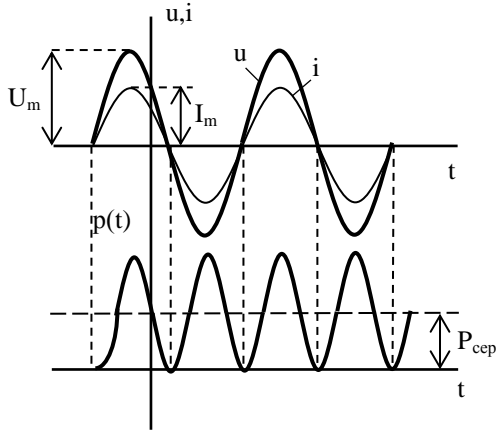


Рис.1.23 Часові діаграми для кола з опором

$$\begin{aligned} p(t) &= u \cdot i = i^2 \cdot R = I_m^2 R \sin^2(\omega t + \psi_u) = \frac{I_m^2 R}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi_u)] = \\ &= \frac{I_m U_m}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi_u)] = IU \cdot [1 - \cos 2(\omega t + \psi_u)]. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Очевидно, що миттєва потужність в даному колі завжди позитивна, оскільки  $[1 - \cos 2(\omega t + \psi_u)] > 0$ . Це означає, що потік енергії для кола з опором завжди спрямований від джерела енергії в коло. Змінна складова миттєвої потужності змінюється з подвійною частотою, а постійна складова є середнім значенням витрачаємої за період потужності і називається активною потужністю  $P_R$ .

Для знаходження середнього значення потужності  $P_{сep}$  необхідно знайти інтеграл

$$P_{сep} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt. \quad (1.83)$$

Якщо використати (1.82), то одержимо

$$P_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2 R}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi_u)] dt = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{I_m U_m}{2}, \quad (1.84)$$

або

$$P_R = P_{\text{сеп}} = I^2 R.$$

Крім того, слід зазначити, що

$$P_R = P_{\text{сеп}} = \frac{1}{2} P_{\text{max}}; \quad P_{\text{max}} = I_m U_m.$$

де  $P_{\text{max}}$  - максимальне значення миттєвої потужності в опорі.

Опір  $R$  ділянки кола змінному струму називають активним опором. Активним опором називається відношення витраченої в колі середньої (активної) потужності до квадрата діючого значення змінного струму в колі

$$R = \frac{P_{\text{сеп}}}{I^2} = \frac{P_R}{I^2}. \quad (1.85)$$

Активний опір будь-якого провідника перевищує його ж опір постійному струму, який називається омичним і визначається співвідношенням

$$R_{\text{ом}} = \rho \frac{l}{S} \quad (1.86)$$

де  $\rho$  - питомий опір матеріалу провідника (Ом·м);  $l$  - довжина провідника;  $S$  - площа поперечного перерізу провідника.

Відмінність між величинами активного та омичного опорів провідника визначається проявленням поверхневого ефекту та ефекту близькості. Вона залежить від частоти і на високих частотах може бути вельми значною.

### 1.8.2. Ємність при гармонічній дії

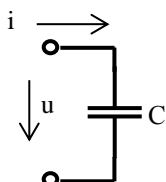


Рис. 1.24.  
Ємнісне коло

Нехай коло має джерело гармонічної напруги

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

та ємність  $C$  (рис.1.24). Вважаючи, що  $\psi_u=0$ , та враховуючи співвідношення (1.21), одержимо

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t = \omega C U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (1.87)$$

або

$$i = I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (1.88)$$

Очевидно, що струм в колі, як і напруга, має гармонічну форму. Амплітуда струму



$$I_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_m}{x_C} = U_m \cdot b_C. \quad (1.89)$$

У виразі (1.89) величина  $x_C=1/\omega C$  має розмірність опору і називається ємнісним опором. Обернена до неї величина  $b_C=\omega C$  називається ємнісною провідністю. Із виразу (1.88) видно, що початкова фаза струму в колі  $\psi_i=\pi/2$ , а зсув фаз між напругою та струмом  $\phi = \psi_u - \psi_i = -\pi/2$ .

Таким чином, струм в колі випереджає за фазою напругу на ємності, що ілюструється векторною діаграмою на рис.1.25 та часовою діаграмою на рис. 1.26,а.

Миттєва енергія, що запасається в електричному полі ємності  $C$ , дорівнює

$$w_c = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{CU_m^2}{4} (1 - \cos 2\omega t).$$

Змінювання цієї енергії в часі показано на рис. 1.26,б. Видно, що величина  $w_c$  змінюється з подвійною частотою, періодично досягаючи максимального значення

$$W_{\max} = \frac{CU_m^2}{2} \quad (1.90)$$

Для миттєвої потужності маємо залежність (рис.1.26,в)

$$\begin{aligned} p_c(t) &= u i = \\ &= U_m I_m \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \quad (1.91) \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Середнє значення потужності

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T p_c dt = 0,$$

тобто витрачання потужності в ємнісному колі немає. Тому максимальну миттєву потужність в ємнісному колі називають реактивною

$$P_{C\max} = U_m I_m / 2 = UI.$$

Ця потужність визначає максимальну швидкість, з якою змінюється енергія електричного поля, оскільки  $p_c(t) = dw_c(t)/dt$ .

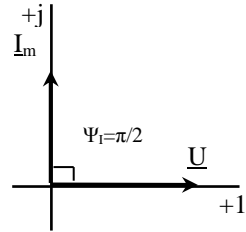


Рис.1.25. Векторна діаграма ємнісного кола

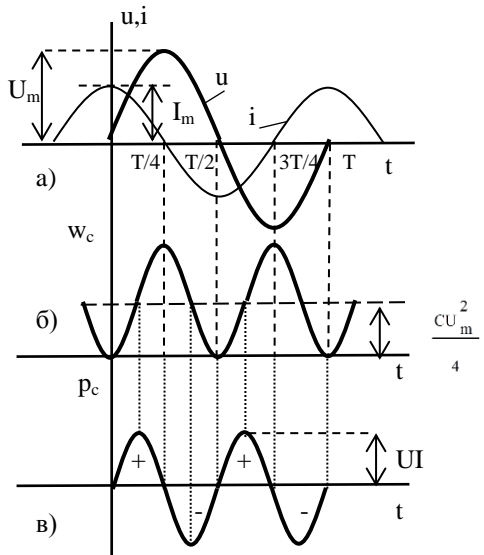


Рис.1.26 Часові діаграми для ємнісного кола

Таким чином, в ємнісному колі енергія то накопичується в електричному полі, то повертається генератору, не перетворюючись в інші види. Тепер проведемо розрахунок ємнісного кола, користуючись символічним методом.

Комплексні амплітуди напруги та струму дорівнюють

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}, \underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}.$$

Оскільки миттєвий струм через ємність  $i = C du/dt$ , то в відповідності з (1.56) для комплексної амплітуди струму одержимо

$$\underline{I}_m = j\omega C \underline{U}_m,$$

або

$$I_m e^{j\psi_i} = \omega C U_m e^{j(\psi_u + \pi/2)}. \quad (1.92)$$

Очевидно, що струм в ємнісному колі дійсно випереджає на кут  $\pi/2$  напругу, оскільки  $\psi_i = \psi_u + \pi/2$ .

Комплексний опір ємнісного кола дорівнює

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U_m \cdot e^{j\psi_u}}{\omega C U_m e^{j(\psi_u + \pi/2)}} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (1.93)$$

Оскільки  $e^{-j\pi/2} = -j$ , то

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}. \quad (1.94)$$

Тобто, ємнісне коло має чисто уявний опір, реактивна складова якого має негативне значення і називається реактивним опором ємності

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}. \quad (1.95)$$

Причому за абсолютною величиною реактивний опір ємності дорівнює ємнісному опору, тобто  $|X_C| = x_c$ .

Із виразів (1.94) та (1.95) видно, що процеси в ємності залежать від частоти  $\omega$ . Тому практичний інтерес представляють частотні характеристики кола - залежності ємнісного опору  $x_c(\omega)$  та ємнісної провідності  $b_c(\omega)$  від частоти, які приведені на рис.1.27.

Перша із цих залежностей одночасно характеризує залежність  $U_m(\omega) |_{I_m=\text{const}}$ , а друга -  $I_m(\omega) |_{U_m=\text{const}}$ ,

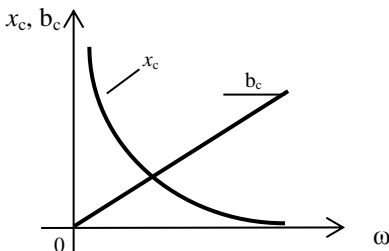


Рис.1.27. Частотні характеристики ємнісного кола

оскільки  $U_m = I_m x_c$ , а  $I_m = U_m b_c$ .

Можна також розглянути залежності реактивної провідності ємності  $B_c(\omega)$  та реактивного опору ємності  $X_c(\omega)$  від частоти. При цьому треба врахувати, що

$$\underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c} = j\omega C; \quad B_c(\omega) = \omega C. \quad (1.96)$$

### 1.8.3. Індуктивність при гармонічній дії

Нехай коло має джерело гармонічної напруги

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

та індуктивність  $L$  (рис.1.28). Оскільки у відповідності з виразом (1.14) струм в індуктивності

$$i = \frac{1}{L} \int u_L dt,$$

то в разі нульової початкової фази напруги та нульових початкових умов, коли  $i(0) = 0$ , для струму в індуктивному колі одержимо

$$i = \frac{1}{L} \int U_L \sin \omega t dt = \frac{U_m}{\omega L} (-\cos \omega t) = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}). \quad (1.97)$$

В загальному вигляді

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u - \frac{\pi}{2}), \quad (1.98)$$

тобто струм, як і напруга, має гармонічну форму. Амплітуда струму в колі

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L} = \frac{U_m}{x_L}. \quad (1.99)$$

Величина  $x_L = \omega L$ , що має розмірність опору, називається індуктивним опором. Обернена до неї величина

$$b_L = \frac{1}{\omega L} \quad (1.100)$$

називається індуктивною провідністю.

Із виразів (1.97) і (1.98) видно, що  $\psi_i = \psi_u - \pi/2$ , тобто струм відстає за фазою на  $\pi/2$  від напруги, що ілюструється векторною діаграмою на рис. 1.29 та часовою - на рис.1.30,а, де фазовому зсуву на  $\pi/2$  відповідає часовий зсув на  $T/4$ .

В магнітному полі індуктивності запасється енергія

$$w_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{LI_m^2}{4} (1 - \cos 2\omega t). \quad (1.101)$$

Ця енергія змінюється в часі з частотою  $2\omega$  (рис.1.30,б) і досягає максимуму

$$W_{L_{max}} = \frac{LI_m^2}{2}, \quad (1.102)$$

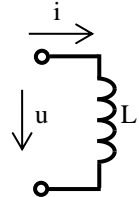


Рис. 1.28.  
Індуктивне коло

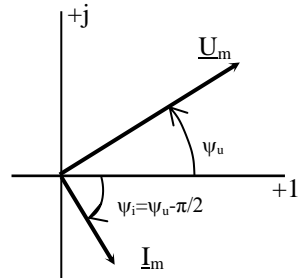


Рис.1.29. Векторна діаграма індуктивного кола

коли струм  $i(t)$  також максимальний.

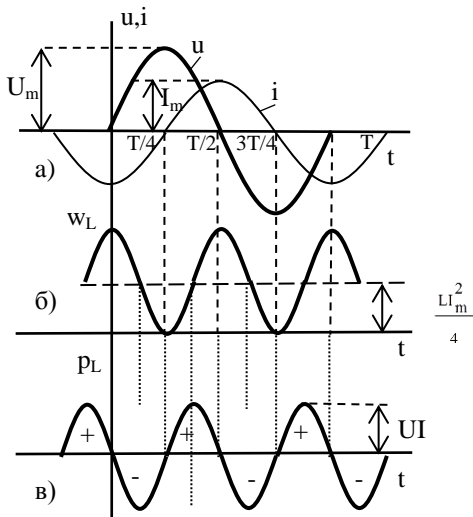


Рис.1.30. Часові діаграми для індуктивного кола

туди напруги та струму

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}; \quad \underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}.$$

Оскільки напруга на індуктивності дорівнює

$$u = L \frac{di}{dt},$$

то для комплексної амплітуди напруги на індуктивності одержимо

$$\underline{U}_m = j\omega L \underline{I}_m, \quad (1.105)$$

або

$$U_m e^{j\psi_u} = \omega L I_m e^{j(\psi_i + \pi/2)}. \quad (1.106)$$

Звідки видно, що початкова фаза струму  $\psi_i = \psi_u - \pi/2$ .

Тобто струм відстає від напруги на кут  $\pi/2$ , що було доведено раніше. Комплексний опір кола є уявною величиною

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\omega L I_m e^{j(\psi_i + \pi/2)}}{I_m e^{j\psi_i}} = j\omega L = jX_L, \quad (1.107)$$

де  $X_L = \omega L$  - реактивний опір індуктивності, який однаковий з індуктивним опором  $x_L$ .

Комплексна провідність індуктивного кола

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = jB_L, \quad (1.108)$$

Миттєва потужність

$$\begin{aligned} p_L(t) &= ui = \\ &= U_m I_m \sin \omega t \cdot (-\cos \omega t) = \\ &= -\frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Залежність потужності  $p_L$  в часі ілюструється графіком на рис.1.30,в. Як і в емнісному колі, найбільша швидкість змінювання запасової енергії, яка дорівнює амплітудному значенню залежності  $p_L(t)$ , називається реактивною потужністю індуктивного кола

$$P_{L\max} = \frac{U_m I_m}{2} = UI. \quad (1.104)$$

Для застосування символічного методу розрахунку кола врахуємо, що комплексні амплі-

де  $B_L = -1/X_L$  - реактивна провідність індуктивності, яка за абсолютною величиною дорівнює індуктивній провідності  $b_L$ . Частотні характеристики індуктивного кола  $x_L(\omega)$  та  $b_L(\omega)$  приведені на рис.1.31. В іншому масштабі перша залежність характеризує частотну залежність амплітуди напруги на індуктивності при  $I_m = \text{const}$ , оскільки  $U_m = I_m x_L$ . Друга залежність показує залежність від частоти струму при незмінній напрузі, оскільки  $I_m = b_L U_m$ . Можна також використовувати залежності  $X_L(\omega)$  та  $B_L(\omega)$ .

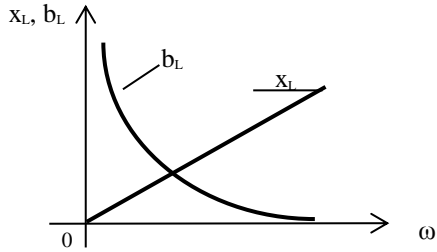


Рис.1.31. Частотні характеристики індуктивного кола

### 1.9. Закони Ома та Кірхгофа в комплексній формі

Оскільки закон Ома в дійсній формі можна застосувати лише до кіл постійного струму та кіл змінного струму з активними опорами, то найчастіше використовують закон Ома в комплексній формі для амплітудних та діючих значень напруг та струмів

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}}; \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}},$$

або інакше

$$\underline{I}_m = \underline{Y} \underline{U}_m; \underline{I} = \underline{Y} \underline{U}.$$

Якщо ділянка кола, до якої прикладена напруга  $u(t)$ , має в своєму складі джерела ЕРС, то закон Ома в комплексній формі записується

$$\underline{I} = \frac{\underline{U} + \sum_{i=1}^N \underline{E}_i}{\underline{Z}},$$

де  $\sum_{i=1}^N \underline{E}_i$  - алгебраїчна сума комплексних ЕРС, що діють на цій

ділянці кола.

Як відомо, для будь-якого вузла електричного кола виконується перший закон Кірхгофа: алгебраїчна сума миттєвих струмів у вузлі дорівнює нулю.

Під алгебраїчною сумою розуміють суму миттєвих значень струмів з ура-хуванням вибраних умовних напрямків, які позначаються стрілками.

В загальному випадку перший закон Кірхгофа можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^N i_k = 0 \quad (1.109)$$

де  $N$  - число віток, які сходяться у вузлі, або число віток, що пересікають замкнену лінію, яка обмежує узагальнений вузол.

Перший закон Кірхгофа відображає закон збереження заряду, згідно з яким заряди у вузлах кола не зникають і не накопичуються.

Відповідно до методу комплексних амплітуд кожному гармонічному струму відповідає своя миттєва комплексна величина

$$i_k = I_{mk} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}) = \text{Jm} \left[ I_{mk} e^{j\omega_k t} \right], \quad (1.110)$$

Якщо здійснити підстановку (1.110) в (1.109), то одержимо

$$\sum_{k=1}^N \text{Jm} \left[ I_{mk} e^{j\omega_k t} \right] = \text{Jm} \left[ \sum_{k=1}^N I_{mk} e^{j\omega_k t} \right] = 0. \quad (1.111)$$

При однакових кутових частотах всіх струмів одержимо

$$\text{Jm} \left[ \left( \sum_{k=1}^N I_{mk} \right) e^{j\omega t} \right] = 0 \quad (1.112)$$

Величина в квадратних дужках - це миттєва комплексна величина, тобто вектор, проекція якого на уявну вісь є сумою миттєвих значень всіх струмів. Ця проекція буде дорівнювати нулю в будь-який момент часу тільки в тому випадку, коли буде нульовою довжина вектора

$$\sum_{k=1}^N I_{mk} = 0. \quad (1.113)$$

Співвідношення (1.113) яраз і являє собою запис першого закону Кірхгофа для комплексних амплітуд струмів з однаковими кутовими частотами.

Формулюється цей закон так: алгебраїчна сума комплексних амплітуд струмів, що сходяться у вузлі електричного кола, дорівнює нулю. Звичайно струми, що спрямовані в напрямку вузла беруть з додатнім знаком, а ті, що спрямовані від вузла - з від'ємним.

Аналогічно одержують рівняння другого закону Кірхгофа для комплексних амплітуд. Як відомо, другий закон Кірхгофа справедливий для миттєвих значень напруг та ЕРС будь-якого контура: в кожному контурі електричного кола алгебраїчна сума миттєвих спадів напруг дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих ЕРС.

$$\sum_{k=1}^M u_k = \sum_{i=1}^N e_i, \quad (1.114)$$

де  $M$  - число пасивних елементів в контурі;  $N$  - число джерел ЕРС в контурі.

Під алгебраїчною сумою розуміють суму миттєвих значень спадів напруг та ЕРС з урахуванням вибраного напрямку обходу контура, а також напрямків спадів напруг та ЕРС. Якщо напрямки спадів напруг та ЕРС співпадають з напрямком обходу, то вони входять в суму з додатнім знаком, а якщо ні, то з від'ємним. Другий закон Кірхгофа відображає закон збереження енергії в колі.

Враховуючи запис (1.114), а також співвідношення

$$u_k = U_{mk} \sin(\omega_k t + \psi_{uk}) = \text{Jm} \left[ U_{mk} e^{j\omega_k t} \right];$$

$$e_i = E_{mi} \sin(\omega_i t + \psi_{ei}) = \text{Jm} \left[ E_{mi} e^{j\omega_i t} \right],$$

одержимо рівняння

$$\sum_{k=1}^M \text{Jm} \left[ U_{mk} e^{j\omega_k t} \right] = \sum_{i=1}^N \text{Jm} \left[ E_{mi} e^{j\omega_i t} \right],$$

або інакше

$$\text{Jm} \left[ \left( \sum_{k=1}^M U_{mk} \right) e^{j\omega_k t} \right] = \text{Jm} \left[ \left( \sum_{i=1}^N E_{mi} \right) e^{j\omega_i t} \right]. \quad (1.115)$$

Якщо кутові частоти всіх джерел ЕРС однакові, то (1.110) приймає вигляд

$$\text{Jm} \left[ \sum_{k=1}^M U_{mk} e^{j\omega t} \right] = \text{Jm} \left[ \sum_{i=1}^N E_{mi} e^{j\omega t} \right]. \quad (1.116)$$

Вирази в квадратних дужках - це миттєві комплекси з амплітудами

$\sum_{k=1}^M U_{mk}$  та  $\sum_{i=1}^N E_{mi}$  і однаковими кутовими частотами. Проекції цих комплексів, представлених векторами, на уявну вісь будуть однаковими в будь-який момент часу лише у випадку, якщо ці комплекси мати-муть однакові амплітуди.

В результаті одержимо

$$\sum_{k=1}^M U_{mk} = \sum_{i=1}^N E_{mi}. \quad (1.117)$$

Це і є рівняння другого закону Кірхгофа для комплексних спадів напруг та ЕРС. Він формулюється так: алгебраїчна сума комплексних амплітуд спадів напруг на всіх пасивних елементах контура дорівнює сумі комплексних амплітуд ЕРС джерел енергії в цьому ж контурі. Знаки комплексних амплітуд, що підсумовуються, визначаються тим же способом, що й у випадку миттєвих напруг та ЕРС.

Закони Ома та Кірхгофа для комплексних амплітуд значно розширюють можливості символічного методу або, що одне і те ж, методу комплексних амплітуд при аналізі кіл.

## 1.10. Енергетичні співвідношення в електричному колі при гармонічній дії

### 1.10.1. Миттєва, активна, реактивна та повна потужність електричного кола

В розділі 1.8 розглянуто енергетичні співвідношення для окремих елементів R, L та C в разі дії в колі гармонічного струму.

Розглянемо більш загальний випадок ділянки електричного кола, напруга на якій дорівнює  $u = U_m \sin \omega t$ , а струм  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ , де  $\varphi$  - зсув фаз між напругою та струмом.

Миттєва потужність, що надходить в коло, дорівнює

$$p(t) = ui = U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) = UI(\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)). \quad (1.118)$$

Вираз (1.118) складається з двох складових: постійної величини  $UI \cos \varphi$  та гармонічної, яка змінюється з подвійною частотою в порівнянні з частотою напруги та струму.

Середнє значення другої складової за період  $T$  дорівнює нулю, тому активна потужність, що надходить в розглядаєму ділянку кола

$$P_R = P_{\text{сєр}} = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = UI \cos \varphi. \quad (1.119)$$

Множник  $\cos \varphi$  носить назву коефіцієнта потужності. Тобто, активна потужність кола дорівнює добутку діючих значень напруги та струму, помноженому на коефіцієнт потужності.

При наближенні кута  $\varphi$  до нуля, при заданих напрузі та струмі, потужність, що передається від джерела енергії до приймача, збільшується до максимального значення  $P_{\text{сєр. max}} = UI$ .

З урахуванням того, що  $Z = U/I$ ,  $R = Z \cos \varphi$  і  $G = Y \cos \varphi$ , для активної потужності одержимо

$$P_R = ZI^2 \cos \varphi = I^2 R; \quad P_R = YU^2 \cos \varphi = U^2 G. \quad (1.120)$$

Всі одержані співвідношення справедливі і у випадку раніше розглянутих одноелементних кіл, коли  $\varphi=0$  (активний опір),  $\varphi=\pi/2$  (індуктивність) та  $\varphi=-\pi/2$  (ємність).

Нехай маємо коло, що включає активний опір та індуктивність. В цьому випадку

$$\varphi = \arctg X_L/R; \quad 0 < \varphi < \pi/2; \quad 0 < \cos \varphi < 1. \quad (1.121)$$

Як виходить із виразу (1.118) і показано на рис.1.32, миттєва потужність коливається з частотою  $2\omega$  відносно середнього значення

$$P_{\text{сєр}} = UI \cos \varphi.$$



В інтервалі часу, коли  $u(t)$  та  $i(t)$  мають однакові знаки, миттєва потужність позитивна. В цьому випадку енергія надходить в приймач, поглинається в опорі і накопичується в магнітному полі індуктивності.

Коли  $u(t)$  та  $i(t)$  мають різні знаки, миттєва потужність негативна і енергія частково повертається приймачем джерелу.

Оскільки більшу частину періоду коливання потужність позитивна (див.рис.1.32), то середня потужність за період також позитивна.

Аналогічний результат можна одержати і для активно-ємнісного кола, коли  $-\pi/2 < \varphi < 0$ .

Запишемо вираз для миттєвої потужності (1.118) в дещо іншому вигляді

$$\begin{aligned} p(t) &= U_m I_m \sin \omega t (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) - \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Перша складова виразу (1.122) аналогічна співвідношенню (1.82) і характеризує миттєву швидкість витрачання енергії в колі.

Друга складова цього виразу аналогічна виразам (1.91) або (1.102) і характеризує миттєву швидкість накопичення енергії в магнітному або електричному полі кола.

Потужність, що визначається першою складовою у виразі (1.122), витрачається в активному опорі  $R$  кола. При будь-якому знакові кута  $\varphi$  вона позитивна і тому називається активною. Максимальна швидкість витрачання енергії характеризується виразами (1.119) та (1.120).

Максимальна швидкість запасання енергії в колі

$$P_Q = IU \sin \varphi = \frac{I_m U_m}{2} \sin \varphi \quad (1.123)$$

називається реактивною потужністю. Як відомо, при індуктивному характері реактивної складової опору кола  $\varphi > 0$  і реактивна потужність позитивна.

Якщо ж реактивна складова опору кола має ємнісний характер ( $\varphi < 0$ ), то реактивна потужність негативна.

Оскільки  $\sin \varphi = \frac{X}{Z} = \frac{I}{U} X$ , то

$$P_Q = \frac{I_m^2 X}{2} = I^2 X. \quad (1.12)$$

Для резистивно-індуктивного кола

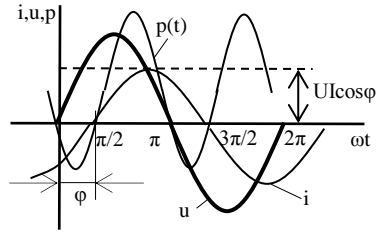


Рис.1.32. Часові діаграми активно-індуктивного кола

$$P_{Q_L} = X_L I^2 = \omega L I^2 = \omega \frac{L I_m^2}{2} = \omega W_{L \max}.$$

Для резистивно-ємнісного кола

$$P_{Q_C} = X_C I^2 = -\frac{1}{\omega C} I^2 = -\omega \frac{C U_m^2}{2} = \omega W_{C \max}.$$

Причому  $W_{L \max}$  та  $W_{C \max}$  - максимальні значення енергії, яка накопичується в магнітному та електричному полях.

Оскільки активна та реактивна потужності в змішаному активно-реактивному колі залежать від різниці фаз  $\phi$  між напругою та струмом, то вони не можуть характеризувати потужність джерела енергії. Для характеристики потужності джерела енергії вводять поняття повної потужності, яка дорівнює добутку діючих значень струму та напруги, тобто амплітуді змінної складової миттєвої потужності

$$P_S = UI = \frac{U_m I_m}{2}. \quad (1.125)$$

Повна потужність дорівнює тій потужності, яку джерело може віддати в коло, якщо опір останнього має чисто активний характер ( $\cos\phi=1$ ).

Величини активної  $P_R$ , реактивної  $P_Q$  та повної  $P_S$  потужностей зв'язані між собою залежністю

$$P_S = \sqrt{P_R^2 + P_Q^2}. \quad (1.126)$$

Ці потужності мають однакову розмірність, але щоб підкреслити відмінності їх фізичного смислу, активну потужність виражають в ватах (Вт), повну потужність - в вольт-амперах (В·А), а реактивну потужність - в реактивних вольт-амперах (ВАр).

### 1.10.2. Комплексна повна потужність електричного кола

Для розрахунку миттєвої потужності кола не можна використовувати добуток миттєвих комплексів струму та напруги, оскільки в загальному випадку дійсна частина одержаного таким способом комплексу не буде дорівнювати миттєвій потужності. Тобто

$$\operatorname{Re}[I_m e^{j\omega t}] \cdot \operatorname{Re}[U_m e^{j\omega t}] \neq \operatorname{Re}[I_m U_m e^{j2\omega t}].$$

Енергетичний розрахунок кола можна здійснити і символічним методом, якщо скористатись наступним прийомом. Складемо добуток із комплексної амплітуди напруги  $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$  та комплексного числа, спряженого з комплексною амплітудою струму  $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ . Якщо поділити одержаний добуток на два, то одержимо

$$\underline{P}_S = \frac{\underline{U}_m \cdot \underline{I}_m^*}{2} = \frac{U_m \cdot I_m}{2} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U_m \cdot I_m}{2} e^{j\phi}. \quad (1.127)$$

тобто

$$\underline{P}_S = P_S e^{j\varphi}. \quad (1.128)$$

Величина  $\underline{P}_S$  називається комплексною повною потужністю. Якщо вираз (1.127) записати в алгебраїчній формі

$$\underline{P}_S = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi + j \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi,$$

то з врахуванням (1.119) та (1.123) одержимо

$$\underline{P}_S = P_R + jP_Q. \quad (1.129)$$

Таким чином, дійсна складова комплексної потужності дорівнює активній потужності  $P_R$ , а уявна складова - реактивній потужності  $P_Q$ . Графічно співвідношення між потужностями  $P_R$ ,  $P_Q$  та  $P_S$  можна зобразити у вигляді трикутника потужностей (рис. 1.33).

Відомо, що для найкращого використання джерела енергії необхідно забезпечити якомога більше значення коефіцієнта потужності  $\cos \varphi = P_R/P_S$ .

Для цього необхідно, щоб в колах змінного струму втрати були мінімальними і властивості конденсаторів та котушок індуктивності наближались до властивостей ідеалізованих реактивних елементів.

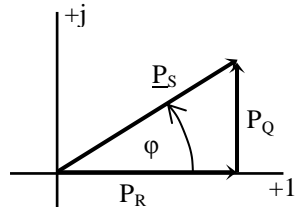


Рис.1.33. Трикутник потужностей

### 1.10.3. Оцінка якості електричних кіл та їх елементів

Як параметр якості малопотужних радіотехнічних кіл використовують не коефіцієнт потужності, а величину, яка дорівнює відношенню реактивної та активної потужностей. Цей параметр називається добротністю. Будь-який реальний реактивний елемент має активно-реактивний опір. Добротність активно-реактивного двополюсника будь-якої структури

$$Q_X = \frac{|P_Q|}{P_R}. \quad (1.130)$$

При послідовній схемі заміщення

$$Q_X = \frac{|X|}{R} = \frac{x}{R}.$$

Оскільки відомо, що  $|P_Q| = \omega |W_{X \max}|$ , то (1.130) прийме вигляд

$$Q_X = \frac{\omega |W_{X \max}|}{P_R}.$$

Враховуючи, що  $\omega = 2\pi/T$ , а  $P_{RT} = W_{RT}$  - енергія, що розсіюється в активному опорі за один період, одержимо

$$Q_X = 2\pi \frac{|W_{X_{\max}}|}{W_{RT}}. \quad (1.131)$$

Таким чином, добротність кола можна визначити як в  $2\pi$  разів збільшене відношення максимальної величини запасасмої за період енергії до енергії, що витрачається також за один період.

Для котушки індуктивності

$$Q_{X_L} = \frac{x_L}{R_L} = \frac{\omega L}{R_L}, \quad (1.132)$$

де  $R_L$  - активний опір дроту котушки.

Для конденсатора

$$Q_{X_C} = \frac{x_C}{R_C} = \frac{1}{\omega C R_C}, \quad (1.133)$$

де  $R_C$  - активний опір конденсатора, що визначається втратами в діелек-трику і є набагато меншим, ніж опір  $R_L$ .

Добротність сучасних котушок індуктивності досягає величини  $Q_X = 200 \dots 500$ , а конденсаторів  $Q_X \approx 500$  та вище. Звичайно добротність конденсаторів не менш ніж на порядок більша від добротності котушок індуктивності. Елемент кола або коло в цілому вважають високодобротними, якщо  $Q_X > 5$ .

#### 1.10.4. Узгодження джерела енергії з навантаженням

В колі змінного струму (рис.1.34), яке складається із генератора з внутрішнім опором  $Z_i = R_i + jX_i$  та опору навантаження  $Z_H = R_H + jX_H$ , енергія частково споживається в активному опорі  $R_H$ . Вважаючи цю потужність корисною, визначимо, яким вимогам повинен задовольняти комплексний опір  $Z_H$ , щоб в його активній частині виділялась максимальна потужність.

За законом Ома для схеми на рис.1.34

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{(R_i + R_H)^2 + (X_i + X_H)^2}}. \quad (1.134)$$

Активна потужність, яка виділяється в опорі  $R_H$

$$\begin{aligned} P_{R_H} &= \frac{1}{2} I_m^2 R_H = \\ &= \frac{1}{2} \frac{E_m^2 R_H}{(R_i + R_H)^2 + (X_i + X_H)^2}. \end{aligned} \quad (1.135)$$

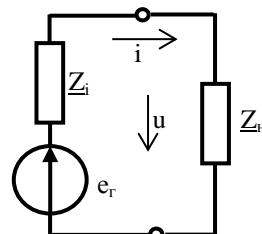


Рис.1.34. Коло змінного струму

Із виразу (1.135) видно, що першою умовою одержання максимуму потужності  $P_R$  є виконання умови

$$X_H = -X_i. \quad (1.136)$$

В цьому випадку потужність, що виділяється в опорі  $R_H$  дорівнює

$$P_{R_H} = \frac{1}{2} \frac{E_m^2 R_H}{(R_i + R_H)^2} = \frac{E^2 R_H}{(R_i + R_H)^2}. \quad (1.137)$$

Якщо продиференціювати  $P_{R_H}$  відносно величини  $R_H$  і прирівняти похідну  $dP_{R_H}/dR_H$  до нуля, можемо знайти умову, при якій активна потужність досягає максимально можливого значення

$$\frac{dP_{R_H}}{dR_H} = \frac{(R_i + R_H)^2 E^2 - E^2 R_H 2(R_i + R_H)}{(R_i + R_H)^4} = 0. \quad (1.138)$$

Із виразу (1.138) одержуємо

$$R_H = R_i. \quad (1.139)$$

В цьому разі максимальна корисна потужність дорівнює

$$P_{R_H \max} = \frac{E^2}{4R_i} = \frac{E^2}{4R_H}. \quad (1.140)$$

h  
h

Залежність корисної потужності  $P_R$  від величини опору  $R_H$  ілюструється графіком на рис.1.35.

Виходячи з виразів (1.136) та (1.139), умову одержання найбільшої корисної потужності в навантаженні в разі живлення кола від генератора з відомими параметрами можна виразити співвідношенням

$$R_H + jX_H = R_i - jX_i. \quad (1.141)$$

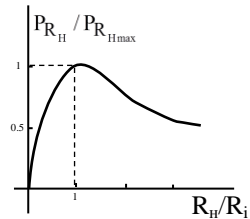


Рис.1.35. Залежність корисної потужності від навантаження

або

$$Z_H = Z_i^*. \quad (1.142)$$

При виконанні умови (1.142) говорять, що джерело енергії (генератор) та навантаження узгоджені.

Одержаний результат справедливий і у випадку кола постійного струму, коли  $\omega=0$  і  $X_i=X_H=0$ . Тут умовою одержання максимальної потужності є виконання співвідношення  $R_H = R_i$ . Якщо в навантаженні виділяється потужність  $P_{R_H}$ , то в коло від джерела надходить активна потужність

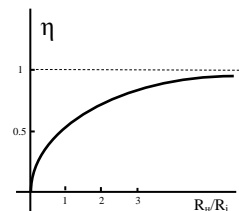


Рис.1.36. Залежність ККД від навантаження

$$P_R = P_{R_H} + P_{R_i},$$

де  $P_{R_i}$  - потужність, яка витрачається всередині джерела енергії і вважається даремно витраченою. Коефіцієнт корисної дії (ККД) кола дорівнює

$$\eta = \frac{P_{R_H}}{P_R} = \frac{P_{R_H}}{P_{R_H} + P_{R_i}}. \quad (1.143)$$

Звичайно виникає необхідність максимізувати ККД, при заданій корисній потужності. Якщо маємо еквівалентну схему джерела енергії у вигляді генератора ЕРС, коли  $P_{R_H} = I^2 R_H$ , а  $P_i = I^2 R_i$ , то ККД дорівнює

$$\eta = \frac{R_H}{R_H + R_i} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_H}}.$$

Як видно із рис.1.36, ККД зростає, якщо росте корисне навантаження  $R_H$ , і асимптотично наближається до одиниці, коли  $R_H \rightarrow \infty$ . Очевидно, що в разі сталої величини  $R_i$ , максимум корисної потужності і найкращий ККД несумісні.

В режимі узгодження, коли  $R_H = R_i$  і корисна активна потужність максимальна, ККД дорівнює всього лише 0,5. В цьому випадку всередині джерела енергії витрачається така ж за величиною потужність, яка виділяється в навантаженні. Тобто, потужність, яку віддає генератор, в два рази перевищує корисну. Крім того, при умові  $R_H > R_i$  корисна потужність падає при збільшенні опору корисного навантаження  $R_H$ , а ККД продовжує зростати, наближаючись до одиниці.

В радіотехнічних пристроях, де відбуваються різні перетворення малопотужних сигналів, наприклад, селекція, величина активної потужності в навантаженні може взагалі нас не цікавити. В подібних випадках суттєвою при аналізі процесу може виявитись величина повної (уявної), а не активної потужності.

Для повної потужності в колі на рис.1.34 маємо

$$P_S = \frac{E^2}{|Z_H + Z_i|^2} \cdot Z_H = \frac{E^2}{Z_i^2} \cdot \frac{Z_H}{\left|1 + \frac{Z_H}{Z_i}\right|^2}.$$

Врахуємо, що  $Z_H = Z_H e^{j\varphi}$ ,  $Z_i = Z_i e^{j\varphi_i}$  і позначимо  $\varphi - \varphi_i = \Delta\varphi$ , а

$Z_H/Z_i = M$ . Тоді

$$P_S = \frac{E^2}{Z_i^2} \cdot \frac{Z_H}{\left|1 + \frac{Z_H}{Z_i} e^{j\Delta\varphi}\right|^2} = \frac{E^2}{Z_i^2} \cdot \frac{M}{|1 + M \cos \Delta\varphi + jM \sin \Delta\varphi|^2},$$

або

$$P_S = \frac{E^2}{Z_i} \cdot \frac{M}{1 + M^2 \cos^2 \Delta\varphi + 2M \cos \Delta\varphi + M^2 \sin^2 \Delta\varphi} =$$

$$= \frac{E^2}{Z_i} \cdot \frac{M}{1 + 2M \cos \Delta\varphi + M^2}.$$

Дослідження отриманої функції на екстремум відносно змінної величини  $M$  показує, що при незмінній величині різниці аргументів комплексних опорів  $\Delta\varphi$  матимемо максимальну повну потужність при  $M=1$ , коли

$$Z_i = Z_H. \quad (1.144)$$

Це і є критерій узгодженості в колі для отримання максимальної повної потужності

$$P_{S_{\max}} = \frac{E^2}{2Z_i(1 + \cos \Delta\varphi)}. \quad (1.145)$$

Як видно із виразу (1.145), величина  $P_{S_{\max}}$  залежить від  $\Delta\varphi$ . У випадку, коли  $\Delta\varphi=0$ , тобто  $\varphi = \varphi_i$ , маємо максимально можливе значення повної потужності. При цьому виконується умова  $Z_H = Z_i$ , а повна потужність дорівнює

$$P_{S_{\max}} = \frac{E^2}{4Z_i} = \frac{E^2}{4Z_H}.$$

### 1.10.5. Баланс потужностей в електричному колі

Нехай довільне електричне коло має  $N$  ідеалізованих джерел енергії та  $M$  ідеалізованих пасивних елементів. Із закону збереження енергії виходить, що сума миттєвих потужностей всіх елементів кола в будь-який момент часу дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^{N+M} P_k(t) = \sum_{k=1}^{N+M} u_k i_k = 0. \quad (1.146)$$

Якщо згрупувати окремо члени, що відповідають ідеалізованим джерелам енергії та ідеалізованим споживачам, то рівняння (1.146) матиме вигляд

$$-\sum_{k=1}^M P_{k_{\text{дж}}}(t) = \sum_{k=1}^N P_{k_{\text{спож}}}(t). \quad (1.147)$$

Це рівняння називають рівнянням балансу миттєвих потужностей. Очевидно, що сума миттєвих потужностей всіх джерел енергії дорівнює сумі миттєвих потужностей всіх приймачів енергії.

Можна показати, що рівняння, аналогічне (1.147), виконується і для комплексних потужностей всіх елементів кола

$$-\sum_{k=1}^M \underline{P}_{S_{k_{дж}}} = \sum_{k=1}^N \underline{P}_{S_{k_{спож}}} \quad (1.148)$$

Рівняння (1.148) називається рівнянням або умовою балансу комплексних потужностей. Тобто, сума комплексних потужностей всіх ідеалізованих джерел енергії дорівнює сумі комплексних потужностей всіх ідеалізованих пасивних елементів.

Із умови балансу комплексних потужностей виходять умови балансу активних та реактивних потужностей:

Сума активних потужностей всіх джерел енергії дорівнює сумі активних потужностей всіх споживачів

$$\sum_{k=1}^M \operatorname{Re}[\underline{P}_{S_{k_{дж}}}] = \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}[\underline{P}_{S_{k_{спож}}}] \quad (1.149)$$

сума реактивних потужностей всіх джерел енергії дорівнює сумі реактивних потужностей всіх споживачів

$$\sum_{k=1}^M \operatorname{Im}[\underline{P}_{S_{k_{дж}}}] = \sum_{k=1}^N \operatorname{Im}[\underline{P}_{S_{k_{спож}}}] \quad (1.150)$$

Перевірка виконання умови балансу потужностей дозволяє переконатись в безпомилковості проведеного аналізу лінійних кіл.



## РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

### 2.1. Еквівалентні перетворення схем заміщення кіл

#### 2.1.1. Задачі аналізу електричних кіл

Електричне коло, яке наближено відображає електромагнітні процеси в реальному пристрої, створюється шляхом з'єднання між собою розглянутих раніше двополюсних елементів: опорів, індуктивностей, ємностей, а також джерел напруги та струму.

В загальному випадку окремі елементи, а також окремі ділянки кола можуть з'єднуватись довільно. В результаті маємо електричну схему, що має конкретну геометричну конфігурацію, основними поняттями якої є вітка, вузол та контур.

Задача аналізу електричного кола формулюється так. Задана схема кола і значення параметрів всіх її елементів, а також напруги і струми джерел, що діють в колі. Необхідно знайти струми і напруги віток.

Для визначення шуканих напруг та струмів необхідно скласти рівняння електричної рівноваги кола за допомогою двох систем рівнянь.

1. Рівнянь елементів, які зв'язують струм та напругу кожного елемента. Такими рівняннями є рівняння зв'язку між струмами та напругами в пасивних елементах, а також струми та напруги джерел.

2. Рівнянь з'єднань, які визначаються тільки геометричною конфігурацією схеми та способами з'єднання віток і не залежать від виду та характеру елементів.

Рівняння з'єднань встановлюють зв'язки між струмами та напругами окремих елементів, які входять в коло. Ці рівняння складаються на основі першого та другого законів Кірхгофа, які зв'язують струми в вітках, що сходяться в вузлах, і напруги віток, які входять в контури.

При розрахунках електричних кіл часто виникає доцільність перетворення схем цих кіл в більш прості та зручні для розрахунку.

Розглядаємі в подальших розділах методи перетворення схем електричних кіл можна застосовувати і для кіл постійного, і для кіл змінного струму, тому заради загальності викладу вони приводяться в комплексній формі запису.

#### 2.1.2. Послідовне з'єднання елементів кола

Послідовним називають таке з'єднання ділянок або елементів кола, при якому через всі ділянки або елементи кола протікає один і той самий струм.

На рис. 2.1 зображена вітка електричного кола, в яку послідовно включені комплексні опори  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ . Через всі ділянки кола, які включені послідовно, протікає один і той же струм  $I$ . Згідно з другим законом Кірхгофа

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \dots + \underline{U}_n, \quad (2.1)$$

або

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} + \dots + \underline{Z}_n \underline{I} = \underline{I} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n) = \underline{I} \cdot \underline{Z}. \quad (2.2)$$

Із виразу (2.2) видно, що еквівалентний комплексний опір кола дорівнює сумі комплексних опорів всіх послідовно з'єднаних ділянок

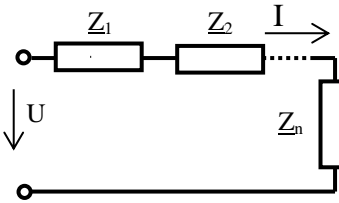


Рис. 2.1. Послідовне з'єднання елементів кола

$$\underline{Z} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k. \quad (2.3)$$

Якщо уявні частини комплексних опорів являють собою опори однакового характеру, то дійсну та уявну складові еквівалентного комплексного опору  $\underline{Z}$  знаходять в результаті арифметичного додавання їх активних та реактивних складових.

Для резистивно-індуктивних кіл

$$\underline{Z} = R + j\omega L,$$

а для резистивно-ємнісних

$$\underline{Z} = R - j \frac{1}{\omega C},$$

де

$$R = \sum_{k=1}^n R_k; \quad L = \sum_{k=1}^n L_k; \quad \frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}. \quad (2.4)$$

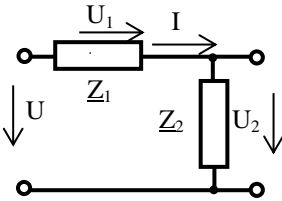


Рис. 2.2. Найпростіший подільник напруги

Якщо ж комплексні опори мають реактивні складові різного характеру, то їх необхідно додавати з врахуванням знаків цих складових.

Струм в послідовному колі дорівнює

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}.$$

Напруги на ділянках кола, які з'єднані послідовно, відносяться як комплексні опори цих ділянок. Наприклад,

$$\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}}, \quad (2.5)$$

оскільки

$$\underline{U}_k = \underline{I} \underline{Z}_k = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \underline{Z}_k. \quad (2.6)$$

Тобто, коло, що зображене на рис. 2.1, є подільником напруги.

Для широко використовуваного на практиці найпростішого подільника напруги (рис. 2.2)

$$\underline{U}_1 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{Z}_1; \quad (2.7)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{Z}_2;$$

а також

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} \underline{Z}_1.$$

### 2.1.3. Паралельне з'єднання елементів кола

Паралельним називають таке з'єднання ділянок або окремих елементів кола, при якому на всіх ділянках або елементах кола діє одна й та сама напруга.

В схемі паралельного з'єднання (рис.2.3) всі ділянки кола (вітки) підключені до однієї пари вузлів, тому комплексні провідності віток  $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_n$  знаходяться під однаковою напругою  $\underline{U}$ . Якщо струми в вітках  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots, \underline{I}_n$ , то в відповідності з першим законом Кірхгофа

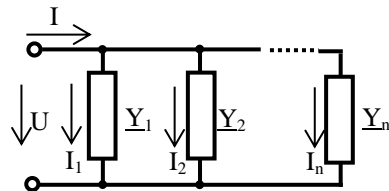


Рис. 2.3. Паралельне з'єднання ділянок кола

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \dots + \underline{I}_n, \quad (2.8)$$

або інакше

$$\underline{I} = \underline{Y}_1 \underline{U} + \underline{Y}_2 \underline{U} + \dots + \underline{Y}_n \underline{U} = \underline{U} (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n) = \underline{U} \cdot \underline{Y}. \quad (2.9)$$

Сума комплексних провідностей всіх віток, з'єднаних паралельно, називається еквівалентною комплексною провідністю кола

$$\underline{Y} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \quad (2.10)$$

Комплексний опір паралельного з'єднання n елементів

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k}. \quad (2.11)$$

Якщо уявні частини окремих провідностей  $\underline{Y}_k$  являють собою провідності одного характеру, то еквівалентну провідність знаходять шляхом арифметичного додавання їх активних та реактивних складових.

В цьому випадку для резистивно-ємнісних кіл

$$Y = G + j\omega C,$$

а для резистивно індуктивних

$$Y = G - j \frac{1}{\omega L},$$

де

$$G = \sum_{k=1}^n G_k; \quad C = \sum_{k=1}^n C_k; \quad \frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}. \quad (2.12)$$

Результуючий струм в колі

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U}. \quad (2.13)$$

Струми в вітках кола, які з'єднані паралельно, відносяться, як їх комплексні провідності. Наприклад,

$$\frac{\underline{I}_k}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_k}. \quad (2.14)$$

Тобто, коло, що зображене на рис.2.3, є подільником струму. Отже для струму k-ої вітки одержимо

$$\underline{I}_k = \underline{I} \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}} = \underline{I} \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_k}. \quad (2.15)$$

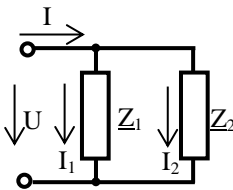


Рис. 2.4. Найпростіший подільник струму

У випадку паралельного з'єднання двох віток маємо найпростіший подільник струму. В цьому разі найчастіше використовують співвідношення, в які входять комплексні опори  $\underline{Z}_1 = 1/\underline{Y}_1$  та  $\underline{Z}_2 = 1/\underline{Y}_2$ .

Еквівалентний комплексний опір подільника, зображеного на рис.2.4, дорівнює

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Струми в паралельних вітках

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_1} = \underline{I} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I} \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_2} = \underline{I} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (2.16)$$

Із (2.16) виходить, що в найпростішому подільнику струму струм однієї з двох паралельних віток дорівнює сумарному струму, помноженому на опір іншої вітки і поділеному на суму опорів обох віток.

Ця властивість найпростішого подільника струму широко використовується для розширення границь вимірювання струмів вимірювальними приладами.

### 2.1.4. Змішане з'єднання елементів кола

Змішаним називають з'єднання, утворене паралельним і послідовним з'єднанням ділянок кола, в границях яких окремі елементи також з'єднані лише послідовно або паралельно.

Електричні кола, що мають змішане з'єднання, можна перетворити в більш прості кола шляхом заміни паралельних віток однією віткою і, відповідно, послідовно з'єднаних ділянок кола - однією ділянкою.

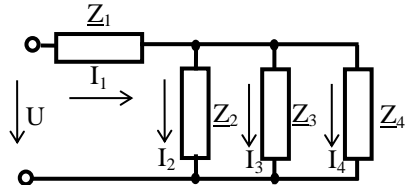


Рис. 2.5. Змішане з'єднання елементів

На рис.2.5 приведений приклад кола зі змішаним з'єднанням. Ця схема дуже легко може бути приведена до одноконтурної.

В разі перетворення кола необхідно дотримуватись наступної послідовності операцій:

- виділити групи послідовно та паралельно з'єднаних елементів;
- замінити виділені групи елементів еквівалентними;
- повторювати ці операції до тих пір, поки вихідне коло не перетвориться або в єдиний еквівалентний елемент, або в паралельне чи в послідовне з'єднання елементів.

В приведеній схемі спочатку знаходять еквівалентну комплексну провідність паралельних віток, а потім - їх еквівалентний опір. Далі загальний комплексний опір паралельних віток складають з комплексним опором послідовно підключеної ділянки. Одержаний сумарний комплексний опір є еквівалентним опором первинного кола зі змішаним з'єднанням.

В даному випадку еквівалентна провідність паралельних віток

$$\underline{Y}_{\Pi} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4}.$$

Сумарний комплексний опір всього кола

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_{\Pi}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_4 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_4}.$$

Загальний струм в колі та струми у вітках дорівнюють

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_{\Pi}}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_{\Pi}}; \quad \underline{I}_4 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Y}_4}{\underline{Y}_{\Pi}}.$$

### 2.1.5. Перетворення з'єднання елементів трикутником в еквівалентне з'єднання зіркою та навпаки

Еквівалентним називається таке перетворення схеми частини кола, при якому струми та напруги в іншій частині кола залишаються незмінними.

Однаковими залишаються також і потужності в колах. Перетворення трикутника в зірку або навпаки дозволяють перетворити в одноконтурну будь-яку багатоконтурну схему.

Для одержання співвідношень, які використовуються для вказаних еквівалентних перетворень, скористаємось схемами трикутника (рис.2.6,а) та зірки (рис.2.6,б) з умовними позначеннями комплексних опорів та струмів.

Нехай задані комплексні опори плечей трикутника  $Z_{12}, Z_{23}, Z_{31}$ , а знайти

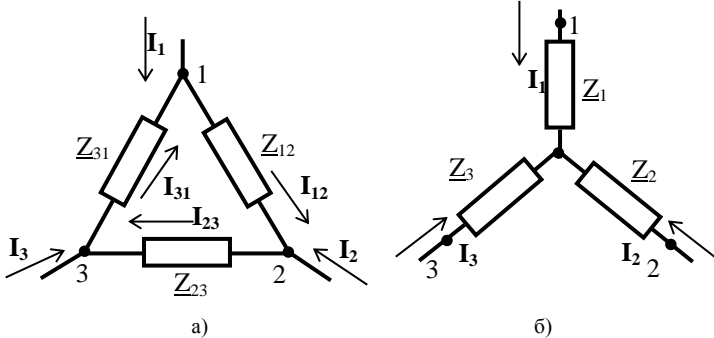


Рис.2.6. З'єднання елементів трикутником (а) та зіркою (б)

необхідно комплексні опори променів еквівалентної зірки  $Z_1, Z_2, Z_3$ .

Виразимо струми у вітках трикутника через струми, що приходять ззовні. За другим законом Кірхгофа

$$\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{31} = 0,$$

або

$$\underline{Z}_{12}\underline{I}_{12} + \underline{Z}_{23}\underline{I}_{23} + \underline{Z}_{31}\underline{I}_{31} = 0. \quad (2.17)$$

У відповідності з першим законом Кірхгофа для вузлів 2 та 1

$$\underline{I}_{23} = \underline{I}_{12} + \underline{I}_2; \quad \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12} - \underline{I}_1. \quad (2.18)$$

Розв'язування рівнянь (2.17) та (2.18) відносно струму  $\underline{I}_{12}$  дає

$$\underline{Z}_{12}\underline{I}_{12} + \underline{Z}_{23}(\underline{I}_{12} + \underline{I}_2) + \underline{Z}_{31}(\underline{I}_{12} - \underline{I}_1) = 0; \quad \underline{I}_{12} = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{I}_1 - \underline{Z}_{23}\underline{I}_2}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}.$$

Напруга між виводами 1 та 2 трикутника дорівнює

$$\underline{U}_{12} = \underline{Z}_{12}\underline{I}_{12} = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{12}\underline{I}_1 - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}\underline{I}_2}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}. \quad (2.19)$$

Та ж сама напруга для схеми зірки

$$\underline{U}_{12} = \underline{I}_1\underline{Z}_1 - \underline{I}_2\underline{Z}_2. \quad (2.20)$$

В разі еквівалентності схем зірки та трикутника напруги, що визначаються виразами (2.19) та (2.20) повинні бути однаковими при будь-яких струмах  $\underline{I}_1$  та  $\underline{I}_2$ . Однак це можливо лише при умові, що

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}. \quad (2.21)$$

При цьому третє рівняння одержуємо шляхом кругової перестановки індексів.

Таким чином, комплексний опір променя еквівалентної зірки дорівнює добутку комплексних опорів прилеглих сторін трикутника, діленому на суму комплексних опорів сторін трикутника.

В разі переходу від зірки до трикутника заданими є опори зірок  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ . Опори трикутника знаходять шляхом сумісного розв'язування рівнянь (2.21). Якщо поділити третє рівняння на перше, а потім на друге, то одержимо

$$\frac{Z_3}{Z_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{12}}, \quad \frac{Z_3}{Z_2} = \frac{Z_{31}}{Z_{12}},$$

звідки

$$Z_{23} = \frac{Z_3}{Z_1} Z_{12}; \quad Z_{31} = \frac{Z_3}{Z_2} Z_{12}. \quad (2.22)$$

Якщо вирази (2.22) підставити в перше з рівнянь (2.21), то одержимо, що

$$Z_1 = \frac{\frac{Z_3}{Z_2} Z_{12}^2}{Z_{12} + \frac{Z_3}{Z_1} Z_{12} + \frac{Z_3}{Z_2} Z_{12}}.$$

Після простих перетворень знайдемо  $Z_{12}$

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}. \quad (2.23)$$

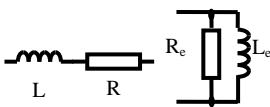
Круговою заміною індексів можна отримати

$$Z_{23} = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1}; \quad Z_{31} = Z_3 + Z_1 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}. \quad (2.24)$$

Таким чином, комплексний опір сторони еквівалентного трикутника дорівнює сумі комплексних опорів прилеглих променів зірки і добутку їх, поділеному на опір третього променя.

### 2.1.6. Еквівалентні ділянки кола з послідовним та паралельним з'єднанням

Яким би складним не було електричне коло, воно по відношенню до джерела гармонічної напруги, що його живить, є двополюсником, опір якого  $Z = R + jX$ . Комплексна провідність даної ділянки кола  $Y = 1/Z = G_e + jB_e$ , причому активна та реактивна складові провідності визначаються співвідношенням (1.77).



а) б)

Рис.2.7. Активно-індуктивні еквівалентні

Якщо два елементи з такими провідностями з'єднати паралельно, то сумарна комплексна провідність буде дорівнювати  $Y$ , а відповідний комплексний опір буде мати величину  $Z$ .

Такі два кола з послідовним та паралельним з'єднанням елементів, які мають однакові опори на затискачах, називаються еквівалентними. Оскільки реактивний опір  $X$ , що входить в співвідношення (1.76) та (1.77), залежить від частоти, то умова еквівалентності кіл виконується лише на тій частоті, для якої знайдено  $X$ .

Наприклад, для послідовного RL-кола (рис.2.7,а) згідно з (1.77) еквівалентні активна та реактивна провідності дорівнюють

$$G_e = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}; \quad (2.25)$$

$$B_e = -\frac{X}{Z^2} = -\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Якщо перейти до еквівалентного кола паралельного типу, то параметри нового кола (рис. 2.7,б) будуть визначатися виразами

$$R_e = \frac{1}{G_e} = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R}; \quad \omega L_e = \frac{1}{B_e} = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{\omega L}. \quad (2.26)$$

Якщо ж первинною є паралельна схема, що приведена на рис.2.7,б, а параметри її елементів  $R$  та  $L$ , то параметри еквівалентної послідовної схеми (рис. 2.7,а) визначаються виразами

$$R_e = \frac{G}{Y^2} = \frac{\frac{1}{R}}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}; \quad \omega L_e = -\frac{B_L}{Y^2} = \frac{\frac{1}{\omega L}}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}. \quad (2.27)$$

Очевидно, що в обох випадках параметри еквівалентних кіл  $R_e$  та  $L_e$  залежать від частоти. Аналогічно можна отримати умови еквівалентності для послідовного та паралельного RC-кіл.

## 2.2. Найпростіші RL- та RC-кола при гармонічній дії

### 2.2.1. Аналіз послідовного RL-кола

В колі, що складається із реальної котушки індуктивності, одночасно відбуваються періодичне накопичення енергії в магнітному полі з наступним поверненням цієї енергії в коло, а також безповоротне перетворення електромагнітної енергії в тепло. В результаті схема заміщення такої котушки повинна мати індуктивність  $L$  та активний опір  $R$ . При цьому ці елементи треба з'єднати послідовно, оскільки обидва вищезгадані процеси обумовлені одним і тим же

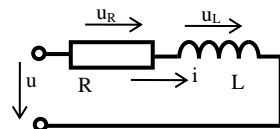


Рис.2.8. Послідовне RL-коло



струмом кола (рис.2.8). Виходячи із другого закону Кірхгофа, для миттєвої напруги  $u(t)$  маємо

$$u = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}. \quad (2.28)$$

Якщо струм в колі синусоїдний  $i = I_m \sin \omega t$ , то  
 $u = RI_m \sin \omega t + \omega LI_m \cos \omega t$ .

Два гармонічні коливання  $u_R$  та  $u_L$  з амплітудами  $RI_m$  та  $\omega LI_m$  знаходяться в квадратурі. Якщо їх векторно скласти (рис.2.9), то одержимо гармонічне коливання з амплітудою

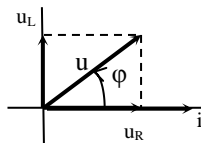


Рис.2.9.Векторна діаграма RL-

$$U_m = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (2.29)$$

та початковою фазою, що визначається виразами

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{mL}}{U_{mR}} = \frac{\omega LI_m}{RI_m} = \frac{\omega L}{R};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}. \quad (2.30)$$

Таким чином, миттєва напруга  $u$  в колі

$$u = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \varphi) = U_m \sin(\omega t + \varphi),$$

де  $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = Z$  - повний опір кола змінного струму з активним опором  $R$  та індуктивністю  $L$ .

Очевидно, що в даному RL-колі миттєва напруга  $u(t)$  випереджає струм  $i(t)$  на кут  $\varphi$ . Часові діаграми напруг та струму кола приведені на рис.2.10.

Аналогічний результат можна отримати, якщо скористатись методом комплексних амплітуд

$$\underline{U}_m = \underline{U}_R + \underline{U}_L = RI_m + j\omega LI_m = (R + j\omega L)I_m, \quad (2.31)$$

звідки

$$I_m = \frac{\underline{U}_m}{R + j\omega L} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}};$$

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j\varphi},$$

де  $\varphi = \operatorname{arctg} \omega L/R$  - аргумент комплексного опору  $\underline{Z}$ .

На рис. 2.11,а приведена векторна діаграма струму  $I_m$  та напруг  $\underline{U}_{mR}$ ,  $\underline{U}_{mL}$ , та  $\underline{U}_m$  в колі, яка аналогічна векторній діаграмі для миттєвих гармонічних величин.

Якщо вектори напруг поділити на спільний струм кола, то можна отримати трикутник опорів (рис.2.11,б), із якого видно, що, в залежності від

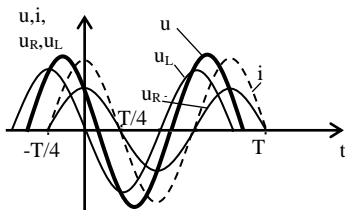


Рис. 2.10. Часові діаграми напруг та струму в послідовному RL-

співвідношення між активним та реактивним опором, кут зсуву фаз між струмом та напругою може лежати в границях  $0 < \varphi < \pi/2$ .

Якщо сторони трикутника опорів домножити на квадрат діючого

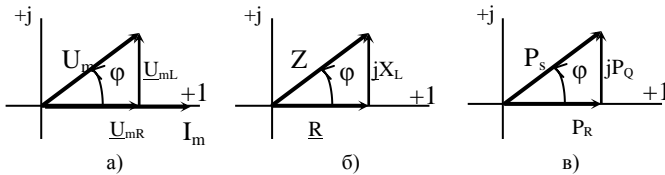


Рис.2.11.Векторна діаграма (а) і трикутники опорів (б) та потужностей (в) послідовного RL-кола

струму, то одержимо трикутник потужностей (рис.2.11,в), в якому комплексна повна потужність

$$P_S = P_R + jP_Q = P_S e^{j\varphi},$$

де  $P_R = RI^2$  - активна потужність;  $P_Q = X_L I^2$  - реактивна потужність;  $P_S = ZI^2$  - повна потужність.

Очевидно, що трикутники напруг, опорів та потужностей подібні.

### 2.2.2.Аналіз паралельного RL-кола

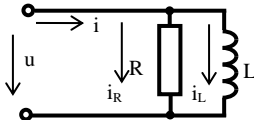


Рис. 2.12.Паралельне RL-коло

Якщо до паралельного RL-кола (рис.2.12) прикладена гармонічна напруга, то струм в активному опорі  $i_R$  співпадає за фазою з напругою, а струм в індуктивності  $i_L$  відстає за фазою від напруги на кут  $\pi/2$ . Миттєві струми у вітках зв'язані співвідношенням

$$i = i_R + i_L.$$

В комплексній формі

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{mR} + \underline{I}_L = \frac{\underline{U}_m}{R} + \frac{\underline{U}_m}{j\omega L}.$$

Або для діючих струмів та напруг

$$\underline{I} = \underline{U} \left( \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} \right) = \underline{U}(G + jB_L) = \underline{U}\underline{Y}, \quad (2.32)$$

де  $\underline{Y}$ ,  $G$  та  $B_L$  - комплексна, активна та реактивна провідність кола. Зсув фаз між струмом та напругою в колі визначається аргументом  $\varphi_Y$  комплексної провідності.

$$\varphi_Y = \arctg \frac{B_L}{G}; \quad \varphi = -\varphi_Y = \arctg \left( \frac{R}{\omega L} \right) \quad (2.33)$$

На рис.2.13 приведені векторна діаграма струмів та

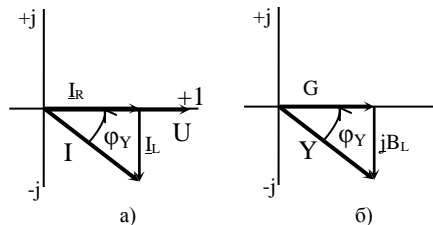


Рис.2.13.Векторна діаграма (а) і трикутник провідностей (б) паралельного

напруги в колі і трикутник його провідно-стей. Як видно із рис.2.13,а, струм  $I_R$  дійсно співпадає за фазою з напругою  $\underline{U}$ , а струм  $I_L$  відстає за фазою від тієї ж напруги на  $\pi/2$ .

Струм  $I$  в нерозгалуженій частині кола відстає за фазою від напруги на кут  $\varphi = -\varphi_y$ .

Трикутник провідностей на рис.2.13,б одержано шляхом ділення векторів трикутника струмів на спільну напругу віток  $\underline{U}$ . Очевидно, що трикутники струмів та провідностей подібні.

### 2.2.3. Аналіз послідовного RC-кола

При наявності в нерозгалуженому колі ємності  $C$  та опору  $R$  (рис.2.14) одночасно відбувається безповоротне споживання електромагнітної енергії в опорі  $R$  та періодичне накопичення енергії в електричному полі ємності  $C$  з наступним її поверненням в коло. Виходячи з другого закону Кірхгофа для кола, що приведенне на рис.2.14, одержимо

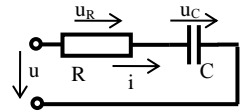


Рис.2.14.Послідовне RC-коло

$$u = u_R + u_C = R i + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (2.34)$$

При синусоїдному струмі в колі  $i = I_m \sin \omega t$

$$u = R I_m \sin \omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t. \quad (2.35)$$

Два гармонічні коливання  $u_R$  та  $u_C$ , які мають зсув фаз  $\pi/2$  та амплітуди  $U_{mR} = R I_m$ ,  $U_{mC} = I_m / \omega C$ , можна скласти і одержати одне коливання з амплітудою

$$U_m = \sqrt{(R I_m)^2 + \left(\frac{I_m}{\omega C}\right)^2} = I_m \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (2.36)$$

та початковою фазою

$$\varphi = \arctg \frac{-\left(\frac{1}{\omega C} I_m\right)}{R I_m} = -\arctg \frac{1}{\omega C R}. \quad (2.37)$$

Миттєве значення напруги дорівнює

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) = I_m \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.38)$$

де

$$U_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = I_m Z.$$

Величина  $Z$  має розмірність опору і називається повним опором кола, що залежить від опору  $R$  та ємності  $C$ . Як видно із виразу (2.37), миттєва напруга в такому колі відстає за фазою на кут  $\varphi$  від струму.

Аналогічні результати можна отримати, скориставшись методом

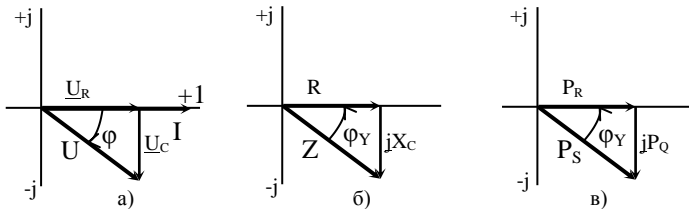


Рис.2.15.Векторна діаграма (а) , трикутник опорів (б) та трикутник потужностей (в) для послідовного RC-кола

комплексних амплітуд. У відповідності з другим законом Кірхгофа для комплексної напруги одержимо

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mC} = (R - j\frac{1}{\omega C})\underline{I}_m = \underline{Z}\underline{I}_m. \quad (2.39)$$

Із виразу (2.39) видно, що

$$\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C} = R + jX_C = \sqrt{R^2 + X_C^2} e^{j\varphi}, \quad (2.40)$$

де

$$\varphi = \arctg \frac{X_C}{R} = -\arctg \frac{1}{\omega RC}. \quad (2.41)$$

В залежності від співвідношення між параметрами кола кут зсуву між струмом та напругою змінюється від  $\varphi=0$  до  $\varphi=-\pi/2$ . На рис.2.15 приведені векторна діаграма струму та напруг в колі (рис.2.15,а), трикутник опорів (рис.2.15,б) та трикутник потужностей (2.15,в) для послідовного RC-кола, які можна побудувати аналогічно тому, як це було зроблено для послідовного RL-кола.

### 2.2.4.Аналіз паралельного RC-кола

Окремим випадком паралельного RC-кола є схема заміщення конденсатора з діелектриком. В цьому пристрої разом з періодичним підсиленням та послабленням електричного поля при дії гармонічної напруги відбувається безповоротне перетворення електромагнітної енергії в теплову, що супроводжується нагріванням діелектрика. Тому схема заміщення конденсатора включає ідеалізовану ємність  $C$ , та активний опір  $R$ . Ці елементи треба з'єднати паралельно, оскільки обидва процеси визначаються спільною напругою на цих елементах (рис.2.16).

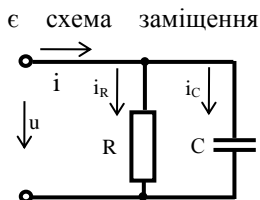


Рис.2.16.Паралельне RC-коло

Сумарний струм в такому колі

$$i = i_R + i_C = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} = uG + C \frac{du}{dt}. \quad (2.42)$$

При гармонічній напрузі, що діє в колі, комплексне діюче значення струму дорівнює

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \underline{U}G + \underline{U}j\omega C = \underline{U} \underline{Y}, \quad (2.43)$$

де

$$\underline{Y} = G + j\omega C. \quad (2.44)$$

Величина  $\underline{Y}$  - це комплексна провідність паралельного RC-кола, яка може бути зображена на комплексній площині у вигляді вектора (рис.2.17,а).

В показниковій та тригонометричній формах

$$\underline{Y} = Y e^{j\varphi_Y} = Y \cos \varphi_Y + jY \sin \varphi_Y.$$

Активна  $G$  та реактивна  $B_C$  складові провідності дорівнюють

$$G = Y \cos \varphi; \quad B_C = \omega C = Y \sin \varphi, \quad (2.45)$$

а кут зсуву фаз між струмом та напругою

$$\varphi_Y = \arctg \frac{B_C}{G} = \arctg \omega RC. \quad (2.46)$$

Як видно із векторної діаграми кола (рис.2.17,б), струм  $\underline{I}_R$  у вітці з активною провідністю  $G$  співпадає за фазою з напругою  $\underline{U}$ , а струм  $\underline{I}_C$  у вітці з ємністю  $C$  випереджає напругу  $\underline{U}$  за фазою на кут  $\pi/2$ .

Із цієї ж векторної діаграми та виразів (2.43), (2.45) видно, що

$$\underline{I}_R = \underline{U}G = \underline{U}Y \cos \varphi = \underline{I} \cos \varphi; \quad \underline{I}_C = \underline{U}B_C = \underline{U}Y \sin \varphi = \underline{I} \sin \varphi.$$

В залежності від співвідношення між активною та ємнісною провідностями кола змінюється кут зсуву між сумарним струмом та напругою в границях  $0 < \varphi < \pi/2$ .

## 2.3. Аналіз послідовного та паралельного RLC-кола при гармонічній дії

### 2.3.1. Аналіз послідовного RLC-кола. Основні співвідношення для послідовного RLC-кола

В разі проходження синусоїдного струму через електричне коло, що складається з послідовного з'єднання елементів  $R$ ,  $L$  та  $C$  (рис.2.18), на його затискачах створюється гармонічна напруга  $u$ , яка у відповідності з другим законом Кірхгофа дорівнює

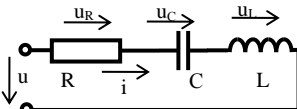


Рис.2.18.Послідовне RLC-коло

$$u = u_R + u_L + u_C = R_i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (2.47)$$

Якщо параметри елементів кола та напруга  $u=U_m \sin(\omega t+\psi_u)$  задані, то розв'язок рівняння (2.47) слід шукати у вигляді гармонічного струму

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi), \quad (2.48)$$

де  $\psi_u - \varphi = \psi_i$  - початкова фаза струму в колі.

Для аналізу кола скористаємось методом комплексних амплітуд і замість співвідношення (2.47) одержимо

$$\underline{U}_m = R\underline{I}_m + j\omega L\underline{I}_m + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m. \quad (2.49)$$

Звідси комплексний опір кола

$$\underline{Z} = \underline{U}_m / \underline{I}_m = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + j(X_L + X_C). \quad (2.50)$$

Модуль комплексного опору або повний опір

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (2.51)$$

а аргумент

$$\varphi = \varphi_Z = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \arctg \frac{X_L + X_C}{R}. \quad (2.52)$$

Очевидно, що зсув фаз між напругою та струмом  $0 \leq |\varphi| \leq \pi/2$ . При цьому кут  $\varphi > 0$  в разі індуктивного характеру реактивного опору кола, коли  $X = (\omega L - 1/\omega C) > 0$ . Напруга за фазою випереджає струм.

Кут  $\varphi < 0$  в разі ємнісного характеру реактивного опору кола, коли  $X < 0$ . При цьому струм в колі випереджає за фазою напругу.

Якщо індуктивний та ємнісний опори RLC-кола однакові, то реактивний опір  $X = X_L + X_C = 0$  і опір кола має чисто активний характер, тобто  $\underline{Z} = R$ . В цьому разі струм в колі співпадає за фазою з напругою. Такий режим роботи кола називається резонансом напруг, оскільки в цьому випадку напруги  $u_L$  та  $u_C$  однакові за величиною і протилежні за фазою. В загальному випадку резонанс - це явище, при якому комплексний опір кола, що має в своєму складі реактивні елементи, носить активний характер. Частота, на якій спостерігається це явище, називається резонансною. Її значення можна знайти із співвідношень

$$X_L = |X_C|; \quad \omega_o L = \frac{1}{\omega_o C}; \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2.53)$$

Добротність  $Q_x$  кола визначається на резонансній частоті

$$Q_x = \frac{|P_Q|}{P_R} = \frac{\omega_o W_{\max}}{P_R} = \frac{\omega_o LI^2}{RI^2} = \frac{\omega_o L}{R};$$

або

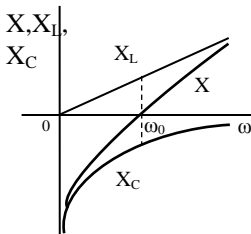
$$Q_x = \frac{\omega_o CU^2}{RI^2} = \frac{\omega_o CU^2}{R(\omega_o C)^2 R} = \frac{1}{\omega_o CR}.$$

Для комплексних амплітуд значень напруг  $\underline{U}_{mL}$  та  $\underline{U}_{mC}$  одержимо на резонансній частоті

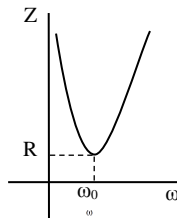
$$\underline{U}_{mL} = j\omega_0 L \underline{I}_m = j \frac{\omega_0 L}{R} \underline{U}_m = jQ_x \underline{U}_m ; \tag{2.54}$$

$$\underline{U}_{mC} = -\frac{j}{\omega_0 C} \underline{I}_m = -\frac{j \underline{U}_m}{\omega_0 CR} = -jQ_x \underline{U}_m .$$

Як видно із виразів (2.54), на резонансній частоті напруги  $u_L$  та  $u_C$  дійсно однакові за величиною та протилежні за фазою. Крім того, амплітуди цих напруг в добротність разів перевищують амплітуду напруги  $u$ , що прикладена до кола. На рис.2.19 приведені частотні залежності реактивного опору індуктивності  $X_L$ , реактивного опору ємності  $X_C$  і реактивного опору кола  $X$ . Очевидно, що на частотах  $\omega > \omega_0$  реактивний опір кола має індуктивний характер, а на частотах  $\omega < \omega_0$  - ємнісний. На резонансній частоті  $\omega_0$  реактивний опір дорівнює нулю, а повний опір  $Z$  має мінімальне значення  $Z = R$ . Це виходить із виразу (2.50) і видно із рис.2.20. Повний опір на резонансній частоті міні-мальний, оскільки комплексний опір чисто активний  $\underline{Z} = R$ . В разі відстройки від резонансу повний опір зростає. Комплексний опір на частотах  $\omega < \omega_0$  носить активно-ємнісний характер, а на частотах  $\omega > \omega_0$  - активно-індуктивний.



**Рис.2.19.** Частотні залежності реактивних опорів RLC-кола



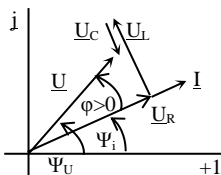
**Рис.2.20.** Частотна залежність повного опору послідовного RLC-кола

Користуючись співвідношенням (2.49), можна легко побудувати векторну діаграму послідовного кола для будь-якого із трьох випадків  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega > \omega_0$ ,  $\omega < \omega_0$ . При

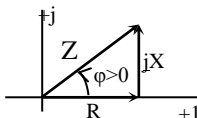
цьому слід враховувати, що напруга на активному опорі  $u_R$  співпадає за фазою зі струмом і напруга на

індуктивності  $u_L$  випереджає струм в колі на  $\pi/2$ , а напруга на ємності  $u_C$  відстає від струму на  $\pi/2$ . На рис.2.21 зображена векторна діаграма послідовного RLC-кола у випадку, коли  $\omega L > 1/\omega C$ . Тобто коло є активно-індуктивним, а зсув фаз між напругою і струмом  $\varphi > 0$ .

Аналогічно можна побудувати діаграми для випадків, коли  $x_L = x_C$  та  $x_L < x_C$ . На векторних діаграмах послідовного



**Рис.2.21.** Векторна діаграма резистивно-індуктивного послідовного RLC-кола



**Рис.2.22.** Трикутник опорів послідовного RLC-кола

RLC-кола геометрична сума векторів  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_L$ ,  $\underline{U}_C$  дає вектор прикладеної до кола напруги  $\underline{U}$ . Прямокутний трикутник з кате-тами  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_L + \underline{U}_C$

та гіпотенузою  $\underline{U}$  являє собою трикутник напруг. Якщо його сторони поділити на спільний для всіх елементів струм  $\underline{I}$ , то одержимо трикутник опорів.

Положення цього трикутника (рис.2.22) відносно осей комплексної площини не залежить від початкових фаз напруг та струму.

### 2.3.1.1. Енергетичні процеси в послідовному RLC-колі

Розглянемо енергетичні процеси в послідовному RLC-колі. Сумарна миттєва потужність кола дорівнює сумі миттєвих значень потужностей  $p_R$ ,  $p_L$  та  $p_C$

$$p = p_R + p_L + p_C = u_R i + u_L i + u_C i .$$

Якщо  $i = I_m \sin \omega t$ , то

$$u_R = U_{mR} \sin \omega t; \quad u_L = U_{mL} \sin(\omega t + \pi/2); \quad u_C = U_{mC} \sin(\omega t - \pi/2)$$

і для повної миттєвої потужності одержимо

$$p(t) = I_m U_{mR} \sin^2 \omega t + I_m U_{mL} \sin \omega t \cdot \cos \omega t - I_m U_{mC} \sin \omega t \cdot \cos \omega t =$$

$$= I U_R \cdot (1 - \cos 2\omega t) + I U_L \cdot \sin 2\omega t - I U_C \cdot \sin 2\omega t. \quad (2.55)$$

На рис.2.23 приведені часові діаграми напруг та струму в колі, а також відповідні їм часові діаграми миттєвих потужностей. Очевидно, що всі потужності змінюються з подвійною частотою. В першу чверть періоду ( $t \in 0, T/4$ ) зростає струм і накопичується енергія в магнітному полі індуктивності (площа між віссю  $t$  та кривою  $p_L$ ). В тому ж інтервалі часу енергія електричного поля ємності негативна (площа між віссю  $t$  та кривою  $p_C$ ). Це означає, що відбувається перетворення енергії електричного поля ємності в енергію магнітного поля індуктивності. Оскільки площа між кривою  $p_L$  і віссю  $t$  більша, ніж площа між кривою  $p_C$  і віссю  $t$ , то в магнітному полі індуктивності накопичується енергія більша, ніж та, що віддає ємність. Енергія, якої бракує, надходить від джерела гармонічної напруги.

Під час другої чверті періоду ( $t \in T/4, T/2$ ) струм зменшується, і до нуля зменшується енергія магнітного поля індуктивності. Навпаки, напруга  $u_C$  зростає, і зростає енергія електричного поля ємності.

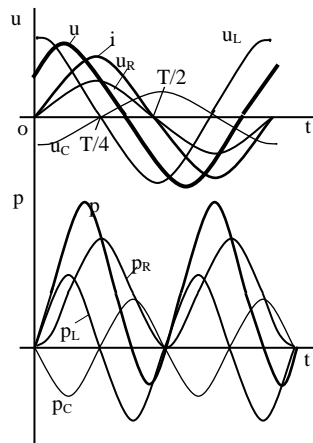


Рис.2.23. Часові діаграми послідовного RLC-кола



Вона менша, ніж енергія, що віддається магнітним полем індуктивності. Решта енергії магнітного поля, яка не може бути передана електричному полю ємності, повертається назад джерелу гармонічної напруги. Ця частина енергії зображається на діаграмі у вигляді площі, яка обмежена кривою сумарної потужності  $p$  та віссю  $t$  і знаходиться під цією віссю. В подальшому процесі в колі повторюються.

Площа обмежена віссю  $t$  і кривою  $p$ , яка знаходиться над цією віссю, характеризує енергію, що надходить від джерела в RLC-коло. Частина цієї енергії, що дорівнює середньому значенню енергії опору  $R$ , безповоротно втрачається в ньому.

Таким чином, в RLC-колі відбувається подвійний обмін енергією. З одного боку, обмін енергією між магнітним полем індуктивності та електричним полем ємності, а з іншого - між джерелом зовнішньої напруги та магнітним полем індуктивності, коли  $x_L > x_C$  або між джерелом та електричним полем ємності, коли  $x_C > x_L$ .

При резонансі, коли  $x_L = x_C$ , має місце обмін енергією тільки між електричним полем ємності та магнітним полем індуктивності. Енергія джерела в цьому випадку витрачається лише в опорі  $R$ .

### 2.3.2. Аналіз паралельного RLC-кола

Якщо до затисків електричного кола, що складається з паралельно з'єднаних елементів  $R$ ,  $L$  та  $C$  (рис.2.24) прикладена синусоїдна напруга  $u = U_m \sin \omega t$ , то гармонічний струм в нерозгалуженій частині цього кола згідно з першим законом Кірхгофа дорівнює

$$i = i_R + i_C + i_L. \quad (2.56)$$

Для комплексних діючих значень, пропорційних комплексним амплітудам, рівняння (2.56) має вигляд

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \underline{G}\underline{U} + \underline{U}/j\omega L + j\omega C\underline{U}. \quad (2.57)$$

Або інакше

$$\underline{I} = \underline{U}(G + j(\omega C - 1/\omega L)) = \underline{U}(G + jB) = \underline{U}\underline{Y}, \quad (2.58)$$

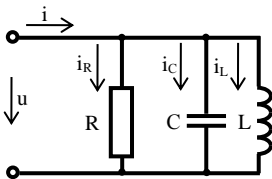


Рис.2.24. Паралельне RLC-коло

де  $\underline{Y} = G + jB$  - комплексна провідність кола;  $G = 1/R$  - активна провідність кола;  $B = (\omega C - 1/\omega L)$  - реактивна провідність кола.

В показниковій та тригонометричній формі

$$\underline{Y} = Y e^{j\varphi_Y} = Y \cos \varphi_Y + j Y \sin \varphi_Y,$$

де  $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$  - повна провідність кола;  $\varphi_Y = \arctg B/G$  - кут зсуву між струмом та напругою в колі.

Комплексний опір паралельного RLC-кола

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}, \quad (2.59)$$

а повний опір

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}}. \quad (2.60)$$

Кут зсуву між напругою та струмом в колі

$$\varphi = -\varphi_Y = -\arctg \frac{B}{G} = -\arctg \frac{(B_C + B_L)}{G}. \quad (2.61)$$

Кут  $\varphi$  позитивний в разі індуктивного характеру реактивного опору кола, коли  $B = B_C + B_L < 0$ . В цьому випадку загальний струм в колі  $\underline{I}$  відстає за фазою від напруги  $\underline{U}$ .

Кут  $\varphi$  негативний при ємнісному характері реактивного опору кола, коли  $B = B_C + B_L > 0$ . В цьому випадку струм в колі випереджає за фазою напругу.

Струм співпадає за фазою з напругою ( $\varphi=0$ ) при однакових ємнісній та індуктивній провідностях, коли  $B = B_C + B_L = 0$ .

В цьому разі струми в ємнісній та індуктивній вітках однакові за величиною, однак протилежні за фазою

$$\underline{I}_C = j\omega C \underline{U} = \omega C \underline{U} e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad \underline{I}_L = -j \frac{1}{\omega L} \underline{U} = \frac{1}{\omega L} \underline{U} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (2.62)$$

А сумарний струм в колі визначається лише струмом в активному опорі, оскільки струми  $\underline{I}_C$  та  $\underline{I}_L$  взаємно компенсуються

$$\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_L + \underline{I}_R = \underline{I}_R. \quad (2.63)$$

Таке явище в паралельному RLC-колі називається резонансом струмів. Резонансна частота  $\omega_p$  визначається із виразу

$$\left(\omega_p C - \frac{1}{\omega_p L}\right) = 0; \quad \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

який має такий самий вигляд, як і для резонансної частоти  $\omega_0$  послідовного RLC-кола.

На резонансній частоті провідність паралельного RLC-кола мінімальна і має чисто активний характер

$$\underline{Y} = G. \quad (2.64)$$

В той же час, опір кола на резонансній частоті максимальний і знижується в разі відстройки від резонансної частоти (рис.2.25).

На частотах, де  $\omega < \omega_p$ , характер опору паралельного RLC-кола активно-індуктивний, а на частотах  $\omega > \omega_p$  – активно-ємнісний. Це протилежна картина в порівнянні з послідовним RLC-колом. Якщо скористатись виразами (2.57), то то можна

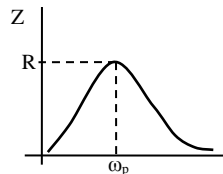


Рис.2.25. Частотна залежність повного опору паралельного RLC-кола

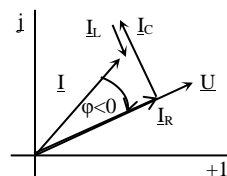


Рис.2.26. Векторна діаграма паралельного RLC-кола при  $\omega > \omega_p$

побудувати векторні діаграми струмів та напруги для будь-якого з трьох випадків, коли  $\omega > \omega_p$ ,  $\omega < \omega_p$  та  $\omega = \omega_p$ .

Наприклад, для першого з цих випадків, коли  $b_p = b_C - b_L > 0$ , опір кола носить активно-емнісний характер і векторна діаграма має вигляд, приведений на рис.2.26.

В цьому випадку струм  $\underline{I}$  за фазою випереджає напругу  $\underline{U}$  і кут  $\varphi < 0$ . Прямокутний трикутник з катетами  $\underline{I}_R$ ,  $(\underline{I}_L + \underline{I}_C)$  та гіпотенузою  $\underline{I}$  називається трикутником струмів. Якщо всі сторони цього трикутника поділити на напругу  $\underline{U}$ , то одержимо трикутник провідностей (рис.2.27), в якому кут  $\varphi$  відраховується від гіпотенузи  $\underline{Y}$  до катета  $G$  по аналогії з трикутником струмів.

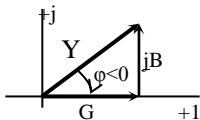


Рис.2.27. Трикутник к провідностей пара-лельного RLC-кола

Оскільки добротність  $Q_x$  будь-якого кола визначається відношенням реактивної та активної потужностей кола, то в даному випадку на резонансній частоті  $\omega_p$

$$Q_x = \frac{|P_Q|}{P_R} = \frac{|\omega_p W_{\max}|}{P_R} = \frac{\omega_p C U^2}{\frac{U^2}{R}} = \omega_p C R,$$

або

$$Q_x = \frac{\omega_p L I_L^2}{\frac{U^2}{R}} = \frac{\omega_p L}{\frac{U^2}{R}} \cdot \frac{U^2}{(\omega_p L)^2} = \frac{R}{\omega_p L}. \quad (2.65)$$

З врахуванням (2.62) на частоті  $\omega_p$

$$\underline{I}_C = j\omega_p C \underline{U} = j\omega_p C R \underline{I} = jQ_x \underline{I}, \quad (2.66)$$

$$\underline{I}_L = -j\underline{U}/\omega_p L = -j\underline{I}R/\omega_p L = -jQ_x \underline{I}.$$

Таким чином, подібно до випадку резонансу напруг в послідовному RLC-колі (2.54), добротність  $Q_x$  паралельного RLC-кола визначає співвідношення між струмами в реактивних елементах цього кола та струмом в нерозгалуженій частині кола.

Якщо порівняти вирази для добротності послідовного RLC-кола

$$Q_x = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{\omega_o R C}$$

з виразами для добротності паралельного RLC-кола

$$Q_x = \omega_p C R = \frac{R}{\omega_p L},$$

то можна встановити, що в разі збільшення активного опору  $R$  добротність послідовного RLC-кола знижується, а паралельного - підвищується. Це обумовлено тим, що в першому випадку втрати в RLC-колі збільшуються, а в другому - зменшуються.

## 2.4. Методи розрахунку електричних кіл

### 2.4.1. Розрахунок кіл методом рівнянь Кірхгофа

В теорії електричних кіл розрізняють задачі двох видів: задачі аналізу та синтезу кіл.

Під аналізом кола розуміють визначення електричних величин або їх відношень, якщо задані схема та параметри кола.

Під синтезом кола розуміють протилежну задачу, тобто підбір схеми та параметрів кола, якщо відомі співвідношення електричних величин, які звичайно задають у вигляді функцій частоти або часу.

На відміну від задач аналізу кіл, які найчастіше мають однозначні розв'язки, задачі синтезу кіл можуть мати декілька або безліч розв'язків.

Знаходження електричних величин в разі заданих схеми та параметрів кола можливе безпосередньо за рахунок розв'язування рівнянь, складених у відповідності з першим та другим законами Кірхгофа для аналізованого кола.

Нехай досліджувана схема має  $N_{\text{віт}}$  віток та  $N_{\text{вуз}}$  вузлів. Відомі параметри джерел напруги та елементів кола, а знайти необхідно струми у вітках. Тобто, число невідомих струмів дорівнює числу віток.

За першим законом Кірхгофа можна записати  $N_{\text{вуз}}-1$  незалежних рівнянь, оскільки рівняння для останнього  $N_{\text{вуз}}$ -го вузла є наслідком попередніх  $N_{\text{вуз}}-1$  рівнянь. Дійсно, оскільки вітка з'єднує два вузли, струм кожної вітки входить в рівняння, записані для  $N_{\text{вуз}}$  вузлів двічі. Тому, якщо підсумувати  $N_{\text{вуз}}$  рівнянь, то одержимо тотожність виду  $0=0$ . Тобто, одне з цих рівнянь буде залежним.

Вузли, для яких записуються незалежні рівняння за першим законом Кірхгофа, називаються незалежними вузлами. Таким чином, із загального числа  $N_{\text{вуз}}$  будь-які  $N_{\text{вуз}}-1$  вузлів є незалежними, а останній вузол є залежним. За другим законом Кірхгофа можна записати  $N_{\text{віт}}-N_{\text{вуз}}+1$  незалежних рівнянь. Це пояснюється тим, що для всіх віток можна скласти  $N_{\text{віт}}$  рівнянь згідно з законом Ома. В цю систему входять  $N_{\text{віт}}$  невідомих струмів та  $N_{\text{вуз}}-1$  невідомих напруг

$$\underline{U}_{ik} = -\underline{E}_n + \underline{Z}_n \underline{I}_n, \quad (2.67)$$

де  $\underline{U}_{ik}$  - напруга між вузлами  $i$  та  $k$ ;  $\underline{E}_n$ ,  $\underline{Z}_n$ ,  $\underline{I}_n$  – ЕРС джерела, опір та струм  $n$ -ої вітки.

Якщо із складеної системи рівнянь виключити  $N_{\text{вуз}}-1$  напруг, то залишається  $N_{\text{віт}}-N_{\text{вуз}}+1$  рівнянь, які зв'язують ЕРС джерел зі спадами напруг на опорах, які відображають рівняння електричної рівноваги, складені згідно з другим законом Кірхгофа.

Таким чином, розрахунок електричного кола за допомогою законів Кірхгофа полягає в розв'язку системи рівнянь, кількість яких

$$N_{\text{вуз}}-1 + (N_{\text{віт}}-N_{\text{вуз}}+1) = N_{\text{віт}}$$

визначається числом віток.

Контури, для яких записуються рівняння за другим законом Кірхгофа, є незалежними. Для цього достатньо, щоб кожен контур відрізнявся від іншого хоча б однією новою віткою.

Розглянемо приклад використання розглянутого методу для аналізу схеми, що приведена на рис. 2.28.

Як видно, в схемі три вузли ( $N_{\text{вуз}}=3$ ), два з яких незалежні, три незалежні контури, число яких дорівнює числу простих контурів ( $N_{\text{нк}}=N_{\text{пк}}=3$ ) та п'ять віток. Складемо систему рівнянь електричної рівноваги, вважаючи, що позитивними напрямками вказаних на схемі струмів, а напрямки обходу контурів - з напрямком руху годинникової стрілки.

Число рівнянь за першим законом Кірхгофа  $N_{\text{вуз}}-1=2$ . Вважаючи вузол 3 опорним або базовим, оскільки він об'єднує найбільше число віток, складемо рівняння для незалежних вузлів 1 та 2, користуючись формулюванням закону Кірхгофа для комплексних діючих значень напруг та струмів

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0; \\ I_3 - I_4 - I_5 &= 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Для незалежних простих контурів I, II та III за другим законом Кірхгофа одержимо ще  $N_{\text{нк}}=3$  рівнянь

$$\begin{aligned} I_1 Z_1 + I_2 Z_2 &= E_1 - E_2; \\ -I_2 Z_2 + I_3 Z_3 + I_4 Z_4 &= E_2; \\ -I_4 Z_4 + I_5 Z_5 &= E_3. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Можна вибрати й інші незалежні контури, однак найбільш простими будуть рівняння для простих контурів. Таким чином, система шуканих рівнянь Кірхгофа включає в себе (2.68) та (2.69). Якщо задані величини комплексних опорів пасивних елементів кола та ЕРС джерел енергії, то одержана система рівнянь дозволяє знайти всі комплексні струми у вітках.

Додатні значення числових величин отриманих струмів показують, що їх

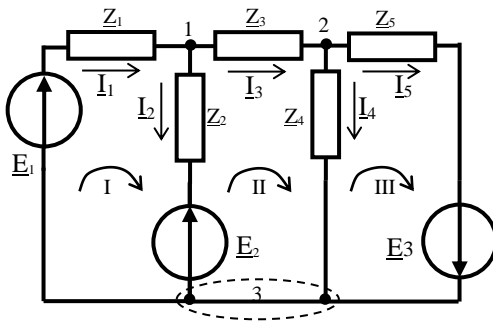


Рис.2.28. Схема досліджуваного кола

фактичні напрямки спів-падають з вибраними, а від'ємні – що дійсні напрямки струмів протилежні вибраним.

Перевагою методу розрахунку кіл безпосередньо за рівняннями Кірхгофа є його загальність. Він може застосовуватись при будь-якому законі змінювання електричних величин. Метод можна застосовувати для розрахунку і лінійних, і нелінійних кіл. Якщо в колі окрім джерел ЕРС є реальні джерела струму, їх треба замінити еквівалентними джерелами ЕРС.

Недолік методу – велика трудомісткість, що обумовлена необхідністю розв'язування системи великого числа рівнянь навіть у тому випадку, коли необхідно визначити не всі, а тільки деякі струми у вітках.

Для перевірки правильності розрахунків можна скласти рівняння балансу потужностей.

#### 2.4.2. Розрахунок кіл методом контурних струмів

Суттєвим недоліком методу рівнянь Кірхгофа є порівняно високий порядок одержуємої системи рівнянь  $n=N_{\text{віт}}=N_{\text{пк}}+N_{\text{вуз}}-1$ .

Крім того, рівняння в системі різнотипні, оскільки частина з них складається за першим, а частина - за другим законом Кірхгофа.

В 1873 році Д.К.Максвелл запропонував спосіб зниження порядку системи рівнянь при збереженні кількості невідомих, який одержав назву методу контурних струмів.

Метод контурних струмів по суті зводиться до складання та розв'язування систем рівнянь електричної рівноваги кола тільки на основі другого закону Кірхгофа. Метод дозволяє знайти струми в усіх елементах кола з довільною геометричною структурою його схеми. Нехай в схемі, зображеній на рис.2.29, задані величини комплексних опорів пасивних елементів та ЕРС джерел енергії.

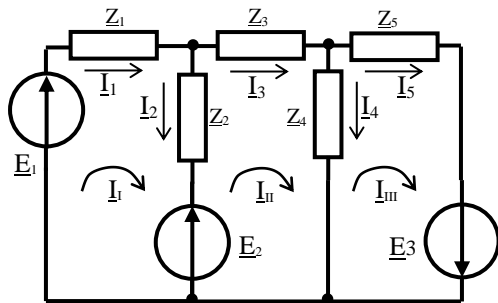


Рис.2.29. Електричне коло, аналізуємо методом контурних струмів

Якщо в якості незалежних вибрати лише прості контури, а напрямки їх обходу вважати співпадаючими з ходом годинникової стрілки, то на основі другого закону Кірхгофа одержимо наступну систему рівнянь

$$\begin{aligned} I_1 Z_1 + I_2 Z_2 &= E_1 - E_2; \\ -I_2 Z_2 + I_3 Z_3 + I_4 Z_4 &= E_2; \\ -I_4 Z_4 + I_5 Z_5 &= E_3. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Система рівнянь (2.70) складається із трьох незалежних рівнянь, але включає п'ять ( $N_{\text{віт}}$ ) невідомих струмів. В такому вигляді розв'язати одержану систему неможливо.

Суть пропозиції Максвелла полягає в наступному. Нехай в кожному із контурів схеми протікає деякий умовний струм, що співпадає з напрямком обходу контура. Позначимо кожний з контурних струмів індексом, що відповідає номеру контура. Струм у вітці, яка належить лише даному контуру, вважають дорівнюючим контурному струму. Якщо вітка входить в

декілька незалежних контурів, то струм у вітці можна знайти як алгебраїчну суму всіх контурних струмів, які протікають у цій вітці.

Для вибраних напрямків контурних струмів та струмів у вітках (рис.2.29) одержимо

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_I; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_I - \underline{I}_{II}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{II}; \quad \underline{I}_4 = \underline{I}_{II} - \underline{I}_{III}; \quad \underline{I}_5 = \underline{I}_{III}. \quad (2.71)$$

На основі (2.70) за допомогою (2.71) маємо

$$\begin{aligned} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{I}_I - \underline{Z}_2\underline{I}_{II} &= \underline{E}_1 - \underline{E}_2; \\ -\underline{Z}_2\underline{I}_I + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)\underline{I}_{II} - \underline{Z}_4\underline{I}_{III} &= \underline{E}_2; \\ -\underline{Z}_4\underline{I}_{II} + (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5)\underline{I}_{III} &= \underline{E}_3 \end{aligned} \quad (2.72)$$

Систему рівнянь (2.72) уже можна розв'язати, оскільки вона включає лише три невідомі комплексні струми  $\underline{I}_I$ ,  $\underline{I}_{II}$ ,  $\underline{I}_{III}$ . А далі, скориставшись співвідношеннями (2.71), можна знайти і струми в окремих вітках кола.

Таким чином, щоб провести аналіз кола методом контурних струмів, необхідно виконати наступні операції:

1. Вибрати незалежні контури і задати напрямки контурних струмів. Кількість незалежних контурів (контурних струмів) дорівнює кількості простих контурів аналізованого кіла ( $N=N_{ПК}$ ).

2. Записати систему рівнянь електричної рівноваги у вигляді

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11}\underline{I}_I + \underline{Z}_{12}\underline{I}_{II} + \underline{Z}_{13}\underline{I}_{III} + \dots + \underline{Z}_{1N}\underline{I}_N &= \underline{E}_I; \\ \underline{Z}_{21}\underline{I}_I + \underline{Z}_{22}\underline{I}_{II} + \underline{Z}_{23}\underline{I}_{III} + \dots + \underline{Z}_{2N}\underline{I}_N &= \underline{E}_{II}; \\ &\dots \\ \underline{Z}_{N1}\underline{I}_I + \underline{Z}_{N2}\underline{I}_{II} + \underline{Z}_{N3}\underline{I}_{III} + \dots + \underline{Z}_{NN}\underline{I}_N &= \underline{E}_N, \end{aligned} \quad (2.73)$$

де  $\underline{E}_i$  - контурна комплексна ЕРС в і-ому контурі;  $\underline{Z}_{ii}$ -власний комплексний опір і-го контура;  $\underline{Z}_{ik}$  - спільний комплексний опір і-го та k-го контурів.

Контурна ЕРС  $\underline{E}_i$  дорівнює алгебраїчній сумі усіх ЕРС в і-ому контурі.

Власний комплексний опір контура  $\underline{Z}_{ii}$  дорівнює сумі комплексних опорів віток, які утворюють і-ий контур. Спільний або взаємний комплексний опір  $\underline{Z}_{ik}$ - це опір вітки, спільної для двох контурів.

Подвійний індекс в його позначенні складається з номерів суміжних контурів, причому  $\underline{Z}_{ik} = \underline{Z}_{ki}$ . Першим ставлять індекс контура, для якого складається рівняння. Взаємний опір в рівнянні має той же знак, що і опір вітки, якщо напрямки контурних струмів суміжних контурів в ньому співпадають. Якщо ж напрямки контурних струмів протилежні, то знак опору розглядаємої вітки необхідно змінити на протилежний. Взаємний опір дорівнює нулю, якщо контури не мають спільних віток.

Систему рівнянь (2.73) можна записати в більш компактній матричній формі

$$\|\underline{Z}_{ik}\| \|\underline{I}_i\| = \|\underline{E}_i\|, \quad (2.74)$$

де матриця комплексних контурних опорів кола дорівнює

$$\|Z_{ik}\| = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix}.$$

а матриці - стовпці контурних струмів та контурних ЕРС мають вигляд

$$\|I_i\| = \begin{vmatrix} I_{I1} \\ I_{I2} \\ \dots \\ I_{IN} \end{vmatrix}; \quad \|E_i\| = \begin{vmatrix} E_{I1} \\ E_{I2} \\ \dots \\ E_{IN} \end{vmatrix}.$$

3. Знайти комплексні контурні струми, розв'язуючи систему рівнянь (2.73) одним із відомих способів.

4. Задати напрямки струмів у вітках аналізованого кола і знайти комплексні струми, враховуючи, що струм у вітці дорівнює алгебраїчній сумі контурних струмів, які протікають через цю вітку.

Якщо скористатись приведеною методикою, то для схеми, яка приведена на рис.2.29, можна одержати

$$\begin{aligned} N = N_{\text{пк}} = 3; \\ Z_{11} = Z_1 + Z_2; \quad Z_{22} = Z_2 + Z_3 + Z_4; \quad Z_{33} = Z_4 + Z_5; \\ Z_{12} = Z_{21} = -Z_2; \quad Z_{13} = Z_{31} = 0; \quad Z_{23} = Z_{32} = -Z_4; \\ E_I = E_1 - E_2; \quad E_{II} = E_2; \quad E_{III} = E_3. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Якщо скористатись виразами (2.75), то з допомогою (2.73) можна одержати систему рівнянь, яка повністю співпадає з системою (2.72). Таку систему рівнянь можна легко розв'язати методом підстановки. Якщо ж схема кола більш складна, то доцільно скористатись більш універсальним методом визначників.

Визначник  $\Delta_Z$  системи (2.73) або (2.74) має вигляд

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix}. \quad (2.76)$$

Згідно з теоремою Крамера, контурний струм  $k$ -го контура дорівнює

$$I_k = \frac{1}{\Delta_Z} \sum_{i=1}^{N_{\text{пк}}} E_i \Delta_{ik}, \quad (2.77)$$

де  $\Delta_{ik}$  - алгебраїчне доповнення елемента  $Z_{ik}$  матриці опорів кола.

Для знаходження алгебраїчного доповнення  $\Delta_{ik}$  спочатку знаходять мінор  $\Delta_{ikm}$ , який дорівнює визначнику (2.76), із якого виключені  $i$ -ий рядок,



відповідаючий  $i$ -ому контуру, де діє контурна ЕРС  $\underline{E}_i$  та  $k$ -ий стовпець, що відповідає шуканому  $k$ -ому струму.  
Алгебраїчне доповнення

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ikm}(-1)^{i+k}. \quad (2.78)$$

В розгорнутому вигляді вирази для контурних струмів мають вигляд

$$\begin{aligned} \underline{I}_I &= 1/\Delta_Z [\underline{E}_I \Delta_{I1} + \underline{E}_{II} \Delta_{I2} + \dots + \underline{E}_N \Delta_{IN}]; \\ \underline{I}_{II} &= 1/\Delta_Z [\underline{E}_I \Delta_{II2} + \underline{E}_{II} \Delta_{II22} + \dots + \underline{E}_N \Delta_{IN2}]; \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{I}_N &= 1/\Delta_Z [\underline{E}_I \Delta_{IN} + \underline{E}_{II} \Delta_{IN2} + \dots + \underline{E}_N \Delta_{NN}]. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Якщо складне коло має лише одне джерело напруги  $\underline{E}_i$ , що включене в  $i$ -ому контурі, то контурний струм, створений при цьому в іншому  $k$ -ому контурі, дорівнює

$$\underline{I}_k = \underline{E}_i \Delta_{ik} / \Delta_Z. \quad (2.80)$$

Рівняння за другим законом Кірхгофа в системі (2.73) складені в припущенні, що джерелами електричної енергії служать джерела ЕРС. При наявності в колі джерел струму останні можна замінити еквівалентними джерелами ЕРС.

Якщо ж внутрішні провідності джерел струму дорівнюють нулю, то доцільно вибрати їх відомі струми за контурні. В цьому випадку число невідомих контурних струмів і відповідно число рівнянь зменшиться на число заданих струмів.

### 2.4.3. Розрахунок кіл методом вузлових напруг

Метод контурних струмів передбачає складання  $N = N_{\text{пк}}$  рівнянь на основі другого закону Кірхгофа. Однак, на практиці найчастіше кількість незалежних контурів більша ніж кількість незалежних вузлів. Тому більш простим може виявитись розрахунок кола за рівняннями, складеними у відповідності з першим законом Кірхгофа. Якраз цей випадок і має місце в разі використання методу вузлових напруг.

Суть методу вузлових напруг полягає в тому, що на основі першого закону Кірхгофа визначаються напруги у вузлах схеми кола відносно деякого базисного вузла. Ці шукані напруги іменуються вузловими напругами, причому їх позитивними напрямками вважаються напрямки від вузлів до базисного вузла.

Напруга на затискачах будь-якої вітки дорівнює різниці потенціалів на вузлах даної вітки, тобто різниці вузлових напруг. Добуток цієї напруги на провідність відповідної вітки дорівнює струму в ній. Таким чином, знаючи вузлові напруги в колі, можна знайти струми у вітках. Для цього треба скористатися законом Ома для ділянки кола (вітки) з джерелом ЕРС.

Якщо діюча комплексна напруга, прикладена до вітки, дорівнює  $\underline{U}$ , число пасивних елементів у вітці  $N$ , а число джерел ЕРС  $M$ , то для

комплексного діючого значення струму  $\underline{I}$  на основі другого закону Кірхгофа одержимо

$$\underline{I} = \frac{\underline{U} + \sum_{k=1}^M \underline{E}_k}{\sum_{k=1}^N \underline{Z}_k}. \quad (2.81)$$

Тобто, комплексний струм у вітці з джерелами ЕРС дорівнює відношенню алгебраїчної суми комплексних ЕРС джерел і напруги на затискачах вітки до суми комплексних опорів усіх пасивних елементів у цій вітці.

Нехай для схеми, що приведена на рис.2.30 і має три вузли, відомі комплексні опори та комплексні ЕРС джерел.

Виберемо позитивні напрямки невідомих струмів у вітках і складемо рівняння за першим законом Кірхгофа для двох незалежних вузлів 1 та 2

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 &= 0; \\ \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_5 &= 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Розв'язати систему рівнянь (2.82) відносно комплексних струмів неможливо, оскільки кількість невідомих значно перевищує кількість рівнянь в системі.

Введемо поняття нових невідомих – вузлових напруг. Оскільки схема на рис.2.30 має всього три вузли, один із яких (вузол 3) є базовим, то всього буде дві невідомі вузлові напруги  $\underline{U}_1$  та  $\underline{U}_2$ . Напрямок цих напруг завжди співпадає з напрямком руху від незалежних вузлів до базового.

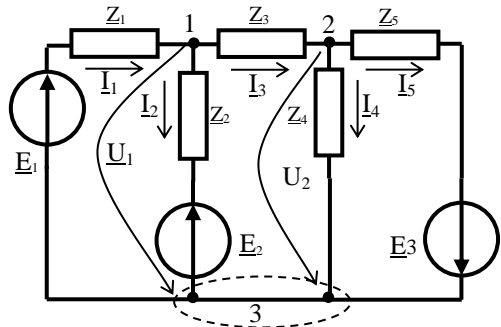


Рис.2.30. Електрорадіоколо, досліджуване методом вузлових напруг

На основі закону Ома для ділянки кола для комплексних діючих значень струмів у вітках одержимо

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{-\underline{U}_1 + \underline{E}_1}{\underline{Z}_1} = (\underline{E}_1 - \underline{U}_1) \cdot \underline{Y}_1; & \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_1 - \underline{E}_2}{\underline{Z}_2} = (\underline{U}_1 - \underline{E}_2) \cdot \underline{Y}_2; \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_3} = (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) \cdot \underline{Y}_3; & \underline{I}_4 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_4} = \underline{U}_2 \cdot \underline{Y}_4; \\ \underline{I}_5 &= \frac{\underline{U}_2 + \underline{E}_3}{\underline{Z}_5} = (\underline{U}_2 + \underline{E}_3) \cdot \underline{Y}_5. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Якщо вирази (2.83) підставити у систему рівнянь (2.82), то після нескладних перетворень одержимо

$$(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \cdot \underline{U}_1 - \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_2 = \underline{E}_1 \cdot \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \cdot \underline{Y}_2; \quad (2.84)$$

$$-\underline{Y}_3 \underline{U}_1 + (\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) \cdot \underline{U}_2 = -\underline{E}_3 \underline{Y}_5.$$

Система рівнянь (2.84), одержана в результаті перетворень вихідної системи (2.82), може бути розв'язана будь-яким відомим методом відносно вузлових напруг  $\underline{U}_1$  та  $\underline{U}_2$ . Потім, скориставшись співвідношеннями (2.83), можна легко знайти струми у вітках..

Таким чином, метод вузлових напруг зводиться до виконання наступних операцій

1. У досліджуваному колі вибирають базисний вузол і вказують напрямки вузлових напруг, які спрямовані до базисного вузла. Кількість вузлових напруг дорівнює кількості незалежних вузлів  $N = N_{\text{нв}} = N_{\text{вuz}} - 1$ .

2. Складають систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{1N} \underline{U}_N &= \underline{I}_I; \\ \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{2N} \underline{U}_N &= \underline{I}_{II}; \\ \underline{Y}_{N1} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{N2} \underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{NN} \underline{U}_N &= \underline{I}_N. \end{aligned} \quad (2.85)$$

де  $\underline{Y}_{ii}$  - комплексна провідність і-го вузла;

$\underline{Y}_{ik} = \underline{Y}_{ki}$  - комплексні взаємні провідності і-го та k-го вузлів;  $\underline{I}_i$  - комплексний струм і-го вузла.

Комплексна вузлова провідність дорівнює сумі комплексних провідностей віток, що підключені до вузла, який розглядається, і входить в рівняння з додатнім знаком.

Комплексна взаємна провідність дорівнює сумі комплексних провідностей віток, включених між вузлами, що розглядаються, і входить в рівняння з від'ємним знаком.

Комплексний вузловий струм дорівнює алгебраїчній сумі комплексних струмів короткого замикання всіх віток, що підключені до вузла, який розглядається. Ці струми входять в суму з додатнім знаком, якщо ЕРС або струм джерел, включених у вітку, спрямовані до вузла, для якого складається рівняння. В іншому випадку їх знаки від'ємні.

3. Знаходять комплексні вузлові напруги одним із відомих способів. Якщо скористатись методом визначників, то за правилом Крамера для k-ої вузлової напруги

$$\underline{U}_k = \frac{1}{\Delta_Y} \sum_{i=1}^{N_{\text{нв}}} \underline{I}_i \Delta_{ik}, \quad (2.86)$$

де  $\Delta_Y$  - визначник провідностей системи рівнянь (2.85);

$\Delta_{ik} = \Delta_{ikm} (-1)^{i+k}$  - алгебраїчне доповнення елемента  $\underline{Y}_{ik}$  даного визначника.

Перший індекс і алгебраїчного доповнення, що позначає номер рядка, який викреслюється з визначника, відповідає номеру вузла, відомий комплексний струм якого множиться на дане алгебраїчне доповнення.

Другий індекс  $k$ , що позначає номер стовпця, який викреслюється з визначника системи, відповідає номеру вузла, для якого знаходять вузлову напругу.

4. Відмічають напрямок струмів у вітках і розраховують ці комплексні струми на основі закону Ома для ділянки кола.

Для досліджуваної схеми, що зображена на рис.2., у відповідності з викладеним методом для комплексних вузлових та взаємних провідностей а також вузлових струмів одержимо

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3; & \underline{Y}_{22} &= \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4} + \frac{1}{\underline{Z}_5} = \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5; \\ \underline{Y}_{12} &= \underline{Y}_{21} = -\frac{1}{\underline{Z}_3} = -\underline{Y}_3; \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\underline{I}_I = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} = \underline{E}_1 \cdot \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \cdot \underline{Y}_2; \quad \underline{I}_{II} = -\frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_5} = -\underline{E}_3 \cdot \underline{Y}_5.$$

Якщо скористатись виразами (2.87) і записом системи рівнянь у загальному вигляді (2.85), то одержимо для схеми на рис.2.30 систему робочих рівнянь, яка повністю співпадає з системою (2.84), складеною для цієї ж схеми за допомогою першого закону Кірхгофа.

#### 2.4.4. Розрахунок кіл методом накладання

В лінійному електричному колі, що включає лише джерела ЕРС, контурні струми, а значить і струми у вітках являють собою лінійні функції контурних ЕРС. Математично ці струми визначаються співвідношенням (2.77)

$$\underline{I}_k = \frac{1}{\Delta_z} \sum_{i=1}^{N_{ПК}} \underline{E}_i \Delta_{ik}.$$

Фізичний смисл цієї формули полягає в тому, що струм у будь-якому контурі лінійного кола можна одержати як алгебраїчну суму струмів, які обумовлені у цьому контурі кожною із ЕРС окремо.

Метод розрахунку струмів, оснований на визначенні струмів в одному і тому ж контурі або вітці при почерезній дії різних ЕРС та наступному складанні цих струмів, називається методом накладання.

При визначенні часткових струмів за методом накладання необхідно враховувати внутрішні опори тих джерел ЕРС, які вважаються відсутніми при знаходженні складових струмів.

Якщо в колі включені ідеалізовані джерела ЕРС, то при визначенні струмів, що викликані окремими джерелами ЕРС, усі інші джерела слід закоротити.

В свою чергу, в лінійному електричному колі з джерелами струму вузлові напруги, а значить і напруги на вітках являють собою лінійні функції заданих струмів джерел. Цю обставину можна виразити співвідношенням (2.86). Фізичний зміст цього співвідношення полягає в тому, що вузлова напруга для будь-якого вузла лінійного кола може бути одержана як алгебраїчна сума напруг, обумовлених у цьому вузлі кожним із джерел струму окремо.

При визначенні окремих складових вузлових напруг за методом накладання необхідно вважати включеними в схему внутрішні провідності тих джерел струму, які вважаються відсутніми при обчисленні конкретних складових напруг.

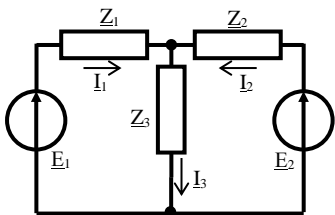


Рис.2.31. Схема кола для аналізу методом накладання

Якщо джерела струму ідеалізовані, то при використанні методу накладання вітки з неврахованими джерелами струму розриваються.

Метод накладання можна використати і в тому випадку, коли в лінійному колі одночасно включені і джерела ЕРС, і джерела струму. В цьому випадку струм у будь-якій частині кола може бути одержаний як алгебраїчна сума струмів, викликаних

почережною дією джерел ЕРС та струму. При цьому відсутні джерела ЕРС замінюють їх внутрішніми опорами, а відсутні джерела струму – їх внутрішніми провідностями. Цей метод не можна застосовувати для розрахунків нелінійних кіл, а також потужностей, де є квадратична, а не лінійна залежність від напруги та струму.

Розглянемо, як приклад, використання методу накладання для визначення струму у вітці  $Z_3$  схеми, що приведена на рис.2.31.

Шуканий струм  $I_3$  визначається як алгебраїчна сума струмів  $I_3'$  та  $I_3''$ , що протікають у вітці  $Z_3$  під дією джерел ЕРС  $E_1$  та  $E_2$ , взятих окремо.

Якщо ЕРС  $E_2 = 0$ , то повний струм джерела ЕРС  $E_1$  дорівнює:

$$I_1' = \frac{E_1}{Z_3 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}}$$

складова струму  $I_3'$  за рахунок джерела  $E_1$

$$I_3' = \frac{I_1 Z_2 \cdot Z_3}{Z_3(Z_2 + Z_3)} = \frac{E_1 Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}.$$

Аналогічно, якщо  $E_1 = 0$ , то складова струму  $I_3''$  за рахунок джерела  $E_2$

$$I_3'' = \frac{E_2 Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}.$$

Сумарний струм  $I_3$  у вітці  $Z_3$  дорівнює  $I_3 = I_3' + I_3''$ .

#### 2.4.5. Розрахунок кіл методом еквівалентного генератора

Коли необхідно визначити струм лише в одній вітці складного кола, найчастіше застосовується теорема про еквівалентний генератор. Якщо ця вітка включає джерела енергії, то їх вважають такими, що належать до іншої частини складного кола. У цьому разі вітка, струм якої шукають, являє собою пасивний двополіусник, інша частина кола – активний двополіусник.

Напруга на розімкнутих затискачах пасивного двополіусника дорівнює нулю, а у активного двополіусника напруга холостого ходу не дорівнює нулю.

В основі методу еквівалентного генератора лежить теорема про заміну активного двополіусника еквівалентним генератором, що і визначало назву теореми та методу. Однак, часто зустрічаються й інші назви: метод холостого ходу та короткого замикання, теорема Тевенена (про еквівалентний генератор напруги), теорема Нортон (про еквівалентний генератор струму).

Теорема про заміну активного двополіусника еквівалентним генератором напруги формулюється наступним чином.

Усякий активний двополіусник може бути представлений еквівалентним генератором напруги, ЕРС якого дорівнює напрузі холостого ходу двополіусника, а внутрішній опір – вхідному опору активного двополіусника.

Щоб довести теорему про еквівалентний генератор, зобразимо досліджуване коло у вигляді з'єднання активного А та пасивного П двополіусників (рис. 2.32).

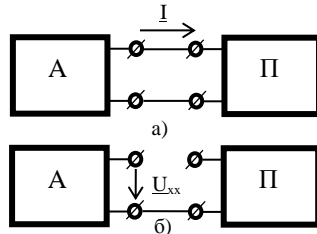


Рис.2.32. Еквівалентна схема аналізованого кола в нормальному режимі (а) та в режимі холостого ходу (б)

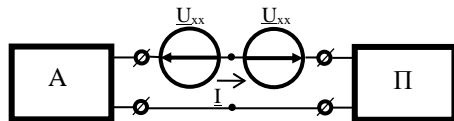


Рис.2.33. Схема аналізованого кола з додатковими джерелами ЕРС

У звичайному режимі струм в аналізованому пасивному двополюснику дорівнює  $\underline{I}$  (рис.2.32,а). Якщо розірвати коло, що з'єднує активний та пасивний двополюсники, то на затискачах першого будемо мати напругу холостого ходу  $\underline{U}_{xx}$  (рис. 2.32,б). Після цього, в початкове коло (рис. 2.32,а) введемо послідовно два джерела ЕРС, напруги яких за величиною дорівнюють  $\underline{U}_{xx}$  а за напрямком спрямовані назустріч одна одній (рис. 2.33).

Очевидно, що в результаті цієї операції шуканий струм  $\underline{I}$  пасивного двополюсника залишиться незмінним. Цей струм можна визначити методом

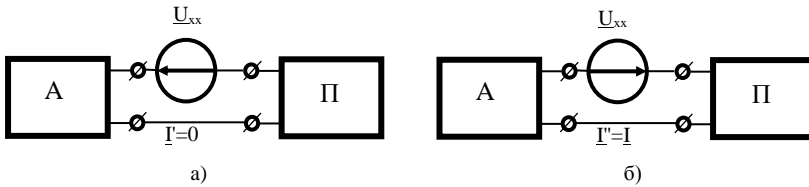


Рис.2.34.Схеми, що ілюструють розрахунок струму  $\underline{I}=\underline{I}'+\underline{I}''$

накладання як алгебраїчну суму парціальних струмів, створюваних кожною ЕРС окремо.

У відповідності з методом накладання покажемо схему, що приведена на рис. 2.33 у вигляді двох окремих схем (рис.2.34). У першій з них (рис.2.34,а) ЕРС величиною  $\underline{U}_{xx}$  компенсує дію усіх джерел енергії активного двополюсника. Активний двополюсник у цьому разі перетворюється в пасивний і перший парціальний струм у колі  $\underline{I}' = 0$ .

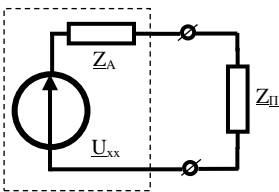


Рис.2.35. Еквівалентна схема кола з генератором ЕРС

В іншій схемі (рис.2.34,б) парціальний струм  $\underline{I}''$  є реакцією на другу із введених у схему (рис.2.33) ЕРС. У цьому разі джерела, що є в активному двополюснику, слід вважати відсутніми. Замість них у схемі залишають лише їх внутрішні опори або провідності.

Тим самим, активний двополюсник перетворюється у пасивний, що має вхідний опір активного двополюсника  $\underline{Z}_A$ . Оскільки пасивний двополюсник, включений праворуч від джерел ЕРС, характеризується вхідним опором  $\underline{Z}_П$ , то другий парціальний струм у колі

$$\underline{I}'' = \frac{\underline{U}_{xx}}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_П} \quad (2.88)$$

У відповідності з методом накладання результуючий струм, який споживає пасивний двополюсник П від активного А (рис. 2.32,а), дорівнює сумі парціальних струмів

$$\underline{I} = \underline{I}' + \underline{I}'' = \frac{\underline{U}_{xx}}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_\Pi}. \quad (2.89)$$

Вираз (2.89) ілюструє сформульовану вище теорему про еквівалентний генератор напруг, оскільки він відповідає схемі кола (рис.2.35), у якій замість активного двополюсника маємо генератор напруги, що характеризується ЕРС  $\underline{U}_{xx}$  та внутрішнім опором  $\underline{Z}_A$ . Цей вираз можна використати для знаходження невідомого струму будь-якої вітки кола.

Розрахунок кола за методом еквівалентного генератора проводять так:

1. Розмикають вітку, струм у якій треба визначити. Ця вітка повинна бути пасивним двополюсником, а якщо вона містить джерела енергії, то їх необхідно вважати віднесеними до іншої частини кола – активного двополюсника.

2. Визначають напругу холостого ходу активного двополюсника.

3. Визначають вхідний опір  $\underline{Z}_A$  активного та  $\underline{Z}_\Pi$  пасивного двополюсників.

4. Розраховують шуканий струм за допомогою співвідношення (2.89).

При знаходженні вхідного опору активного двополюсника усі ЕРС та струми джерел енергії вважаються нульовими. У схемі залишаються лише внутрішні опори та провідності джерел енергії. Вхідний опір знаходять або за допомогою еквівалентних перетворень схеми, або експериментально за допомогою дослідів холостого ходу та короткого замикання

$$\underline{I}_{кз} = \frac{\underline{U}_{xx}}{\underline{Z}_A}; \quad \underline{Z}_A = \frac{\underline{U}_{xx}}{\underline{I}_{кз}}. \quad (2.90)$$

Від еквівалентної схеми з генератором ЕРС (рис.2.35) можна перейти до еквівалентної схеми кола з генератором струму (рис.2.36). У цьому разі струм еквівалентного генератора знаходять за допомогою першого із виразів (2.90), а внутрішня провідність генератора  $\underline{Y}_A = 1/\underline{Z}_A$ .

Для напруги на затискачах навантаження еквівалентного генератора струму одержимо:

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_{кз}}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_\Pi}, \quad (2.91)$$

де  $\underline{Y}_\Pi = 1/\underline{Z}_\Pi$  – комплексна провідність пасивного двополюсника.

Вираз (2.91) ілюструє сутність теореми про еквівалентний генератор струму. У відповідності з нею будь-який активний двополюсник можна подати у вигляді еквівалентного генератора струму (рис.2.36). При цьому струм генератора дорівнює вихідному струму активного двополюсника у

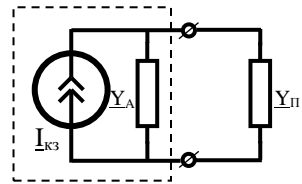


Рис.2.36. Еквівалентна схема кола з генератором струму



режимі короткого замикання, а внутрішня провідність дорівнює провідності між його затискачами при замкнутих накоротко ідеалізованих джерелах ЕРС і розімкнутих ідеалізованих генераторах струму, що входять у склад активного двополіусника. Якщо ж джерела енергії реальні, то при визначенні внутрішньої провідності активного двополіусника їх замінюють внутрішніми опорами та провідностями.

#### 2.4.6. Метод взаємності

Розрахунок кола методом взаємності оснований на принципі взаємності, який був вперше сформульований Кірхгофом.

Якщо ЕРС  $\underline{E}_k$  діє у вітці  $k$  будь-якого складного кола, що не вміщує іншої ЕРС, і викликає у вітці  $l$  струм  $\underline{I}_l$  то при переносі у вітку  $l$  така ж за величиною ЕРС  $\underline{E}_l$  викликає у вітці  $k$  струм  $\underline{I}_k = \underline{I}_l$  (рис.2.37)

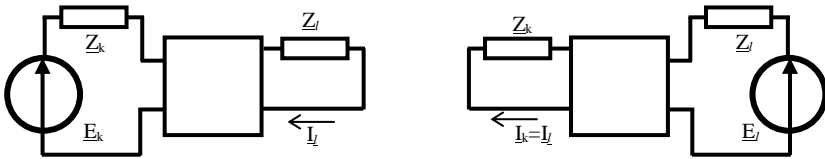


Рис.2.37. Схеми, що ілюструють принцип взаємності

У разі переносу джерела ЕРС із однієї ділянки кола в іншу затискачі, до яких воно було підключене, повинні бути замкнуті накоротко.

Метод взаємності у деяких випадках полегшує аналіз складних кіл. Це обумовлено тим, що розрахунок струму  $\underline{I}_k$  у вітці  $k$ , створюваного джерелом ЕРС, включеним у вітці  $l$ , може виявитися більш простим, ніж розрахунок такого ж за величиною струму  $\underline{I}_l$  вітки  $l$ , викликаного джерелом, що діє у вітці  $k$ .

# РОЗДІЛ 3. ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

## 3.1. Комплексні частотні характеристики кіл

### 3.1.1. Поняття про комплексні частотні характеристики кіл

Комплексні частотні характеристики (КЧХ) кіл використовуються для описання в усталеному режимі лінійних кіл, які не мають у своєму складі незалежних джерел енергії.

Ці характеристики залежать від конфігурації кола, параметрів його елементів та вибору вхідних і вихідних електричних величин.

В разі дії на лінійне коло гармонічної електричної величини  $s(t)$ , миттєвий комплекс якої  $\underline{s}(t) = \underline{S}_m \cdot e^{j\omega t}$ , реакція кола в усталеному режимі змінюється також по гармонічному закону. Миттєвий комплекс цієї реакції має вигляд  $\underline{x}(t) = \underline{X}_m \cdot e^{j\omega t}$ .

У загальному вигляді комплексна частотна характеристика кола - це відношення комплексних миттєвих значень реакції кола та діючої на нього величини. Тобто

$$K(j\omega) = \frac{\underline{x}(t)}{\underline{s}(t)} = \frac{\underline{X}_m \cdot e^{j\omega t}}{\underline{S}_m \cdot e^{j\omega t}} = \frac{\underline{X}_m}{\underline{S}_m} = \frac{\underline{X}}{\underline{S}}. \quad (3.1)$$

У відповідності з принципом суперпозиції за допомогою КЧХ можна знайти реакцію кола не тільки на гармонічну дію  $\underline{s}(t) = \underline{S}_m e^{j\omega t}$  але й на більш

складні зовнішні збудження, що можуть бути представлені за допомогою лінійної комбінації гармонічних складових з різними частотами.

Комплексні частотні характеристики використовуються в разі частотного методу аналізу кіл, який є окремим випадком більш універсального

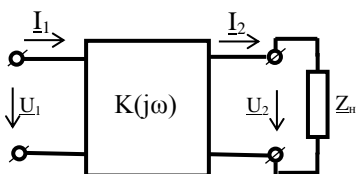


Рис.3.1. Лінійне пасивне коло

операторного методу аналізу.

Нехай є заданим пасивне лінійне коло у вигляді чотириполюсника (рис.3.1), на вході якого діють напруга  $\underline{U}_1$  та струм  $\underline{I}_1$ . Якщо на навантаженні  $\underline{Z}_n$ , за яке можна вважати будь-який елемент кола, діють напруга  $\underline{U}_2$  та струм  $\underline{I}_2$ , то реакцію кола на вхідну дію можна розглядати, як з боку точок прикладання цієї дії, так і з боку інших ділянок кола. При цьому одержують комплексні частотні характеристики, які поділяються на вхідні, вихідні та передатні.

Вхідними комплексними частотними характеристиками є комплексний опір та комплексна провідність кола з боку входу

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{U_{m1}}{I_{m1}} = \frac{U_1}{I_1}; \quad (3.2)$$

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{I_{m1}}{U_{m1}} = \frac{I_1}{U_1}. \quad (3.3)$$

Вихідні КЧХ – це комплексний опір та комплексна провідність кола з боку виходу.

Комплексні передатні частотні характеристики визначаються відношеннями комплексних струмів та напруг, діючих на вихідних і вхідних записках кола і діляться на передатні характеристики прямої та зворотної дії.

Перші характеризують передачу або перетворення вхідної дії в реакцію на виході кола, а другі навпаки – перетворення вихідної дії в реакцію на вході. Звичайно використовують декілька видів передатних характеристик.

До передатних КЧХ прямої дії належать:

Комплексна передатна характеристика відносно напруги (комплексний коефіцієнт передачі напруги)

$$K_U(j\omega) = \frac{U_{m2}}{U_{m1}} = \frac{U_2}{U_1}. \quad (3.4)$$

Комплексна передатна характеристика відносно струму (комплексний коефіцієнт передачі струму)

$$K_I(j\omega) = \frac{I_{m2}}{I_{m1}} = \frac{I_2}{I_1}. \quad (3.5)$$

Комплексний передатний або взаємний опір

$$Z_{21}(j\omega) = \frac{U_{m2}}{I_{m1}} = \frac{U_2}{I_1}. \quad (3.6)$$

Комплексна передатна або взаємна провідність

$$Y_{21}(j\omega) = \frac{I_{m2}}{U_{m1}} = \frac{I_2}{U_1}. \quad (3.7)$$

Окрім передатних КЧХ прямої дії в радіотехніці розглядають також і передатні КЧХ зворотної дії. Для їх запису у виразах (3.4) – (3.7) треба поміняти місцями всі цифрові індекси.

Далі будуть розглядатися лише вхідні КЧХ та передатні КЧХ прямої дії. Передатні комплексні частотні характеристики кола можна подати як раціональні функції уявної частоти  $j\omega$  і у загальному випадку вони собою являють раціональний дріб

$$K(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}, \quad (3.8)$$

де  $b_i, a_i$  - дійсні додатні коефіцієнти, що залежать від конфігурації схеми та параметрів її елементів;

$m, n$  - цілі додатні числа, причому для фізично реалізуємих кіл завжди виконується умова  $m \leq n$ .

### 3.1.2. Методи знаходження комплексних частотних характеристик кіл

Якщо схема аналізуємого лінійного кола задана, то розрахунок комплексних частотних характеристик можна здійснити, використовуючи будь-який із відомих методів розрахунку кіл гармонічного струму, або експериментально.

При невідомій конфігурації кола комплексні частотні характеристики знаходять лише експериментальним методом, вимірюючи в діапазоні частот залежності від частоти модуля  $K(\omega)$  та аргумента  $\varphi(\omega)$  КЧХ.

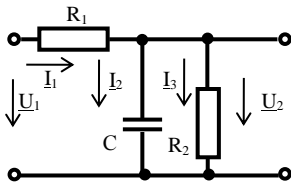


Рис.3.2.Схема аналізуємого Г-подібного кола

Якщо у першому випадку коло аналізують, використовуючи закони Ома та Кірхгофа, або іншим методом, то для знаходження комплексних частотних характеристик задають довільне комплексне значення вхідної електричної величини  $\underline{S}$  і визначають комплексне значення вихідної величини  $\underline{X}$ . Далі у відповідності з виразом (3.1) знаходять шукану комплексну частотну характеристику  $K(j\omega)$ .

Оскільки у процесі розв'язання задачі вихідна комплексна величина  $\underline{X}$  виражається через вхідну  $\underline{S}$ , то КЧХ кола не буде залежати від виду вхідної величини, а визначається лише схемою та параметрами елементів кола.

Нехай для кола, приведенного на рис.3.2, необхідно знайти передатну комплексну частотну характеристику відносно напруги  $K_U(j\omega)$ , комплексний вхідний опір  $Z_{вх}(j\omega)$  та комплексну передатну провідність  $\underline{Y}_{21}(j\omega)$ . У відповідності із законом Ома в комплексній формі для вихідної напруги одержимо

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_1 \cdot \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}. \quad (3.9)$$

Аналогічно для вхідного струму маємо:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot 1/j\omega C}{R_2 + 1/j\omega C}} = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}}. \quad (3.10)$$

У відповідності з визначенням для вхідного опору  $Z_{\text{вх}}(j\omega)$  можна записати

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{U_1}{I_1} = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} = \frac{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C}{1 + j\omega R_2 C}.$$

Якщо здійснити підстановку (3.10) в (3.9), то одержимо

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1 R_2}{(1 + j\omega R_2 C) \cdot \left( R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} \right)} = \frac{\underline{U}_1 R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C},$$

звідки у відповідності з означенням

$$K_u(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C}. \quad (3.11)$$

Для знаходження передатної провідності  $\underline{Y}_{21}(j\omega)$  необхідно виразити струм  $I_2$  через напругу  $\underline{U}_1$

$$I_2 = \underline{U}_2 \cdot j\omega C = \underline{U}_1 \cdot \frac{R_2 \cdot j\omega C}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C}. \quad (3.12)$$

Із виразу (3.12) видно, що:

$$\underline{Y}_{21}(j\omega) = \frac{I_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega R_2 C}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C}. \quad (3.13)$$

Якщо конфігурація кола невідома, то експериментально вимірюють амплітудні або діючі значення вихідної  $x(t)$  та вхідної  $s(t)$  гармонічних електричних величин, а також різницю фаз між ними у діапазоні робочих частот кола і будують графіки залежностей  $K(\omega) = X/S$  та  $\varphi(\omega) = \psi_x - \psi_s$  від частоти.

Це дозволяє у будь-якій точці частотного діапазону отримати значення модуля та аргумента шуканої комплексної частотної характеристики.

### 3.1.3. Основні різновидності частотних характеристик кіл

Як і будь-яка комплексна функція комплексна частотна характеристика може бути представлена у показниковій, тригонометричній та алгебраїчній формі

$$K(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.14)$$

або

$$K(j\omega) = K(\omega)\cos\varphi(\omega) + jK(\omega)\sin\varphi(\omega) = M(\omega) + jN(\omega),$$

де  $K(\omega)$  та  $\varphi(\omega)$  - модуль та аргумент комплексної частотної характеристики;  $M(\omega)$  та  $N(\omega)$  дійсна і уявна складові КЧХ.

Причому

$$K(j\omega) = \sqrt{M^2(\omega) + N^2(\omega)} ; \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{N(\omega)}{M(\omega)}. \quad (3.15)$$

У зв'язку з викладеним розрізняють наступні частотні характеристики електричних кіл: амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) кола  $K(\omega)$ ; фазочастотну характеристику (ФЧХ) кола  $\varphi(\omega)$ ; дійсну частотну характеристику (ДЧХ) кола  $M(\omega)$ ; уявну частотну характеристику (УЧХ) кола  $N(\omega)$ ; амплітудно-фазову характеристику (АФХ) кола  $K(j\omega)$ .

Найголовнішими із цих характеристик, що знайшли найбільш широке застосування при аналізі електричних та радіотехнічних кіл, є амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики кола.

### 3.1.3.1 Амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики кола

Амплітудно-частотною характеристикою кола називається залежність від частоти модуля комплексної частотної характеристики кола. Чисельно АЧХ визначається відношенням амплітуд або діючих значень реакції кола  $x(t)$  та зовнішньої дії  $s(t)$

$$K(\omega) = \frac{X_m}{S_m} = \frac{X}{S}. \quad (3.16)$$

За допомогою АЧХ кола оцінюють його частотну вибірність, під якою розуміють здатність кола виділяти із всієї сукупності частотних складових спектра сигналу яку-небудь конкретну складову, або сукупність складових, що зосереджені у заданому діапазоні частот.

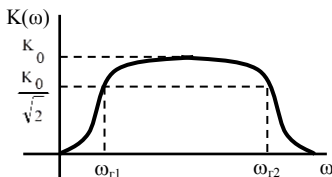


Рис.3.3. Типова амплітудно-частотна характеристика кола

Частотна вибірність кола тим вища, чим більша швидкість змінювання АЧХ у діапазоні частот. За допомогою АЧХ також визначають смугу пропускання та граничні частоти смуги пропускання кола, його згасання у цій смузі, крутизну АЧХ на границях смуги пропускання та інші параметри кола.

У багатьох важливих для практики випадках АЧХ в границях смуги пропускання повинна бути рівномірною, тобто мати постійне значення (рис.3.3.).

У цьому разі смугою пропускання кола називають діапазон частот, на границях якого потужність вихідної електричної величини знижується вдвоє у порівнянні з її найбільшим значенням в смузі пропускання. Оскільки потужність пропорційна квадрату значення струму або напруги, то цій обставині відповідає зниження напруги або струму на виході кола в  $\sqrt{2}$  разів

в порівнянні з їх максимальним значенням у смузі пропускання. Такого ж зниження зазнає на граничних частотах і АЧХ кола (див. рис. 3.3).

Таким чином, у разі вимоги рівномірності АЧХ, смуга пропускання кола – це діапазон частот, на границях якого значення АЧХ зменшується в  $\sqrt{2}$  разів у порівнянні із своїм найбільшим значенням в смузі пропускання.

Фазочастотною характеристикою кола називається залежність від частоти аргумента  $\varphi(\omega)$  комплексної частотної характеристики  $K(j\omega)$  кола.

Фазочастотна характеристика в кожній точці частотного діапазону визначає зсув за фазою реакції кола відносно зовнішньої дії

$$\varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = \psi_x(\omega) - \psi_s(\omega) \quad (3.17)$$

де  $\psi_x$  та  $\psi_s$  - початкові фази реакції кола та зовнішньої дії відповідно.

Окрім того ФЧХ дозволяє одержати інформацію про часовий зсув гармонічних коливань при їх проходженні через коло. Кожному із коливань з конкретною частотою відповідає часовий зсув

$$t_3 = -\frac{\psi_x - \psi_s}{\omega} \quad (3.18)$$

або з урахуванням (3.17)

$$t_3 = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} .$$

Амплітудно-частотну та фазочастотну характеристики можна знайти шляхом розрахунків або експериментально. У останньому випадку амплітуду вхідного коливання доцільно підтримувати незмінною. Тоді АЧХ у деякому масштабі буде відповідати залежності амплітуди або діючого значення вихідного гармонічного коливання від частоти.

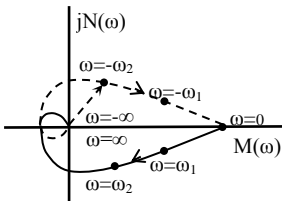
Будуючи графіки АЧХ та ФЧХ, частоту іноді відкладають у логарифмічному масштабі, використовуючи десятковий  $\lg \omega$ , або двійковий  $\log_2 \omega$  логарифм. При цьому в обох випадках вісь частот позначають значком частоти  $\omega$ , вводячи поняття частотної декади та октави.

Частотна декада – це інтервал частот, на границях якого частоти відрізняються у десять разів, а октава – це частотний інтервал, на границях якого частоти відрізняються в два рази.

### 3.1.3.2 Амплітудно-фазова характеристика кола

Комплексна частотна характеристика  $K(j\omega)$  кола об'єднує амплітудно-частотну  $K(\omega)$  та фазочастотну  $\varphi(\omega)$  характеристики і тому часто називається амплітудно-фазовою характеристикою (АФХ) кола. Побудову графіка цієї характеристики можна здійснити як в декартовій, так і в полярній системах координат.

Для цього необхідно відкласти вздовж координатних осей комплексної площини величини  $M(\omega)$  та  $N(\omega)$ , а в полярній системі скористатись значеннями модуля  $K(\omega)$  та аргумента  $\varphi(\omega)$  КЧХ.



**Рис.3.4.Годограф амплітудно-фазової характеристики кола**

У цьому разі для кожного конкретного значення частоти  $\omega$  можна знайти положення вектора  $K(j\omega)$ . Якщо частоту  $\omega$  змінювати від 0 до  $\infty$ , а у загальному випадку від  $-\infty$  до  $\infty$ , то кінець цього вектора опише траєкторію, що називається частотним годографом і є графічним зображенням АФХ кола (рис.3.4).

### 3.1.3.3 Логарифмічні частотні характеристики кіл

Для комплексних частотних характеристик окрім алгебраїчної або показникової форми запису часто використовується експоненціальна форма

$$K(j\omega) = e^{\gamma(j\omega)} = e^{(\alpha(\omega) + j\beta(\omega))} \quad (3.19)$$

Якщо прологарифмувати ліву та праву частини рівняння (3.19), то одержимо:

$$\ln K(j\omega) = \gamma(j\omega)$$

або

$$\begin{aligned} \ln(K(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}) &= \alpha(\omega) + j\beta(\omega); \\ \ln K(\omega) + j\varphi(\omega) &= \alpha(\omega) + j\beta(\omega). \end{aligned}$$

Звідки логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ) дорівнює

$$\alpha(\omega) = \ln K(\omega) = \ln \frac{X}{S}, \quad (3.20)$$

а логарифмічна фазочастотна характеристика не відрізняється від звичайної фазочастотної характеристики кола. Тобто

$$\beta(\omega) = \varphi(\omega).$$

Одиницею вимірювання у разі оцінки ЛАЧХ є непер (Нп). Ця одиниця відповідає відношенню реакції кола та дії на нього, що дорівнює величині  $e \approx 2,71$ .

Часто при оцінці ЛАЧХ використовують десятковий логарифм, однак у цьому випадку одиницею вимірювання є бел (Б). Це відповідає відношенню



потужностей реакції кола і дії на нього, що дорівнює десяти. Оскільки потужність пропорційна квадрату і напруги, і струму, то вираз для ЛАЧХ, що вимірюється в беллах, має вигляд

$$\alpha(\omega) = 20 \lg K(\omega). \quad (3.21)$$

На практиці частіше використовують одиницю у десять разів меншу ніж бел – децибел (дБ).

У цьому випадку співвідношення (3.21) переписеться у вигляді

$$\alpha(\omega) = 20 \lg K(\omega) = 20 \lg \frac{X}{S}. \quad (3.22)$$

Якщо врахувати зв'язок між натуральним та десятковим логарифмами числа  $\ln x \approx 2,3 \lg x$ , то можна встановити співвідношення між одиницями вимірювання ЛАЧХ непер та бел. Для ЛАЧХ в неперах маємо

$$\alpha(\omega) = \ln \frac{X}{S} \approx 2,3 \lg \frac{X}{S},$$

або

$$\alpha(\omega) = \ln K(\omega) \approx 2,3 \lg K(\omega). \quad (3.23)$$

Порівнюючи співвідношення (3.23), де ЛАЧХ вимірюється в неперах, та (3.22), де вона вимірюється у децибелах, можна легко встановити, що  $2,3 \text{ Нп} \approx 20 \text{ дБ}$ . Звідки виходить, що  $1 \text{ Нп} \approx 8,7 \text{ дБ}$ , а  $1 \text{ дБ} \approx 0,115 \text{ Нп}$ ,  $1 \text{ Б} \approx 1,15 \text{ Нп}$

Якщо замість АЧХ використовується ЛАЧХ, що вимірюється в децибелах, то смуга пропускання кола – це діапазон частот на границях якого значення ЛАЧХ зменшується на три децибела у порівнянні з найбільшим значенням ЛАЧХ у смузі пропускання. Це обумовлено тим, що зменшенню АЧХ в  $\sqrt{2}$  разів відповідає зменшення ЛАЧХ на 3 дБ ( $20 \lg 0,707 \approx -3 \text{ дБ}$ ).

## 3.2. Частотні характеристики типових кіл

### 3.2.1. Поняття про ідеалізовані типові кола

В практичній схемотехніці широке застосування знайшли частотно-незалежні та частотно-залежні подільники напруги. В залежності від вибору їх параметрів ці кола можуть виконувати функції пропорційної передачі, фазового зсуву, затримки у часі, інтегрування і диференціювання сигналів та деякі інші. Очевидно, що реальні кола виконують усі ці функції з деякою похибкою. Тому спочатку дамо визначення та отримаємо основні співвідношення для деяких ідеалізованих типових кіл.

Передатним називається коло, у якого миттєва напруга на виході пропорційна миттєвій напрузі на вході

$$u_{\text{вих}}(t) = \alpha u_{\text{вх}}(t), \quad (3.24)$$

де  $\alpha$  - коефіцієнт пропорційності.

У комплексній формі вираз (3.24) має вигляд

$$\underline{U}_{\text{вих}} = \alpha \underline{U}_{\text{вх}},$$

звідки КЧХ, АЧХ та ФЧХ такого кола

$$K_u(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{вих}}}{\underline{U}_{\text{вх}}} = \alpha; \quad K_u(\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{вих}}}{\underline{U}_{\text{вх}}} = \alpha; \quad \varphi(\omega) = 0. \quad (3.25)$$

У колі, що затримує сигнал у часі, миттєва напруга на вході відрізняється від миттєвої напруги на вході затримкою у часі

$$u_{\text{вих}}(t) = u_{\text{вх}}(t - t_3), \quad (3.26)$$

де  $t_3$  – часова затримка сигналу у колі.

У комплексній формі вираз (3.26) запишеться

$$\underline{U}_{\text{вих}} = \underline{U}_{\text{вх}} e^{-j\omega t_3},$$

а частотні характеристики мають вигляд

$$K_u(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{вих}}}{\underline{U}_{\text{вх}}} = e^{-j\omega t_3}; \quad K_u(\omega) = 1; \quad \varphi(\omega) = -\omega t_3. \quad (3.27)$$

Як видно із співвідношень (3.27), коло, що затримує сигнал у часі одночасно є фазозсовуючим. Причому фазовий зсув сигналу залежить і від затримки у часі  $t_3$ , і від частоти  $\omega$  сигналу.

Диференціюючим є коло, у якого миттєва напруга на виході пропорційна похідній від миттєвої напруги на вході

$$u_{\text{вих}}(t) = \alpha \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt}. \quad (3.28)$$

У комплексній формі

$$\underline{U}_{\text{вих}} = \alpha \cdot j\omega \underline{U}_{\text{вх}}.$$

Частотні характеристики диференціюючого кола

$$K_u(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{вих}}}{\underline{U}_{\text{вх}}} = \alpha \cdot j\omega; \quad K_u(\omega) = \alpha\omega; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.29)$$

Інтегруючим є коло, у якого миттєва напруга на виході пропорційна інтегралу від миттєвої напруги на вході

$$u_{\text{вих}}(t) = \alpha \int u_{\text{вх}}(t) dt. \quad (3.30)$$

У комплексній формі

$$\underline{U}_{\text{вих}} = \frac{\alpha}{j\omega} \underline{U}_{\text{вх}}.$$

Частотні характеристики інтегруючого кола

$$K_u(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{вих}}}{\underline{U}_{\text{вх}}} = \frac{\alpha}{j\omega} = -j \frac{\alpha}{\omega}; \quad K_u(\omega) = \frac{\alpha}{\omega}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (3.31)$$

Як видно із співвідношень (3.29) та (3.31) АЧХ диференціюючих та інтегруючих кіл є частотно-залежними, а фазові зсуви між вихідною та вхідною напругами – фіксовані.

Проведемо аналіз характеристик реальних найпростіших подільників напруги, визначимо функції, які вони можуть виконувати, та умови, що для цього треба забезпечити.

### 3.2.2. Реальні типові кола

#### 3.2.2.1 Кола інтегруючого типу

Проаналізуємо частотні характеристики найпростіших Г- подібних чотириполосників, схеми яких приведені на рис.3.5. Для першої з цих двох схем (рис.3.5,а) в режимі близькому до режиму холостого ходу, коли  $Z_H \rightarrow \infty$ , для комплексної передатної характеристики відносно напруги одержимо

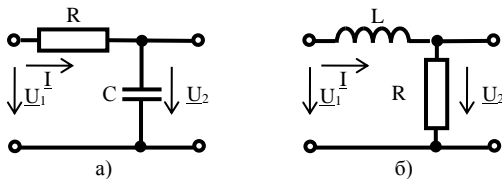


Рис.3.5.Схема найпростіших RC- та RL-кіл інтегруючого типу

$$K_u(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I}{I} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}. \quad (3.32)$$

Оскільки величина добутку RC має розмірність часу, то його позначають  $\tau$  і називають постійною часу кола. Постійна часу  $\tau$  є параметром кола і характеризує його властивості.

В результаті вираз (3.32) можна записати у вигляді

$$K_u(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \tau}. \quad (3.33)$$

Для кола, приведеного на рис. 3.5,б, аналогічно одержимо

$$K_u(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I \cdot R}{I(R + j\omega L)} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}. \quad (3.34)$$

У даному випадку величина  $\frac{L}{R}$  також має розмірність часу і тут позначається  $\tau$  тому і тут

$$K_u(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}.$$

Це означає, що комплексні частотні характеристики для обох кіл на рис.3.5 мають однакову структуру, відрізняючись лише виразом для постійної часу  $\tau$ .

Якщо у виразі (3.33) знаменник та чисельник домножити на комплексне спряжене число

$$K_u(j\omega) = \frac{1 \cdot (1 - j\omega\tau)}{(1 + j\omega\tau) \cdot (1 - j\omega\tau)} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2},$$

то легко знайдемо дійсну та уявну частотні характеристики кіл

$$M(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2}; \quad N(\omega) = -\frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}. \quad (3.35)$$

Тоді у відповідності з (3.15) для АЧХ та ФЧХ одержимо

$$K_u(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega\tau \quad (3.36)$$

Якщо від АЧХ вимагати рівномірності в смузі пропускання, то граничну частоту смуги пропускання або частоту зрізу можна визначити із співвідношення

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_r \tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

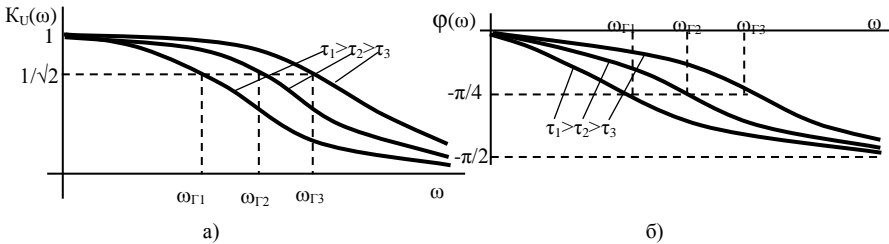
Звідки

$$\omega_r = \frac{1}{\tau}. \quad (3.37)$$

Амплітудно-частотні та фазочастотні характеристики кіл інтегруючого типу, побудовані у відповідності із співвідношеннями (3.36) для різних значень  $\tau$ , приведені на рис.3.6.

Як видно із приведених АЧХ (рис.3.6,а), смуга пропускання розглядаємих кіл лежить в області частот  $(0, \frac{1}{\tau})$ , що відповідає якісній передачі через них низькочастотних коливань. Такі пристрої в схемотехніці називають фільтрами нижніх частот (ФНЧ).

Зсув фаз між вихідним та вхідним коливаннями негативний і на граничній частоті  $\omega_r$  складає  $-\frac{\pi}{4}$  (рис.3.6.б). Тобто дані кола вносять



**Рис.3.6.** Амплітудно-частотні (а) та фазочастотні (б) характеристики кіл інтегруючого типу затримку гармонічного сигналу не тільки за фазою, але й за часом. Останнє випливає з того, що на будь-якій частоті  $\varphi(\omega) < 0$ .

Нехай на входах розглядаємих кіл діють негармонічні сигнали, що мають складні спектри. Нагадаємо, що спектр сигналу—це сукупність гармонічних складових із своїми амплітудами та початковими фазами. Якщо для всіх складових спектра складного коливання, що діє на вході кола, виконується умова  $\omega\tau \ll 1$ , то очевидно, що всі ці складові потрапляють у смугу пропускання, де, як видно із виразів (3.36),  $K(\omega) \approx 1$ , а  $\varphi(\omega) \approx -\omega\tau$ .

У цьому випадку складові спектра вхідного сигналу потрапляють на вихід кола практично не змінюючи своїх амплітуд, але отримавши приблизно однакові часові затримки, що близькі за величиною до постійної часу кола  $\tau$ . При цьому сигнал не змінює своєї форми, але затримується в часі на інтервал  $\tau$ , що відповідає функціям ідеалізованого кола затримки в часі.

Якщо ж, навпаки, для складових вхідного сигналу виконується умова  $\omega\tau \gg 1$ , то на основі (3.33) для КЧХ кола одержимо

$$K_u(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega\tau}, \quad (3.38)$$

а АЧХ та ФЧХ цього кола записуються у вигляді

$$K_u(\omega) \approx \frac{1}{\omega\tau}; \quad \varphi(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}. \quad (3.39)$$

Очевидно, що співвідношення (3.38) та (3.39) аналогічні тим, які характеризують ідеальний інтегратор (3.31). У цьому випадку складові вхідного коливання не потрапляють у смугу пропускання, оскільки для будь-якої з них  $\omega \gg \omega_r$ .

Чим сильніше виконується остання нерівність, тим краще коло виконує інтегруючу функцію. Однак, як видно із виразу для АЧХ кола, при цьому значно зменшується амплітуда сигналу на його виході.

Окрім функцій фазового та часового зсуву а також інтегрування розглянуті кола можуть виконувати роль коригуючих, змінюючи співвідношення амплітуд та фаз складових сигналу в його спектрі.

Очевидно, що для виконання коригуючої функції частота зрізу повинна вибиратися таким чином, щоб тільки частина складових спектра сигналу попадали у смугу пропускання кола. При цьому коригуюче коло одночасно має властивості і фільтра нижніх частот. Таке коло може застосовуватись для частотної селекції корисного сигналу на фоні завад, якщо частотні спектри останніх не попадають у смугу пропускання кола, а спектр сигналу попадає.

### 3.2.2.2 Кола диференціюючого типу

Змінимо раніше розглянуті кола таким чином, щоб вихідні напруги можна було знімати із резистора в RC- колі та з індуктивності в RL – колі (рис.3.7).

Комплексна передатна характеристика відносно напруги для кола, приведеного на рис. 3.7,а

$$K_u(j\omega) = \frac{IR}{I\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega\tau}}, \quad (3.40)$$

де  $\tau = RC$  - постійна часу кола.

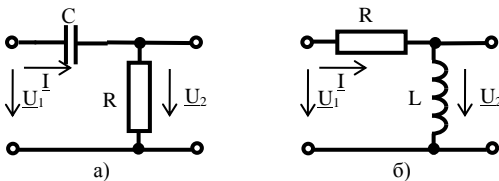


Рис.3.7. Схеми найпростіших RC- та RL-кіл диференціюючого типу

Для кола на рис.3.7,б аналогічно одержимо

$$K(j\omega) = \frac{I \cdot j\omega L}{I \cdot (R + j\omega L)} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega\tau}}$$

де  $\tau = \frac{L}{R}$  - постійна часу кола.

Таким чином, для обох кіл комплексні передатні характеристики відносно напруги мають однакову структуру, відрізняючись лише виразом для постійної часу  $\tau$ .

Вирази для АЧХ та ФЧХ розглядаємих кіл мають вигляд

$$K_u(\omega) = |K_u(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}}; \quad (3.41)$$

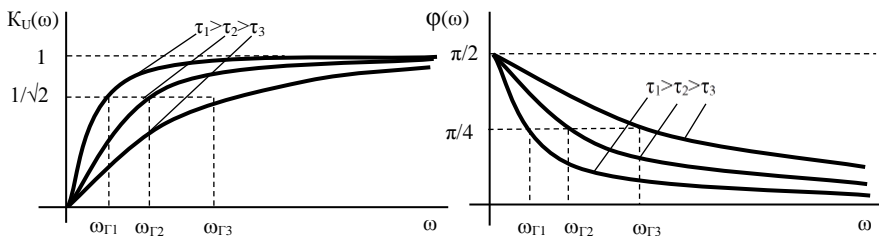
$$\varphi(\omega) = \arg K_u(j\omega) = \arctg \frac{1}{\omega\tau}. \quad (3.42)$$

Частоту зрізу  $\omega_r$  кіл можна знайти із співвідношення

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_{\Gamma} \tau}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \omega_{\Gamma} = \frac{1}{\tau}. \quad (3.43)$$

На рис.3.8. приведені графіки залежностей, що побудовані у відповідності з виразами (3.41) та (3.42). Як видно, смуга пропускання кіл диференціуючого типу лежить у діапазоні частот від  $\omega_{\Gamma}$  до  $\infty$ .

Тобто, ці кола можуть виконувати функції фільтрів верхніх частот. Зсув за фазою між вихідним та вхідним гармонічними коливаннями позитивний і на границі смуги пропускання складає  $\frac{\pi}{4}$ . Таким чином, дані кола вносять



**Рис.3.8. Амплітудно-частотні (а) та фазочастотні (б) характеристики кіл диференціуючого типу**

випередження за фазою та у часі.

Як і у випадку кіл інтегруючого типу можливе регулювання ширини смуги пропускання кіл диференціуючого типу шляхом зміни їх постійних часу  $\tau$ .

Якщо для всіх складових спектра складного коливання виконується умова  $\omega \tau \gg 1$ , то практично всі вони без суттєвих амплітудних та фазових спотворень проходять на вихід кола. Це обумовлено тим, що в цьому випадку  $K_u(\omega) \approx 1$ ,  $\phi(\omega) \approx 0$ . Коло тут виконує передатну функцію.

У випадку, коли для всіх складових спектра сигналу виконується умова  $\omega \tau \ll 1$

$$K_u(j\omega) \approx j\omega \tau \quad (3.44)$$

а АЧХ та ФЧХ цього кола матимуть вигляд

$$K_u(\omega) \approx \omega \tau \quad \phi(\omega) \approx \frac{\pi}{2}. \quad (3.45)$$

Оскільки співвідношення (3.44) та (3.45) аналогічні тим, що характеризують ідеальний диференціатор (3.29), то очевидно, що у цьому випадку коло можна назвати диференціуючим. Для будь-якої складової складного сигналу виконується умова  $\omega \ll \frac{1}{\tau} = \omega_{\Gamma}$ , тобто ці складові не

попадають в смугу пропускання, тому операція диференціювання супроводжується значним ослабленням сигналу. Чим менша постійна часу  $\tau$ , тим сильніше виконується нерівність  $\omega\tau \ll 1$  для складових сигналу і точніше відбувається його диференціювання.

Умови виконання диференціюючим колом коригуючих функцій такі ж самі як і для інтегруючого кола.

Таким чином, розглянуті кола диференціюючого типу можуть виконувати функції фільтра верхніх частот а також диференціюючих, передатних, фазозсовуючих та коригуючих пристроїв. У кожному з цих випадків все визначається взаємним розташуванням на осі частот граничної частоти смуги пропускання та частотних складових спектра вхідного сигналу.

### 3.2.2.3 Частотно-незалежні подільники напруги

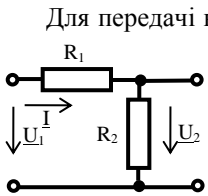


Рис.3.9.Ідеальний подільник напруги

Для передачі коливань від одного електричного кола до іншого широко використовуються частотно-незалежні подільники напруги, основною вимогою до яких є мінімальні спотворення передаваних сигналів в широкому діапазоні частот.

Ідеальним частотно-незалежним подільником напруги можна вважати коло, яке складається з двох послідовно з'єднаних активних опорів (рис.3.9).

Передатна комплексна частотна характеристика такого

подільника

$$K_u(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (3.46)$$

Очевидно, що АЧХ кола

$$K_u(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

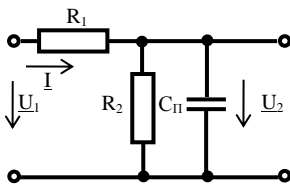


Рис.3.10.Подільник напруги, що враховує ємність навантаження

рівномірна в усьому діапазоні частот, а ФЧХ при будь-якому значенні частоти дорівнює нулю.

На практиці отримати такі частотні характеристики неможливо через наявність паразитних реактивностей, у першу чергу ємностей.

Насамперед треба врахувати паразитну ємність навантаження, наприклад, ємність  $C_n$  наступного кола, що підключається до виходу подільника (рис.3.10). У цьому випадку КЧХ кола має вигляд аналогічний до отриманого для кола, що зображене на рис.3.2



$$K_u(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_{\Pi}}$$

Якщо винести спільний множник  $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$ , то одержимо

$$K_u(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C_{\Pi} \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \tau_e},$$

де  $\tau_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_{\Pi}$  - еквівалентна постійна часу кола.

Для АЧХ та ФЧХ частотно-залежного подільника напруги одержимо

$$K_u(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau_e)^2}}; \varphi(\omega) = -\arctg \omega \tau_e. \quad (3.47)$$

Очевидно, що з точністю до постійного множника частотні характеристики такого подільника співпадають з характеристиками інтегруючого кола, постійна часу якого  $\tau = \tau_e$ .

Для виправлення (корекції) АЧХ частотно-залежного подільника в його схему вводять додаткову коригуючу ємність  $C_K$  (рис.3.11). У цьому випадку комплексна частотна характеристика має вигляд

$$K_u(j\omega) = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega \tau_2}}{\frac{R_1}{1 + j\omega \tau_1} + \frac{R_2}{1 + j\omega \tau_2}},$$

де  $\tau_1 = R_1 C_K$  та  $\tau_2 = R_1 C_{\Pi}$  - постійні часу плечей подільника.

Якщо в такому колі  $\tau_1 = \tau_2$ , то АЧХ буде рівномірною, а ФЧХ дорівнюватиме нулю в усьому діапазоні частот. Тобто, таке коло, як і раніше розглянутий ідеальний подільник напруги, буде частотно-незалежним. Коригуючу ємність  $C_K$  можна легко розраховувати виходячи з рівняння

$$\tau_1 = \tau_2, \text{ а саме } C_K = \frac{R_2}{R_1} C_{\Pi}.$$

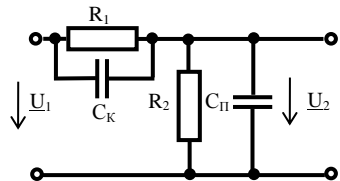


Рис.3.11. Частотно-скоригований подільник напруги

### 3.2.2.4 Мостові фазозсовуючі кола

В схемотехніці лінійних кіл дуже часто виникає потреба передачі конкретного гармонічного сигналу без зміни його амплітуди але з деяким відомим зсувом за фазою або у часі. Цю задачу можна розв'язати за допомогою мостового фазозсовуючого кола, два еквівалентні зображення якого приведені на рис.3.12.

Знайдемо КЧХ цього кола, враховуючи, що у відповідності з визначенням

$$K_u(j\omega) = \frac{U_2}{U_1}.$$

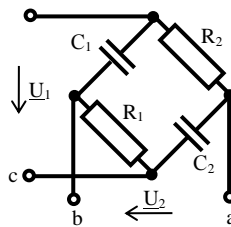
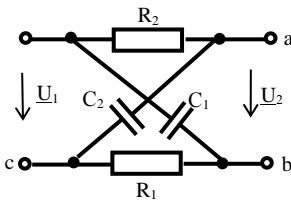


Рис.3.12.Еквівалентні зображення мостового фазозсовуючого кола

Якщо вихідні затискачі кіл на рис.3.12. позначити буквами а та b, то можна записати що  $U_2 = U_a - U_b$ .

Запишемо вирази для комплексних напруг  $U_a$  та  $U_b$ , вважаючи

точкою їх відрахування один із вхідних затискачів кола, позначений буквою с. Тоді будемо мати

$$U_a = \frac{U_1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \tau_2};$$

$$U_b = \frac{U_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \cdot R_1 = \frac{U_1 \cdot j\omega \tau_1}{1 + j\omega \tau_1},$$

де  $\tau_1 = R_1 C_1$ ,  $\tau_2 = R_2 C_2$  - постійні часу окремих Г-подібних ділянок кола.

У випадку, коли  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  для КЧХ кола відносно напруги одержимо

$$K_u(j\omega) = \frac{U_a - U_b}{U_1} = \frac{1 - j\omega \tau}{1 + j\omega \tau}. \quad (3.48)$$

В показниковій формі

$$K_u(j\omega) = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \cdot e^{-\arctg \omega \tau}}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \cdot e^{\arctg \omega \tau}} = e^{-j2\arctg \omega \tau} \quad (3.49)$$

Із виразу (3.49) для АЧХ та ФЧХ кола одержимо

$$K_u(\omega) = |K_u(j\omega)| = 1; \varphi(\omega) = -2 \arctg \omega \tau \quad (3.50)$$

Як видно із виразів (3.50), АЧХ розглянутого кола рівномірна в усьому діапазоні частот, а фазовий зсув між вихідним та вхідним коливаннями змінюється від 0, коли частота коливання  $\omega = 0$ , до величини  $-\pi$ , коли частота  $\omega \rightarrow \infty$  (рис.3.13,а).

Таким чином, розглянуте мостове коло, забезпечує затримку вихідного коливання по відношенню до вхідного як за фазою, так і в часі. Це характерно для раніше розглянутих кіл інтегруючого типу, але максимальна величина фазового зсуву в останніх вдвічі менша.

Якщо у схемах на рис. 3.12 опори та ємності поміняти місцями, то вираз для КЧХ кола дещо змінить свій вигляд

$$K_u(j\omega) = \frac{j\omega\tau - 1}{j\omega\tau + 1} \quad (3.51)$$

У цьому випадку АЧХ кола залишиться незмінною, а ФЧХ зміниться, оскільки на частоті  $\omega = 0$  маємо

$$K_u(j\omega) = -1 = e^{j\pi}.$$

Із цього виразу випливає, що при  $\omega = 0$

$$K_u(\omega)_{\omega=0} = 1, \quad \varphi(\omega)_{\omega=0} = \pi.$$

Оскільки найбільший зсув фаз у цьому колі не може перевищувати величину  $\pi$ , а для величини аргументу КХЧ (3.51) можна записати

$$\arg K_u(j\omega) = -2\arctg \omega \tau,$$

то вираз для ФЧХ мостового кола другого типу запишеться

$$\varphi(\omega) = \pi - 2\arctg \omega \tau \quad (3.52)$$

Як видно із графіка цієї залежності (рис.3.12,б), що побудована у відповідності з виразом (3.52), фазовий зсув у колі другого типу позитивний, як і у колах диференціюючого типу, і змінюється від величини  $\pi$ , коли частота  $\omega = 0$ , до нуля, коли частота  $\omega \rightarrow \infty$ .

Таким чином, у мостових колах можна шляхом змінювання величини постійної часу  $\tau$  досягти регулювання зсуву фаз між вхідним та вихідним гармонічними коливаннями при практично незмінній амплітуді останнього, якщо амплітуда вхідного сигналу не змінюється. У випадку більш складних

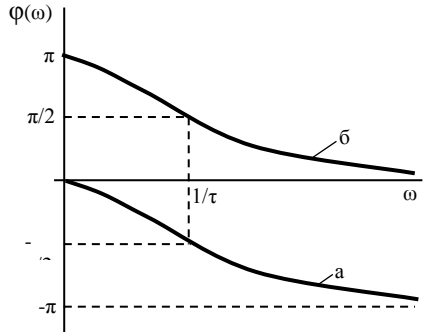


Рис.3.13. Фазочастотні характеристики мостових кіл, що забезпечує затримку (а) та випередження(б) вихідного коливання за фазою

негармонічних сигналів їх амплітуда та форма будуть залишатися практично незмінними, якщо спектри цих сигналів будуть розташовуватись у діапазоні частот, де ФЧХ мостового кола близька до лінійної. Це пояснюється тим, що при проходженні кола кожна складова спектра сигналу отримує практично однаковий часовий зсув, а амплітуди цих складових залишаються незмінними.

### 3.3. Послідовний коливальний контур

#### 3.3.1. Еквівалентна схема послідовного коливального контура та його первинні і вторинні параметри

Послідовним коливальним контуром називається коло, складене із котушки індуктивності та конденсатора, що з'єднані послідовно відносно

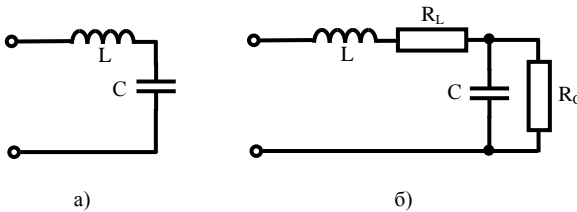


Рис.3.14.Принципова електрична (а) та еквівалентна (б) схеми послідовного коливального контура

на рис.3.14,б – його еквівалентна схема. В останній за допомогою активного опору  $R_L$  враховуються втрати в дротах котушки індуктивності, а наявність опору  $R_C$  обумовлена недосконалістю діелектрика конденсатора.

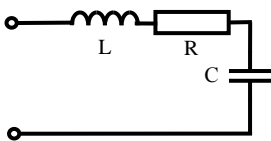


Рис.3.15.Спрощена еквівалентна схема послідовного коливального контура

обумовлений втратами енергії в активному опорі дроту котушки індуктивності, тобто  $R=R_L$ . Параметри елементів схеми заміщення  $L, C, R$  – це первинні параметри послідовного коливального контура. Отже, для вхідного комплексного опору контура одержимо

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(x_L - x_C) \quad (3.53)$$

У випадку, коли ємнісний опір  $x_C$  та індуктивний опір  $x_L$  однакові за величиною, вхідний реактивний опір

$$X_{\text{вх}} = x_L - x_C = 0.$$

вхідних затискачів, до яких може бути підключене джерело енергії або інші елементи кола.

На рис.3.14,а зображена принципова електрична схема послідовного коливального контура, а

Слід зазначити, що для коливальних контурів застосовуваних у радіотехніці опір  $R_L$  має величину, що складає одиниці або десятки Ом. В той же час величина опору  $R_C$  набагато порядків вища і складає  $10^9$  Ом та більше. Тому для радіотехнічних контурів втратами в конденсаторі можна знехтувати і еквівалентна схема послідовного коливального контура дещо спроститься (рис.3.15). На цій схемі опір  $R$

Режим роботи кола, при якому реактивна складова вхідного опору дорівнює нулю, не дивлячись на наявність реактивних елементів у колі, називається резонансом. Як видно із виразу (3.53), при резонансі вхідний опір активний і дорівнює  $Z_{\text{вх}p} = R$ .

При цьому струм контура обмежується лише опором  $R$  і досягає найбільшого значення

$$I_p = \frac{E}{R}; \quad I_p = \frac{E}{R}. \quad (3.54)$$

Напруга на опорі  $R$  співпадає за фазою зі струмом і дорівнює напрузі джерела ЕРС. Напруги на реактивних елементах контура при резонансі однакові за величиною і протилежні за фазою

$$\underline{U}_{Lp} = j\omega_o L I_p; \quad \underline{U}_{Cp} = -j \frac{1}{\omega_o C} I_p; \quad \underline{U}_{Lp} + \underline{U}_{Cp} = 0, \quad (3.55)$$

де  $\omega_o$  - резонансна частота кола.

Оскільки на резонансній частоті  $X_{\text{вх}} = 0$ , то її можна знайти із співвідношення

$$\omega_o L - \frac{1}{\omega_o C} = 0.$$

А саме

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.56)$$

Кутовий резонансній частоті  $\omega_o$  відповідає циклічна частота

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (3.57)$$

та довжина електромагнітної хвилі у вільному просторі

$$\lambda_o = \frac{c}{f_o} = 2\pi c \cdot \sqrt{LC}, \quad (3.58)$$

де  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  - швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль у вакуумі.

Якщо у виразі (3.58) врахувати, що  $f_o = \frac{1}{T_o}$ , то одержимо, що

$$\lambda_o = cT_o.$$

Це означає, що довжина хвилі  $\lambda_o$  характеризує шлях, який проходить електромагнітна хвиля у безповітряному просторі за час одного коливання (періоду).

Забезпечити резонанс у контурі можна як шляхом змінювання частоти генеруемого генератором коливання, так і настроюванням контура за допомогою змінювання ємності  $C$  конденсатора або індуктивності  $L$  котушки індуктивності.

Опір будь-якого з реактивних елементів контура при резонансі називається характеристичним опором контура

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.59)$$

Характеристичний опір – це один із найважливіших параметрів коливального контура. Для радіотехнічних контурів із зосередженими параметрами  $\rho \approx 100..500 \text{ Ом}$ .

Якість коливального контура, як і якість окремих реактивних елементів, оцінюють за допомогою його добротності  $Q_k$ , для якої зберігається визначення, введене у розділі 1.4.2

$$Q_k = \frac{|P_Q|}{P_R} = \omega_0 \frac{W_K}{P_R} = 2\pi \frac{W_K}{P_R \cdot T_0}, \quad (3.60)$$

де  $W_K$  -енергія накопичена у контурі за період  $T_0$  і  $P_R \cdot T_0$  - енергія, що розсіюється у контурі за той самий період.

Якщо врахувати, що на резонансній частоті  $\omega_0$ , на якій звичайно оцінюють добротність контура,

$$W_K = \frac{I_{mp}^2 L}{2}; \quad P_R = \frac{I_{mp}^2 R}{2},$$

то з урахуванням виразу (3.60) одержимо

$$Q_k = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}. \quad (3.61)$$

З урахуванням реальних значень  $\rho$  та  $R$  для радіотехнічних контурів із зосередженими параметрами найбільше значення добротності  $Q_k \approx 100..300$ .

Іноді замість добротності  $Q_k$  використовують обернену до неї величину згасання контура

$$d_k = \frac{1}{Q_k}. \quad (3.62)$$

Якщо в перших двох виразах (3.55) струм  $I_p$  виразити за допомогою (3.54) та врахувати (3.61), то одержимо

$$\underline{U}_{Lp} = j \frac{\omega_0 L}{R} \cdot \underline{E} = j Q_k \cdot \underline{E}; \quad (3.63)$$

$$\underline{U}_{Cp} = -j \frac{1}{\omega_0 CR} \cdot \underline{E} = -j Q_K \cdot \underline{E}.$$

Таким чином, напруги на реактивних елементах контура при резонансі не тільки однакові за величиною та протилежні за фазою, але й в добротність  $Q_K$  разів більші ніж напруга, прикладена до входу кола. Якраз з цієї причини резонансні явища у послідовному коливальному контурі називаються резонансом напруг.

На закінчення слід зазначити, що введені вище параметри контура  $\omega_0, f_0, \lambda_0, Q_K, d_{k,p}, \rho$  називаються вторинними. Вони дозволяють порівнювати коливальні контури один з одним без врахування конкретних значень первинних параметрів  $L, C$  та  $R$ .

### 3.3.2 Енергетичні процеси в послідовному коливальному контурі

Фізичні процеси у коливальному контурі зручно розглядати на основі аналізу енергетичних співвідношень. Якщо у колі має місце резонанс напруг, то частота зовнішнього колювання  $\omega = \omega_0$ , а напруги на реактивних елементах однакові за величиною  $U_{Lp} = U_{Cp} = U_K$ .

Оскільки струм у колі випереджає напругу на ємності на  $\frac{\pi}{2}$ , то при  $\psi_i = 0$  для миттєвого струму  $i_p$  та напруги  $u_{Cp}$  одержимо

$$i_p = I_{mp} \cos \omega_0 t; \quad u_{Cp} = U_{mCp} \sin \omega_0 t = U_{mk} \sin \omega_0 t. \quad (3.64)$$

Миттєве значення енергії, що запасастється в магнітному полі кола

$$w_L = \frac{L i_p^2}{2}, \quad (3.65)$$

а миттєве значення енергії електричного поля

$$w_C = \frac{C u_{Cp}^2}{2}. \quad (3.66)$$

На рис. 3.16 зображені часові діаграми для миттєвих струму  $i_p$  та напруги  $u_{Cp}$  (рис.3.16,а), а також миттєвих значень енергій магнітного  $w_L$  та електричного  $w_C$  полів (рис.3.16,б). Максимальне значення запасасемої у магнітному та електричному полі енергій дорівнює

$$W_{Lp \max} = \frac{L I_{mp}^2}{2}; \quad W_{Cp \max} = \frac{C U_{mCp}^2}{2}. \quad (3.67)$$

Оскільки при резонансі

$$U_{mCp} = \frac{I_{mp}}{\omega_0 C} = \rho I_{mp},$$

то на основі аналізу другого співвідношення системи (3.67) можна зробити висновок, що

$$W_{Lp\max} = W_{Cp\max} = W_{k\max} \cdot \quad (3.68)$$

Отже, максимальні значення запасаної в електричному та магнітному полях енергії однакові. Повна миттєва енергія, що запасється у контурі дорівнює

$$w(t) = w_L(t) + w_C(t) = \frac{LI_{mp}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t + \frac{CU_{mCp}^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = \quad (3.69)$$

$$W_{k\max} (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = W_{k\max} \cdot$$

Із виразу (3.69) видно, що у разі резонансу у будь-який момент часу

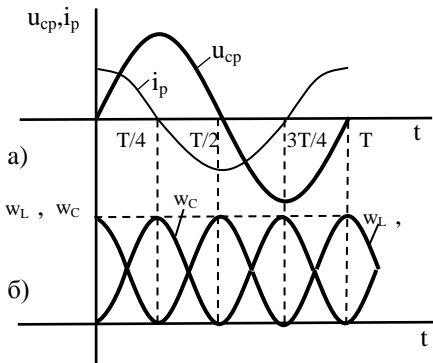
сумарна енергія, яка накопичена в електричному та магнітному полях кола, дорівнює постійній величині  $W_{k\max}$ .

При цьому енергія безперервно перерозподіляється між електричним та магнітним полями. У моменти часу

$t = 0, \frac{T}{2}, T, \dots$  вся енергія

зосереджена у магнітному полі;

у моменти  $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \dots$  – в електричному полі, а у проміжні



**Рис.3.16** Часові діаграми для електричних величин послідовного коливального контура

моменти – в обох полях.

Щоб з'ясувати роль в електричних процесах генератора, що живить послідовний контур, необхідно врахувати, що при резонансі  $W_{Lp\max} = W_{Cp\max}$ , а реактивна складова вхідного опору  $X_{вх} = 0$ .

З енергетичної точки зору це означає, що в усталеному режимі генератор не впливає на процес запасання енергії у магнітному та електричному полях. Енергія, що з самого початку накопичена у колі при його підключенні до генератора, здійснює колювання (перерозподіляється) між полями індуктивності та ємності без участі у цьому процесі генератора. Якраз з цієї причини розглядаємо коло і називають коливальним контуром.

Оскільки разом з періодичним обміном енергією між електричним та магнітним полями у колі мають місце втрати енергії в активному опорі  $R$ , то завдання генератора у цьому випадку полягає лише у тому, щоб компенсувати ці втрати.

У розстроєному контурі, коли частота сигналу генератора  $\omega \neq \omega_0$ , енергія, що накопичується в електричному та магнітному полях різна за



величиною, тобто  $W_{L\max} \neq W_{C\max}$ . Крім того, реактивна складова вхідного опору кола  $X_{\text{вх}}$  у цьому випадку не дорівнює нулю.

Тепер генератор приймає участь в енергетичному обміні. Разом з періодичним перерозподілом енергії між індуктивністю і ємністю та її розсіюванням в активному опорі, частина енергії то накопичується у колі, то повертається генератору. Причому накопичення цієї частки енергії відбувається або в магнітному полі при індуктивному характері реактивного опору  $X_{\text{вх}}$  або в електричному – при ємнісному характері цього опору.

Таким чином, у режимі резонансу за будь-який проміжок часу від джерела споживається стільки енергії, скільки її за цей час перетворюється у тепло в активному опорі  $R$ . Якщо ж контур розстроєний, то крім цієї енергії слід врахувати і ту її частину, яка накопичується енергомісткими елементами від генератора або повертається знову у коло джерела.

### ***3.3.3. Вхідні частотні та резонансні характеристики послідовного коливального контура***

Для аналізу частотно-вибірних властивостей коливальних контурів використовуються комплексні вхідні та передатні частотні характеристики, а також так звані резонансні характеристики. Резонансні характеристики визначаються на основі частотних і являють собою залежності від частоти діючого струму в контурі та діючих напруг на його елементах.

Найбільш зручною для послідовного коливального контура вхідною частотною характеристикою є комплексний вхідний опір  $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ , компоненти якого визначають вхідні частотні та резонансні характеристики контура, що зв'язані між собою.

Вхідними частотними характеристиками послідовного коливального контура є залежності від частоти модуля (АЧХ) та аргумента (ФЧХ) комплексного вхідного опору. Вхідною резонансною характеристикою такого кола називають залежність від частоти діючого значення струму у контурі  $I(\omega)$  при постійному значенні діючого значення ЕРС генератора та незмінних параметрах контура.

#### ***3.3.3.1 Вхідні частотні характеристики послідовного коливального контура***

Відомо, що вхідний опір ненавантаженого послідовного коливального контура дорівнює

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Згідно з визначеннями для вхідних амплітудно-частотної та фазочастотної характеристик одержимо

$$Z_{\text{вх}}(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (3.70)$$

Активну складову вхідного опору  $R_{\text{вх}} = R$  можна наближено вважати незалежною від частоти, а частотну залежність  $X_{\text{вх}}(\omega)$  можна легко одержати шляхом додавання ординат характеристик  $X_L(\omega) = \omega L$  та  $X_C(\omega) = -X_C(\omega) = -\frac{1}{\omega C}$ .

На рис. 3.17 приведені графіки частотних залежностей реактивних опорів  $X_L(\omega)$ ,  $X_C(\omega)$ ,  $X_{\text{вх}}(\omega)$ .

Очевидно, що на частотах, які менші від резонансної, реактивна складова вхідного опору має ємнісний характер, а на частотах, які більші від резонансної, - індуктивний.

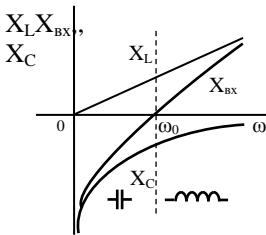


Рис.3.17.Частотні характеристики реактивних опорів контура

Аналітично для реактивної складової вхідного опору одержимо

$$X_{\text{вх}} = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 L \omega C} \right).$$

Якщо врахувати, що

$$\omega_0 L = \rho, \text{ а } \frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

то

$$X_{\text{вх}} = \rho \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Комплексний вхідний опір контура

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = R + jX_{\text{вх}} = R(1 + j\xi),$$

(3.71)

де  $\xi = X_{\text{вх}} / R = \text{tg } \varphi$  - тангенс кута зсуву фаз між напругою та струмом у колі.

Вхідні амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики контура

$$Z_{\text{вх}}(\omega) = R\sqrt{1 + \xi^2}; \quad \varphi(\omega) = \arctg \xi \quad (3.72)$$

На основі (3.71) маємо

$$\xi = \frac{\rho \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{R} = Q_k \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (3.73)$$

Величину  $\xi$  називають узагальненою розстройкою, що характеризує віддаленість частоти  $\omega$  зовнішнього коливання від резонансної частоти.

Найчастіше цікавляться поведінкою контурів в області частот, що мало відрізняються від резонансної частоти  $\omega_0$ . У цьому разі

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega; \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0,$$

де  $\Delta\omega$  - абсолютна розстройка частоти генератора відносно резонансної частоти контура.

Величина  $\Delta\omega > 0$ , якщо  $\omega > \omega_0$  і  $\Delta\omega < 0$ , якщо  $\omega < \omega_0$ . В даному випадку абсолютна розстройка  $\Delta\omega$  – це величина, що вважається набагато меншою у порівнянні з  $\omega_0$  ( $\Delta\omega \ll \omega_0$ ).

В результаті для діапазону частот, що близько розташований біля резонансної частоти контура, замість (3.71) одержимо

$$X_{\text{вх}} \approx \rho \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{(\omega - \omega_0) \cdot (\omega + \omega_0)}{\omega_0^2} \rho \approx 2\rho \frac{\Delta\omega}{\omega_0}, \quad (3.74)$$

де  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  – відносна розстройка контура щодо резонансної частоти  $\omega_0$ .

На основі (3.73) та (3.74) для малих розстроек контура одержимо

$$\xi \approx 2Q_k \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (3.75)$$

А комплексний вхідний опір порівнюватиме

$$Z_{\text{вх}} \approx R \left( 1 + j2Q_k \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right). \quad (3.76)$$

При цьому модуль опору

$$Z_{\text{вх}}(\omega) \approx R \sqrt{1 + \left( 2Q_k \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2}, \quad (3.77)$$

а фазовий кут

$$\varphi(\omega) \approx \arctg \left( 2Q_k \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \approx 2Q_k \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (3.78)$$

Користуючись співвідношеннями (3.72), з урахуванням (3.73), можна побудувати вхідні частотні характеристики послідовного коливального контура, що показані на рис.3.18. На цих же графіках пунктиром показані АЧХ та ФЧХ контура, що побудовані у відповідності з приблизними співвідношеннями (3.77) та (3.78). При цьому як аргумент при

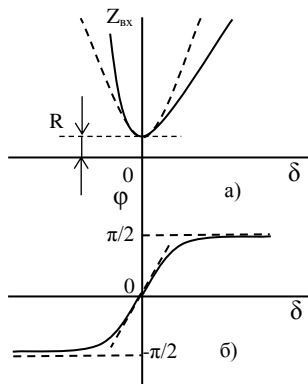


Рис.3.18. Вхідні амплітудно-частотні (а) та фазочастотні (б) характеристики послідовного коливального контура

побудові АЧХ та ФЧХ замість частоти  $\omega$  використано величину відносної розстройки  $\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ .

Якщо у колі спостерігається резонанс, то  $Z_{\text{вх}}(\omega) = R$ , тобто вхідний опір чисто активний і має мінімальне значення. При відхиленні частоти зовнішнього сигналу (коливання) від резонансної повний вхідний опір кола зростає. Швидкість цього зростання пропорційна добротності  $Q_K$  кола.

Фазочастотна характеристика  $\varphi(\omega)$  контура в області малих розстроек близька до лінійної. Її крутизна при цьому також пропорційна добротності  $Q_K$ . У разі великих розстроек величина кута зсуву між напругою на контурі та струмом у ньому наближається або до  $\frac{\pi}{2}$  (якщо  $\Delta\omega > 0$ ), або до  $-\frac{\pi}{2}$  (якщо  $\Delta\omega < 0$ ).

### 3.3.3.2 Вхідна резонансна характеристика послідовного коливального контура

Вхідну резонансну характеристику струму у колі можна отримати на основі амплітудно-частотної характеристики  $Z_{\text{вх}}(\omega)$ , застосувавши закон Ома. У цьому разі діюче значення струму у послідовному коливальному контурі дорівнює

$$I(\omega) = \frac{E}{Z_{\text{вх}}(\omega)} = \frac{E}{R\sqrt{1+\xi^2}}, \quad \text{або} \quad I(\omega) = EY_{\text{вх}}(\omega). \quad (3.79)$$

З точністю до постійного множника вхідна резонансна характеристика послідовного коливального контура співпадає з повною вхідною провідністю цього кола  $Y_{\text{вх}}(\omega)$ .

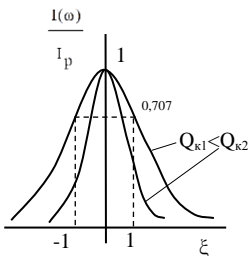


Рис.3.19. Граничні резонансні характеристики струму послідовного коливального контура

На резонансній частоті  $\omega_0$  струм у колі дорівнює  $I_p = E/R$ . Якщо ліву та праву частини рівняння (3.79) поділити на  $I_p$ , то одержимо нормовану вхідну резонансну характеристику струму

$$\frac{I(\omega)}{I_p} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q_K^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}, \quad (3.80)$$

Вираз (3.80) у відносних одиницях характеризує залежність від частоти діючого значення струму у колі. Якщо ж розстройки достатньо малі, то

$$\frac{I(\omega)}{I_p} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 2Q_k \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \right)^2}}. \quad (3.81)$$

Графіки залежностей  $\frac{I(\omega)}{I_p}$ , побудовані у відповідності з виразом (3.80),

називаються граничними резонансними характеристиками (рис.3.19), оскільки могли б бути реалізованими лише при живленні кола від ідеалізованого джерела напруги. Виходячи з характеру резонансних характеристик, судять про вибірність (селективність) контура. Чим гостріша резонансна характеристика, тим вища його вибірність. Із рис. 3.19 видно, що вибірність контура зростає при збільшенні його добротності  $Q_k$ .

Якщо скористатись вхідною резонансною характеристикою, то смугу пропускання послідовного коливального контура  $\Delta\omega_k$  можна визначити таким же чином, як і для раніше розглянутих активно-реактивних кіл: смугою пропускання послідовного коливального контура називають такий частотний інтервал, на границях якого амплітудне або діюче значення струму зменшується до рівня в  $\sqrt{2}$  разів меншого, ніж його найбільше значення на резонансній частоті (див.рис.3.19).

Із виразу (3.80) видно, що у разі, коли  $\frac{I(\omega)}{I_p} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , величина узагальненої розстройки  $\xi = \pm 1$ . Для знаходження граничних частот смуги пропускання скористаємось співвідношенням (3.73) і врахуємо, що верхній граничний частоті  $\omega_B$  відповідає величина  $\xi = 1$ , а нижній  $\omega_H - \xi = -1$ .

Тоді на основі (3.73) одержимо два рівняння.

$$\frac{\omega_B}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_B} = \frac{1}{Q_k} = d_k; \quad (3.82)$$

$$\frac{\omega_H}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_H} = -\frac{1}{Q_k} = -d_k;$$

Після простих перетворень одержимо два квадратних рівняння

$$\omega_B^2 - d_k \omega_o \omega_B - \omega_o^2 = 0; \quad (3.83)$$

$$\omega_H^2 + d_k \omega_o \omega_H - \omega_o^2 = 0.$$

Розв'язування рівнянь (3.83) дають наступні значення граничних частот смуги пропускання контура

$$\omega_B = \omega_o \left( \frac{d_k}{2} + \sqrt{1 + \frac{d_k^2}{4}} \right); \quad \omega_H = \omega_o \left( -\frac{d_k}{2} + \sqrt{1 + \frac{d_k^2}{4}} \right). \quad (3.84)$$

Отже, для смуги пропускання одержимо

$$\Delta\omega_k = \omega_B - \omega_H = \omega_o d_k = \frac{\omega_o}{Q_k}. \quad (3.85)$$

На основі (3.85) можна записати дуже важливе для практики співвідношення

$$Q_k = \frac{\omega_o}{\Delta\omega_k}, \quad (3.86)$$

яке дозволяє одержати оцінку добротності контура на основі експерименту.

Слід однак зважити, що при теоретичних розрахунках співвідношення (3.86) дає завищені в порівнянні з реальними значення добротності, оскільки реальний коливальний контур завжди має те чи інше навантаження, яке обов'язково вносить додаткові втрати, що знижує добротність кола.

Окрім того

$$\Delta\omega_k = \frac{\omega_o}{Q_k} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{R}{\rho} = \frac{R\sqrt{C}}{\sqrt{LC}\sqrt{L}} = \frac{R}{L}.$$

Видно, що смуга пропускання контура не залежить від величини ємності С. Це додатковий аргумент для його перестроювання за допомогою ємності. Окрім того, конденсатор змінної ємності як елемент реального кола більш технологічний і легко піддається мікромініатюризації.

### **3.3.4. Передатні частотні характеристики послідовного коливального контура**

До передатних комплексних частотних характеристик послідовного коливального контура відносяться передатні характеристики відносно напруг на елементах контура

$$K_{U_L}(j\omega) = \frac{U_L}{E}; \quad K_{U_C}(j\omega) = \frac{U_C}{E}; \quad K_{U_R}(j\omega) = \frac{U_R}{E}; \quad (3.87)$$

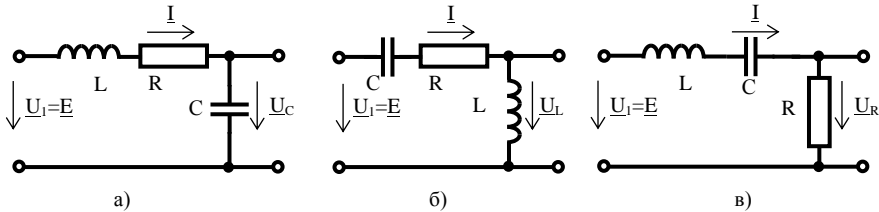
Модулі та аргументи цих характеристик являють собою передатні амплітудно-частотні та фазочастотні характеристики контура. Резонансними характеристиками у цьому випадку називають залежності від частоти амплітудних або діючих значень напруг на елементах контура при постійних значеннях амплітуди або діючого значення ЕРС джерела та незмінних параметрах контура

$$U_L(\omega) = K_{U_L}(\omega) \cdot E; \quad U_C(\omega) = K_{U_C}(\omega) \cdot E; \quad U_R(\omega) = K_{U_R}(\omega) \cdot E; \quad (3.88)$$

Неважко побачити, що передатні резонансні характеристики однозначно зв'язані з відповідними амплітудно-частотними характеристиками контура.

Для одержання передатних частотних характеристик послідовного контура запишемо вирази для передатних комплексних частотних характеристик відносно напруг на окремих його елементах. Для цього можна скористатись одержаними раніше співвідношеннями для вхідного опору.

На основі еквівалентної схеми послідовного коливального контура, що зображена на рис.3.15, можна скласти три варіанти використання цієї схеми



**Рис.3.20.Варіанти використання еквівалентної схеми послідовного коливального контура як чотириполюсника**

як чотириполюсника (рис.3.20).

Як видно із рис.3.20,а, у режимі холостого ходу, коли опір навантаження  $R_H \rightarrow \infty$ , комплексна передатна характеристика відносно напруги на ємності відповідає (3.87) і з урахуванням (3.71) може бути записана

$$K_{U_C}(j\omega) = \frac{U_C}{E} = \frac{I Z_C}{E} = \frac{Z_C}{Z_{BK}} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{1}{R(1+j\xi)}. \quad (3.89)$$

Якщо домножити чисельник та знаменник (3.89) на  $\omega_o$ , то одержимо

$$K_{U_C}(j\omega) = \frac{\omega_o}{\omega} \cdot \frac{1}{j\omega_o C R} \cdot \frac{1}{1+j\xi} = -jQ_K \cdot \frac{\omega_o}{\omega} \cdot \frac{1}{1+j\xi}. \quad (3.90)$$

Перейдемо до показникової форми представлення передатної характеристики

$$K_{U_C}(j\omega) = \frac{\omega_o}{\omega} \left( Q_K e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{-j\arctg \xi}, \quad (3.91)$$

і остаточно запишемо

$$K_{U_C}(j\omega) = \frac{\omega_o}{\omega} \cdot \frac{Q_K}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot e^{-j(\frac{\pi}{2} + \arctg \xi)} \quad (3.92)$$

Звідси виходить, що передатна амплітудно-частотна характеристика відносно напруги на ємності

$$K_{U_C}(j\omega) = \frac{\omega_o}{\omega} \cdot \frac{Q_K}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad (3.93)$$

а фазочастотна характеристика

$$\varphi_C(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \xi. \quad (3.94)$$

Слід зазначити, що на резонансній частоті, коли  $\xi = 0$ ,  $K_{U_C} = Q_k$ , а  $\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$ . Це означає, що напруга на ємності в добротність разів більша від напруги зовнішньої ЕРС і запізнюється за фазою по відношенню до останньої на  $\frac{\pi}{2}$ . Це збігається з результатами одержаними у розділі 3.3.1 для послідовного RLC-кола.

Розглянемо тепер передатну комплексну частотну характеристику відносно напруги на індуктивності

$$\begin{aligned} K_{U_L}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_L}{\underline{E}} = \frac{j\omega L}{\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)} = j \frac{\omega_0 L}{R} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 + j\xi} = jQ_k \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 + j\xi} = \\ &= \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{Q_k}{\sqrt{1 + \xi^2}} \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctg \xi)} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Передатна амплітудно-частотна характеристика відносно напруги на індуктивності та відповідна фазочастотна характеристика будуть мати вигляд

$$K_{U_L}(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{Q_k}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad \varphi_L(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \xi. \quad (3.96)$$

На резонансній частоті, коли  $\omega = \omega_0$ ,  $K_{U_L} = Q_k$ , а  $\varphi_L = \frac{\pi}{2}$ , напруги на реактивних елементах однакові за величиною, але мають протилежні знаки, тобто є протифазними.

Комплексна передатна частотна характеристика відносно напруги на активному опорі

$$K_{U_R}(j\omega) = \frac{\underline{U}_R}{\underline{E}} = \frac{R}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{1}{1 + j\xi}. \quad (3.97)$$

передатна АЧХ контура відносно напруги на опорі

$$K_{U_R}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (3.98)$$

а ФЧХ

$$\varphi_R(\omega) = -\arctg \xi. \quad (3.99)$$

На резонансній частоті, коли  $\omega = \omega_0$ , а  $\xi = 0$ , маємо, що  $K_{U_R} = 1$ , а  $\varphi_R = 0$ .

Графіки всіх розглянутих амплітудно-частотних та фазочастотних характеристик приведені на рис 3.21.



Як видно із рис.3.21,а , напруги на реактивних елементах кола  $U_C$  та  $U_L$  досягають своїх максимальних значень на частотах  $\omega_c$  та  $\omega_L$ , які відрізняються від резонансної частоти  $\omega_0$ .

Для знаходження частот  $\omega_C$  та  $\omega_L$  необхідно дослідити вирази для характеристик  $K_{U_C}(\omega)$  та  $K_{U_L}(\omega)$  на екстремуми. При цьому необхідно знайти вирази для похідних  $\frac{dK_{U_C}(\omega)}{d\omega}$  та  $\frac{dK_{U_L}(\omega)}{d\omega}$ , а потім прирівняти їх до нуля. В результаті цього аналізу можна показати, що максимуми характеристик  $K_{U_C}(\omega)$  та  $K_{U_L}(\omega)$  мають місце на частотах

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_K^2}}; \omega_L = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2Q_K^2}}. \quad (3.100)$$

При цьому передатні АЧХ відносно напруг  $U_C$  та  $U_L$  мають однакові значення.

$$K_{U_{Cmax}} = K_{U_{Lmax}} = \frac{Q_K}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_K^2}}}. \quad (3.101)$$

Таким чином, із трьох розглянутих АЧХ лише характеристика  $K_{U_R}(\omega)$

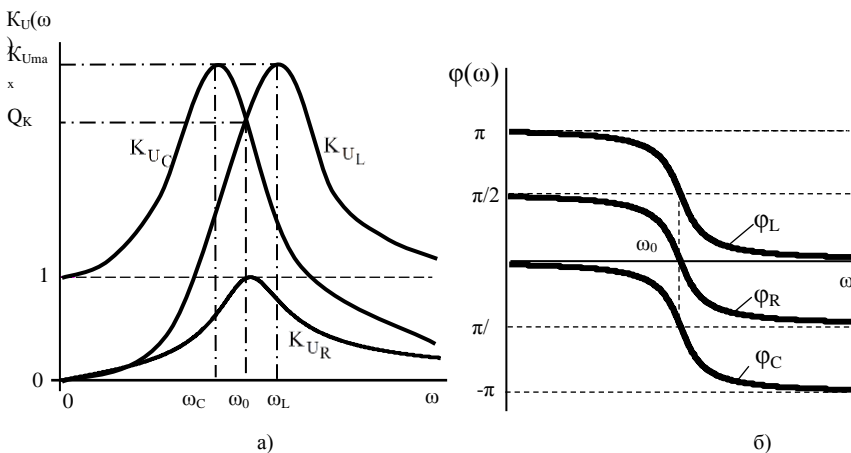


Рис.3.21. Передатні амплітудно-частотні (а) та фазочастотні (б) характеристики послідовного коливального контура

має максимум на резонансній частоті. Тобто, найбільш точно визначити момент резонансу в контурі можна лише зафіксувавши максимум струму в ньому, оскільки опір  $R$  не є елементом схеми, а лише характеризує втрати у контурі. Останнє означає, що вимірювання напруги  $U_R$  неможливе.

Величина зміщення частот  $\omega_c$  та  $\omega_L$  відносно частоти резонансу  $\omega_0$  залежить від добротності контура. Якщо добротність  $Q_k$  достатньо висока, то зміщення мале і можна вважати, що для високооборотних контурів, коли  $Q_k \geq 5$ .

$$\omega_L \approx \omega_c \approx \omega_0; K_{U_c} \approx K_{U_L} \approx Q_k \quad (3.102)$$

Для випадку малих розстройок, коли  $\omega \approx \omega_0$ , можна вважати, що

$$K_{U_c}(\omega) \approx K_{U_L}(\omega) \approx \frac{Q_k}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (3.103)$$

При цьому смуга пропускання може бути знайдена за допомогою будь-якої із амплітудно-частотних характеристик.

Відносно фазочастотних характеристик  $\varphi_c(\omega)$ ,  $\varphi_L(\omega)$ , та  $\varphi_R(\omega)$ , що є аргументами відповідних передатних комплексних частотних характеристик, можна стверджувати, що вони відрізняються одна від одної лише зсувом на  $\pi/2$  або на  $\pi$ .

На кінець слід зазначити, що в реальному послідовному коливальному контурі більш менш точно можна зафіксувати лише напругу  $U_C$ , а значить і одержати експериментально лише АЧХ та ФЧХ відносно напруги на ємності. Це пов'язано з тим, що опір втрат  $R$  в основному визначається активним опором дроту котушки індуктивності, тому вимірювання окремо напруг  $U_L$  та  $U_R$  здійснити неможливо.

### 3.3.5. Вибірні властивості послідовного коливального контура

Відомо, що частотно-вибірні властивості послідовного коливального контура багато в чому залежать від його добротності  $Q_k$  або оберненої до неї величини згасання  $d_k$ . Тому кількісними оцінками величини вибірності можуть служити сама добротність  $Q_k$  та смуга пропускання контура

$$\Delta\omega_k = \Pi_{0,707} = \frac{\omega_0}{Q_k} = \omega_0 d_k.$$

Слід також зауважити, що кількісно вибірність контура, як властивість придушувати завади, сильно залежить від крутості схилів його амплітудно-частотних та резонансних характеристик. Щоб врахувати цю обставину вводять поняття коефіцієнта прямокутності  $K_{\Pi}$ , який оцінюється за допомогою відношення смуги пропускання на рівні 0,707 від максимального значення амплітудно-частотної або резонансної характеристики до смуги пропускання контура на рівні 0,1 від максимального значення цих характеристик

$$K_{\Pi} = \frac{\Pi_{0,707}}{\Pi_{0,1}} = \frac{\Delta\omega_{к0,707}}{\Delta\omega_{к0,1}} \quad (3.104)$$

Чим ближчий коефіцієнт прямокутності до одиниці, тим вища якість контура як селективного пристрою.

Із виразу (3.98) видно, що при визначенні смуги пропускання на рівні 0,1 узагальнена розстройка  $\xi \approx 10$ . Тоді, виходячи з (3.75), маємо

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q_k \approx 10,$$

а ширина смуги пропускання

$$\Pi_{0,1} = 2\Delta\omega \approx 10 \frac{\omega_0}{Q_k} = 10\Pi_{0,707}.$$

Очевидно, що для послідовного коливального контура незалежно від його добротності коефіцієнт прямокутності  $K_{\Pi} \approx 0,1$ , тобто набагато менший за одиницю.

Ще однією кількісною оцінкою селективних властивостей контура є параметр, що називається – вибірність або селективність контура.

Вибірністю послідовного контура  $\sigma$  називається величина, що показує у скільки разів завада на частоті  $\omega_n$  послаблюється в порівнянні з корисним сигналом на частоті  $\omega_c$  при умові, що амплітуда сигналу та завади однакові, а частота корисного сигналу співпадає з резонансною частотою контура  $\omega_0$ . У відповідності з цим визначенням вибірність послідовного коливального контура дорівнює

$$\sigma = \frac{I_c}{I_n} = \frac{E/R}{E/R\sqrt{(1+\xi_n^2)}} = \sqrt{1+\xi_n^2}, \quad (3.105)$$

де  $\xi_n$  - узагальнена розстройка контура на частоті завади.

Очевидно, що вибірність послідовного контура зростає, якщо збільшується його добротність  $Q_k$  та величина абсолютної розстройки контура відносно частоти перешкоди  $\Delta\omega = \omega_n - \omega_0$ .

Параметри контура, що, визначають його селективні властивості суттєво змінюються з урахуванням впливу на нього навантаження та внутрішнього опору джерела зовнішнього сигналу. Однак це не стосується коефіцієнта прямокутності, оскільки він не залежить від добротності.

### **3.3.5.1 Вплив внутрішнього опору джерела на частотно-вибірні властивості послідовного коливального контура**

Одержані раніше частотні і резонансні входні та передатні характеристики одержані для випадку, коли живлення контура здійснюється

від ідеалізованого джерела напруги, яке, як відомо, має нульовий внутрішній опір та незмінну величину ЕРС.

Реально контур живиться від джерела напруги, яке має скінченний внутрішній опір  $R_i$ , що може суттєво вплинути на вибірні властивості кола.

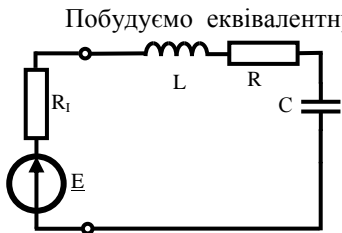


Рис.3.22.Послідовний контур, що живиться від реального джерела ЕРС

Побудуємо еквівалентну схему послідовного коливального контура з урахуванням реального джерела ЕРС, що може бути представлене послідовною еквівалентною схемою (рис.3.22). У загальному випадку внутрішній опір джерела може бути комплексним, однак будемо вважати його чисто активним. враховуючи, що деякою зміною ємності або індуктивності контура можна скомпенсувати реактивну складову цього опору.

Приведену еквівалентну схему можна розглядати як еквівалентну схему коливального контура, що має еквівалентний активний опір втрат  $R_e = R + R_i$  та живиться від ідеалізованого джерела ЕРС  $\underline{E}$ .

До цього контура можна застосувати всі одержані раніше результати. Наприклад, еквівалентна добротність приведенного на рис.3.21 контура, дорівнює

$$Q_{ке} = \frac{\rho}{R + R_i} = \frac{Q_k}{1 + \frac{R_i}{R}}. \quad (3.106)$$

Оскільки добротність  $Q_{ке}$ , що враховує внутрішній опір джерела  $R_i$ , менша, ніж добротність контура, який живиться від ідеалізованого джерела, то це означає, що в першому випадку вибірність кола гірша.

При цьому смуга пропускання може бути оцінена за допомогою виразу

$$\Delta\omega_{ке} = \frac{\omega_o}{Q_{ке}} = \frac{\omega_o}{Q_k} \left(1 + \frac{R_i}{R}\right), \quad (3.107)$$

або інакше

$$\Delta\omega_{ке} = \Delta\omega_k \left(1 + \frac{R_i}{R}\right). \quad (3.108)$$

Очевидно, що наявність у джерела скінченного внутрішнього опору  $R_i$  приводить до розширення смуги пропускання контура, який підключається до цього джерела.

Вибірність контура  $\sigma$  у цьому випадку знижується, оскільки при заданих частотах сигналу  $\omega_c = \omega_o$  та завади  $\omega_n$  значно зменшується узагальнена розстройка  $\xi_n$  через зниження величини добротності. Для оцінки вибірності можна скористатись виразом

$$\sigma = \sqrt{1 + \xi_{пе}^2} = \sqrt{1 + Q_{ке}^2 \left( \frac{\omega_{п}}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_{п}} \right)^2}. \quad (3.109)$$

Отже, чим більший внутрішній опір джерела зовнішнього колювання, тим менша еквівалентна добротність контура і гірші його вибірні властивості.

Таким чином, щоб зберегти високу вибірність послідовного колювального контура, необхідно забезпечити йому такі умови роботи, коли внутрішній опір джерела сигналу буде набагато меншим, ніж опір втрат контура, тобто  $R_i \ll R$ . Всі одержані раніше вирази для частотних характеристик контура залишаються справедливими, однак в них замість добротності контура  $Q_k$  слід використовувати еквівалентну добротність  $Q_{ке}$ .

### 3.3.5.2 Способи підключення навантаження до послідовного колювального контура

Розглянемо можливі варіанти підключення до послідовного колювального контура навантаження у вигляді активного опору  $R_H$ . Цей опір можна включити в контур послідовно, підключити до контура паралельно, або включити його паралельно до одного з двох елементів контура.

В першому випадку (рис.3.23) вплив навантаження  $R_H$  на параметри та вибірні властивості контура будуть такі ж самі, як і вплив на них внутрішнього опору джерела сигналу. Дійсно, для добротності та смуги пропускання навантаженого контура одержимо

$$Q_{ке} = \frac{\rho}{R + R_i + R_H} = \frac{Q_k}{1 + \frac{R_i}{R} + \frac{R_H}{R}}; \quad (3.110)$$

$$\Delta\omega_{ке} = \frac{\omega_o}{Q_{ке}} = \Delta\omega_k \left( 1 + \frac{R_i}{R} + \frac{R_H}{R} \right). \quad (3.111)$$

Резонансна частота контура залишиться незмінною. На цій частоті передатна АЧХ відносно напруги на навантаженні  $R_H$  буде мати максимальне значення і дорівнюватиме

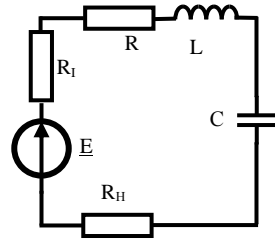


Рис.3.23. Еквівалентна схема контуру з послідовним підключенням навантаження

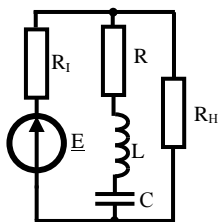


Рис.3.24.Коливальний контур з паралельним навантаженням

$$K_{U_{R_n}}(\omega_0) = \frac{R_n}{R + R_i + R_n}. \quad (3.112)$$

Щоб зменшити негативний вплив навантаження на якість контура значення опору  $R_n$  повинно бути сумірним з опором  $R$  та  $R_i$ , тому значення коефіцієнта  $K_{U_{R_n}}$  звичайно на багато менше за одиницю.

Якщо ж навантаження  $R_n$  підключити паралельно послідовному коливальному контуру (рис.3.24), то на резонансній частоті  $\omega_0$  передатна АЧХ відносно напруги на навантаженні буде мати найменше значення. Дійсно, на резонансній частоті  $\omega_0$

$$K_{U_{R_n}}(\omega_0) = \frac{U_{R_n}}{E} = \frac{I \cdot R \parallel R_n}{I(R_i + R \parallel R_n)}; \quad R \parallel R_n = \frac{R \cdot R_n}{R_n + R}.$$

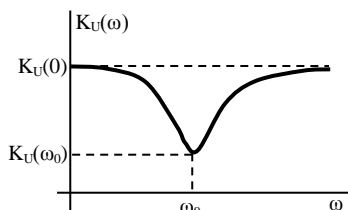


Рис.3.25. АЧХ кола з паралельним підключенням навантаження до контура

Після нескладних перетворень одержимо, що

$$K_{U_{R_n}}(\omega_0) = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_n} + \frac{R_i}{R}}, \quad (3.113)$$

На низьких частотах, коли  $\omega \rightarrow 0$

$$K_{U_{R_n}}(0) \approx \frac{R_n}{R_i + R_n} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_n}}, \quad (3.114)$$

і таке ж значення має передатна АЧХ у випадку, коли  $\omega \rightarrow \infty$  (рис.3.25).

У даному випадку маємо ефект придушення сигналу з резонансною частотою на опорі  $R_n$ .

Щоб ефект вибірності був добре вираженим опір навантаження  $R_n$  треба вибирати сумірним з внутрішнім опором  $R_i$  і набагато більшим ніж опір втрат контура  $R$ .

В останньому з трьох варіантів підключення опору навантаження його можна з'єднати паралельно з одним із елементів схеми контура.

Нехай опір навантаження  $R_n$  підключений паралельно конденсатору, властивості якого ближчі до властивостей ідеального елемента і аналіз в цьому випадку простіший і точніший. Тоді еквівалентна

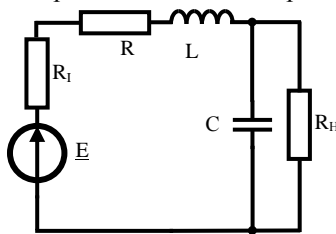


Рис.3.26.Еквівалентна схема коливального контура з навантаженням, підключеним до реактивного елемента

схема кола мати-ме вигляд як на рис. 3.26.

Для оцінки параметрів коливального контура в схемі на рис.3.26 здійснимо еквівалентне перетворення паралельного з'єднання ємності  $C$  та навантаження  $R_H$  в послідовне. Для цього знайдемо комплексний опір з'єднання на резонансній частоті  $\omega_{01}$  цього контура.

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R_H} + j\omega_{01}C} = \frac{R_H}{1 + j\omega_{01}CR_H} = \frac{R_H(1 - j\omega_{01}CR_H)}{1 + \omega_{01}^2 R_H^2 C^2}. \quad (3.115)$$

Очевидно, що розглянуте паралельне з'єднання елементів  $C$  та  $R_H$  на резонансній частоті еквівалентне послідовному з'єднанню елементів з активним опором

$$R_{He} = \frac{R_H}{1 + \omega_{01}^2 C^2 R_H^2} = \frac{R_H}{1 + \frac{R_H^2}{\rho^2}}, \quad (3.116)$$

та реактивним опором

$$X_{ce} = -\frac{\omega_{01}R_H^2C}{1 + \omega_{01}^2 C^2 R_H^2} = -\frac{\frac{R_H^2}{\rho}}{1 + \frac{R_H^2}{\rho^2}}. \quad (3.117)$$

Еквівалентна схема контура з урахуванням здійсненого перетворення має вигляд послідовного кола (рис. 3.27), резонансна частота  $\omega_{01}$  якого може бути знайдена із виразу

$$X_L + X_{Ce} = 0$$

або

$$\omega_{01}L - \frac{\omega_{01}R_H^2C}{1 + \omega_{01}^2 C^2 R_H^2} = 0 \quad (3.118)$$

Якщо (3.118) привести до спільного знаменника та врахувати, що

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2}, \text{ а } \frac{L}{C} = \rho^2, \text{ то одержимо}$$

$$\omega_{01} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{L}{CR_H^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_H^2}}. \quad (3.119)$$

Для того, щоб опір навантаження мало впливав на добротність ємності і контура в цілому, треба виконати умову  $R_H \gg \rho$ . Тоді можна бачити, що  $\omega_{01} \approx \omega_0$ ,  $X_{ce} \approx -\rho$ , а  $C_e \approx C$ .

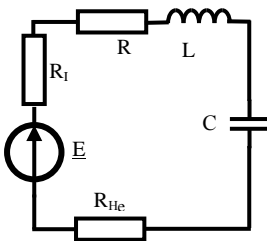


Рис.3.27.Еквівалентна послідовна схема контура

У цьому випадку активний опір  $R_{не}$ , внесений у послідовну еквівалентну схему на рис.3.27, завдяки підключенню навантаження  $R_H$  паралельно ємності  $C$  дорівнюватиме

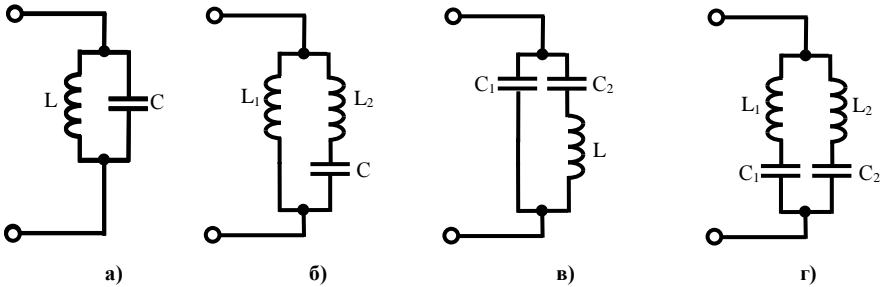


Рис.3.28. Електричні схеми паралельних коливальних контурів

$$R_{не} \approx \frac{\rho^2}{R_H}. \quad (3.120)$$

В результаті для добротності навантаженого контура одержимо

$$Q_{ке} = \frac{\rho}{R + R_i + R_{не}} = \frac{\rho}{R \left(1 + \frac{R_i}{R} + \frac{\rho^2}{R_H \cdot R}\right)} = \frac{Q_k}{1 + \frac{R_i}{R} + Q_k^2 \frac{R}{R_H}}. \quad (3.121)$$

А для смуги пропускання

$$\Delta\omega_{ке} \approx \frac{\omega_0}{Q_{ке}} = \Delta\omega_k \left(1 + \frac{R_i}{R} + Q_k^2 \frac{R}{R_H}\right). \quad (3.122)$$

Тобто і в цьому випадку наявність опору навантаження  $R_H$  знижує якість контура і погіршує його вибірні властивості. Цей негативний вплив опору  $R_H$  буде тим більший, чим менша його величина.

### 3.4.Паралельний коливальний контур

#### 3.4.1.Визначення, види та еквівалентна схема паралельного коливального контура

Паралельним коливальним контуром називається коло, яке включає котушку індуктивності та конденсатор або їх послідовні з'єднання, що включені паралельно вхідним затискачам. До цих затискачів можуть бути підключені джерело зовнішніх коливань або інші елементи кола.

Розрізняють простий паралельний коливальний контур або контур першого виду (рис.3.28,а), а також складні паралельні контури другого (рис.3.28,б), третього (рис.3.28,в) та четвертого (рис.3.28,г) видів, в яких індуктивності та ємності реактивних елементів розподілені між вітками кола.



Для одержання еквівалентних схем паралельних контурів слід врахувати втрати у їх вітках. В результаті спільна для всіх контурів еквівалентна схема (рис.3.29) включає опори втрат у вітках  $R_1$  та  $R_2$  і реактивні опори  $X_1$  та  $X_2$ .

Для будь-якого із паралельних коливальних контурів комплексні опори паралельних віток можна записати у вигляді

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1; \quad \underline{Z}_2 = R_2 + jX_2.$$

Реактивні опори  $X_1$  та  $X_2$  паралельних віток коливальних контурів повинні мати протилежний характер, оскільки тільки в цьому випадку в схемі можливий резонансний процес, який охоплює обидві вітки контура.

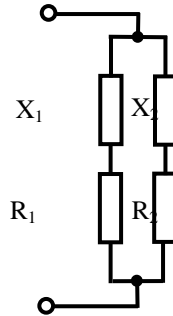


Рис.3.29. Узагальнена еквівалентна схема паралельного контура

### 3.4.2. Еквівалентний опір паралельного коливального контура та умови резонансу

Одним з найважливіших параметрів паралельного коливального контура є його еквівалентний опір

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (3.123)$$

Помножимо чисельник та знаменник виразу (3.123) на величину  $\underline{Z}_1^* + \underline{Z}_2^*$ , де  $\underline{Z}_1^*$  та  $\underline{Z}_2^*$  - опори комплексно-спряжені до опорів віток. Тоді

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 (\underline{Z}_1^* + \underline{Z}_2^*)}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \cdot (\underline{Z}_1^* + \underline{Z}_2^*)} = \frac{Z_1^2 \cdot \underline{Z}_2 + Z_2^2 \cdot \underline{Z}_1}{|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2|^2}. \quad (3.124)$$

Оскільки опори віток  $\underline{Z}_1$  та  $\underline{Z}_2$  величини комплексні, то й еквівалентний опір паралельного контура також комплексний і може бути записаний у вигляді

$$\underline{Z}_e = R_e + jX_e = \frac{R_2 Z_1^2 + R_1 Z_2^2}{|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2|^2} + j \frac{X_2 Z_1^2 + X_1 Z_2^2}{|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2|^2}. \quad (3.125)$$

В паралельному коливальному контурі, як і в розглянутому раніше паралельному RLC - колі, можливий резонанс струмів, сутність якого полягає у тому, що при деякому значенні частоти зовнішнього коливання струм у нерозгалуженій частині кола співпадає за фазою з прикладеною до контура напругою. Це означає, що опір контура носить активний характер і його реактивна складова дорівнює нулю, незважаючи на наявність у колі реактивних елементів. Тобто умова резонансу має вигляд

$$X_2 Z_1^2 + X_1 Z_2^2 = X_2 (R_1^2 + X_1^2) + X_1 (R_2^2 + X_2^2) = 0. \quad (3.126)$$

Вираз (3.126) підтверджує, що резонанс у паралельному контурі будь-якого виду можливий лише у разі різного характеру реактивних опорів  $X_1$  та  $X_2$ .

Якщо частота сигналу близька до резонансної, а контур високодобротний, то виконуються умови

$$|X_1| \gg R_1, \text{ а } |X_2| \gg R_2.$$

При цьому умова резонансу приймає вигляд

$$X_1^2 \cdot X_2 + X_2^2 \cdot X_1 = X_1 \cdot X_2 (X_1 + X_2) = 0 \quad (3.127)$$

Рівняння (3.127) може виконуватися у двох випадках

$$X_1 + X_2 = 0; \quad X_1 \cdot X_2 = 0 \quad (3.128)$$

Перше з рівнянь (3.128) характеризує умови резонансу у паралельному контурі будь-якого виду, тобто резонансу струмів, а друге – умови резонансу у двоелементних вітках складних контурів, тобто резонансу напруг.

Останній випадок докладно розглянутий при аналізі послідовного коливального контура, тому зупинимося лише на випадку паралельного резонансу стосовно до найбільш загальної схеми паралельного коливального контура четвертого виду (див. рис. 3.28, г). У цьому контурі

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}; \quad X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}.$$

Тоді значення частоти паралельного резонансу  $\omega_p$  можна знайти з рівняння

$$X_1 + X_2 = \omega_p (L_1 + L_2) - \frac{1}{\omega_p} \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \right) = 0. \quad (3.129)$$

Тобто

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}}}. \quad (3.130)$$

Якщо врахувати, що

$$L_1 + L_2 = L \text{ та } \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = C - \text{ це повні значення індуктивності та}$$

ємності, одержані при послідовному обході контура, то очевидно, що у паралельному коливальному контурі будь-якого виду резонансна частота  $\omega_p$  співпадає з частотою послідовного резонансу  $\omega_0$  при послідовному обході контура і не залежить від розподілу індуктивності  $L$  та ємності  $C$  між вітками.

Характеристичний опір  $\rho$  та добротність паралельного контура будь-якого виду, як і послідовного, визначається повною індуктивністю  $L$ , повною ємністю  $C$  та сумарним опором втрат  $R = R_1 + R_2$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad Q_k = \frac{\rho}{R_1 + R_2} = \frac{\rho}{R}. \quad (3.131)$$

У разі більш точного аналізу слід врахувати, що на відміну від послідовного контура основна резонансна частота будь-якого паралельного контура залежить від активних опорів віток  $R_1$  та  $R_2$ . Подібне явище мало місце при підключенні активного опору навантаження  $R_n$  паралельно одному із елементів послідовного контура та паралельно всьому контуру.

Продемонструємо вплив на резонансну частоту опорів втрат віток на прикладі контура першого виду (див. рис.3.28,а). Для цього скористаємось виразом (3.126)

$$\frac{1}{\omega_p C} (R_1^2 + \omega_p^2 L) = \omega_p L \left( R_2^2 + \frac{1}{\omega_p^2 C^2} \right);$$

$$R_1^2 + \omega_p^2 L \cdot \frac{C}{C} = \omega_p^2 LC \left( R_2^2 + \frac{1}{\omega_p^2 C^2} \right).$$

Якщо скористатись виразами для частоти  $\omega_0$  послідовного резонансу та характеристичного опору  $\rho$ , то одержимо

$$R_1^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \cdot \rho^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} (R_2^2 + \rho^2).$$

Звідки маємо

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = \frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}; \quad \omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (3.132)$$

Очевидно, що в загальному випадку частота паралельного резонансу  $\omega_p$  відрізняється від частоти послідовного резонансу  $\omega_0$  при однакових значеннях параметрів реактивних елементів. В радіотехнічних високо-добротних контурах звичайно виконуються умови  $R_1 \ll \rho$  та  $R_2 \ll \rho$ ,

тому можна вважати, що  $\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

### 3.4.3. Еквівалентний опір паралельного коливального контура при резонансі

У випадку, коли частота зовнішньої напруги  $\omega$  співпадає з резонансною частотою паралельного контура, то еквівалентний опір останнього буде чисто активним. Із виразу (3.125) виходить, що

$$\underline{Z}_{ep} = R_{oe} = \frac{R_2(R_1^2 + X_{1p}^2) + R_1(R_2^2 + X_{2p}^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_{1p} + X_{2p})^2}, \quad (3.133)$$

де  $X_{1p}$  та  $X_{2p}$  - реактивні опори віток контура на резонансній частоті  $\omega_p$ .

Для високочастотного контура  $|X_{1p}| \gg R_1, |X_{2p}| \gg R_2$ , а при настроюванні в резонанс  $X_{1p} = -X_{2p}$  і  $X_{1p}^2 = X_{2p}^2$ . Тоді  $(X_{1p} + X_{2p}) = 0$  і для активного еквівалентного опору  $R_{oe}$  паралельного контура одержимо наближене співвідношення

$$R_{oe} \approx \frac{X_{1p}^2}{R} = \frac{X_{2p}^2}{R}. \quad (3.134)$$

Еквівалентний опір контура на резонансній частоті в багато разів більший за опір втрат і може досягати величини десятків і навіть сотень кілоом. Якщо вважати контур ідеальним, то опір втрат  $R = 0$  і еквівалентний опір  $R_{oe} \rightarrow \infty$ . В цьому випадку контур еквівалентний розриву електричного кола і не споживає енергії від джерела.

У простому контурі

$$X_{1p} = \omega_p L \approx \omega_o L = \rho; \quad X_{2p} = -\frac{1}{\omega_p C} \approx -\frac{1}{\omega_o C} = -\rho, \quad (3.135)$$

а еквівалентний опір

$$R_{oe} \approx \frac{\rho^2}{R} = Q_k^2 \cdot R = \rho Q_k. \quad (3.136)$$

У випадку складних паралельних контурів вводять поняття коефіцієнта включення, який дорівнює відношенню абсолютного значення реактивного опору однієї із віток при резонансі до характеристичного опору контура

$$\rho = \frac{|X_{1p}|}{\rho} = \frac{|X_{2p}|}{\rho}, \quad (3.137)$$

Виходячи із властивостей подільника напруги можна стверджувати, що коефіцієнт включення - це відношення напруги на одній із віток контура при резонансі до напруги на повній індуктивності або на повній ємності контура в цих умовах

$$p = \frac{U_{1p}}{U_{cp}} = \frac{U_{2p}}{U_{cp}} = \frac{U_{1p}}{U_{Lp}} = \frac{U_{2p}}{U_{Lp}}.$$

Якщо врахувати співвідношення (3.135), то очевидно, що для простого контура коефіцієнт включення  $p_1 = 1$ , а для складних контурів він завжди менший за одиницю.

У відповідності з визначенням для контура другого виду

$$p_2 = \frac{\omega_p L_1}{\omega_p (L_1 + L_2)} = \frac{L_1}{L}. \quad (3.138)$$

Для контура третього виду

$$p_3 = \frac{1}{\omega_p C_1} \cdot \frac{\omega_p \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}}{1} = \frac{C}{C_1}. \quad (3.139)$$

Для контура четвертого виду

$$p_4 = \frac{\left| \left( \omega_p L_1 - \frac{1}{\omega_p C_1} \right) \right|}{\omega_p (L_1 + L_2)} = \left| \frac{L_1}{L} - \frac{C}{C_1} \right| = |p_2 - p_3|. \quad (3.140)$$

На основі виразів (3.134) та (3.136) для еквівалентного опору складного контура на резонансній частоті одержимо

$$R_{\text{оескл}} = \frac{X_{1p}^2}{R} \cdot \frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{X_{1p}^2}{\rho^2} \cdot \frac{\rho^2}{R} = p^2 R_{\text{ое}}. \quad (3.141)$$

Змінюючи коефіцієнт включення контура  $p$  шляхом перерозподілу індуктивності або ємності між вітками, можна в широких границях регулювати еквівалентний опір складного контура. Це використовується для узгодження контура з відомим опором навантаження або внутрішнім опором джерела енергії. При цьому вторинні параметри контура добротність  $Q_k$ , характеристичний опір  $\rho$  та резонансна частота  $\omega_p$  залишаються незмінними.

#### 3.4.4. Струми паралельного коливального контура при резонансі

Якщо до паралельного контура першого виду підключити джерело гармонічної напруги  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , то в разі резонансу, коли  $\omega = \omega_p$ , струм у нерозгалуженій частині кола дорівнює

$$I_p = \frac{U}{R_{\text{ое}}} = \frac{U \cdot e^{j\psi_u}}{R_{\text{ое}}}.$$

Якщо початкова фаза зовнішньої напруги  $\psi_u = 0$ , то

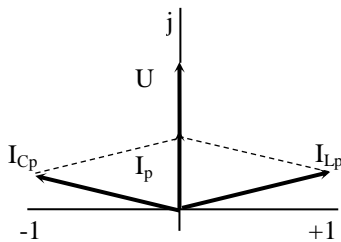


Рис.3.30. Векторна діаграма паралельного контура при резонансі

$$I_p = I_p = \frac{U}{R_{oc}} = \frac{U}{\rho Q_K}. \quad (3.142)$$

У ідеального контура  $Q_K \rightarrow \infty$  і струм  $I_p \rightarrow 0$ .

У цьому випадку струми у вітках однакові за величиною і протилежні за знаком. Дійсно

$$I_{Lp} \approx \frac{U}{j\omega_p L} = \frac{U}{\rho} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (3.143)$$

$$I_{Cp} \approx U \cdot j\omega_p C = \frac{U}{\rho} e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

Якщо ж контур не ідеальний, то для струмів у вітках одержимо

$$I_{Lp} = \frac{U}{R_1 + j\rho} = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + \rho^2}} e^{-j\arctg \frac{\rho}{R_1}}; \quad (3.144)$$

$$I_{Cp} = \frac{U}{R_2 + j\rho} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + \rho^2}} e^{-j\arctg \frac{\rho}{R_2}}.$$

Оскільки відомо, що  $\arctg X + \arctg \frac{1}{X} = \frac{\pi}{2}$ , а для високодобротного контура, коли  $R \ll \rho$ ,  $\arctg \frac{R}{\rho} \approx \frac{R}{\rho}$ , то вирази (3.144) можна замінити приблизними співвідношеннями

$$I_{Lp} \approx \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + \rho^2}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{R_1}{\rho}\right)}; \quad I_{Cp} \approx \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + \rho^2}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{R_2}{\rho}\right)}. \quad (3.145)$$

Таким чином, у реальному контурі зсув фаз між струмами у вітках дещо менший від  $\pi$

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{R_1 + R_2}{\rho}, \quad (3.146)$$

а величини резонансних струмів віток менші, ніж струм контура в ідеальному випадку. Струм в нерозгалуженій частині кола  $I_p$  співпадає за фазою з прикладеною напругою і дуже малий, оскільки енергія джерела витрачається лише на поповнення втрат у контурі. Векторна діаграма, що

відображає розглянуті співвідношення приведена на рис.3.30. Оскільки радіотехнічні контури, як правило, високодобротні, то з достатньою для практики точністю можна вважати, що струм контура при резонансі

$$I_{кр} = I_{Lp} = I_{Cp} \approx \frac{U}{\rho}. \quad (3.147)$$

Якщо врахувати (3.136) та (3.142), то будемо мати

$$I_{кр} \approx \frac{U}{R_{oe}} \cdot Q_k = I_p Q_k. \quad (3.148)$$

Як видно із виразу (3.148), струми у вітках простого паралельного контура приблизно в добротність  $Q_k$  разів більші від струму в його нерозгалуженій частині, тобто  $I_{кр} / I_p \approx Q_k$ .

Для складних контурів треба врахувати величину коефіцієнта включення  $p$ . Тоді для відношення внутрішнього та зовнішнього струмів складного контура одержимо

$$\frac{I_{кр}}{I_p} = \frac{U / |X_{1,2p}|}{U / R_{оескл}} = \frac{R_{оескл}}{|X_{1,2p}|} = \frac{p^2 R_{oe}}{|X_{1,2p}|}, \quad (3.149)$$

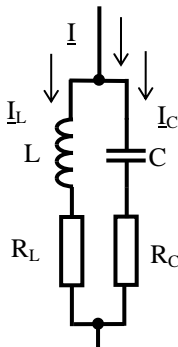
Якщо врахувати (3.136) та (3.137), то остаточно одержимо

$$\frac{I_{кр}}{I_p} = p Q_k. \quad (3.150)$$

Очевидно, що відношення струму в контурі та струму в нерозгалуженій частині складного контура не тільки менше, ніж у простому контурі, але й може змінюватися шляхом регулювання коефіцієнта включення  $p$ .

### 3.4.5. Вхідні частотні та резонансні характеристики паралельного коливального контура першого виду

І частотні, і резонансні вхідні характеристики паралельного контура першого виду (рис.3.31) можна одержати на основі його вхідної комплексної частотної характеристики



$$Z_{вх}(j\omega) = \frac{(R_L + j\omega L) \cdot \left( R_C + \frac{1}{j\omega C} \right)}{(R_L + R_C) + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}. \quad (3.151)$$

Для високодобротного контура поблизу резонансної частоти  $R_L \ll \omega L$  і

Рис.3.31. Еквівалентна схема паралельного контура першого виду

$R_C \ll \frac{1}{\omega C}$ . Тому для еквівалентного опору одержимо

$$Z_e(j\omega) \approx \frac{L/C}{R_L + R_C + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Або інакше

$$Z_e(j\omega) = \frac{\rho^2}{R\left(1 + jQ_k\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)} = \frac{R_{oe}}{1 + j\xi}, \quad (3.152)$$

де  $R = R_L + R_C$  - сумарний опір втрат контура.

Для амплітудно-частотної та фазочастотної характеристик простого паралельного контура одержимо

$$Z_e(\omega) = \frac{R_{oe}}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad \varphi_e(\omega) = -\arctg \xi. \quad (3.153)$$

Якщо відносна розстройка  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$ , то маємо приблизні

співвідношення

$$Z_e(\omega) \approx \frac{R_{oe}}{\sqrt{1 + \left(2Q_k \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}; \quad \varphi_e(\omega) \approx -\arctg\left(2Q_k \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right).$$

На рис.3.32 приведені вхідні частотні характеристики простого контура, побудовані згідно з виразами (3.153). Іноді розглядають нормовану вхідну амплітудно-частотну характеристику контура

$$\frac{Z_e(\omega)}{R_{oe}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2Q_k \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}.$$

Неважко бачити, що вона являє собою граничну резонансну криву, яка вже була нами отримана в процесі аналізу послідовного коливального контура. Слід зазначити, що на відміну від послідовного контура, який на резонансній частоті має мінімальний вхідний опір паралельний контур на резонансній частоті має максимум

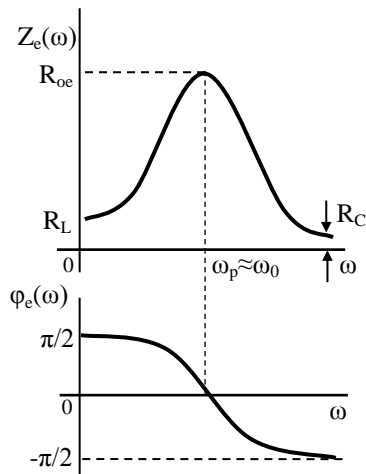


Рис. 3.32. Вхідні частотні характеристики простого паралельного коливального контура



вхідного опору. Різні знаки на однакових частотах мають також фазові зсуви між напругою та струмом в послідовному та пара-лельному контурах.

Якщо добротність паралельного контура підвищується, то його опір на резонансній частоті збільшується, смуга пропускання звужується, а крутизна фазочастотної характеристик зростає.

Якщо контур живиться від джерела струму близького до ідеального, то еквівалентний опір визначає діючу на контурі напругу

$$U_K(\omega) = I_r Z_e(\omega).$$

Якщо ж контур живиться від ідеального джерела напруги, то еквівалентний опір визначає струм, який споживає контур

$$I(\omega) = \frac{E_r}{Z_e(\omega)}.$$

Таким чином, у першому випадку резонансну частоту контура можна зафіксувати лише по максимуму напруги на контурі, а в другому – по мінімуму струму в нерозгалуженій частині кола. Отже в залежності від властивостей джерела сигналу як вхідну резонансну характеристику використовують або залежність  $U_K(\omega)$ , або залежність  $I(\omega)$ .

#### **3.4.6. Передатні частотні характеристики паралельного коливального контура першого виду**

Оскільки напруги на паралельних вітках розглядаемого контура першого виду однакові, то його комплексні передатні частотні характеристики визначаються відносно струмів у вітках  $I_L$  та  $I_C$ . Вони характеризуються відношенням струму в одній із віток контура до струму в нерозгалуженій частині кола.

Наприклад, для струму в індуктивній вітці контура, якщо  $R_L \ll \omega L$  (рис.3.31), маємо

$$I_L \approx \frac{U}{jX_L}.$$

Оскільки струм в нерозгалуженій частині кола визначається співвідношенням

$$I = \frac{U}{Z_e(j\omega)},$$

то передатна характеристика відносно струму в індуктивній вітці дорівнює

$$K_{I_L}(j\omega) = \frac{I_L}{I} \approx \frac{Z_e(j\omega)}{j\omega L} = \frac{R_{oc}}{(1 + j\xi)} \cdot \frac{1}{j\omega L}. \quad (3.154)$$

Якщо у виразі (3.154) чисельник та знаменник домножити на  $\omega_0$ , а також врахувати співвідношення (3.135) та (3.136), для шуканої передатної комплексної частотної характеристики одержимо

$$K_{I_L}(j\omega) = -jQ_k \cdot \frac{1}{1+j\xi} \cdot \frac{\omega_o}{\omega}, \quad (3.155)$$

а в показниковій формі

$$K_{I_L}(j\omega) = \frac{\omega_o}{\omega} \cdot \frac{Q_k}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \arctg \xi\right)}. \quad (3.156)$$

Ці вирази повністю співпадають з виразами для передатної комплексної частотної характеристики відносно напруги на ємності послідовного коливального контура.

Неважко показати, що передатна характеристика паралельного контура відносно струму в ємнісній вітці буде аналогічна передатній характеристиці  $K_{U_L}(j\omega)$  послідовного контура. Тобто

$$K_{I_C}(j\omega) = \frac{\omega}{\omega_o} \cdot \frac{Q_k}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \xi\right)}. \quad (3.157)$$

Скориставшись виразом (3.156), можна знайти передатну амплітудно-частотну та відповідну фазочастотну характеристики паралельного коливального контура відносно струму в індуктивній вітці

$$K_{I_L}(j\omega) = \frac{\omega_o}{\omega} \cdot \frac{Q_k}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad \varphi_L(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \xi. \quad (3.158)$$

Аналогічно на основі (3.157) для амплітудно-частотної та фазочастотної характеристик відносно струму в ємнісній вітці одержимо

$$K_{I_C}(\omega) = \frac{\omega}{\omega_o} \cdot \frac{Q_k}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad \varphi_C(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \xi. \quad (3.159)$$

Очевидно, що амплітудно-частотні характеристики  $K_{I_L}(j\omega)$  та  $K_{I_C}(j\omega)$  мають графіки, вигляд яких аналогічний до вигляду характеристик  $K_{U_C}(\omega)$  та  $K_{U_L}(\omega)$  відповідно (див. рис.3.21,а). На резонансній частоті  $\omega_o$  вони мають значення, що дорівнює добротності  $Q_k$ . Це означає, що при резонансі струми у вітках в  $Q_k$  разів більші ніж сумарний струм кола  $I_p$ . Максимуми розглянутих АЧХ зсунуті відносно резонансної частоти і тому настроювання контура в резонанс по максимуму струмів у вітках не буде точним. Точніше це можна зробити, фіксуючи максимум напруги на контурі при його живленні від джерела струму, або мінімум струму в нерозгалуженій частині кола при живленні контура від джерела ЕРС.

Аналіз фазочастотних характеристик паралельного контура  $\varphi_L(\omega)$  та  $\varphi_C(\omega)$  показує, що на будь-якій частоті різниця фаз між струмами у вітках

дорівнює  $\pi$ . Однак, це лише у випадку нехтування опорами втрат у вітках, реально цей зсув фаз дещо менший (див. розд. 3.5.4).

Величина смуги пропускання паралельного контура, як і послідовного, може бути знайдена за допомогою будь-якої з амплітудно-частотних характеристик, виходячи з того, що на граничних частотах цієї смуги узагальнена розстройка  $\xi = \pm 1$ .

Якщо врахувати, що при малих абсолютних розстройках  $\xi \approx 2Q_k \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ ,

то величину смуги пропускання можна знайти із співвідношення

$$\Delta\omega_k = 2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_k}. \quad (3.160)$$

Це співвідношення співпадає з тим, яке використовується для знаходження смуги пропускання послідовного коливального контура. Точно таким же чином, як і для послідовного, знаходять для паралельного коливального контура коефіцієнт прямокутності та вибірність. Однак в останньому випадку під вибірністю розуміють відношення струмів корисного сигналу та перешкоди тільки у випадку живлення паралельного коливального контура від джерела ЕРС. Якщо ж контур живиться від джерела струму, то вибірність характеризується відношенням спадів напруг, які створюють корисний сигнал та перешкода на контурі.

### ***3.4.7. Вхідні частотні характеристики складних паралельних коливальних контурів***

В складних паралельних коливальних контурах (рис.3.28) окрім основного паралельного резонансу можуть виникати і додаткові послідовні резонанси в окремих вітках, які мають в своєму складі послідовні з'єднання реактивних елементів різного характеру. Частоти послідовних резонансів в основному визначаються параметрами індуктивності та ємності вітки і мало залежить від параметрів елементів іншої вітки контура.

Зокрема, для складного контура другого виду (рис.3.28,б) частота резонансу напруг в другій вітці може бути визначена

$$\omega_{o2} \approx \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} = \frac{1}{\sqrt{LC \cdot \frac{L_2}{L}}} \approx \omega_p \frac{1}{\sqrt{\frac{L-L_1}{L}}}. \quad (3.161)$$

Якщо врахувати (3.133), то остаточно для частоти  $\omega_{o2}$  одержимо

$$\omega_{o2} \approx \frac{\omega_p}{\sqrt{1-p_2}}. \quad (3.162)$$

Оскільки коефіцієнт включення  $p_2 < 1$ , то частота послідовного резонансу  $\omega_{o2} > \omega_p$ . Очевидно, що на цій частоті еквівалентний опір контура

має мінімальне значення, оскільки він визначається опором втрат другої вітки  $R_2$ . До цього треба додати, що на частоті  $\omega = 0$  опір контура теж малий і визначається опором втрат першої вітки  $R_1$ .

На частоті основного (паралельного) резонансу еквівалентний опір розглядаемого контура дорівнює

$$Z_e(\omega_p) = \frac{(\omega_p L_1)^2}{R_1 + R_2} \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R} \left( \frac{L_1}{L} \right)^2 = p_2^2 \frac{\rho^2}{R} = p_2^2 R_{oe}. \quad (3.163)$$

Як видно із виразу (3.163), резонансний опір контура другого виду менший ніж аналогічний опір контура першого виду, але, як і опір останнього, досягає максимального значення.

Отже, поблизу частоти послідовного резонансу складний контур поводить себе як простий послідовний контур, а поблизу частоти паралельного резонансу – як простий паралельний контур. Виходячи з цього, можна якісно зобразити амплітудно-частотну та фазочастотну характеристики вхідного комплексного опору (рис.3.33). Слід нагадати, що основні вторинні параметри складного контура не залежать від його коефіцієнта включення. В той же час резонансний опір складного контура є функцією величини  $p_2$ . Ця властивість контура широко використовується на практиці для узгодження його з джерелом енергії та навантаженням.

Тепер розглянемо складний паралельний коливальний контур третього виду (рис.3.28,в). Відомо, що частота резонансу струмів  $\omega_p$ , характеристичний опір  $\rho$  та добротність  $Q_k$  паралельного контура з неповним включенням ємності співпадають з відповідними параметрами послідовного коливального контура, що має такі ж параметри елементів. Тобто має ємність

$C = C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2)$  та опір втрат  $R = R_1 + R_2$ .

Частота резонансу напруг  $\omega_{03}$  в контурі третього виду визначається параметрами елементів другої вітки

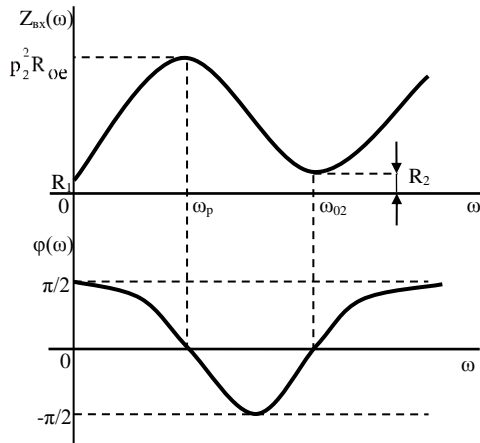
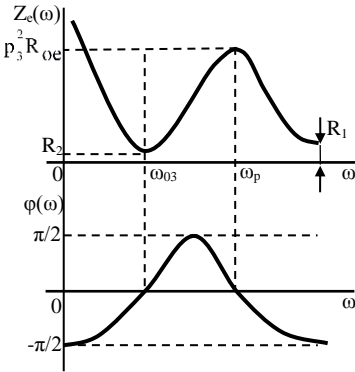


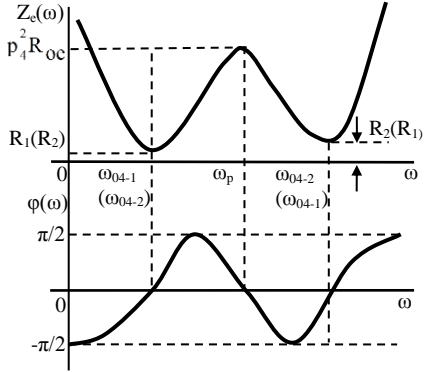
Рис.3.33. АЧХ та ФЧХ вхідного опору паралельного контура другого виду

$$\omega_{03} = \frac{1}{\sqrt{LC_2}} \approx \omega_p \sqrt{\frac{C}{C_2}} . \quad (3.164)$$

Якщо із виразу для результуючої ємності контура знайти  $C_2$  та підставити в ( 3.164 ), то , врахувавши ( 3.134 ), одержимо



**Рис.3.34. АЧХ та ФЧХ**  
еквівалентного опору паралельного контура третього виду



**Рис.3.35 АЧХ та ФЧХ**  
еквівалентного опору паралельного контура четвертого виду

$$\omega_{03} = \omega_p \sqrt{\frac{C(C_1 - C)}{CC_1}} = \omega_p \sqrt{1 - \frac{C}{C_1}} = \omega_p \sqrt{1 - p_3} . \quad (3.165)$$

В даному випадку частота послідовного резонансу  $\omega_{03}$  менша за частоту паралельного резонансу. На першій з них еквівалентний опір контура має активний характер і мінімальне значення, що дорівнює  $R_2$ . На частоті паралельного резонансу еквівалентний опір контура також активний, але має максимальне значення

$$Z_e(\omega_p) = \frac{\left(\frac{1}{\omega_p C_1}\right)^2}{R} = p_3^2 R_{0e} . \quad (3.166)$$

Амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики контура третього виду зображені на рис.3.34. Як і в попередньому випадку поблизу частоти послідовного резонансу контур поводить себе як простий послідовний, а поблизу частоти паралельного резонансу - як простий паралельний. Оскільки в даному випадку  $\omega_{03} < \omega_p$ , а для контура другого виду  $\omega_{02} > \omega_p$ , то в проміжку між цими частотами перший має активно-індуктивний, а другий – активно-ємнісний характер еквівалентного опору.

В паралельному коливальному контурі четвертого виду (рис.3.28,г) послідовний резонанс можливий в обох вітках. Причому для першої вітки

$$\omega_{04-1} \approx \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{LC \frac{L_1}{L} \cdot \frac{C_1}{C}}} = \omega_p \sqrt{\frac{p_3}{p_2}}, \quad (3.167)$$

а для другої

$$\omega_{04-2} \approx \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{LC \frac{L_2}{L} \cdot \frac{C_2}{C}}}.$$

Якщо врахувати співвідношення (3.133) та (3.164), для частоти  $\omega_{04-2}$  одержимо

$$\omega_{04-2} \approx \omega_p \sqrt{\frac{1-p_3}{1-p_2}}. \quad (3.168)$$

В залежності від розподілу індуктивності та ємності між вітками контура одна з частот послідовного резонансу буде меншою, а друга більшою від частоти паралельного резонансу. В результаті амплітудно-частотна та фазочастотна характеристики контура мають вигляд, що відображений на рис.3.35.

Очевидно, що при використанні складних паралельних коливальних контурів на частотах послідовних резонансів можна забезпечити придушення сигналів-перешкод. Причому в контурі четвертого виду можливе придушення коливань не в одній, а зразу в двох точках частотного діапазону.

Крім того, в складних контурах можливе регулювання величини еквівалентного резонансного опору  $R_{oe\text{скл}}$ , що значно спрощує їх узгодження як з джерелами сигналів, так і з навантаженням.

#### **3.4.8. Вибірні властивості паралельних коливальних контурів**

Як і для послідовного коливального контура вибірні властивості паралельних контурів можуть бути оцінені кількісно за допомогою чотирьох основних параметрів: добротності  $Q_K$  смуги пропускання  $\Delta\omega_K$ , коефіцієнта прямокутності  $K_{\Pi}$  та вибірності  $\sigma$ .

Параметри  $\Delta\omega_K$  та  $\sigma$  залежить від добротності контура  $Q_K$ , яка, в свою чергу, залежить від параметрів елементів контура, джерела сигналу, та навантаження контура.

Оцінимо вплив на якість контура внутрішнього опору джерела зовнішнього сигналу та опору навантаження в разі їх підключення як до простого, так і до складних паралельних коливальних контурів.

### 3.4.8.1 Вплив внутрішнього опору джерела на параметри паралельного коливального контура

Нехай в схемах з живленням паралельного контура першого виду від джерела ЕРС (рис.3.36,а) та від джерела струму (рис.3.36,б) внутрішній опір джерела чисто активний. Очевидно, що в обох схемах опір  $R_i$

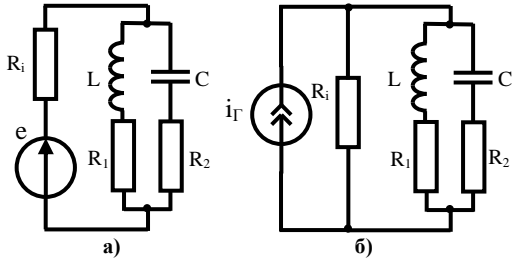


Рис.3.36. Схема живлення паралельного контура від джерела ЕРС (а) та від джерела струму (б)

підключений безпосередньо до затискачів контура. В схемотехніці таке підключення контура до джерела називають повним.

Якщо ж роль навантаження джерела енергії виконує будь-який із складних контурів, то джерело підключається до контура частково, оскільки опір  $R_i$  буде включений паралельно тільки частині одного із реактивних елементів кола. Наприклад, для контура другого виду схема часткового підключення джерела до контура або навпаки має вигляд показаний на рис.3.37.

Оцінимо вплив внутрішнього опору джерела сигналу  $R_i$  на добротність та смугу пропускання паралельного контура при повному та частковому його підключенні до джерела. Еквівалентна добротність паралельного контура в обох випадках може бути оцінена за допомогою виразу

$$Q_{ке} = \frac{\rho}{R_B}, \quad (3.169)$$

де  $R_B$  - опір втрат контура, який включає опори втрат у вітках та деякий додатковий опір, що враховує вплив на контур внутрішнього опору джерела  $R_i$

Оцінимо заданий додатковий опір шляхом перерахування опору  $R_i$  в контур. У випадку, коли опір  $R_2$  малий, а внутрішній опір джерела  $R_i \gg \rho$ , для такого перерахування можна скористатись співвідношенням (3.115). Тоді додатковий опір втрат контура при його повному підключенні до джерела дорівнює

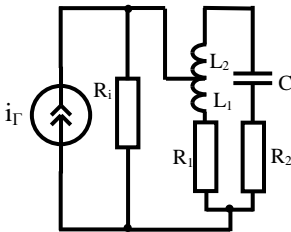


Рис.3.37. Схема часткового підключення паралельного контура до джерела струму

$$R_{\partial} = R_i \approx \frac{\rho^2}{R_1}. \quad (3.170)$$

А сумарний опір втрат

$$R_B = R_1 + R_2 + R_i = R + \frac{\rho^2}{R_i}. \quad (3.171)$$

Еквівалентна добротність контура

$$Q_{ке} = \frac{\rho}{R + \frac{\rho^2}{R_i}} = \frac{\rho}{R \left(1 + \frac{\rho^2}{R \cdot R_i}\right)} = \frac{Q_k}{\left(1 + \frac{R_{oe}}{R_i}\right)}, \quad (3.172)$$

а його смуга пропускання

$$\Delta\omega_{ке} = \frac{\omega_o}{Q_{ке}} = \frac{\omega_o}{Q_k} \left(1 + \frac{R_{oe}}{R_i}\right) = \Delta\omega_k \left(1 + \frac{R_{oe}}{R_i}\right). \quad (3.173)$$

Як видно із виразів (3.172) та (3.173), використання для живлення контура джерел з малим внутрішнім опором значно погіршує вибірні властивості, оскільки зменшується добротність контура та розширюється смуга пропускання.

Для зменшення такого негативного впливу треба вибирати джерела з високим внутрішнім опором або застосувати часткове підключення джерела до контура (див. рис.3.37).

В останньому випадку перерахування опору  $R_i$  в додатковий опір втрат контура можна здійснити шляхом перетворення паралельного з'єднання опору  $R_i$  та індуктивності  $L_1$  в послідовне.

При цьому будемо вважати, що опір втрат  $R_1$  малий, а реактивний опір індуктивності  $L_1$  на резонансній частоті  $\omega_p$  набагато менший ніж  $R_i$ .

Тоді опір паралельного з'єднання  $R_i$  та  $L_1$  на резонансній частоті дорівнює

$$\underline{Z} = \frac{1}{1/R_i - j/\omega_p L_1} = \frac{(\omega_p L_1)^2 R_i}{R_i^2 + (\omega_p L_1)^2} + j \frac{R_i^2 \omega_p L_1}{(\omega_p L_1)^2 + R_i^2}.$$

Якщо врахувати, що  $R_i \gg \omega_p L_1$ , то

$$\underline{Z} \approx \frac{(\omega_p L_1)^2}{R_i} + j\omega_p L_1. \quad (3.174)$$

Тобто додатковий опір втрат при частковому включенні контура

$$R_i' \approx \frac{(\omega_p L_1)^2}{R_i} = \frac{(\omega_p L)^2}{R_i} \cdot \frac{L_1^2}{L^2} = p^2 \cdot \frac{\rho^2}{R_i}. \quad (3.175)$$

Можна показати, що вираз, подібний до (3.175), можна отримати і при використанні складних контурів інших видів. Тому в загальному випадку



$$R_i' \approx p^2 \frac{\rho^2}{R_i}, \quad (3.176)$$

де  $p$  - коефіцієнт включення контура по відношенню до джерела сигналу.

В результаті при частковому підключенні контура до джерела для еквівалентної добротності маємо

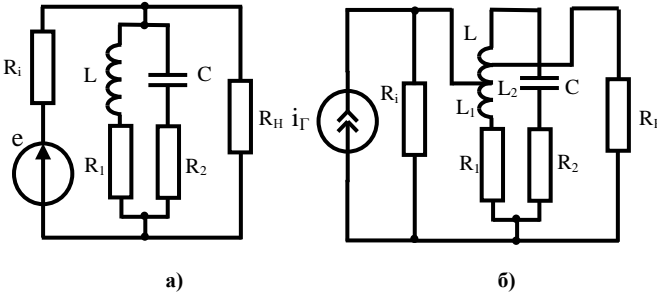


Рис.3.38. Паралельне повне (а) та часткове (б) підключення навантаження та джерела сигналу до

$$Q_{ке} = \frac{\rho}{R + R_i'} = \frac{\rho}{R + p^2 \frac{\rho^2}{R_i}} = \frac{Q_k}{1 + p^2 \frac{R_{oe}}{R_i}}. \quad (3.177)$$

А для смуги пропускання запишемо

$$\Delta\omega_{ке} = \frac{\omega_o}{Q_k} \left( 1 + p^2 \frac{R_{oe}}{R_i} \right). \quad (3.178)$$

Якщо врахувати, що коефіцієнт включення  $p < 1$ , то можна переконатись, що, дійсно, шляхом використання часткового підключення контура можна дещо пом'якшити негативний вплив малого внутрішнього опору джерела на вибірні властивості цього контура.

#### 3.4.8.2 Способи підключення навантаження до паралельного коливального контура

Найчастіше використовується паралельне повне (рис.3.38,а) або часткове (рис.3.38, б) підключення навантаження до паралельного контура.

Оцінимо спільний вплив на вибірні властивості контура внутрішнього опору джерела та навантаження при їх активному характері.

В разі повного паралельного підключення опорів  $R_i$  та  $R_H$  до високодобротного контура перерахування цих опорів в додаткові опори втрат може здійснюватись за допомогою співвідношення (3.170). Тобто

$$R'_i \approx \frac{\rho^2}{R_i}; R'_H \approx \frac{\rho^2}{R_H}. \quad (3.179)$$

Тоді повний активний опір втрат дорівнює

$$R_B \approx R + R'_i + R'_H = R + \frac{\rho^2}{R_i} + \frac{\rho^2}{R_H}.$$

Еквівалентна добротність контура

$$Q_{ке} \approx \frac{\rho}{R + \frac{\rho^2}{R_i} + \frac{\rho^2}{R_H}} = \frac{Q_k}{1 + \frac{R_{oe}}{R_i} + \frac{R_{oe}}{R_H}}. \quad (3.180)$$

А смуга пропускання

$$\Delta\omega_{ке} = \Delta\omega_k \left( 1 + \frac{R_{oe}}{R_i} + \frac{R_{oe}}{R_H} \right). \quad (3.181)$$

Як видно, вплив на вибірні властивості контура опору навантаження  $R_H$ , так само як і внутрішнього опору джерела  $R_i$ , негативний, оскільки при будь-якому кінцевому значенні  $R_H$  значно погіршуються якісні показники цього контура.

Слід чекати, що зменшити цей вплив можна буде також шляхом часткового підключення навантаження (див. рис. 3.35, б).

У цьому випадку для високодобротного коливального контура перерахування опорів  $R_i$  та  $R_H$  в додаткові складові опору втрат можна здійснити скориставшись співвідношенням (3.176)

$$R'_i = p_i^2 \frac{\rho^2}{R_i}; \quad R'_H = p_H^2 \frac{\rho^2}{R_H},$$

де  $p_i$  та  $p_H$  - коефіцієнти включення контура з боку джерела сигналу та з боку навантаження відповідно.

Тоді для еквівалентної добротності контура маємо

$$Q_{ке} \approx \frac{\rho}{R + p_i^2 \frac{\rho^2}{R_i} + p_H^2 \frac{\rho^2}{R_H}} = \frac{Q_k}{1 + p_i^2 \frac{R_{oe}}{R_i} + p_H^2 \frac{R_{oe}}{R_H}}, \quad (3.182)$$

а для смуги пропускання

$$\Delta\omega_{ке} = \Delta\omega_k \left( 1 + p_i^2 \frac{R_{oe}}{R_i} + p_H^2 \frac{R_{oe}}{R_H} \right). \quad (3.183)$$

Очевидно, що при частковому підключенні навантаження та джерела

їх негативний вплив на якість контура зменшується. Окрім того, вибираючи значення коефіцієнтів включення, як з боку навантаження, так і з боку джерела, можна забезпечити задану смугу пропускання, яка однак не може бути меншою, ніж смуга пропускання ненавантаженого контура. Одночасно можна узгодити контур як з джерелом сигналу, так і з навантаженням.

Розглянемо схему послідовного підключення навантаження до паралельного контура (рис.3.39), яка на практиці застосовується значно рідше, ніж попередні. Якщо комплексний струм джерела  $\underline{I}$ , а в нерозгалуженій частині контура  $\underline{I}_K$ , то для відношення цих струмів маємо

$$\frac{\underline{I}}{\underline{I}_K} = \frac{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{Z_K + R_H}}{\frac{1}{Z_K + R_H}}$$

Звідки для струму контура запишемо

$$\underline{I}_K = \frac{\underline{I} R_i}{R_i + R_H + Z_K}$$

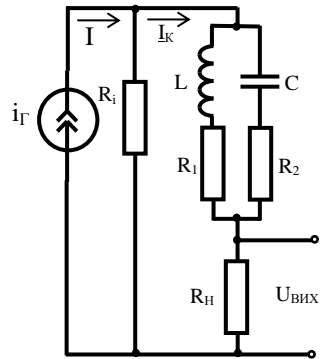
А напруга на навантаженні

$$\underline{U}_{\text{вих}} = \frac{\underline{I} R_i \cdot R_H}{R_i + R_H + Z_K} \quad (3.184)$$

Оскільки опір паралельного контура на резонансній частоті має максимальне значення, то вихідна напруга на цій частоті мінімальна.

Тобто, в схемі на рис.3.39 можна забезпечити придушення коливань на резонансній частоті.

На практиці такий пристрій називають фільтром – пробкою, він широко використовується для фільтрації вузькосмугових перешкод.



**Рис.3.39.** Схема послідовного підключення навантаження до паралельного контура

## РОЗДІЛ 4. ІНДУКТИВНО ЗВ'ЯЗАНІ КОЛА

### 4.1. Поняття про взаємну індуктивність

В радіоелектронних пристроях різного призначення передавання енергії сигналу між окремими контурами схеми часто здійснюється не лише за допомогою дротів та пасивних елементів, але й за рахунок взаємної індукції.

Якщо магнітний потік створюваний струмом котушки індуктивності одного контура, пронизує витки котушки індуктивності іншого контура, то ці два контури називаються індуктивно або магнітно зв'язаними.

Часто такий зв'язок створюють умисно, щоб виключити електричний зв'язок між контурами, і в цьому випадку він корисний. Магнітний зв'язок може виникати і всупереч бажанню конструктора кола. В цьому випадку такий зв'язок небажаний і його називають паразитним.

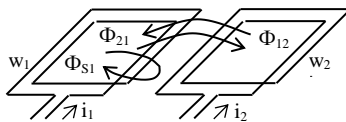


Рис.4.1. Два індуктивно зв'язані контури

На рис 4.1 зображені два найпростіші магнітно зв'язані контури, які складаються з котушок індуктивності, що мають  $w_1$  та  $w_2$  витків дроту відповідно. Повний магнітний потік, що зв'язаний з  $w_1$  витками першого контура дорівнює

$$\Phi_1 = \Phi_{S1} + \Phi_{12} + \Phi_{21} = \Phi_{11} + \Phi_{12} \quad (4.1)$$

де  $\Phi_{S1}$  - потік розсіювання, обумовлений струмом  $i_1$  і зв'язаний лише з витками першого контура;  $\Phi_{12}$  - взаємний потік, обумовлений струмом  $i_2$  і зв'язаний з витками обох контурів;  $\Phi_{21}$  - взаємний потік, обумовлений струмом  $i_1$  і зв'язаний з витками обох контурів;  $\Phi_{11}$  - власний магнітний потік першого контура або магнітний потік самоіндукції, причому  $\Phi_{11} = \Phi_{S1} + \Phi_{21}$ .

Для повного магнітного потоку другого контура аналогічно до (4.1) запишемо

$$\Phi_2 = \Phi_{S2} + \Phi_{21} + \Phi_{12} = \Phi_{22} + \Phi_{21}. \quad (4.2)$$

Потокозчеплення першого контура дорівнює

$$\Psi_1 = w_1 \Phi_1 = w_1 \Phi_{11} + w_1 \Phi_{12} = \Psi_{11} + \Psi_{12} \quad (4.3)$$

а другого контура

$$\Psi_2 = w_2 \Phi_2 = w_2 \Phi_{22} + w_2 \Phi_{21} = \Psi_{22} + \Psi_{21} \quad (4.4)$$

Якщо елементи взаємозв'язаних за допомогою магнітних потоків кіл лінійні, то потокозчеплення у виразах (4.3) та (4.4) дорівнюють

$$\Psi_{11} = L_1 i_1; \quad \Psi_{22} = L_2 i_2; \quad \Psi_{21} = M i_1; \quad \Psi_{12} = M i_2, \quad (4.5)$$

де  $L_1, L_2$  - індуктивності першого та другого контурів;  $M$  - взаємна індуктивність двох контурів.

Слід зазначити, що взаємна індуктивність – це величина, що характеризує ступінь передачі енергії магнітного поля від одного кола до іншого і вимірюється, як і індуктивність, в генрі.

Ступінь індуктивного взаємозв'язку між двома контурами можна оцінити відношеннями  $\frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}}$  та  $\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}}$ . Ці відношення показують, яка частина

власного магнітного потоку кожного контура зв'язана з витками іншого.

Середнє геометричне від цих двох відношень називається коефіцієнтом зв'язку між двома контурами

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} \cdot \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}}} = \sqrt{\frac{\Psi_{12}}{\Psi_{11}} \cdot \frac{\Psi_{21}}{\Psi_{22}}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}. \quad (4.6)$$

Звичайно коефіцієнт зв'язку  $k < 1$ , оскільки частина магнітного потоку кожного контура зв'язана лише з ним і не впливає на інший (див. рис. 4.1).

Якщо в одному з контурів виникає змінний магнітний потік, то в зв'язаному з ним контурі з'являється ЕРС взаємної індукції

$$e_{2M} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}; \quad e_{1M} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}. \quad (4.7)$$

Нехай струм у першому контурі має гармонічний характер  $i_1 = I_{m1} \sin \omega t$ , тоді в другому контурі індукується ЕРС

$$e_{2M} = -M\omega I_{m1} \cos \omega t = \omega M I_{m1} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.8)$$

В символічній формі

$$\underline{e}_{2M} = \underline{E}_{m2} \cdot e^{j\omega t} = -M \frac{d}{dt} I_{m1} e^{j\omega t} = -j\omega M I_{m1} e^{j\omega t}. \quad (4.9)$$

Комплексна амплітуда та діюче значення ЕРС взаємної індукції

$$\underline{E}_{m2M} = -j\omega M I_{m1}; \quad \underline{E}_{2M} = -j\omega M \underline{I}_1. \quad (4.10)$$

Добуток  $j\omega M$  позначається через  $\underline{Z}_M$  або  $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12}$  і являє собою комплексний опір зв'язку між двома контурами або комплексний опір взаємоіндукції

$$\underline{Z}_M = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = jX_M = j\omega M, \quad (4.11)$$

де  $X_M = \omega M$  - реактивний опір взаємної індуктивності двох контурів.

## 4.2 Узгоджене та зустрічне включення магнітно зв'язаних котушок індуктивності

Нехай маємо дві магнітно зв'язані котушки індуктивності, що розташовані на єдиному каркасі (рис.4.2). Намотування цих котушок може бути здійснене таким чином, що взаємний магнітний потік  $\Phi_{12}$ , створюваний струмом  $i_2$ , збільшуватиме власний магнітний потік першої котушки  $\Phi_{11}$  (рис.4.2, а)

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} \quad (4.12)$$

В результаті наведена в першій котушці ЕРС має дві складові однакового знаку

$$e_1 = -\frac{d\psi_{11}}{dt} - \frac{d\psi_{12}}{dt} = -L \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}. \quad (4.13)$$

Говорять, що в цьому випадку котушки індуктивності включені узгоджено, оскільки магнітні потоки самоіндукції та взаємоіндукції складаються. Якщо ж взаємний магнітний потік  $\Phi_{12}$  спрямований назустріч власному магнітному потоку першої котушки

індуктивності  $\Phi_{11}$  (рис.4.2,б), то результуючий магнітний потік дорівнює

$$\Phi_1 = \Phi_{11} - \Phi_{12}. \quad (4.14)$$

Складові ЕРС, що наводиться в першій котушці, мають у цьому випадку протилежні знаки

$$e_1 = -\frac{d\psi_{11}}{dt} + \frac{d\psi_{12}}{dt} = -L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}. \quad (4.15)$$

Це явище є характерним для зустрічного включення котушок індуктивності.

Щоб не ускладнювати схеми кіл з магнітно зв'язаними елементами, каркаси котушок та напрямки намотки останніх не зображуються, однак однойменні виводи або , як кажуть, початки котушок індуктивності, позначають однаковими значками, наприклад, крапками. На рис.4.3,а зображена схема узгодженого, а на рис. 4.3,б – схема зустрічного включення індуктивно зв'язаних котушок індуктивності.

Як видно, узгодженому включенню котушок відповідає однаковий напрямок струмів відносно однойменних виводів, і навпаки, в разі зустрічного включення струми  $i_1$  та  $i_2$  спрямовані протилежно

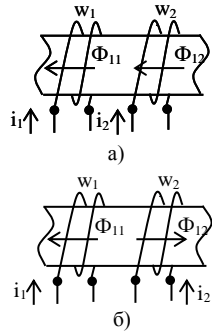


Рис.4.2.Магнітно зв'язані котушки з узгодженим (а) та зустрічним (б) включенням

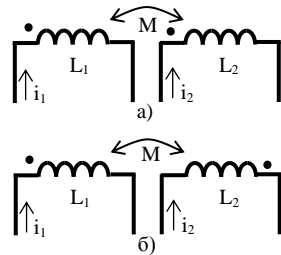


Рис. 4.3. Схема узгодженого (а) та зустрічного (б) включення котушок індуктивності

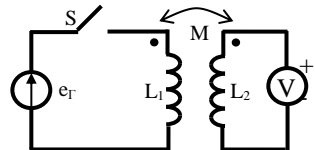


Рис. 4.4. Схема для визначення однойменних виводів індуктивно зв'язаних котушок

відносно однойменних виводів котушок.

Для визначення однойменних виводів дослідним шляхом одну з магнітно зв'язаних котушок індуктивності підключають до джерела постійної напруги, а іншу до вольтметра постійного струму з нулем посередині шкали (рис.4.4). Якщо в момент замикання ключа  $S$  показання вольтметра додатні, то виводи котушок індуктивності, які підключені до позитивного полюсу джерела напруги та позитивного затискача вольтметра, є однойменними. Якщо ж при такому замиканні показання вольтметра від'ємні, то вищезгадані виводи котушок індуктивності є різнойменними.

### 4.3 Рівняння Кірхгофа для індуктивно зв'язаних кіл

Розглянемо методику складання рівнянь для розрахунку магнітно зв'язаних кіл на прикладі кола, схема якого для випадку узгодженого включення котушок індуктивності приведена на рис.4.5. Скористаємося другим законом Кірхгофа, причому напрямки обходу контурів для складання рівнянь виберемо співпадаючими з позитивними напрямками струмів в цих контурах.

Система рівнянь для миттєвих значень струмів та напруг має вигляд

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + M \frac{di_2}{dt}; \quad (4.16)$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + M \frac{di_1}{dt}.$$

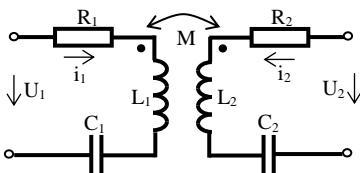


Рис. 4.5.Схема магнітно зв'язаного кола

Очевидно, що напруги на затискачах кола врівноважуються спадами напруг на елементах контурів та напругами на взаємній індуктивності.

Система рівнянь (4.16) справедлива для будь-якого закону змінювання напруг. Якщо цей закон гармонічний, то для діючих значень

комплексних струмів та напруг одержимо

$$R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 - j \frac{1}{\omega C_1} I_1 + j\omega M I_2 = \underline{U}_1; \quad (4.17)$$

$$R_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 - j \frac{1}{\omega C_2} I_2 + j\omega M I_1 = \underline{U}_2.$$

Якщо позначити  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1}$ , а  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2}$  і врахувати що  $\underline{Z}_M = j\omega M$ , то систему рівнянь (4.17) можна записати більш компактно

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 I_1 + \underline{Z}_M I_2; \quad (4.18)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 I_2 + \underline{Z}_M I_1.$$

Для випадку зустрічного включення котушок індуктивності аналогічна система рівнянь має вигляд

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 I_1 - \underline{Z}_M I_2; \quad (4.19)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 I_2 - \underline{Z}_M I_1.$$

Таким чином, особливості розрахунків магнітно зв'язаних кіл полягають у тому, що необхідно враховувати явище взаємодукції при складанні рівнянь електричної рівноваги.

#### 4.4 Послідовне з'єднання магнітно зв'язаних котушок індуктивності

Нехай дві реальні магнітно зв'язані котушки індуктивності з'єднані послідовно і підключені до джерела гармонічної напруги (рис.4.6).

За другим законом Кіргофа в разі узгодженого з'єднання котушок одержимо

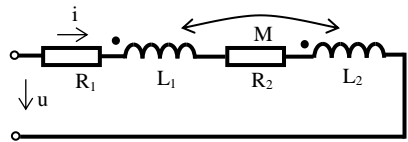


Рис. 4.6. Схема послідовного з'єднання магнітно зв'язаних котушок індуктивності

$$u = iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + iR_2 + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}. \quad (4.20)$$

В комплексній формі рівняння (4.20) має вигляд

$$\underline{U} = \underline{I}R_1 + j\omega L_1 \underline{I} + j\omega M \underline{I} + \underline{I}R_2 + j\omega L_2 \underline{I} + j\omega M \underline{I}.$$

або інакше

$$\underline{U} = \underline{I}(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)). \quad (4.21)$$

Для зустрічного включення котушок індуктивності одержимо

$$\underline{U} = \underline{I}(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)). \quad (4.22)$$

Отже, еквівалентна індуктивність послідовного з'єднання котушок

$$L_2 = L_1 + L_2 \pm 2M, \quad (4.23)$$

а еквівалентна індуктивність кожної із котушок

$$L_{1e} = L_1 \pm M; \quad L_{2e} = L_2 \pm M. \quad (4.24)$$



На рис. 4.7 зображені векторні діаграми кола, що складається з двох послідовно включених магнітно зв'язаних котушок індуктивності.

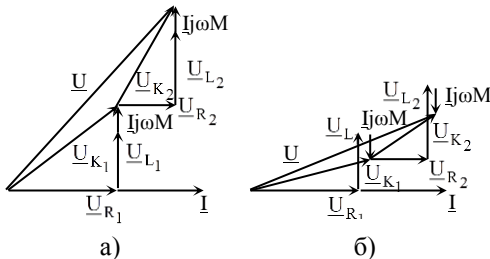


Рис. 4.7. Векторні діаграми послідовного з'єднання двох узгоджено (а) та зустрічно (б) включених котушок індуктивності

Очевидно, що при узгодженому включенні котушок індуктивності (рис.4.7,а) зсув фаз між напругою та струмом в колі буде більший, ніж при їх зустрічному включенні (рис. 4.7,б).

Якщо змінювати взаємне розташування котушок індуктивності, то це призведе до змінювання взаємного магнітного потоку а значить і еквівалентної індуктивності з'єднання. Цей ефект застосовується на практиці для реалізації індуктивності зі змінними параметрами.

#### 4.5 Паралельне з'єднання магнітно зв'язаних котушок індуктивності

Якщо до кола, що складається з паралельно з'єднаних котушок індуктивності (рис. 4.8), прикладена синусоїдна напруга, то згідно з другим законом Кірхгофа для напруг віток матимемо

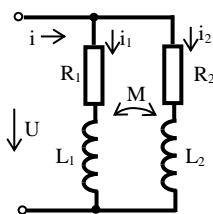


Рис. 4.8. Паралельне з'єднання магнітно-зв'язаних котушок

$$\underline{U} = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2; \quad (4.25)$$

$$\underline{U} = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1.$$

В рівняннях (4.25) додатний знак біля останніх складових відповідає узгодженому, а від'ємний – зустрічному включенню котушок. Якщо позначити  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ ,  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$ , а  $\underline{Z}_M = j\omega M$ , то на основі рівнянь (4.25) одержимо

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \pm \underline{Z}_M \underline{I}_2; \quad (4.26)$$

$$\underline{U} = \pm \underline{Z}_M \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2.$$

Розв'яжемо систему рівнянь (4.26) методом визначників, в результаті чого для діючих значень комплексних струмів  $\underline{I}_1$  та  $\underline{I}_2$  в вітках одержимо

$$\underline{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\underline{U}(\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\underline{U}(\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}, \quad (4.27)$$

де  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$  – визначники системи (4.26), які можна знайти скориставшись

виразами

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_1 & \pm Z_M \\ \pm Z_M & Z_2 \end{vmatrix} = Z_1 Z_2 - Z_M^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} U & \pm Z_M \\ U & Z_2 \end{vmatrix} = U(Z_2 \mp Z_M);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} Z_1 & U \\ \pm Z_M & U \end{vmatrix} = U(Z_1 \mp Z_M).$$
(4.28)

На основі (4.27) можна знайти еквівалентні опори першої та другої віток кола

$$Z_{1e} = \frac{U}{I_1} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_2 \mp Z_M}; \quad Z_{2e} = \frac{U}{I_2} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 \mp Z_M}.$$
(4.29)

Вирази (4.29) характеризують еквівалентні опори вже не зв'язаних магнітно між собою віток, якими можна замінити аналізуємі магнітно зв'язані вітки так, щоб струми у вітках залишились попередніми. В цих виразах верхній знак в знаменнику маємо при узгодженому, а нижній знак – при зустрічному включенні котушок, що видно із виразів (4.28).

Якщо активні опори котушок індуктивності малі, то ними можна знехтувати і тоді для еквівалентних індуктивностей віток одержимо

$$L_{1e} \approx \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 \mp M}; \quad L_{2e} \approx \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 \mp M}.$$
(4.30)

На закінчення підкреслимо, що і при послідовному, і при паралельному з'єднанні магнітно зв'язаних котушок індуктивності може виникати так званий ємнісний ефект. Це можливо, якщо індуктивність однієї котушки перевищує індуктивність іншої, а рівень магнітного зв'язку між ними достатньо великий.

Як видно із виразів (4.26) та (4.30), для послідовного з'єднання котушок індуктивності при зустрічному включенні, а для паралельно з'єднаних котушок при узгодженому включенні, якщо  $L_1 > L_2$  або навпаки, одна із еквівалентних індуктивностей може мати від'ємне значення. Це означає, що вона буде себе поводити аналогічно до ємності, що обов'язково треба враховувати при аналізі таких кіл.

#### 4.6. Поняття про лінійний трансформатор

Трансформатор – це пристрій, що призначений для передачі електромагнітної енергії із однієї частини електричного кола до іншої за допомогою електромагнітної індукції.

Конструктивно трансформатор складається з двох або більше індуктивно зв'язаних обмоток (катушок). Часто для покращення

енергетичних характеристик трансформатора його обмотки виконують на спільному ферромагнітному осерді. В цьому випадку трансформатор є нелінійним елементом.

В даному розділі розглядається трансформатор без ферромагнітного осердя, який є лінійним електроелементом. Такий трансформатор широко застосовується в радіотехніці для перетворення величин змінних напруг та струмів, для електричної розв'язки (розділення) окремих частин кола за постійним струмом, а також для перетворення величин опорів.

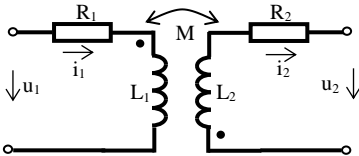


Рис.4.9. Схема лінійного трансформатора

На цій схемі активні опори обмоток  $R_1$  та  $R_2$  умовно показані у вигляді окремих елементів кола.

Обмотка трансформатора, що підключається до джерела енергії, називається первинною, а обмотка, до якої підключається приймач енергії називається вторинною. Відповідно струм та напруга також називаються первинними або вторинними.

#### 4.6.1.Рівняння Кірхгофа для лінійного трансформатора

Розглянемо схему заміщення навантаженого лінійного трансформатора, що зображена на рис. 4.10. Ступінь навантаженості трансформатора звичайно характеризують величиною струму  $i_2$  у вторинній обмотці. Вважають, що чим більший струм  $i_2$ , тим більша навантаженість, і навпаки. Як видно із рис. 4.10, в разі вказаних на схемі позитивних напрямків струмів  $i_1$  та  $i_2$  обмотки трансформатора включені узгоджено.

Рівняння для первинного та вторинного контурів кола мають вигляд

$$\begin{aligned} u_1 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \\ 0 &= r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + u_2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Якщо напруга джерела змінюється за гармонічним законом, то рівняння (4.31) для комплексних діючих значень матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= r_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2; \\ 0 &= r_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 + \underline{U}_2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, можна знайти діючі значення струмів  $\underline{I}_1$  та  $\underline{I}_2$ , але спочатку побудуємо векторну діаграму трансформатора.

Побудову векторної діаграми струмів та напруг доцільно розпочинати з побудови вектора вторинної напруги  $\underline{U}_2$  або струму  $\underline{I}_2$  для опору навантаження  $\underline{Z}_H$ . При цьому будемо вважати, що останній має активно-індуктивний характер, а вектор струму навантаження  $\underline{I}_2$  співпадає з позитивним напрямком дійсної осі на комплексній площині (рис. 4.11). Маючи вектор  $\underline{I}_2$  можемо легко

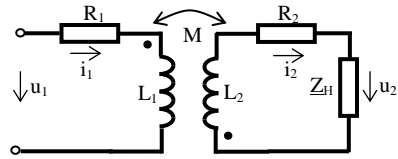


Рис.4.10. Схема заміщення навантаженого лінійного трансформатора

побудувати вектори  $\underline{I}_2 R_H$ ,  $jX_H \underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_2 R_2$ ,  $jX_{L_2} \underline{I}_2$ , враховуючи, що  $X_H > 0$ .

З'єднавши кінець вектора  $jX_{L_2} \underline{I}_2$  з початком координат, одержимо вектор  $jX_M \underline{I}_1$ , оскільки сума спадів напруг у вихідному колі трансформатора дорівнює нулю. Щоб побудувати вектор струму  $\underline{I}_1$  треба врахувати, що він запізнюється на кут

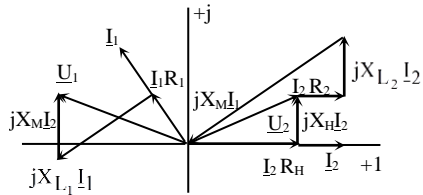


Рис. 4.11. Векторна діаграма струмів та напруг лінійного трансформатора

$\frac{\pi}{2}$  по відношенню до вектора  $jX_M \underline{I}_1$ . Далі зображуємо вектори  $\underline{I}_1 R_1$ ,  $jX_{L_1} \underline{I}_1$ ,  $jX_M \underline{I}_2$ , сума яких дорівнює вектору прикладеної до первинної обмотки напруги  $\underline{U}_1$ .

Якщо врахувати, що  $\underline{Z}_H = R_H + jX_H$ , то систему рівнянь (4.32) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 + jX_{L_1} \underline{I}_1 + jX_M \underline{I}_2; \\ 0 &= R_2 \underline{I}_2 + jX_{L_2} \underline{I}_2 + jX_M \underline{I}_1 + \underline{I}_2 (R_H + jX_H). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Із другого рівняння системи (4.33) одержимо

$$\underline{I}_2 = \frac{-jX_M \underline{I}_1}{(R_2 + R_H) + j(X_{L_2} + X_H)} = \frac{-jX_M \underline{I}_1}{R_{2H} + jX_2}. \quad (4.34)$$

Якщо вираз (4.34) підставити в перше рівняння системи (4.33), то після нескладних перетворень для струму  $\underline{I}_1$  первинного кола лінійного трансформатора матимемо

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + jX_{L_1} + \frac{X_M^2}{R_{2H} + jX_2}} = \frac{\underline{U}_1}{(R_1 + R_{вн}) + j(X_{L_1} + X_{вн})}, \quad (4.35)$$

де  $R_{вн}$  та  $X_{вн}$  - активна та реактивна складові комплексного опору внесеного

із вторинного контура трансформатора в первинний.

У виразі (4.35) внесені активний  $R_{вн}$  та реактивний  $X_{вн}$  опори дорівнюють.

$$R_{вн} = \frac{X_M^2}{R_{2н}^2 + X_2^2} \cdot R_{2н}; \quad X_{вн} = -\frac{X_M^2}{R_{2н}^2 + X_2^2} \cdot X_2. \quad (4.36)$$

Із структури виразу (4.35) виходить, що з боку первинної обмотки трансформатора вся схема разом з навантаженням може розглядатися як двополюсник, що має комплексний опір

$$Z_{вк} = (R_1 + R_{вн}) + j(X_{L_1} + X_{вн})$$

Слід зазначити, що внесений активний опір завжди додатний і в ньому поглинається частина енергії, яка в реальному колі передається з первинного кола у вторинне. Внесений реактивний опір завжди має знак, що протилежний знаку реактивної складової опору навантаження і характеризує процес накопичення енергії, яка передається у вторинне коло.

#### 4.6.2. Еквівалентна схема лінійного трансформатора

Схему лінійного трансформатора, обмотки якого магнітно зв'язані одна з одною, можна замінити еквівалентним електричним колом, два контури, якого мають електричний зв'язок між собою. Це часто використовують при еквівалентних перетвореннях аналізованих кіл.

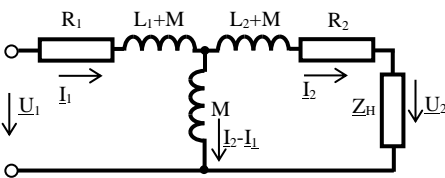


Рис. 4.12. Еквівалентна схема лінійного трансформатора

Для досягнення цієї мети необхідно здійснити невеликі перетворення системи рівнянь трансформатора (4.33). В рівнянні для первинного кола трансформатора додамо та віднімо складову  $jX_M I_1$ , а в рівнянні для вторинного кола – складову  $jX_M I_2$ .

Після простих перетворень, врахувавши, що  $X_{L_1} = \omega L_1, X_{L_2} = \omega L_2, X_M = \omega M$ , на основі системи рівнянь (4.33) одержимо еквівалентну систему, що має вигляд

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 I_1 + j\omega(L_1 + M)I_1 + j\omega M(I_2 - I_1); \\ 0 &= R_2 I_2 + j\omega(L_2 + M)I_2 - j\omega M(I_2 - I_1) + \underline{U}_2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Цим двом рівнянням відповідає двоконтурна схема, що приведена на рис.4.12. Вона є еквівалентною схемою трансформатора з узгодженим включенням обмоток і не має індуктивного зв'язку між окремими елементами.

Може статися, що в разі зустрічного включення обмоток трансформатора, коли індуктивності в поздовжніх вітках еквівалентної схеми

дорівнюють  $L_1 - M$  та  $L_2 - M$ , одна з індуктивностей буде від'ємною. В цьому випадку в еквівалентній схемі цей елемент необхідно замінити ємністю, величина якої буде залежати від частоти.

### 4.6.3. Ідеальний лінійний трансформатор та його властивості

#### 4.6.3.1 Коефіцієнти зв'язку та трансформації ідеального трансформатора

Трансформатор, у якого активні опори дротів обмоток та потоки розсіювання первинної і вторинної обмоток дорівнюють нулю, називається ідеальним. Така ідеалізація дозволяє одержати цілий ряд корисних для практики співвідношень.

Якщо потоки розсіювання  $\Phi_{S1} = \Phi_{S2} = 0$ , то для власних магнітних потоків первинної та вторинної обмоток маємо

$$\Phi_{11} = \Phi_{21}; \quad \Phi_{22} = \Phi_{12}, \quad (4.38)$$

а коефіцієнт зв'язку  $k = 1$ , що випливає з аналізу виразу (4.6).

Якщо  $w_1$  – число витків первинної, а  $w_2$  – число витків вторинної обмоток трансформатора, то на основі (4.38) запишемо

$$w_1 \Phi_{11} = \frac{w_1}{w_2} w_2 \Phi_{21}; \quad w_2 \Phi_{22} = \frac{w_2}{w_1} w_1 \Phi_{12}. \quad (4.39)$$

Відношення числа витків первинної обмотки до числа витків вторинної обмотки називається коефіцієнтом трансформації.

$$n = \frac{w_1}{w_2}. \quad (4.40)$$

Визначимо зв'язок між коефіцієнтом трансформації та первинними параметрами ідеального трансформатора  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$ . На основі співвідношення (4.39) з урахуванням (4.40) для потокозчеплень  $\Psi_{11}$  та  $\Psi_{22}$  одержимо

$$\Psi_{11} = n \Psi_{21}; \quad \Psi_{22} = \frac{1}{n} \Psi_{12}, \quad (4.41)$$

або інакше, оскільки трансформатор лінійний

$$L_1 i_1 = n M i_1; \quad L_2 i_2 = \frac{1}{n} M i_2 \quad (4.42)$$

Із виразу (4.42) виходить, що

$$n = \frac{L_1}{M}; \quad \frac{1}{n} = \frac{L_2}{M}; \quad n^2 = \frac{L_1}{L_2}. \quad (4.43)$$

Величину коефіцієнта трансформації, якщо невідомим є число витків обмоток, можна знайти за допомогою дослідів холостого ходу та короткого замикання, та системи рівнянь (4.32) з урахуванням того, що у ідеального

трансформатора  $R_1 = R_2 = 0$ .

В режимі холостого ходу, коли  $I_2 = 0$ , для ідеального трансформатора на основі (4.32) маємо

$$\underline{U}_{1X} = j\omega L_1 I_{1X}; \quad \underline{U}_{2X} = j\omega M I_{1X}.$$

Звідки виходить, що

$$\frac{\underline{U}_{1X}}{\underline{U}_{2X}} = -\frac{L_1}{M} = -n. \quad (4.44)$$

Тобто, відношення напруг холостого ходу первинної та вторинної обмоток за абсолютною величиною дорівнює коефіцієнту трансформації.

В режимі короткого замикання, коли  $\underline{U}_2 = 0$ , для ідеального трансформатора із другого рівняння системи (4.32) одержимо

$$L_2 I_{2K} = -M I_{1K},$$

а це означає, що

$$\frac{I_{1K}}{I_{2K}} = -\frac{L_2}{M} = -\frac{1}{n}. \quad (4.45)$$

Тобто, відношення первинного та вторинного струмів короткого замикання за абсолютною величиною є величина обернена до коефіцієнта трансформації.

Таким чином, ідеальний трансформатор має властивість змінювати напругу та струм в коефіцієнт трансформації разів. Причому, якщо напруга збільшується, то в таке ж число разів знижується струм і навпаки.

#### 4.6.3.2 Перетворення опору трансформатором

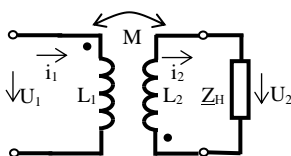


Рис. 4.13. Навантажений ідеальний трансформатор

Розглянемо схему ідеального трансформатора, що навантажений на комплексний опір  $\underline{Z}_H$  (рис. 4.13). Враховуючи, що обмотки трансформатора включені узгоджено, для діючих комплексних струмів і напруг у відповідності з другим законом Кірхгофа маємо

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M \cdot I_2; \quad (4.46)$$

$$0 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M \cdot I_1 + \underline{Z}_H I_2.$$

Із другого рівняння системи (4.46) для струму  $I_2$  запишемо

$$I_2 = \frac{-j\omega M}{j\omega L_2 + \underline{Z}_H} I_1,$$

звідки за допомогою першого рівняння системи (4.46) одержимо

$$\underline{U}_1 = \left( j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + \underline{Z}_H} \right) \cdot I_1. \quad (4.47)$$

Вхідний опір трансформатора з боку первинної обмотки дорівнює

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + \underline{Z}_H}. \quad (4.48)$$

Цей опір складається із власного опору первинної обмотки  $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$  та опору, внесеного із вторинного кола трансформатора в первинне

$$\underline{Z}_{\text{вн}} = \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + \underline{Z}_H}. \quad (4.49)$$

Вираз (4.48) як раз і ілюструє можливість трансформації опору трансформатором, оскільки в загальному випадку опори  $\underline{Z}_{\text{вх}}$  та  $\underline{Z}_H$  відрізняються один від одного.

Проведемо аналіз вхідного опору трансформатора в режимах холостого ходу, короткого замикання та при його нормальному навантаженні.

Якщо трансформатор працює в режимі холостого ходу, тобто при  $\underline{Z}_H = \infty$ , то із (4.49) виходить, що  $\underline{Z}_{\text{вн}} = 0$  і тому

$$\underline{Z}_{\text{вх х}} = j\omega L_1. \quad (4.50)$$

Якщо ж на виході створений режим короткого замикання, тобто  $\underline{Z}_H = 0$ , то

$$\underline{Z}_{\text{вх к}} = j\omega L_1 - j\omega M^2 / L_2 = j\omega L_1 (1 - k^2). \quad (4.51)$$

Для ідеального трансформатора  $k = 1$ , тому  $\underline{Z}_{\text{вх к}} \approx 0$ . Це означає, що режим короткого замикання дуже небезпечний і для трансформатора, і для джерела енергії.

У випадку ідеального нормально навантаженого трансформатора індуктивні опори обмоток дуже великі в порівнянні з повним опором навантаження. До того ж коефіцієнт зв'язку  $k = 1$ , тому в цьому випадку справедливі співвідношення

$$M^2 = L_1 L_2; \quad \omega L_2 \gg \underline{Z}_H. \quad (4.52)$$

Тоді співвідношення для вхідного опору можна записати у вигляді

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{j\omega L_2 + \underline{Z}_H} = j\omega L_1 - \frac{j\omega L_1}{1 - j \frac{\underline{Z}_H}{\omega L_2}}. \quad (4.53)$$

Відомо, що при малих  $x$  справедливі співвідношення  $\frac{1}{1-x} \approx 1+x$ .



Оскільки у виразі (4.53) відношення  $\frac{Z_H}{\omega L_2} \ll 1$ , то одержимо

$$\underline{Z}_{\text{вх}} \approx j\omega L_1 - j\omega L_1 \left( 1 + j \frac{Z_H}{\omega L_2} \right) = \frac{L_1}{L_2} Z_H. \quad (4.54)$$

Якщо врахувати (4.43), то остаточно матимемо

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = n^2 \underline{Z}_H. \quad (4.55)$$

Співвідношення (4.55) безпосередньо відображає властивість трансформатора перетворювати опір навантаження, що часто використовується на практиці для вирішення задачі узгодження окремих кіл між собою.

## РОЗДІЛ 5. ЗВ'ЯЗАНІ КОЛИВАЛЬНІ КОНТУРИ

### 5.1. Визначення та види зв'язку в системах зв'язаних коливальних контурів

Зв'язаними коливальними контурами або зв'язаними коливальними системами називається сукупність двох і більше коливальних контурів, між якими є електричний, магнітний або електромагнітний зв'язок.

В таких системах енергія з одного контура може передаватися в інші і може відбуватися також взаємний обмін енергією між контурами. Найчастіше на практиці застосовують системи двох зв'язаних коливальних контурів. Контур, підключений до джерела енергії, називається первинним, а контур, до якого енергія надходить від первинного, називається вторинним.

Одним з найпоширеніших видів зв'язку між коливальними контурами є індуктивний трансформаторний зв'язок (рис.5.1). В цій схемі, як і у раніше розглянутому трансформаторі, передача енергії з первинного контура до вторинного відбувається за допомогою магнітного потоку, що утворюється первинним струмом, який проходить через індуктивність  $L_1$  первинного контура. Частина цього магнітного потоку взаємодіє з індуктивністю вторинного контура  $L_2$  і наводить в ній ЕРС взаємоіндукції.

Ця ЕРС є джерелом струму у вторинному контурі. Вторинний струм, проходячи через індуктивність  $L_2$ , утворює свій магнітний потік, що впливає на режим роботи первинного контура.

Ступінь зв'язку між контурами визначається величиною взаємної індуктивності  $M$ , яка залежить від відстані між котушками індуктивності та від їх взаємного розташування.

Якщо зв'язок між двома контурами забезпечується за допомогою додаткової котушки індуктивності  $L_{зв}$ , яка входить одночасно в обидва контури (рис. 5.2), то маємо внутрішній індуктивний зв'язок. Часто таку схему називають автотрансформаторною, оскільки котушка зв'язку є частиною котушки індуктивності як первинного так і вторинного контурів. В цій схемі магнітного зв'язку між котушками індуктивності немає, а струм у вторинному контурі утворюється за рахунок ЕРС самоіндукції в котушці зв'язку  $L_{зв}$ , що виникає при проходженні через

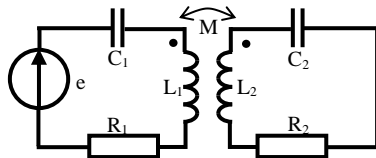


Рис.5.1. Система зв'язаних контурів з індуктивним трансформаторним зв'язком

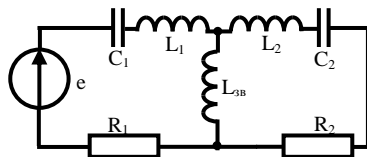


Рис. 5.2. Система контурів з внутрішнім індуктивним зв'язком

неї первинного струму.

У випадку, коли зв'язок між контурами здійснюється через ємність, то його називають ємнісним. Ємнісний зв'язок може бути внутрішнім (рис.5.3,а) та зовнішнім (рис. 5.3,б), причому внаслідок кращих можливостей змінювання ємності зв'язку  $C_{зв}$  друга схема застосовується частіше.

Очевидно, що в схемі з внутрішнім ємнісним зв'язком, яка аналогічна по суті до схеми з внутрішнім індуктивним зв'язком, елемент зв'язку

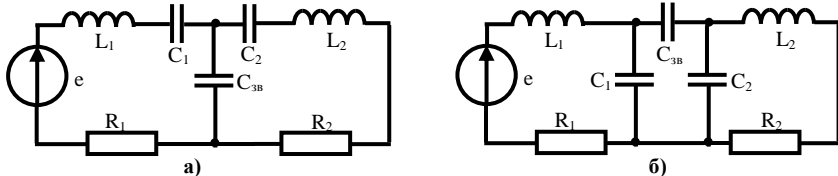


Рис. 5.3. Система контурів з внутрішнім (а) та зовнішнім ємнісним зв'язком

належить обом контурам одночасно. Навпаки в схемі з зовнішнім ємнісним зв'язком, ємність зв'язку не входить ні в один із коливальних контурів. Можлива також аналогічна схема з зовнішнім індуктивним зв'язком.

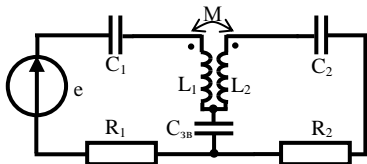


Рис. 5.4. Система контурів з комбінованим зв'язком

Іноколи використовують схеми, в яких одночасно існує як ємнісний, так і індуктивний зв'язок. Це схеми з так званим комбінованим зв'язком. Як приклад на рис.5.4 приведена схема, в якій існує індуктивний трансформаторний та

ємнісний зв'язок.

## 5.2 Еквівалентна схема та коефіцієнт зв'язку системи зв'язаних коливальних контурів

Шляхом еквівалентних перетворень приведені системи зв'язаних

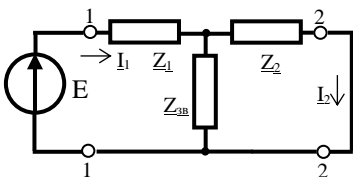


Рис.5.5. Т-подібна узагальнена схема заміщення зв'язаних контурів

коливальних контурів із зовнішнім, внутрішнім а також комбінованим зв'язком можна звести до Т-подібної еквівалентної схеми (рис.5.5), де  $Z_1 = R_1 + jX_1$  - комплексний опір первинного контура,  $Z_2 = R_2 + jX_2$  - комплексний опір вторинного контура,  $Z_{зв} = jX_{зв}$  - комплексний опір зв'язку між контурами. Найпростіше це можна

зробити для систем з внутрішнім зв'язком, а для інших систем цього можна досягти, якщо скористатись еквівалентним перетворенням трикутника в зірку

та еквівалентною схемою заміщення лінійного трансформатора. Тільки таким способом стає можливим визначити для схем із зовнішнім зв'язком та комбінованим зв'язком, що використовує індуктивний трансформаторний зв'язок, величину комплексного опору зв'язку  $\underline{Z}_{зв}$ .

Цей опір, через який відбувається зв'язок між контурами, дуже просто може бути знайдений для схем з індуктивним трансформаторним та внутрішніми зв'язками. В першому випадку опір елемента зв'язку визначається величиною взаємної індуктивності  $M$ . Тобто

$$\underline{Z}_{зв} = j\omega M.$$

Для внутрішнього індуктивного зв'язку

$$\underline{Z}_{зв} = j\omega L_{зв}.$$

а для внутрішнього ємнісного зв'язку

$$\underline{Z}_{зв} = \frac{1}{j\omega C_{зв}}.$$

Для кількісної оцінки ступеня зв'язку між контурами використовують поняття коефіцієнта зв'язку.

Коефіцієнтом зв'язку між контурами називається відношення модуля реактивного опору зв'язку до середнього геометричного реактивних опорів елементів першого та другого контурів, які мають той самий характер опору, що й опір зв'язку

$$k = \frac{|X_{зв}|}{\sqrt{X_{11} \cdot X_{22}}}. \quad (5.1)$$

Враховуючи, що при індуктивному трансформаторному зв'язку

$$X_{зв} = \omega M, \quad X_{11} = \omega L_1, \quad X_{22} = \omega L_2,$$

для коефіцієнта зв'язку маємо

$$k = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}. \quad (5.2)$$

Цей вираз аналогічний до виразу для коефіцієнта зв'язку між магнітно зв'язаними котушками індуктивності (4.6).

При внутрішньому індуктивному зв'язку

$$X_{зв} = \omega L_{зв}; \quad X_{11} = \omega(L_1 + L_{зв}); \quad X_{22} = \omega(L_2 + L_{зв}), \quad \text{тому}$$

$$k = \frac{L_{зв}}{\sqrt{(L_1 + L_{зв})(L_2 + L_{зв})}}. \quad (5.3)$$

При внутрішньому ємнісному зв'язку

$$X_{зв} = -\frac{1}{\omega C_{зв}}; \quad X_{11} = -\frac{C_1 + C_{зв}}{\omega C_1 \cdot C_{зв}}; \quad X_{22} = -\frac{C_2 + C_{зв}}{\omega C_2 \cdot C_{зв}},$$

тому

$$k = \sqrt{\frac{C_1 \cdot C_2}{(C_1 + C_{3B})(C_2 + C_{3B})}}. \quad (5.4)$$

Для інших видів зв'язаних контурів можна знайти коефіцієнти зв'язку лише після еквівалентних перетворень схем, про які говорилося раніше.

Відомо, що коефіцієнт зв'язку  $0 \leq k \leq 1$ , тому на практиці користуються наступною оцінкою рівня зв'язку між контурами: дуже слабкий зв'язок ( $k < 0,01$ ); слабкий зв'язок ( $0,01 \leq k < 0,05$ ); сильний зв'язок ( $0,05 \leq k < 0,9$ ); дуже сильний зв'язок ( $0,9 \leq k \leq 1$ ).

Реальні системи зв'язаних коливальних контурів в більшості випадків працюють при слабкому зв'язку.

### 5.3.Схеми заміщення системи зв'язаних коливальних контурів

Будь-яка схема системи зв'язаних контурів може бути представлена у вигляді Т- подібного чотириполюсника (див. рис.5.5) і характеризується деяким вхідним опором.

Якщо згадану еквівалентну схему системи зв'язаних контурів живити з боку первинного контура, а вторинний контур розімкнути між затискачами 2-2, то її вхідний опір дорівнює

$$\underline{Z}_{\text{ВХ1}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{3B}; \quad (5.5)$$

Аналогічно при живленні схеми з боку вторинного контура та при розімкнутому вході системи

$$\underline{Z}_{\text{ВХ2}} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{3B}; \quad (5.6)$$

Якщо ж систему розглядати у вигляді який вона має на рис.5.5., то її вхідний опір з боку затискачів 1-1 має вигляд

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{3B}}{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_{3B}}. \quad (5.7)$$

Знайдемо із виразів (5.5), (5.6) значення опорів  $\underline{Z}_1$  та  $\underline{Z}_2$  і підставимо їх в (5.7). Тоді

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \underline{Z}_{\text{ВХ1}} - \underline{Z}_{3B} + \frac{(\underline{Z}_{\text{ВХ2}} - \underline{Z}_{3B}) \cdot \underline{Z}_{3B}}{\underline{Z}_{\text{ВХ2}} - \underline{Z}_{3B} + \underline{Z}_{3B}} = \underline{Z}_{\text{ВХ1}} - \underline{Z}_{3B} + \frac{\underline{Z}_{\text{ВХ2}} \underline{Z}_{3B} - \underline{Z}_{3B}^2}{\underline{Z}_{\text{ВХ2}}},$$

або інакше

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \underline{Z}_{\text{ВХ1}} - \frac{\underline{Z}_{3B}^2}{\underline{Z}_{\text{ВХ2}}}. \quad (5.8)$$

Очевидно, що введення зв'язку між контурами змінює вхідний опір системи на деяку величину, яка називається комплексним опором внесеним із вторинного контура до первинного

$$\underline{Z}_{\text{BH}} = -\frac{\underline{Z}_{3\text{B}}^2}{\underline{Z}_{\text{BX}2}}. \quad (5.9)$$

При цьому вхідний комплексний опір будь-якої системи зв'язаних контурів складається з власного комплексного опору первинного контура  $\underline{Z}_{\text{BX}1}$  та комплексного внесеного опору

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \underline{Z}_{\text{BX}1} + \underline{Z}_{\text{BH}}. \quad (5.10)$$

При цьому маємо

$$\underline{Z}_{\text{BX}1} = R_{\text{BX}1} + jX_{\text{BX}1}; \quad R_{\text{BX}1} = R_1; \quad X_{\text{BX}1} = X_1 + X_{3\text{B}}.$$

Якщо врахувати, що опір зв'язку чисто реактивний,  $\underline{Z}_{3\text{B}} = jX_{3\text{B}}$ , а  $\underline{Z}_{\text{BX}2} = R_{\text{BX}2} + jX_{\text{BX}2}$ , то внесений опір

$$\underline{Z}_{\text{BH}} = \frac{X_{3\text{B}}^2}{R_{\text{BX}2} + jX_{\text{BX}2}} = \frac{R_{\text{BX}2}X_{3\text{B}}^2 - jX_{\text{BX}2}X_{3\text{B}}^2}{R_{\text{BX}2}^2 + X_{\text{BX}2}^2}. \quad (5.11)$$

Із виразу (5.11) знайдемо активну та реактивну складові внесеного із вторинного контура комплексного опору

$$R_{\text{BH}} = R_{\text{BX}2} \frac{X_{3\text{B}}^2}{R_{\text{BX}2}^2 + X_{\text{BX}2}^2} = \frac{X_{3\text{B}}^2}{Z_{\text{BX}2}^2} R_{\text{BX}2}; \quad (5.12)$$

$$X_{\text{BH}} = -X_{\text{BX}2} \frac{X_{3\text{B}}^2}{R_{\text{BX}2}^2 + X_{\text{BX}2}^2} = -\frac{X_{3\text{B}}^2}{Z_{\text{BX}2}^2} X_{\text{BX}2}. \quad (5.13)$$

В результаті вхідний опір системи зв'язаних контурів можна представити в вигляді

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = R_{\text{BX}} + jX_{\text{BX}} = (R_{\text{BX}1} + R_{\text{BH}}) + j(X_{\text{BX}1} + X_{\text{BH}}). \quad (5.14)$$

Виходячи із (5.14), систему зв'язаних контурів можна розглядати як двополіусник, що зображений на рис. 5.6. В результаті для струму в первинному контурі маємо

$$I_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{\text{BX}}} = \frac{\underline{E}}{(R_{\text{BX}1} + R_{\text{BH}}) + j(X_{\text{BX}1} + X_{\text{BH}})}. \quad (5.15)$$

Проаналізуємо частотні залежності активного та реактивного опорів, внесених із вторинного контура в первинний. Для цього (5.12) запишемо у вигляді

$$R_{\text{BH}} = \frac{X_{3\text{B}}^2}{R_{\text{BX}2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{X_{\text{BX}2}^2}{R_{\text{BX}2}^2}} = \frac{X_{3\text{B}}^2}{R_{\text{BX}2}} \cdot \frac{1}{1 + \xi_2^2} \quad (5.16)$$

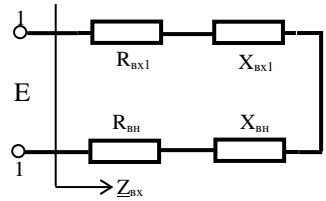


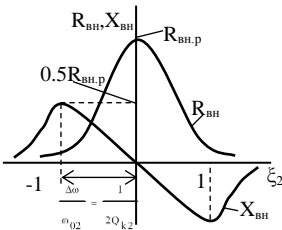
Рис. 5.6. Еквівалентна схема системи зв'язаних контурів з боку первинного контура

і врахуємо, що відношення  $\frac{X_{\text{ВХ}2}}{R_{\text{ВХ}2}} = \xi_2$  являє собою узагальнену розстройку відносно резонансної частоти  $\omega_{02}$  вторинного контура.

Аналогічно для внесеного реактивного опору

$$X_{\text{ВН}} = -\frac{X_{\text{ЗВ}}^2}{R_{\text{ВХ}2}} \cdot \frac{R_{\text{ВХ}2}}{1 + \frac{X_{\text{ВХ}2}^2}{R_{\text{ВХ}2}^2}} = -\frac{X_{\text{ЗВ}}^2}{R_{\text{ВХ}2}} \cdot \frac{\xi_2}{1 + \xi_2^2}. \quad (5.17)$$

Якщо врахувати, що при малих розстройках, коли  $\xi_2 \ll 1$ , опір зв'язку від частоти залежить слабо, то користуючись співвідношеннями (5.16) та (5.17), можна побудувати графіки знайдених залежностей  $R_{\text{ВН}}(\xi_2)$  та  $X_{\text{ВН}}(\xi_2)$ , які приведені на рис. 5.7. Як видно, внесений активний опір досягає максимуму при настроюванні вторинного контура в резонанс ( $X_{\text{ВН}}=0$ ). Тоді



$$R_{\text{ВН}}(\omega = \omega_{02}) = R_{\text{ВН,р}} = \frac{X_{\text{ЗВ}}^2}{R_{\text{ВХ}2}}. \quad (5.18)$$

**Рис. 5.7. Частотні характеристики опорів внесених в первинний контур**

Реактивний внесений опір при резонансі у вторинному контурі дорівнює нулю. Як і у випадку лінійного трансформатора, знак внесеного реактивного опору протилежний знаку реактивного опору вторинного контура.

Максимальні значення реактивний внесений опір має при значенні відносної рзстройки  $\frac{\Delta\omega}{\omega_{02}} = \pm \frac{1}{2Q_{R2}}$ . Вони складають величину  $|X_{\text{ВН}}| = R_{\text{ВН,р}}/2$ , оскільки при цьому  $\xi_2 = 1$ .

Якщо розстройку збільшувати, то це еквівалентно розмиканню вторинного контура, тому внесені з нього в первинний контур опори швидко зменшуються.

Тепер розглянемо систему зв'язаних контурів з боку затискачів 2-2, а затискачі 1-1 вхідного контура закоротимо. Тоді можна знайти вихідний опір системи при її живленні з боку вторинного контура.

Якщо використати такий самий метод аналізу, як і при пошуку вхідного опору, то одержимо

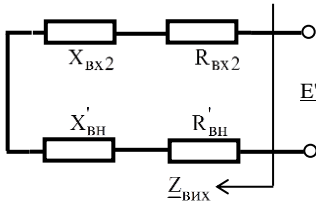
$$Z_{\text{Вих}} = Z_{\text{ВХ}2} - \frac{Z_{\text{ЗВ}}^2}{Z_{\text{ВХ}1}} = Z_{\text{ВХ}2} + Z'_{\text{ВН}}. \quad (5.19)$$

Опір, внесений із первинного контура у вторинний

$$\underline{Z}'_{\text{ВН}} = -\frac{Z_{3\text{В}}^2}{Z_{\text{ВХ1}}} = R'_{\text{ВН}} + jX'_{\text{ВН}}. \quad (5.20)$$

В цьому виразі активна та реактивна складові внесеного опору

$$R'_{\text{ВН}} = \frac{X_{3\text{В}}^2}{Z_{\text{ВХ1}}^2} R_{\text{ВХ1}}; \quad X'_{\text{ВН}} = -\frac{X_{3\text{В}}^2}{Z_{\text{ВХ1}}^2} X_{\text{ВХ1}}. \quad (5.21)$$



**Рис.5.8.** Еквівалентна схема системи зв'язаних контурів з боку вторинного контура

Еквівалентна схема кола з боку затискачів 2-2 має вигляд, показаний на рис. 5.8. Щоб оцінити струм  $\underline{I}_2$  вторинного контура системи, що створюється за рахунок ЕРС  $\underline{E}'$ , яка діє в первинному колі, треба знайти еквівалентну ЕРС. Ця ЕРС може бути знайдена як напруга на елементі зв'язку контурів, якщо вихідне коло системи розімкнуте. Тобто

$$\underline{E}' = \frac{\underline{E}}{Z_{\text{ВХ1}}} \cdot Z_{3\text{В}}. \quad (5.22)$$

Тоді струм у вторинному колі дорівнює

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}'}{Z_{\text{ВИХ}}} = \frac{\underline{E}'}{Z_{\text{ВХ2}} + Z'_{\text{ВН}}} = \frac{\underline{E}'}{(R_{\text{ВХ2}} + R'_{\text{ВН}}) + j(X_{\text{ВХ2}} + X'_{\text{ВН}})}. \quad (5.23)$$

#### 5.4. Вторинний струм в системі зв'язаних коливальних контурів

Корисним ефектом в системі зв'язаних коливальних контурів, що живиться від джерела ЕРС  $\underline{E}$ , найчастіше вважають виділення потужності вихідним (вторинним) струмом в активному опорі  $R_{\text{ВХ2}}$  вторинного контура. Окрім цього, іноді використовують як вихідні величини спади напруг, створювані тим же вторинним струмом на будь-якому із елементів вторинного контура.

Знайдемо струм  $\underline{I}_2$  на виході системи зв'язаних коливальних контурів, який створює корисні ефекти, шляхом аналізу еквівалентної схеми на рис.5.5.

Будемо вважати струми  $\underline{I}_1$  та  $\underline{I}_2$  контурними і складемо контурне рівняння для вихідного контура

$$\underline{I}_2(Z_2 + Z_{3\text{В}}) - \underline{I}_1 Z_{3\text{В}} = 0. \quad (5.24)$$

Із виразу (5.24), якщо врахувати (5.6), одержимо

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_1 Z_{3\text{В}}}{Z_2 + Z_{3\text{В}}} = \frac{\underline{I}_1 Z_{3\text{В}}}{Z_{\text{ВХ2}}}. \quad (5.25)$$

Цей вираз зручно використовувати для розрахунку струму  $\underline{I}_2$ , якщо відомий струм  $\underline{I}_1$ .

Якщо скористатись виразом (5.15), то для струму вторинного кола  $\underline{I}_2$  матимемо



$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E} \cdot \underline{Z}_{3B}}{\underline{Z}_{BX2} \cdot \underline{Z}_{BX}}. \quad (5.26)$$

Корисний вторинний струм можна виразити не тільки через величину вхідного опору  $\underline{Z}_{BX}$ , але й з використанням величини вихідного опору  $\underline{Z}_{ВХ}$ , що визначається виразом (5.19). Для цього скористаємось виразом (5.8) і на основі (5.26) одержимо

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_{3B} \underline{E}}{\underline{Z}_{BX2} \left( \underline{Z}_{BX1} - \frac{\underline{Z}_{3B}^2}{\underline{Z}_{BX2}} \right)} = \frac{\underline{Z}_{3B} \underline{E}}{\underline{Z}_{BX2} \cdot \underline{Z}_{BX1} - \underline{Z}_{3B}^2}. \quad (5.27)$$

Якщо в знаменнику виразу (5.27) винести за дужки  $\underline{Z}_{BX1}$ , то

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_{3B} \underline{E}}{\underline{Z}_{BX1} \left( \underline{Z}_{BX2} - \frac{\underline{Z}_{3B}^2}{\underline{Z}_{BX1}} \right)}.$$

Тобто з урахуванням (5.20) маємо

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_{3B} \underline{E}}{\underline{Z}_{BX1} \underline{Z}_{ВХ}}, \quad (5.28)$$

що є ідентичним до виразу (5.23).

## 5.5. Резонанси в системі зв'язаних коливальних контурів

Резонансом в системі зв'язаних коливальних контурів називається явище, при якому досягає максимуму амплітуда струму в будь-якому із контурів.

Оскільки корисним вважається струм вторинного контура  $\underline{I}_2$ , то настроювання системи зв'язаних контурів в резонанс рееструють в момент досягнення максимуму струмом  $\underline{I}_2$  при незмінній ЕРС  $\underline{E}$  джерела живлення.

При малих опорах втрат в контурах максимума їх струмів одержують при дуже близьких частотах, тому вважають, що резонанс настає одночасно в усій системі.

Активні опори втрат обох контурів  $R_1$  та  $R_2$  змінювати неможливо, тому процес настроювання полягає в змінюванні параметрів реактивних елементів системи.

### 5.5.1. Часткові резонанси в системі зв'язаних коливальних контурів

Для визначення умов настроювання на резонанс системи зв'язаних контурів звернемося до співвідношень (5.26) та (5.28). Із них виходить, що є дві можливості одержати максимальне значення струму  $\underline{I}_2$ .

Якщо вибором параметрів контурів забезпечити мінімальне значення модуля вхідного опору системи  $\underline{Z}_{BX}$ , то видно, що струм  $\underline{I}_2$ , визначаємий

співвідношенням (5.26) досягає максимуму. Це можна забезпечити у випадку, коли реактивна вкладава вхідного опору  $X_{\text{вх}}$  дорівнює нулю. Такий режим роботи системи має назву першого часткового резонансу.

Із виразу (5.28) виходить, що другий метод настроювання може полягати в одержанні найменшої величини модуля вихідного опору системи  $Z_{\text{вих}}$ . Для цього необхідно, щоб  $X_{\text{вих}} = 0$ . Одержуваний в цьому випадку режим називають другим частковим резонансом.

Як видно із виразу (5.14), в разі першого часткової резонансу повинна виконуватись умова

$$X_{\text{вх}} = X_{\text{вх1}} + X_{\text{вн}} = 0. \quad (5.29)$$

Це означає, що двополюсник на рис.5.6., який відображає еквівалентну схему системи з боку вхідних затискачів, повинен бути настроєний на резонанс.

Враховуючи (5.13), умову (5.29) можна записати у вигляді

$$X_{\text{вх1}} = \frac{X_{\text{зв}}^2}{Z_{\text{вх2}}^2} X_{\text{вх2}}. \quad (5.30)$$

Оскільки  $X_{\text{вх1}} = X_1 + X_{\text{зв}}$ , то настроювання системи контурів на перший частковий резонанс здійснюють шляхом змінювання реактивного опору  $X_1$  первинного контура.

Таким чином, якщо реалізується перший частковий резонанс, то

$$X_1 = \text{var}; \quad X_{\text{зв}} = \text{const}; \quad X_2 = \text{const}. \quad (5.31)$$

В цьому разі вторинний струм  $I_2$  досягає значення, що може бути знайдене за допомогою виразу (5.26). Причому треба враховувати, що  $X_{\text{вх}} = 0$ ,  $Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} = R_{\text{вх1}} + R_{\text{вн}}$ , а  $Z_{\text{зв}} = jX_{\text{зв}}$ . Тоді маємо

$$I_2^I = \frac{jX_{\text{зв}} E}{Z_{\text{вх2}} (R_{\text{вх1}} + R_{\text{вн}})}. \quad (5.32)$$

Діюче значення вторинного струму на частоті першого часткового резонансу

$$I_2^I = \frac{X_{\text{зв}} E}{Z_{\text{вх2}} (R_{\text{вх1}} + R_{\text{вн}})} = \frac{X_{\text{зв}} E}{Z_{\text{вх2}} (R_{\text{вх1}} + \frac{X_{\text{зв}}^2}{Z_{\text{вх2}}^2} R_{\text{вн}})}. \quad (5.33)$$

За аналогією, умовою другого часткового резонансу є рівність нулю реактивної складової вихідного опору системи

$$X_{\text{вих}} = X_{\text{вх2}} + X'_{\text{вн}} = 0. \quad (5.34)$$

Або з урахуванням рівняння (5.21)

$$X_{\text{вх2}} = \frac{X_{\text{зв}}^2}{Z_{\text{вх1}}^2} X_{\text{вх1}}. \quad (5.35)$$

Оскільки  $X_{\text{вх2}} = X_2 + X_{\text{зв}}$ , то настроювання на другий частковий резонанс здійснюють за допомогою змінювання опору  $X_2$  при незмінних

величинах опорів  $X_{зв}$  та  $X_1$ . Тобто

$$X_2 = \text{var}; X_{зв} = \text{const}; X_1 = \text{const}. \quad (5.36)$$

Резонансне значення струму  $I_2$  в цьому випадку знайдемо із співвідношення (5.28), врахувавши, що  $Z_{вix} = R_{вix} = R_{вx2} + R'_{вн}$ , а  $Z_{зв} = jX_{зв}$

$$I_2^{\text{II}} = \frac{jX_{зв} E}{Z_{вx1} (R_{вx2} + R'_{вн})}. \quad (5.37)$$

Діюче значення струму

$$I_2^{\text{II}} = \frac{X_{зв} E}{Z_{вx1} (R_{вx2} + R'_{вн})} = \frac{X_{зв} E}{Z_{вx1} (R_{вx2} + \frac{X_{зв}^2}{Z_{вx1}^2} R_{вx1})}. \quad (5.38)$$

Слід зазначити, що при настроюванні системи на перший частковий резонанс досягає максимуму не тільки первинний струм, а й вторинний. На відміну від цього при другому частковому резонансі максимуму досягає лише струм  $I_2$ , а струм первинного контура  $I_1$  при цьому мінімальний, оскільки досягає максимуму активний опір, внесений із вторинного контура в первинний.

Настроювання контурів системи на перший та другий часткові резонанси використовують лише тоді, коли конструкція пристрою дозволяє змінювати параметри лише одного із двох контурів.

### 5.5.2. Основний або індивідуальний резонанс

Якщо є можливість змінювати параметри реактивних елементів обох контурів системи зв'язаних коливальних контурів при незмінному опорі зв'язку, то проводять настроювання на основний або індивідуальний резонанс. Параметри реактивних елементів в цьому випадку вибирають таким чином, щоб забезпечити рівність нулю уявної складової власного комплексного опору кожного із контурів, якщо інший розімкнутий і не впливає на перший.

Тобто при настроюванні на індивідуальний резонанс

$$X_2 = \text{var}; X_1 = \text{var}; X_{зв} = 0. \quad (5.39)$$

При цьому реактивні опори кожного із контурів окремо дорівнюють нулю

$$X_{вx1} = 0; X_{вx2} = 0. \quad (5.40)$$

Це означає, що при основному резонансі виконуються умови обох часткових резонансів (5.30) та (5.35). Система рівнянь (5.40) якраз і визначає умови досягнення в колі індивідуального резонансу.

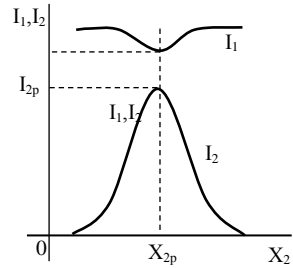
Значення діючого комплексного вторинного струму в разі основного резонансу можна знайти за допомогою будь-якого із виразів (5.33) або (5.38).

Оскільки в даному випадку виконується умова (5.40), то

$\underline{Z}_{\text{вх}1} = R_{\text{вх}1}$ ,  $\underline{Z}_{\text{вх}2} = R_{\text{вх}2}$  і резонансний вторинний струм дорівнює

$$I_{2\text{p}} = \frac{X_{3\text{в}} E}{R_{\text{вх}2} (R_{\text{вх}1} + \frac{X_{3\text{в}}^2}{R_{\text{вх}2}})}. \quad (5.41)$$

В разі практичного настроювання системи зв'язаних контурів на основний резонанс, яке здійснюється при слабкому зв'язку між ними, попередньо настроюють первинний контур при відсутності реакції з боку вторинного. Щоб забезпечити останнє, вторинний контур розмикають або сильно розстроюють. Далі замикають коло вторинного контура і при слабкому зв'язку між контурами змінюють реактивний опір  $X_{\text{вх}2} = X_2 + X_{3\text{в}}$  шляхом варіювання величиною опору  $X_2$ .



**Рис. 5.9.** Залежність струмів контурів від реактивного опору  $X_2$

В момент резонансу, коли  $X_{\text{вх}2} = 0$ , а опір  $\underline{Z}_{\text{вх}2} = R_{\text{вх}2}$  і має мінімальне значення, струм у вторинному колі досягає максимуму і дорівнює  $I_{2\text{p}}$  (рис. 5.9). Оскільки при цьому активний опір, що вноситься в первинне коло, досягає максимального значення

$$R_{\text{вн}} = \frac{X_{3\text{в}}^2}{R_{\text{вх}2}},$$

то первинний струм має мінімальну величину.

### 5.5.3. Складні резонанси в системі зв'язаних коливальних контурів

Якщо настроювання зв'язаних контурів на перший та другий частковий резонанси, а також на основний резонанс супроводжується наступним вибором оптимального опору зв'язку, який забезпечує умови передачі максимальної потужності із первинного контура у вторинний, то говорять про настроювання системи зв'язаних контурів на складні резонанси. Очевидно, що можлива практична реалізація трьох видів складного резонансу.

Нехай в системі зв'язаних контурів здійснений режим першого часткового резонансу. Користуючись співвідношенням (5.33), знайдемо оптимальний опір зв'язку  $X_{3\text{в опт}1}$ , при якому досягає максимуму вторинний струм  $I_2^1$  в разі першого часткового резонансу. Для цього знайдемо похідну струму та прирівняємо її до нуля

$$\frac{dI_2^1}{dX_{3B}} = E \frac{R_{BX1}Z_{BX2} - \frac{X_{3B}^2}{Z_{BX2}} R_{BX2}}{\left( R_{BX1}Z_{BX2} + \frac{X_{3B}^2}{Z_{BX2}} R_{BX2} \right)^2} = 0. \quad (5.42)$$

Із виразу (5.42) одержимо

$$R_{BX1}Z_{BX2} = \frac{X_{3B}^2}{Z_{BX2}} R_{BX2},$$

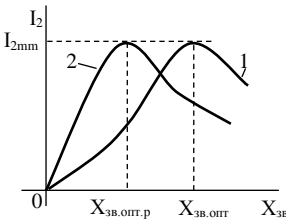
звідки маємо

$$X_{3B \text{ оптI}} = Z_{BX2} \sqrt{\frac{R_{BX1}}{R_{BX2}}}. \quad (5.43)$$

Якщо здійснити підстановку (5.43) в вираз для струму (5.33), то одержимо значення вторинного струму, яке буде одержане в разі найвигіднішого зв'язку

$$I_{2\text{мм}} = \frac{EZ_{BX2} \sqrt{\frac{R_{BX1}}{R_{BX2}}}}{Z_{BX2} \left( R_{BX1} + \left( Z_{BX2} \sqrt{\frac{R_{BX1}}{R_{BX2}}} \right)^2 \frac{R_{BX2}}{Z_{BX2}^2} \right)} = \frac{E}{2\sqrt{R_{BX1}R_{BX2}}}. \quad (5.44)$$

Це значення струму носить назву “максимум максиморум”, оскільки не може бути збільшене регулюванням параметрів реактивних елементів системи.



**Рис. 5.10.** Залежність вторинного струму від опору зв'язку при реалізації часткових I та основного 2 резонансів

Тепер припустимо, що в системі зв'язаних контурів попереду був реалізований другий частковий резонанс і будемо діяти так, як і в першому випадку. Тоді одержимо, що

$$X_{3B \text{ оптII}} = Z_{BX1} \sqrt{\frac{R_{BX2}}{R_{BX1}}}. \quad (5.45)$$

Легко показати, що вторинний струм в цьому випадку матиме таке ж значення

$I_{2\text{мм}}$ , як і при здійсненні першого часткового резонансу.

Наявність ефекту оптимального зв'язку наглядно ілюструється залежністю I вторинного струму від опору зв'язку (рис.5.10), яка має явно виражений максимум, коли  $X_{3B} = X_{3B \text{ опт}}$ .

Умову оптимального зв'язку в разі першого складного резонансу (5.43) з урахуванням (5.12) можна записати інакше

$$\frac{X_{зв\text{опт}1}^2}{Z_{вх2}^2} R_{вх2} = R_{вх1} = R_{вн}. \quad (5.46)$$

Тобто при оптимальному зв'язку активний внесений опір повинен бути однаковим з активним власним опором первинного контура. Враховуючи, що в разі першого складного резонансу  $X_{вх1} = -X_{вн}$ , умови його виникнення можна записати у вигляді співвідношення

$$R_{вх1} + jX_{вх1} = R_{вн} - jX_{вн},$$

тобто

$$Z_{вх1} = Z_{вн}^*. \quad (5.47)$$

Однак вираз (5.47) є одночасно і умовою передачі максимальної потужності із первинного контура у вторинний, тобто від джерела енергії до споживача.

Розглянемо тепер третій випадок складного резонансу, коли в системі попередньо здійснений основний або індивідуальний резонанс. Оскільки в цьому випадку  $X_{вх1} = X_{вх2} = 0$ ,  $Z_{вх1} = R_{вх1}$ , а  $Z_{вх2} = R_{вх2}$ , то для оптимального опору зв'язку на основі (5.43) або (5.45) одержимо

$$X_{зв\text{опт}p} = \sqrt{R_{вх1}R_{вх2}}. \quad (5.48)$$

При цьому струм  $I_2$  досягає такого ж значення, які при інших двох варіантах складного резонансу, однак, як видно із кривої 2 на рис. 5.10., тепер можна обмежитись набагато слабшим зв'язком між контурами. Дійсно, скориставшись виразами (5.43) та (5.48), можна знайти, що

$$\frac{X_{зв\text{опт}p}}{X_{зв\text{опт}}} = \frac{R_{вх2}}{Z_{вх2}} \ll 1. \quad (5.49)$$

Таким чином, з точки зору мінімізації впливу одного контура на інший в системі зв'язаних контурів бажано мати основний резонанс, тобто індивідуально настроювати кожний контур, а вже потім вибрати оптимальний зв'язок між ними. Такий випадок складного резонансу називають повним резонансом в системі зв'язаних коливальних контурів.

Наявність максимумів на кривих струмів, зображених на рис. 5.10, можна пояснити тим, що ЕРС, створювана у вторинному контурі первинним струмом, має лінійну залежність від опору зв'язку, а активна складова внесеного до вторинного контура опору має від опору зв'язку квадратичну залежність. Якщо  $X_{зв} < X_{зв\text{опт}}$ , то активна складова опору вторинного контура  $R_{вих} = R_{вх2} + R'_{вн}$  визначається в основному власним активним опором  $R_{вх2}$ , який залишається незмінним. Тому при зростанні величини опору зв'язку  $X_{зв}$  і вторинний струм зростає.

Якщо ж  $X_{зв} > X_{зв\text{опт}}$ , то сумарний активний опір вторинного контура  $R_{вих}$  визначається в основному внесеним опором  $R'_{вн}$ , який зростає швидше,

ніж внесена у вторинний контур ЕРС. Як наслідок, при зростанні  $X_{зв}$ , коли  $X_{зв} > X_{зв\text{ опт}}$ , струм вторинного контура зменшується.

#### 5.5.4. Оптимальний коефіцієнт зв'язку між контурами та фактор зв'язку

Із трьох отриманих вище оптимальних значень реактивного опору зв'язку найбільш прийнятним є найменший можливий опір зв'язку  $X_{зв\text{ опт}}$ , при якому забезпечується максимум максимуму вторинного струму  $I_2$ . Це пояснюється тим, що в цьому випадку забезпечується максимум активної потужності у вторинному колі при мінімальному рівні зв'язку між коливальними контурами. Одержимо вираз для оптимального коефіцієнта зв'язку між контурами, що відповідає цьому випадку.

Як відомо, в загальному випадку для коефіцієнта зв'язку згідно з (5.1) маємо

$$k = \frac{|X_{зв}|}{\sqrt{X_{11} \cdot X_{22}}},$$

де  $X_{11}$  та  $X_{22}$  – реактивні опори елементів першого та другого контурів, що мають однаковий характер з реактивним опором елемента зв'язку.

Оскільки поблизу резонансу  $X_L \approx |X_C| \approx \rho$ , то коефіцієнт зв'язку

$$k \approx \frac{|X_{зв}|}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}, \quad (5.50)$$

де  $\rho_1$  та  $\rho_2$  – характеристичні опори первинного і вторинного контурів системи відповідно.

Якщо скористатись виразом (5.48) то оптимальний коефіцієнт зв'язку

$$k_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{R_{вх1} R_{вх2}}{\rho_1 \rho_2}} = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\rho_1 \rho_2}}.$$

Або інакше

$$k_{\text{опт}} = \frac{1}{\sqrt{Q_{к1} Q_{к2}}} = \sqrt{d_{к1} d_{к2}}. \quad (5.51)$$

Якщо ж контури системи ідентичні, то

$$k = \frac{1}{Q_k} = d_k. \quad (5.52)$$

Тобто, для радіотехнічних контурів оптимальний коефіцієнт зв'язку звичайно складає величину, що вимірюється одиницями та долями процента.

В теорії зв'язаних коливальних контурів дуже поширеним є поняття фактору зв'язку  $A$ , який характеризує ступінь відхилення рівня зв'язку від оптимального

$$A = \frac{|X_{3B}|}{X_{3B \text{ опт } p}} = \frac{|X_{3B}|}{\sqrt{R_{\text{вх}1} R_{\text{вх}2}}}. \quad (5.53)$$

Якщо врахувати (5.50), то матимемо

$$A \approx k \cdot \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{R_{\text{вх}1} R_{\text{вх}2}}} = k \cdot \sqrt{Q_{k1} Q_{k2}} = \frac{k}{k_{\text{опт}}}. \quad (5.54)$$

Очевидно, що при оптимальному зв'язку між контурами системи фактор зв'язку  $A=1$ .

## 5.6. Частотна вибірність системи зв'язаних коливальних контурів

### 5.6.1. Частотні характеристики системи зв'язаних коливальних контурів

Якщо при аналізі частотно-вибірних властивостей системи зв'язаних коливальних контурів скористатися узагальненою Т-подібною схемою заміщення (рис.5.5) і вважати корисний вторинний струм  $I_2$  вихідною величиною, а незмінну ЕРС  $\underline{E}$  – вхідною, то можна зробити висновок, що передатна комплексна провідність  $Y_{21}(j\omega) = \frac{I_2}{\underline{E}}$  буде повністю характеризувати властивості системи в частотній області.

Для знаходження передатної провідності  $Y_{21}(j\omega)$  можна скористатись і одним із виразів (5.26) або (5.28). В останньому випадку отримаємо

$$Y_{21}(j\omega) = \frac{I_2}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_{3B}}{\underline{Z}_{\text{вх}1} \underline{Z}_{\text{вих}}} = \frac{jX_{3B}}{\underline{Z}_{\text{вх}1} (\underline{Z}_{\text{вх}2} + \underline{Z}'_{\text{вн}})}. \quad (5.55)$$

Щоб спростити подальші математичні викладки вважатимемо, що первинний та вторинний коливальні контури ідентичні. Тоді очевидно, що

$$\underline{Z}_{\text{вх}1} = \underline{Z}_{\text{вх}2} = \underline{Z} = R + jX. \quad (5.56)$$

Окрім того із виразів (5.20) та (5.21) виходить, що

$$\underline{Z}'_{\text{вн}} = R'_{\text{вн}} + jX'_{\text{вн}} = \frac{X_{3B}^2}{Z_{\text{вх}1}^2} (R_{\text{вх}1} - jX_{\text{вх}1}) = \frac{X_{3B}^2}{Z^2} (R - jX). \quad (5.57)$$

Скориставшись виразами (5.56) та (5.57), на основі (5.55) одержимо

$$Y_{21}(j\omega) = \frac{jX_{3B}}{(R + jX)((R + jX) + \frac{X_{3B}^2}{Z^2} (R - jX))} = \frac{jX_{3B}}{(R + jX)^2 + X_{3B}^2}. \quad (5.58)$$

У знаменнику виразу (5.58) розкриємо дужки та винесемо за них множник  $R^2$



$$Y_{21}(j\omega) = \frac{jX_{3B}}{R^2 + 2jXR - X^2 + X_{3B}^2} = \frac{jX_{3B}}{R^2(1 + j2\frac{X}{R} - \frac{X^2}{R^2} + \frac{X_{3B}^2}{R^2})}. \quad (5.59)$$

Оскільки відношення  $X/R$  характеризує узагальнену розстройку контурів, а  $X_{3B}/R$  – фактор зв'язку  $A$ , то

$$Y_{21}(j\omega) = \frac{jX_{3B}}{R^2(1 + A^2 - \xi^2 + j2\xi)} = \frac{jA}{R(1 + A^2 - \xi^2 + j2\xi)}. \quad (5.60)$$

В подальшому обмежимося розглядом лише амплітудно-частотних та резонансних характеристик системи, оскільки всі кількісні показники вибірності визначаються за їх допомогою. Тоді АЧХ передатної комплексної провідності дорівнює

$$Y_{21}(\omega) = \frac{I_2}{E} = \frac{A}{R\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}, \quad (5.61)$$

а резонансна характеристика вторинного струму

$$I_2(\omega) = Y_{21}(\omega) \cdot E = \frac{A \cdot E}{R\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (5.62)$$

При оптимальному зв'язку між контурами та повному резонансі в системі фактор зв'язку  $A=1$ , а узагальнена розстройка  $\xi=0$ . Тому вторинний струм дорівнює

$$I_2 = I_{2\text{min}} = \frac{E}{2R},$$

а передатна провідність

$$Y_{21} = Y_{21\text{min}} = \frac{1}{2R}.$$

Якщо пронормувати залежності (5.61) та (5.62) відносно найбільших значень провідності і струму, то одержимо нормовану АЧХ передатної провідності та нормовану резонансну характеристику вторинного струму, які співпадають одна з одною

$$\frac{Y_{21}(\omega)}{Y_{21\text{min}}} = \frac{I_2}{I_{2\text{min}}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (5.63)$$

Із виразу (5.63) видно, що нормовані частотні та резонансні характеристики системи зв'язаних коливальних контурів є парними функціями розстройки  $\xi$  і тому вони симетричні відносно осі ординат, положення якої відповідає нульовій розстройці.

Для визначення екстремумів одержаних характеристик достатньо знайти екстремуми виразу, що є під коренем співвідношення (5.63). Спочатку знайдемо похідну цього виразу

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} ((1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2) &= 2(1 + A^2 - \xi^2) \cdot (-2\xi) + 8\xi = \\ &= -4\xi - 4A^2\xi + 4\xi^3 + 8\xi = 4\xi(1 - A^2 + \xi^2), \end{aligned}$$

та прирівняємо результат до нуля

$$4\xi(1 - A^2 + \xi^2) = 0. \quad (5.64)$$

Рівняння (5.64) дає три значення узагальненої розстройки, які відповідають екстремальним значенням частотних та резонансних характеристик

$$\xi_0 = 0; \quad \xi_{1,2} = \pm\sqrt{A^2 - 1}. \quad (5.65)$$

Перше значення розстройки  $\xi_0$  відповідає резонансним частотам  $\omega_0$  кожного із ідентичних контурів, а розстройки  $\xi_1$  та  $\xi_2$  мають фізичний сенс лише у випадку, коли фактор зв'язку  $A \geq 1$ . Причому в разі оптимального зв'язку між контурами, коли  $A=1$ , всі три значення розстройки співпадають.

Знайдемо значення частот  $\omega_{p1}$  та  $\omega_{p2}$ , що відповідають розстройкам  $\xi_1$  та  $\xi_2$  і називаються частотами зв'язку. При цьому врахуємо, що

$$\xi_{1,2} \approx 2 \frac{\Delta\omega_{1,2}}{\omega_0} Q_k = 2 \frac{\Delta\omega_{1,2}}{\omega_0} \cdot \frac{1}{d_k} = \pm\sqrt{A^2 - 1}.$$

Якщо контури системи ідентичні, то  $A = k/d_k$  і одержимо, що

$$\xi_{1,2} \approx 2 \frac{\Delta\omega_{1,2}}{\omega_0} = \pm\sqrt{k^2 - d_k^2} \quad (5.66)$$

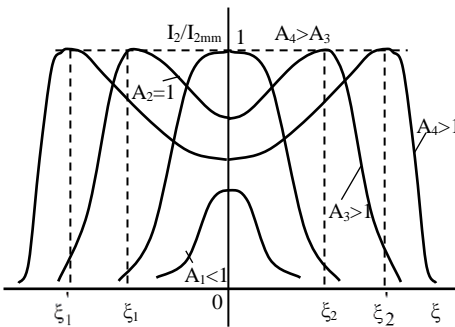


Рис. 5.11. Нормовані резонансні характеристики вторинного струму системи зв'язаних контурів

Коли частота зовнішнього коливання  $\omega = \omega_{p1}$ , то на основі (5.66) маємо

$$\frac{2(\omega_{p1} - \omega_0)}{\omega_0} = -\sqrt{k^2 - d_k^2}$$

і перша частота зв'язку

$$\omega_{p1} = \omega_0 \left(1 - \frac{\sqrt{k^2 - d_k^2}}{2}\right). \quad (5.67)$$

Коли ж  $\omega = \omega_{p2}$ , то

$$\omega_{p2} = \omega_0 \left(1 + \frac{\sqrt{k^2 - d_k^2}}{2}\right). \quad (5.68)$$

Як видно, перша із частот зв'язку  $\omega_{p1} < \omega_0$ , а друга  $\omega_{p2} > \omega_0$ . При посиленні ступеня зв'язку між контурами різниця  $\omega_{p2} - \omega_{p1}$  збільшується. Якщо ж зв'язок слабшає, то частоти зв'язку зближуються і при оптимальному зв'язку, коли  $k = k_{\text{опт}} = d_k$ , вони співпадають з резонансною частотою контурів

$\omega_0$ . У цьому випадку частотні характеристики системи зв'язаних коливальних контурів мають не три а лише один екстремум, що відповідає резонансу на частоті  $\omega = \omega_0$ .

На рис. 5.11 зображені нормовані резонансні харак-теристики системи зв'язаних контурів, побудовані у від-повідності з виразом (5.63) для різних рівнів зв'язку між контурами. У випадку, коли рівень зв'язку між контурами менший від оптимального ( $A < 1$ ) резонансна крива має лише один екстремум і струм  $I_2$  не досягає свого максимуму максимуму. При цьому, якщо розстройка нульова, в системі маємо індивідуальний резонанс, а значення нормованої резонансної характеристики (5.63)

$$\frac{I_2}{I_{2\text{мм}}} = \frac{2A}{1 + A^2} < 1 \quad (5.69)$$

Якщо зв'язок оптимальний ( $A=1$ ), резонансна крива також має один екстремум, однак в системі зв'язаних контурів на частоті  $\omega = \omega_0$  спостерігається повний резонанс і струм у вторинному контурі досягає свого максимально можливого значення. В цьому випадку

$$\frac{I_2}{I_{2\text{мм}}} = \frac{2A}{1 + A^2} = 1.$$

При зв'язку між контурами більшому ніж оптимальний ( $A > 1$ ) резонансні криві мають три екстремуми: два максимуми, що відповідають розстройкам  $\xi_1 = \sqrt{A^2 - 1}$  і  $\xi_2 = \sqrt{A^2 - 1}$ , та один мінімум при  $\xi_0 = 0$ .

Максимальним значенням струму  $I_2$  відповідають частоти зв'язку  $\omega_{p1}$  та  $\omega_{p2}$ , на яких вторинний струм досягає значення  $I_{2\text{мм}}$ , оскільки нормоване значення струму

$$\frac{I_2}{I_{2\text{мм}}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - A^2 + 1)^2 + 4A^2 - 4}} = 1.$$

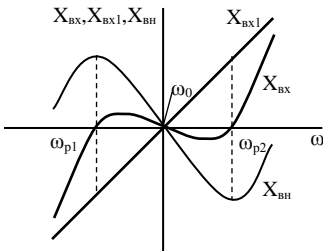
На резонансній частоті контурів  $\omega_0$  нормоване значення вторинного струму визначається співвідношенням (5.69) і явно менше за одиницю.

Отже, при зв'язку меншому ніж оптимальний та при оптимальному зв'язку частотні та резонансні характеристики системи зв'язаних коливальних контурів односторонні, а при зв'язку більшому ніж оптимальний – двосторонні (див. рис. 5.11).

Наявність трьох екстремумів в останньому випадку пояснюється сильним впливом на реактивну складову вхідного опору системи реактивного опору, внесеного із вторинного контура в первинний (рис. 5.12).

При сильному зв'язку між контурами, коли  $k > k_{\text{опт}}$ , модуль реактивного опору, внесеного із вторинного контура в первинний  $X_{\text{вн}}$  зростає при розстройці відносно частоти  $\omega_0$  швидше ніж власний реактивний вхідний опір первинного контура  $X_{\text{вх1}}$ . Коли розстройка зростає, то внесений

реактивний опір досягає максимуму, тобто швидкість його зростання поступово зменшується, а потім він починає спадати. Як результат, при розстройках  $\xi_1$  та  $\xi_2$ , що відповідають частотам зв'язку  $\omega_{p1}$  та  $\omega_{p2}$ , вхідний реактивний опір системи  $X_{вх} = X_{вх1} + X_{вн}$  дорівнює нулю і в цій



**Рис. 5.12. Реактивний вхідний опір системи зв'язаних контурів та його складові**

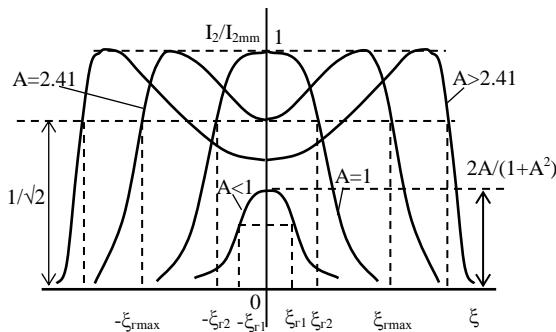
зв'язку ( $A > 1$ ) обидва струми  $I_1$  та  $I_2$  мають мінімальні значення, оскільки, як видно із рис. 5.7, при цьому максимального значення досягає внесений в первинний коливальний контур активний опір.

системі мають місце два додаткових резонанси. На частотах  $\omega_{p1}$  та  $\omega_{p2}$ , що відповідають цим резонансам, повний вхідний опір системи зв'язаних контурів має мінімальне значення і струм первинного контура максимальний. Природно, що і струм вторинного контура на цих частотах також досягає максимально можливих значень.

На третій резонансній частоті системи, що співпадає з резонансною частотою коливальних контурів  $\omega_0$ , при сильному

### 5.6.2. Вибірні властивості системи зв'язаних коливальних контурів

Як і для послідовного та паралельного коливальних контурів вибірні властивості системи зв'язаних коливальних контурів можна оцінити кількісно за допомогою трьох основних



**Рис. 5.13. Визначення смуги пропускання системи зв'язаних контурів**

параметрів: смуги пропускання, коефіцієнта прямокутності та вибірності. Причому у випадку зв'язаних контурів ці параметри залежать не тільки від параметрів коливальних контурів але й від рівня зв'язку між ними.

Оцінимо смугу пропускання системи зв'язаних контурів при різних рівнях зв'язку між ними та порівняємо її зі смугою пропускання одиночних коливальних контурів. Передусім зазначимо, що ширина смуги пропускання системи залежить від рівня зв'язку між контурами і має найбільше значення, коли при ступені зв'язку більшому ніж оптимальний впадина нормованої резонансної характеристики досягає рівня

$1/\sqrt{2}$  від її максимального значення (рис. 5.13). Це пов'язано з тим, що, як і для одиночних коливальних контурів, смугою пропускання системи зв'язаних контурів називають інтервал частот, в границях якого значення амплітудно-частотної або резонансної характеристики не знижується більш ніж в  $1/\sqrt{2}$  разів в порівнянні з їх максимальними значеннями.

Таким чином, у випадку, що відповідає найширшій смузі пропускання системи при розстройці  $\xi=0$  для значення нормованої резонансної характеристики згідно з (5.63) маємо

$$\frac{I_2}{I_{2\text{mm}}} = \frac{2A}{1+A^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5.70)$$

Розв'яжемо рівняння (5.70) відносно фактора зв'язку  $A$  і одержимо, що

$A = \sqrt{2} \pm 1$ . Із двох розв'язків візьмемо той, що відповідає більш сильному зв'язку між контурами, і одержимо значення фактора зв'язку при найбільш широкій смузі пропускання. В цьому випадку  $A=2.41$ .

Якщо ступінь зв'язку перевищує вказаний рівень, тобто  $A > 2.41$ , то впадина на резонансній кривій опуститься нижче за рівень  $1/\sqrt{2}$  від максимального значення АЧХ і смуга пропускання системи розривається на дві окремі частини (див. рис. 5.13).

У випадку слабкого зв'язку між контурами ( $A < 1$ ) максимальне нормоване значення вторинного струму визначається виразом (5.69). Знайдемо значення узагальненої розстройки  $\xi_r$  на границях смуги пропускання для цього випадку. У відповідності з визначенням смуги пропускання і враховуючи (5.63) та (5.69) одержимо

$$\frac{I_2}{I_{2\text{mm}}} = \frac{2A}{\sqrt{(1+A^2-\xi_r^2)^2+4\xi_r^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2A}{1+A^2}.$$

Або інакше

$$\begin{aligned} \sqrt{(1+A^2-\xi_r^2)^2+4\xi_r^2} &= \sqrt{2}(1+A^2); \\ (1+A^2)^2 - 2\xi_r^2(1+A^2) + \xi_r^4 + 4\xi_r^2 &= 2(1+A^2)^2. \end{aligned}$$

Маємо бікватратне рівняння відносно шуканої розстройки  $\xi_r$

$$(\xi_r^2)^2 + 2\xi_r^2(1-A^2) - (1+A^2)^2 = 0. \quad (5.71)$$

Розв'яжемо рівняння (5.71) відносно  $\xi_r^2$

$$\xi_r^2 = \frac{-2(1-A^2) \pm \sqrt{4(1-A^2)^2 + 4(1+A^2)^2}}{2} = -(1-A^2) \pm \sqrt{2(A^4+1)}.$$

Для шуканої розстройки  $\xi_r$  маємо

$$\xi_r = \sqrt{(A^2-1) \pm \sqrt{2(A^4+1)}} \quad (5.72)$$

У випадку, коли в (5.72) перед коренем підкорінного виразу вибрано

знак мінус, маємо уявне значення розстройки, що не має фізичного смислу. Окрім того, при дуже слабкому зв'язку, коли  $k \leq 0,01$ , а фактор зв'язку  $A \ll 1$ , для розстройки, що відповідає граничним частотам смуги пропускання маємо

$$\xi_{\Gamma} \approx \sqrt{-1 + \sqrt{2}} \approx 0,64. \quad (5.73)$$

Або

$$2Q_{\kappa} \frac{\Delta\omega_{\Gamma}}{\omega_0} \approx 0,64. \quad (5.74)$$

Із виразу (5.74) для смуги пропускання системи одержимо

$$\Delta\omega_c = 2\Delta\omega_{\Gamma} \approx 0,64 \frac{\omega_0}{Q_{\kappa}} = 0,64 \cdot \Delta\omega_{\kappa}, \quad (5.75)$$

де  $\Delta\omega_{\kappa}$  - смуга пропускання одиночного коливального контура.

Очевидно, що в разі слабкого зв'язку при однакових параметрах коливальних контурів смуга пропускання системи зв'язаних контурів вужча ніж смуга пропускання одиночного коливального контура.

Щоб оцінити кількісно можливості змінювання ширини смуги пропускання системи зв'язаних контурів за рахунок регулювання рівня зв'язку, запишемо вираз для оцінки нормованого вторинного струму на границях смуги пропускання при більшому ніж оптимальний зв'язку ( $A \geq 1$ )

$$\frac{I_2}{I_{2\text{mm}}} = \frac{2A}{\sqrt{(1+A^2 - \xi_{\Gamma}^2)^2 + 4\xi_{\Gamma}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Цьому співвідношенню відповідає рівняння

$$(1+A^2)^2 - 2\xi_{\Gamma}^2(1+A^2) + (\xi_{\Gamma}^2)^2 + 4\xi_{\Gamma}^2 = 8A^2,$$

або

$$(\xi_{\Gamma}^2)^2 + 2\xi_{\Gamma}^2(1-A^2) + (1+A^2)^2 - 8A^2 = 0. \quad (5.76)$$

Розв'яжемо рівняння (5.76) відносно  $\xi_{\Gamma}^2$

$$\xi_{\Gamma}^2 = A^2 - 1 \pm 2A.$$

Звідси шукана розстройка дорівнює

$$\xi_{\Gamma} = \sqrt{A^2 - 1 \pm 2A}. \quad (5.77)$$

В останньому виразі не слід враховувати знак мінус перед складовою  $2A$  в підкорінному виразі оскільки при факторі зв'язку  $A > 2,41$  врахування цього знаку дозволяє отримати розстройки, що відповідають не граничним частотам смуги пропускання а границям розриву останньої. Якщо ж фактор зв'язку  $1 < A < 2,41$ , то врахування цього знаку приводить до одержання уявних значень розстройки, що не має фізичного смислу.

На основі (5.77) при максимально допустимому рівні зв'язку, коли  $A = 2,41$ , для шуканої розстройки одержимо  $\xi_{\Gamma} \approx 3,1$ . В результаті

максимальна ширина смуги пропускання системи зв'язаних коливальних контурів

$$\Delta\omega_c = 2\Delta\omega_r \approx 3,1 \frac{\omega_0}{Q_k} = 3,1\Delta\omega_k. \quad (5.78)$$

В разі оптимального зв'язку, коли  $A=1$

$$\xi_r = \sqrt{2} \approx 1,41; \quad \Delta\omega_c \approx 1,41\Delta\omega_k. \quad (5.79)$$

Таким чином, в залежності від рівня зв'язку між контурами ширина смуги пропускання системи зв'язаних контурів може змінюватись від  $\Delta\omega_c \approx 0,64\Delta\omega_k$  до  $\Delta\omega_c \approx 3,1\Delta\omega_k$ . Ця властивість системи широко використовується на практиці.

Щоб оцінити коефіцієнт прямокутності  $K_{\Pi}$  системи зв'язаних коливальних контурів, треба, користуючись вищеприведеною методикою, знайти ширину смуги пропускання на рівні 0.1 від максимального значення АЧХ (резонансної характеристики) системи при різних рівнях зв'язку. Такі розрахунки показують, що при дуже слабкому зв'язку ( $A \leq 0,01$ ) коефіцієнт прямокутності

$$K_{\Pi} = \frac{\Delta\omega_c}{\Delta\omega_{c0,1}} \approx \frac{0,64\Delta\omega_k}{3\Delta\omega_k} = 0,213.$$

У випадку оптимального зв'язку ( $A=1$ )

$$K_{\Pi} \approx \frac{1,41\Delta\omega_k}{4,44\Delta\omega_k} = 0,318.$$

Якщо ж маємо максимально допустимий рівень зв'язку між контурами ( $A=2,41$ ), то

$$K_{\Pi} \approx \frac{3,1\Delta\omega_k}{7,28\Delta\omega_k} = 0,426.$$

Очевидно, що при будь-якому дозволеному рівні зв'язку вибірні властивості системи зв'язаних коливальних контурів вищі, ніж у одиночних коливальних контурів, які мають коефіцієнт прямокутності  $K_{\Pi} \approx 0,1$ . Причому вибірні властивості системи контурів покращуються при збільшенні рівня зв'язку. Ці обидві обставини обумовлені тим, що при розстройках частоти зовнішнього сигналу відносно резонансної частоти контурів струм вторинного контура зменшується не тільки за рахунок збільшення повного опору вторинного контура, але й за рахунок зменшення наведеної в цьому контурі ЕРС, яка пропорційна величині первинного струму. А цей струм також знижується при розстройках.

Як наслідок, крутизна спадів амплітудно-частотних та резонансних характеристик систем зв'язаних коливальних контурів вища ніж у одиночних коливальних контурів. Причому, при підвищенні рівня зв'язку між контурами, коефіцієнт прямокутності зростає внаслідок більшого рівня впливу одного контура на інший. На жаль системи зв'язаних коливальних

контурів складні в настроюванні та важко реалізуються у варіантах, що дозволяють перенастроювання в діапазоні частот.

### 5.7. Енергетичні співвідношення в системі зв'язаних коливальних контурів

Передача енергії через систему зв'язаних коливальних контурів супроводжується втратами в активному опорі первинного контура та виділенням корисної енергії в активному опорі навантаження вторинного контура.

Ефективність передачі енергії із первинного контура у вторинний характеризується коефіцієнтом корисної дії (ККД) системи

$$\eta = \frac{P_{R_2}}{P_{R_1} + P_{R_2}}, \quad (5.80)$$

де  $P_{R_1}$  та  $P_{R_2}$  - потужність, що витрачається в первинному контурі, та потужність, що виділяється в навантаженні, відповідно.

Для потужностей  $P_{R_1}$  і  $P_{R_2}$  можна записати

$$P_{R_1} = I_1^2 R_{\text{вх}1} = I_1^2 R_1; \quad P_{R_2} = I_2^2 R_{\text{вх}2} = I_2^2 R_2. \quad (5.81)$$

З урахуванням рівняння зв'язку між струмами первинного та вторинного контурів (5.25) для корисної потужності одержимо

$$P_{R_2} = \left( \frac{I_1 X_{3B}}{Z_2} \right)^2 R_{\text{вх}2} = I_1^2 R_{\text{вн}}. \quad (5.82)$$

Отже, корисна потужність – це є потужність, що виділяється за рахунок дії первинного струму на активному опорі, внесеному із вторинного контура в первинний.

Якщо скористатись співвідношеннями (5.81) та (5.82), то на основі (5.80) матимемо

$$\eta = \frac{R_{\text{вн}}}{R_{\text{вх}1} + R_{\text{вн}}} = \frac{R_{\text{вн}}}{R_1 + R_{\text{вн}}} = \frac{1}{1 + R_1/R_{\text{вн}}}. \quad (5.83)$$

Таким чином, в разі ідеалізованого джерела напруги ( $R_1=0$ ), що живить систему зв'язаних контурів, ККД визначається лише співвідношенням власного активного опору первинного контура  $R_1$  та внесеного в цей контур опору  $R_{\text{вн}}$ .

На рис. 5.14 приведені залежності, що характеризують енергетичні співвідношення в системі. Очевидно, що для збільшення ККД треба збільшувати рівень зв'язку між контурами, а це призводить до зростання внесеного активного опору  $R_{\text{вн}}$ . Однак і вторинний струм, і корисна потужність  $P_{R_2}$  досягають максимуму у випадку, коли  $R_{\text{вн}}=R_1$ , а ККД при цьому складає лише 0,5. Аналогічний результат був уже отриманий раніше (див. розд. 1.10.4) для загального випадку живлення пасивного кола від



реального джерела ЕРС .

Передача найбільшої потужності із первинного контура у вторинний можлива при настроюванні системи в резонанс. Якщо скористатись еквівалентною схемою на рис. 5.6 , то видно, що при резонансі  $X_{вх1}=X_{вн}$  і ККД дорівнює

$$\eta_p = \frac{R_{вн\ p}}{R_1 + R_{вн\ p}} ,$$

де  $R_{вн\ p}$  - резонансний внесений активний опір.

Резонансний внесений опір дорівнює

$$R_{вн\ p} = \frac{X_{зв}^2}{R_{вх\ 2}} = \frac{X_{зв}^2}{R_2} .$$

Тоді для ККД на резонансній частоті матимемо

$$\eta_p = \frac{X_{зв}^2}{R_1 R_2 + X_{зв}^2} .$$

Очевидно, що ККД зростає при збільшенні рівня зв'язку між контурами. Якщо в системі зв'язаних коливальних контурів спостерігається повний резонанс, при якому зв'язок

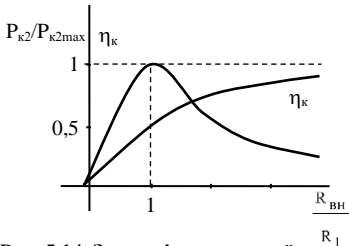


Рис. 5.14. Залежність корисної потужності та ККД від відношення  $R_{вн}/R_1$

оптимальний

$$X_{зв} = X_{зв\ опт} = \sqrt{R_1 R_2} ,$$

то ККД системи дорівнює 0,5 і не залежить від співвідношення між опором втрат первинного та вторинного контурів.

## Список літератури

1. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. - Л.: Энергия, 1972. – 816 с.
2. Попов В.П. Основы теории цепей: Учеб. Для вузов. - М.: Высш. шк., 1998. – 575 с.
3. Костин Г.А. Электрорадиотехнические цепи и сигналы. Конспект лекций. Часть 1. Основы теории электрорадиотехнических цепей синусо-идального тока. - Харьков: ВИРТА, 1979. – 126 с.
4. Белов Е.Н. Электрорадиотехнические цепи и сигналы. Конспект лекций. Часть 2. Анализ линейных электрорадиотехнических цепей в частотной и временной областях. - Харьков:ВИРТА,1982. - 180 с.
5. Кондратенко А.П., Медведев М.Ю. Основы теории цепей. Учебное пособие. Часть 1. Анализ цепей при гармоническом воздействии. - Харьков: ХВУ, 1997. – 158 с.
6. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов. - М.: Энергоатомиздат, 1989. - 528 с.
7. Лосев А.К. Линейные радиотехнические цепи: Учебник для радиотехн. специальностей вузов. - М.: Высш. шк., 1971. - 560 с.
8. Перхач В.С. Теоретична електротехніка: Лінійні кола: Підручник.- К.: Вища шк., 1992. - 439 с.