ХАРКІВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ПОВІТРЯНИХ СИЛ

Є. О. Мількевич, Д. В. Максюта, В. Д. Карлов

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ

Частина 2

Аналіз лінійних та нелінійних кіл в перехідному та усталеному режимі

Навчальний посібник

Харків 2005

УДК 621.372(075.8)

Мількевич Є. О., Максюта Д. В., Карлов В. Д. Основи теорії кіл. Аналіз лінійних та нелінійних кіл в перехідному та усталеному режимі: Навчальний посібник. – Харків: ХУПС, 2005, Ч. 2. – 268 с.

В другій частині навчального посібника, який за своїм змістом відповідає робочій програмі дисципліни "Основи теорії кіл", викладені основні відомості про класичний та операторний методи аналізу перехідних процесів в колах першого і другого порядку, розглянута теорія лінійних прохідних чотириполюсників та частотних реактивних фільтрів, визначені основні поняття, що стосуються нелінійних і параметричних кіл, проведено аналіз режимів роботи найпростіших кіл з розподіленими параметрами.

Навчальний посібник призначений для студентів радіотехнічних спеціальностей і може бути корисним науковим співробітникам, аспірантам та інженерам відповідних спеціальностей.

Ілюстрацій – 158; бібліографія – 15 найменувань.

Вступ	7
Розділ 1	8
Перехідні процеси в електричних колах	8
1.1. Класичний метод аналізу перехідних процесів	8
1.1.1. Поняття про перехідний процес	8
1.1.2. Закони комутації електричних кіл	9
1.1.3. Диференціальні рівняння електричних кіл	11
1.1.4. Зв'язок диференціального рівняння з комплексною частотною	
характеристикою кола	15
1.1.5. Розв'язання диференціального рівняння кола	17
1.1.6. Загальна схема застосування класичного методу аналізу перехідних	
процесів	20
1.2. Застосування класичного методу розв'язування диференціальних рівн	янь
для аналізу кіл першого порядку	21
1.2.1. Аналіз перехідних процесів у колах першого порядку класичним	01
методом	21
1.2.2. Спрощена методика застосування класичного методуаналізу перехід	НИХ
	26
1.2.3. Аналіз перехідних процесів у колі першого порядку спрощеним	20
	29
1.3. Перехідні процеси в колах другого порядку	
1.5.1. Осооливостт розв'язання диференціальних рівнянь кіл другого поряд	цку 26
132 Напруги та струм в послідорному ВІС колі у ріш ному режимі	
1.3.3. Включения в послідовно RI С-коло постійної напруги	50
1.3.4. Включения в послідовне RLC-коло постиної напруги	- 5 47
1.4. Часові характеристики пінійних кіп	7
1 4 1 Типові імпульсні збулження та їх властивості	55
1 4 2 Перехілна та імпульсна характеристики пінійних кіл	58
Розліп 2	50
Операторний метод аналізу пінійних електричних кіл	
2.1 Математичні основи операційного обчислення	64
2.1.1. Поняття про перетворення Лапласа	64
2.1.2. Основні властивості перетворення Лапласа	65
2.2. Закон Ома в операторній формі	68
2.3. Закони Кірхгофа в операторній формі	71
2.4. Загальна схема застосування операторного методу для аналізу перехід	них
процесів	72
2.5. Розрахунок перехідних процесів операторним методом	73
2.6. Операторні характеристики лінійних кіл	76
2.6.1. Поняття про операторні характеристики лінійних кіл	76
2.6.2. Нулі та полюси операторних характеристик лінійних кіл	78
	3

Зміст

2.6.3. Зв'язок між операторними та часовими характеристиками лінійних к	іл
	80
Розділ З	82
Загальні відомості про нелінійні та параметричні елементи і кола	82
3.1. Основні властивості нелінійних елементів і кіл	82
3.1.1. Поняття про нелінійний елемент та нелінійне коло	82
3.1.2. Класифікація нелінійних елементів	83
3.1.3. Нелінійні активні опори	84
3.1.4. Нелінійні інлуктивності	
315 Непінійні ємності	.87
3 1 6 Нелінійні кола постійного струму	91
317 Метоли апроксимації характеристик нелінійних елементів	93
3.2. Загальні відомості про параметричні елементи і кола	97
3.2.1 Поняття про параметрициі елементи та кола	07
3.2.2. Ецементарии про нараметричні слементи та кола	
Вордія Л	101
	104
4.1. Основни в постиними параметрами	104
4.1. Основні визначення, класифікація та рівняння прохідних	104
чотириполюсників	104
4.1.1. Визначення та класифікація чотириполюсників	104
4.1.2. Рівняння чотириполюсників	106
4.1.3. Способи визначення первинних параметрів чотириполюсника	113
4.1.4. Зміна напрямку передачі енергії через чотириполюсник	121
4.2. Схеми заміщення та вторинні параметри чотириполюсника	122
4.2.1. Схеми заміщення чотириполюсника	122
4.2.2. Характеристичні параметри прохідного чотириполюсника	125
4.2.3. Характеристичні параметри симетричного чотириполюсника	127
4.3. Основні характеристики та способи з'єднання чотириполюсників	129
4.3.1. Передатні характеристики прохідного чотириполюсника	130
4.3.2. Рівняння симетричного чотириполюсника з гіперболічними функція	МИ
	131
4.3.3. Каскадне з'єднання чотириполюсників	133
4.3.4. Рівняння складних чотириполюсників в матричній формі	135
4.3.5. Експлуатаційні параметри чотириполюсника	140
Розділ 5	144
Частотні електричні фільтри	144
5.1. Основні характеристики та умови пропускання симетричних фільтрів.	144
5.1.1. Призначення та класифікація частотних фільтрів	144
5.1.2. Особливості частотних характеристик фільтрів	145
5.1.3. Умови пропускання реактивних фільтрів	149
5.2. Реактивні фільтри нижніх частот	152
5.2.1 Схеми та граничні частоти смуги пропускання фільтрів нижніх часто	
e enemi in ipuni in incient engin nponyekunna quibipib nakuna nuero	152
•••••••••••••••••••••••••••••••••••••••	154

5.2.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази фільтрів нижніх частот	5.2.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази фільтрів нижніх частот 154 5.2.4. Розрахунок реактивних фільтрів пихніх частот 156 5.3. Реактивні фільтри верхніх частот 157 5.3.1. Схеми та траничні частоти смути пропускання фільтрів верхніх частот 157 5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот 157 5.3.4. Сими та траничні частоти смути пропускання фільтрів верхніх частот 160 5.3.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот 161 5.4. Растогні характеристики повторного опору смугових фільтрів 162 5.4.1. Схеми та траничні частоти смути пропускання смугових фільтрів 162 5.4.2. Частогні характеристики повторного опору смугових фільтрів 166 5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів 166 5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів 167 5.5.1. Схеми та траничні частоти смуги придушення загороджувальних фільтрів 168 5.5.1. Схеми та траничні частоти смуги придушення загороджувальних фільтрів 170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.4.4. Розрахунок реактивни і частоти смуги придушення загороджувальних фільтрів 172 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 172 5.6.1. Послідовн	5.2.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів нижніх частот	.153
5.2.4. Розрахунок реактивних фільтрів нжніх частот 156 5.3. Реактивні фільтри верхніх частот 157 5.3.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання фільтрів верхніх частот 157 5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот 157 5.3.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази фільтрів верхніх частот 160 5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смугових фільтрів 162 5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смугових фільтрів 162 5.4.2. Частотні характеристики повторного опору смугових фільтрів 162 5.4.4. Скеми та граничні частоти смуги пропускання смугових фільтрів 166 5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів 166 5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів 167 5.5. Реактивні загороджувальни фільтри 168 5.5.1. Схеми та граничні частоти смуги придушення загороджувальних фільтрів 170 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Козрахунок реактивні фільтри 171 5.5.4. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 172 5.6. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.2. Основні властивост	5.2.4. Розрахунок реактивних фільтрів нжніх частот 156 5.3. Реактивні фільтри верхніх частот 157 5.3.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання фільтрів верхніх частот 157 5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот 160 5.3.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот 160 5.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот 161 5.4. Реактивні смугові фільтри 162 5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смугових фільтрів 162 5.4.2. Частотні характеристики повторного опору смугових фільтрів 165 5.4.3. Аналіз коефіціснтів згасання та фази смуговихфільтрів 166 5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів 166 5.5.4. Реактивні загороджувальні фільтри 168 5.5.1. Схеми та граничні частоти смуги придушення загороджувальних фільтрів 168 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 170 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 171 5.6. Модифіковані реактивни загороджувальних фільтрів 172 5.6. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 173 5.6. Подифіковані реактивних кіл <t< td=""><td>5.2.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази фільтрів нижніх частот</td><td>.154</td></t<>	5.2.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази фільтрів нижніх частот	.154
5.3. Реактивні фільтри верхніх частот 157 5.3.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання фільтрів верхніх частот 157 5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот 158 5.3.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази фільтрів верхніх частот 160 5.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот 161 5.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот 161 5.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот 162 5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смутових фільтрів 162 5.4.2. Частотні характеристики повторного опору смутових фільтрів 166 5.4.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази смутовихфільтрів 166 5.4.4. Розрахунок реактивних смутових фільтрів 167 5.5. Реактивні загороджувальні фільтри 168 5.5.1. Схеми та граничні частоти смуги придушення загороджувальних фільтрів 170 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 173 5.6.1. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.1. Задача синтез	5.3. Реактивні фільтри верхніх частот 157 5.3.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання фільтрів верхніх частот 157 5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот 158 5.3.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази фільтрів верхніх частот 160 5.4.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот 161 5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смутових фільтрів 162 5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смутових фільтрів 162 5.4.2. Частотні характеристики повторного опору смутових фільтрів 166 5.4.4. Чозрахунок реактивних смутових фільтрів 166 5.4.4. Розрахунок реактивних смутових фільтрів 166 5.5.4.4. Розрахунок реактивних смутових фільтрів 167 5.5.1. Схеми та граничні частоти смуги придушення загороджувальних фільтрів 168 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Чозрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 171 5.5.2. Частотні марактеристик загасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Послідовно-похідні модифікован	5.2.4. Розрахунок реактивних фільтрів нжніх частот	.156
5.3.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання фільтрів верхніх частот 157 5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот	5.3.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання фільтрів верхніх частот 157 5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот 157 5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот 160 5.3.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот 161 5.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот 162 5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смугових фільтрів 162 5.4.2. Частотні характеристики повторного опору смутових фільтрів 166 5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів 166 5.5.2. Фастотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 168 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6.4. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралелью-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.3. Сосбливості акритерії фізичної реалізовності вхідних операторних загасання фільтрів 177 5.6.4. Поралельо-похідні модифіковані фільтри 174	5.3. Реактивні фільтри верхніх частот	.157
157 5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот158 5.3.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази фільтрів верхніх частот160 5.3.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот	157 5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот	5.3.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання фільтрів верхніх часто	от
5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот	5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот		.157
5.3.3. Аналіз коефіціснтів згасання та фази фільтрів верхніх частот	5.3.3. Аналіз коефіціснтів згасання та фази фільтрів верхніх частот	5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот	.158
5.3.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот	5.3.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот. 161 5.4. Реактивні смугові фільтри 162 5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смугових фільтрів	5.3.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази фільтрів верхніх частот	.160
5.4. Реактивні смугові фільтри 162 5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смугових фільтрів 162 5.4.2. Частотні характеристики повторного опору смугових фільтрів 165 5.4.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази смуговихфільтрів 166 5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів 166 5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів 167 5.5. Реактивні загороджувальні фільтри 168 5.5.1. Схеми та граничні частоти смуги придушення загороджувальних 168 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 173 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 7.6.3. Особливості та мплітудно-частотних характеристик згасання фільтри 177 5.6.4. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 5.6.4. Особливості та критерії фізичної реалізовності вхідних операторних характеристик кіл <	5.4. Реактивні смутові фільтри	5.3.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот	.161
5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смугових фільтрів	5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смугових фільтрів	5.4. Реактивні смугові фільтри	.162
5.4.2. Частотні характеристики повторного опору смугових фільтрів 165 5.4.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази смуговихфільтрів 166 5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів 167 5.5. Реактивні загороджувальні фільтри 168 5.5.1. Схеми та граничні частоти смуги придушення загороджувальних 168 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 168 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 185 синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних операторних характеристик лінійних кіл 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик лінійних кіл 187	5.4.2. Частотні характеристики повторного опору смугових фільтрів 165 5.4.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази смуговихфільтрів 166 5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів 167 5.5. Реактивні загороджувальні фільтри 168 5.5.1. Схеми та граничні частоти смуги придушення загороджувальних 168 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 168 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 7.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтри 179 Р о з д і л 6. 185 6.1. Задача сингезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних операторних характеристик лінійних кіл 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик реактивних кіл	5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смугових фільтрів	.162
5.4.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази смуговихфільтрів	5.4.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази смуговихфільтрів	5.4.2. Частотні характеристики повторного опору смугових фільтрів	.165
5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів	5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів	5.4.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази смуговихфільтрів	.166
5.5. Реактивні загороджувальні фільтри	5.5. Реактивні загороджувальні фільтри	5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів	.167
5.5.1. Схеми та граничні частоти смуги придушення загороджувальних 168 фільтрів 168 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивних загороджувальних фільтрів 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 179 Р о з д і л 6. 185 Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних 187 6.4. Методи синтезу реактивних кіл 187 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника метод	5.5.1. Схеми та граничні частоти смуги придушення загороджувальних 168 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 170 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 171 5.5.5. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 7.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтри 177 7.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 179 Р о з д і л 6. 185 185 Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних операторних характеристик лінійних кіл 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик лінійних кіл 187 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез реактивних кіл 193	5.5. Реактивні загороджувальні фільтри	.168
фільтрів 168 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 179 Р о з д і л 6 185 Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик реактивних кіл 186 6.4. Методи виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Кауера) 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Фостера 192 6.4.2. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 193	фільтрів 168 5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 179 P о з д і л 6. 185 Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та сосбливості вхідних операторних характеристик лінійних кіл 186 6.4. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.1. Метод виділення на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 <td< td=""><td>5.5.1. Схеми та граничні частоти смуги придушення загороджувальних</td><td></td></td<>	5.5.1. Схеми та граничні частоти смуги придушення загороджувальних	
5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 179 Р о з д і л 6. 185 Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та сосбливості вхідних операторних характеристик реактивних кіл 187 6.4. Методи синтезу реактивних двополюсників 189 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197	5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів 170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 5.6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та сосбливості вхідних операторних характеристик лінійних кіл 186 6.4. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників 199 Р о з д і л 7. 203 7.1. Рівняння довгої лінії та їх аналіз 203 7.1. Поняття про кола з розподіленими параметрами 203 <td>фільтрів</td> <td>.168</td>	фільтрів	.168
170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів	170 5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 5.6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик лінійних кіл 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик реактивних кіл 187 6.4. Методи синтезу реактивних кіл 189 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 191 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників 199 Р о з д	5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільт	рів
5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 179 Р о з д і л 6	5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів 171 5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 179 Р о з д і л 6 185 Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик лінійних кіл 187 6.4. Методи синтезу реактивних двополюсників 189 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників 199 Р о з д і л 7 203 7.1. Рівняння довгої лінії та їх аналіз 203 7.1.1. Поняття про кола з розподілен		.170
5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 179 Р о з д і л 6 185 Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та сосбливості вхідних операторних характеристик реактивних кіл 187 6.4. Методи синтезу реактивних двополюсників 189 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197	5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів 172 5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 179 Р о з д і л 6. 185 Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик лінійних кіл 186 6.4. Методи синтезу реактивних кіл 187 6.4. Методи виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників 199 Р о з д і л 7. 203 Електричні кола з розподіленими параметрами 203 7.1. Гівняння довгої лінії та їх аналіз 203	5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів	.171
5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 179 7 о з д і л 6	5.6. Модифіковані реактивні фільтри 173 5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 типу М 179 Р о з д і л б. 185 Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних 187 6.4. Методи синтезу реактивних двополюсників 189 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників 199 Р о з д і л 7. 203 Електричні кола з розподіленими параметрами 203 7.1. Гівняння довгої лінії та їх аналіз 203	5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів	.172
5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри 174 5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 177 типу М 179 Р о з д і л б. 185 Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик лінійних кіл 186 6.4. Методи синтезу реактивних кіл 187 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197	5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри	5.6. Модифіковані реактивні фільтри	.173
5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 179 7 озділ б	5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри 177 5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів 179 Р о з д і л 6. 179 Р о з д і л 6. 185 Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик лінійних кіл 186 6.4. Методи синтезу реактивних двополюсників 189 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників 199 Р о з д і л 7 203 Електричні кола з розподіленими параметрами 203 7.1. Гівнялня довгої лінії та їх аналіз 203	5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри	.174
5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів типу М	5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів типу М	5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри	.177
типу М	типу М	5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів	3
Розділ б	Розділ б	типу М	.179
Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 185 операторних характеристик лінійних кіл 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних 186 6.4. Методи синтезу реактивних двополюсників 187 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи онитези двополюсника методом Кауера 197	Синтез частотно-вибірних кіл 185 6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних 187 6.4. Методи синтезу реактивних кіл 187 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсника методом Кауера 199 Р о з д і л 7 203 7.1. Рівняння довгої лінії та їх аналіз 203 7.1.1. Поняття про кола з розподіленими параметрами 203	Розділ б	.185
6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 операторних характеристик лінійних кіл 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних 186 6.4. Методи синтезу реактивних двополюсників 187 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтеру ліційних истириченистися 197	6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл 185 6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 операторних характеристик лінійних кіл 186 6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних 186 карактеристик реактивних кіл 186 6.4. Методи синтезу реактивних двополюсників 187 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників 199 Р о з д і л 7	Синтез частотно-вибірних кіл	.185
6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 операторних характеристик лінійних кіл	6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних 186 операторних характеристик лінійних кіл	6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл	.185
операторних характеристик лінійних кіл	операторних характеристик лінійних кіл	6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних	
6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик реактивних кіл	6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик реактивних кіл	операторних характеристик лінійних кіл	.186
характеристик реактивних кіл	характеристик реактивних кіл	6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних	
6.4. Методи синтезу реактивних двополюсників 189 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтеру діційних нотирикаметодом Кауера 100	6.4. Методи синтезу реактивних двополюсників 189 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера) 189 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників 199 Р о з д і л 7	характеристик реактивних кіл	.187
 6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера)	6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера)	6.4. Методи синтезу реактивних двополюсників	.189
 6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера	6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера 192 6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера) 193 6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників 199 Р о з д і л 7	6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера)	.189
6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера)	6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера)	6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера	.192
6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера	6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера 197 6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників 199 Р о з д і л 7	6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера)	.193
6.5 Ochoph churchy hillight y hothophophophophophophophophophophophophoph	6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників 199 Р о з д і л 7	6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера	.197
о.э. Основи синтсзу лінійних чотириполюсників	Розділ 7	6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників	.199
Розділ 7	Електричні кола з розподіленими параметрами	Розділ 7	.203
	7.1. Рівняння довгої лінії та їх аналіз	Електричні кола з розподіленими параметрами	.203
Електричні кола з розподіленими параметрами	7.1.1. Поняття про кола з розподіленими параметрами	7.1. Рівняння довгої лінії та їх аналіз	.203
Електричні кола з розподіленими параметрами		7.1.1. Поняття про кола з розподіленими параметрами	.203
Електричні кола з розподіленими параметрами	7.1.1. Поняття про кола з розподіленими параметрами	7.1. Рівняння довгої лінії та їх аналіз	.203
Електричні кола з розподіленими параметрами		7.1.1. Поняття про кола з розподіленими параметрами	.203

 7.1.3. Усталений режим роботи однорідної довгої лінії
7.1.4. Рівняння однорідної довгої лінії з гіперболічними функціями
7.2. Довга лінія в режимі біжучих хвиль
7.3. Первинні та вторинні параметри однорідної довгої лінії
7.3.1. Неспотворююча довга лінія
7.3.2. Довга лінія з малими втратами
7.4. Режим стоячих хвиль в ідеальній довгій лінії
7.4.1. Довга лінія, розімкнена на кінці
7.4.2. Короткозамкнена довга лінія
7.4.3. Довга лінія, навантажена на реактивний опір
7.5. Режим змішаних хвиль в ідеальній довгій лінії
7.5.1. Довга лінія, навантажена на активний опір,що не дорівнює хвильовому
7.5.2. Довга лінія, навантажена на комплексний опір
7.5.3. Трансформація опору відрізками ідеальної довгої лінії
7.6. Особливості режимів роботи реальних довгих ліній
7.6.1. Розподіл напруг та струмів вздовж лінії
7.6.2. Вхідний опір довгої лінії з втратами
7.7. Методи розрахунку довгих ліній
7.7.1. Розрахунок вхідного опору довгої лінії
7.7.2. Колова діаграма Вольперта-Сміта
7.7.3. Розрахунок опорів та провідностей за допомогою колової діаграми256
7.8. Практичне застосування реальних довгих ліній
7.8.1. Довга лінія як фідер
7.8.2. Довга лінія як реактивний двополюсник
7.8.3. Довга лінія як узгоджуючий пристрій
7.8.4. Довга лінія як резонансний двополюсник
Додаток 1
Література

ВСТУП

Навчальний посібник призначений для підготовки студентів, які навчаються за контрактом за спеціальністю "Радіоелектронні пристрої, системи та комплекси", і відповідає навчальній програмі з дисципліни "Основи теорії кіл".

Друга частина навчального посібника "Аналіз лінійних та нелінійних кіл в перехідному та усталеному режимі" охоплює матеріал останніх шести тем навчальної дисципліни, що вивчаються в третьому семестрі.

В цій частині посібника викладено основи аналізу лінійних кіл першого і другого порядку як класичним, так і операторним методом, розглянуто основні властивості нелінійних і параметричних кіл, а також базові положення теорії чотириполюсників та частотних фільтрів. Також дається поняття про кола із розподіленими параметрами і аналізуються їх властивості на основі використання положень теорії кіл. При цьому основна увага приділяється аналізу режимів роботи та особливостям практичного застосування найбільш використовуваного на практиці виду цих кіл – довгих ліній.

Для кращого засвоєння матеріалу посібника та глибшого розуміння фізичного смислу явищ, що протікають у колах, доцільно використовувати збірники задач [11–14] та керівництво до лабораторних робіт [15].

Розділ 1

ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

1.1. Класичний метод аналізу перехідних процесів

1.1.1. Поняття про перехідний процес

Перехідним процесом в електричному колі називають електромагнітний процес, який відбувається в ньому при переході від одного усталеного стану (режиму роботи) до іншого.

Усталений режим роботи кола залежить від топології його схеми та параметрів елементів останньої. Якщо в цьому режимі коло живиться від джерела постійної ЕРС або від джерела постійного струму, то напруги та струми на всіх ділянках кола постійні і не залежать від часу. Якщо ж живлення здійснюється від джерел періодичних ЕРС або струмів, то стуми та напруги мають теж такий характер.

В разі включення або виключення джерел енергії, раптових змін параметрів елементів та топології кола, стрибкоподібного змінення величин ЕРС та струмів джерел, що називаються комутаціями, настає неусталений режим роботи, коли електричне коло переходить від одного усталеного стану до іншого. В цьому режимі струми та напруги на ділянках кола не можуть бути ні постійними, ні періодичними функціями часу, тому він і має назву неусталеного.

Неусталені режими, що частіше називаються перехідними процесами, можуть виникати лише в колах з реактивними елементами, тобто в інерційних колах, які можуть накопичувати енергію. Перехідні процеси завжди розпочинаються в момент комутації.

При розрахунках електричних кіл в неусталених режимах вважають, що комутації відбуваються миттєво, а відлік часу ведуть від моменту комутації (t = 0). При цьому момент часу безпосередньо перед комутацією позначають (t = 0_{-}), а одразу після комутації – (t = 0_{+}).

Фізично перехідний процес обумовлений тим, що кожному усталеному режиму роботи відповідає конкретний запас енергії в колі, який в разі комутації миттєво, тобто стрибкоподібно, змінитися не може. Якщо допустити, що при комутації енергія в колі змінюється миттєво, то це означає, що потужність джерела p = dw/dt є нескінченно великою. Однак такі джерела енергії не можна реалізувати фізично.

Теоретично перехідні процеси мають нескінченно велику тривалість, однак реально значення напруг та струмів у колі дуже швидко стають близькими до усталених. Перехідні процеси можуть бути корисними, якщо їх використовують для отримання сигналів спеціальної форми, і шкідливими, якщо спотворення форми сигналів недопустимі.

1.1.2. Закони комутації електричних кіл

При аналізі кіл із зосередженими параметрами вважають, що енергія магнітного поля пов'язана лише з котушками індуктивності, а енергія електричного поля – лише з конденсаторами.

Миттєве значення енергії, що накопичена в колі, визначається сумою миттєвих значень енергій, які накопичені окремими елементами кола

$$w(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k i_k^2}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k u_k^2}{2},$$

де n та m – кількість котушок індуктивності і конденсаторів у колі.

Оскільки миттєве змінювання енергії магнітного поля неможливе, то неможливе і стрибкоподібне змінювання струмів у вітках з індуктивностями. Це означає, що струм індуктивності безпосередньо після комутації має таку саму величину, як і безпосередньо перед комутацією –

$$i_{L_k}(0_+) = i_{L_k}(0_-).$$
 (1.1)

Співвідношення (1.1) відображає сутність першого закону комутації: в початковий момент часу після комутації струм через індуктивність зберігає таке саме значення, як і безпосередньо перед комутацією, а потім плавно змінюється, починаючи з цього значення.

Так само неможливим є миттєве змінювання і енергії електричного поля, тому не може бути стрибкоподібного змінювання напруги на ємності:

$$u_{C_{k}}(0_{+}) = u_{C_{k}}(0_{-}).$$
(1.2)

Співвідношення (1.2) відображає сутність другого закону комутації: в початковий момент часу після комутації напруга на ємності зберігає таке саме значення, як і безпосередньо перед комутацією, а потім плавно змінюється, починаючи з цього значення.

Слід зазначити, що напруги на індуктивностях та струми через ємності можуть змінюватися і стрибкоподібно, оскільки змінювання цих електричних величин не впливає на величину енергії, що накопичена в колі.

Оскільки накопичена в колі енергія визначається сумарним зарядом усіх конденсаторів та потокозчепленнями всіх котушок індуктивності, то сумар-

ний заряд та сумарне потокозчеплення кола, так само, як і енергія, є безперервними функціями часу.

Таким чином, сумарне потокозчеплення та сумарний заряд кола безпосередньо після комутації дорівнюють сумарному потокозчепленню та сумарному заряду безпосередньо перед комутацією –

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi_{i}(0_{+}) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_{i}(0_{-}), \quad \sum_{i=1}^{m} q_{i}(0_{+}) = \sum_{i=1}^{m} q_{i}(0_{-}).$$
(1.3)

Цей принцип, відомий під назвою принципу безперервності в часі сумарного потокозчеплення та сумарного заряду кола, має більш загальний характер, ніж закони комутації, які з нього витікають. Він може успішно використовуватись для аналізу кіл в тих випадках, коли застосування надмірно спрощених моделей елементів кіл та зовнішніх збуджень призводить до порушення передумов, що використовуються при формулюванні законів комутації, і як наслідок – до порушення самих законів.

Вивчення та розрахунок струмів і напруг в неусталених режимах є важливою інженерною задачею при аналізі електричних кіл. Розрахувати коло в перехідному режимі означає знайти залежності струмів, напруг або інших змінних величин від часу, який пройшов від моменту комутації до моменту спостереження. Звичайно момент комутації приймають за початок відліку часу.

В залежності від енергетичного стану електричного кола перед моментом комутації розрізняють два види задач аналізу перехідних процесів.

Якщо безпосередньо перед комутацією (t = 0_{-}) коло не мало запасу енергії, тобто струми в індуктивностях та напруги на ємностях дорівнювали нулю, то розрахунок такого кола є задачею з нульовими початковими умовами:

$$\mathbf{u}_{L_k}(0_+) = \mathbf{u}_{L_k}(0_-) = 0; \ \mathbf{u}_{C_k}(0_+) = \mathbf{u}_{C_k}(0_-) = 0.$$
 (1.4)

Очевидно, що при нульових початкових умовах безпосередньо після комутації $(t = 0_+)$ індуктивність еквівалентна розриву кола, а ємність – короткому замиканню в тому місці, де вони включені.

Якщо ж безпосередньо перед комутацією електричне коло має деякий запас енергії, то визначення струмів та напруг у перехідному режимі являє собою задачу з ненульовими початковими умовами:

$$i_{L_k}(0_+) = i_{L_k}(0_-) \neq 0; \ u_{C_k}(0_+) = u_{C_k}(0_-) \neq 0.$$
 (1.5)

При ненульових початкових умовах в момент часу безпосередньо після комутації індуктивність еквівалентна джерелу струму зі струмом $i_L(0_+)$, а ємність еквівалентна джерелу ЕРС, напруга якого дорівнює $u_C(0_+)$.

Як приклад на рис. 1.1 наведені схеми електричних кіл з нульовими (рис. 1.1, а) та ненульовими (рис. 1.1, б) початковими умовами. В першій з цих схем в момент часу $t = 0_{-}$ джерело енергії від кола відключене, а це



Рис. 1.1. Схеми електричних кіл з нульовими (а) та ненульовими (б) початковими умовами перехідних режимів

означає, що в момент часу $t = 0_+$ напруга на ємності $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ і початкові умови є нульовими. В іншій же схемі до моменту комутації обидва реактивні елементи підключені до джерела енергії і можуть мати деякий запас енергії. Тобто в цьому випадку початкові умови в колі є ненульовими.

1.1.3. Диференціальні рівняння електричних кіл

Методика складання диференціального рівняння кола

Аналіз перехідних процесів у електричних колах часто проводять за допомогою так званого класичного методу. Одним з перших етапів такого аналізу є складання рівнянь електричної рівноваги для миттєвих значень струмів та напруг. Щоб скласти таку систему рівнянь, необхідно скористатись одним з типових методів аналізу кіл та співвідношеннями зв'язку між миттєвими струмами і напругами в пасивних елементах кола:

$$u_{R} = i_{R} \cdot R; \ u_{L} = L \frac{di_{L}}{dt}; \ u_{C} = u_{C}(0_{+}) + \frac{1}{C} \int_{0}^{t} i_{C} dt;$$

$$i_{R} = \frac{u_{R}}{R}; \ i_{L} = i_{L}(0_{+}) + \frac{1}{L} \int_{0}^{t} u_{L} dt; \ i_{C} = C \frac{du_{C}}{dt}.$$
(1.6)

Далі в одержаній системі рівнянь електричної рівноваги вибирають основну електричну змінну величину, виключають з цієї системи інші змінні величини і отримують єдине рівняння, що містить лише основну змінну величине. У загальному випадку для лінійних електричних кіл це рівняння є інтегро-диференціальним. Шляхом повторного диференціювання можна одержати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами, яке має такий загальний вигляд:

$$a_{n} \frac{d^{n} x(t)}{dt^{n}} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{1} \frac{d x(t)}{dt} + a_{0} x(t) =$$

= $b_{m} \frac{d^{m} s(t)}{dt^{m}} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} s(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{1} \frac{d s(t)}{dt} + b_{0} s(t),$

або в компактному записі –

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k} \frac{d^{k} x(t)}{dt^{k}} = \sum_{k=0}^{m} b_{k} \frac{d^{k} s(t)}{dt^{k}}, \ (m \le n),$$
(1.7)

де a_k , b_k – постійні коефіцієнти, що визначаються топологією кола та параметрами його елементів; x(t) – шукана електрична величина, або реакція кола; s(t) – вхідна електрична величина, або збудження кола.

Порядок найвищої похідної диференціального рівняння визначає порядок кола і залежить від кількості енергетично незалежних пасивних елементів-накопичувачів у колі.

В усталеному режимі розв'язування рівняння (1.7) не потребує ніяких додаткових відомостей про стан кола. Якщо ж реакцію кола шукають в перехідному режимі, то необхідно враховувати розглянуті раніше початкові умови.

Початкові умови у вигляді струмів індуктивностей та напруг ємностей в момент часу $t = 0_+$ (безпосередньо після комутації) називають незалежними. Щоб знайти розв'язок рівняння (1.7) в перехідному режимі, треба на основі незалежних початкових умов (1.4) або (1.5) знайти залежні початкові умови у вигляді значень шуканої функції x(t) та її (n-1)-ї похідної для моменту часу, що відповідає початку перехідного процесу. Тобто залежні початкові умови мають вигляд

$$x(0_{+}), \ \frac{dx(0_{+})}{dt}, \ \frac{d^{2}x(0_{+})}{dt^{2}}, ..., \frac{d^{n-1}x(0_{+})}{dt^{n-1}}.$$
 (1.8)

Загальна кількість залежних початкових умов повинна дорівнювати порядку диференціального рівняння кола.

Приклади складання диференціальних рівнянь кіл

Для ілюстрації викладеного запишемо диференціальні рівняння для одноконтурного (рис. 1.2, а) та багатоконтурного (рис. 1.2, б) кіл, що мають нульові початкові умови. При складанні диференціального рівняння одноконтурного кола скористаємося другим законом Кірхгофа. Тоді для миттєвих напруг матимемо рівняння

$$u_{R} + u_{L} + u_{C} = u.$$

Якщо скористатись рівняннями зв'язку між миттєвими напругами та струмами елементів кола (1.6), то отримаємо



Рис. 1.2. Схеми одноконтурного (а) та багатоконтурного (б) кіл

$$\operatorname{Ri} + L\frac{\operatorname{di}}{\operatorname{dt}} + \frac{1}{C}\int_{0}^{t}\operatorname{idt} = u. \qquad (1.9)$$

Продиференціюємо (1.9) і одержимо диференціальне рівняння кола відносно струму і(t), яке в канонічній формі запишеться

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{i}}{\mathrm{dt}^2} + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\frac{\mathrm{d}\mathrm{i}}{\mathrm{dt}} + \frac{1}{\mathrm{LC}}\mathrm{i} = \frac{1}{\mathrm{L}}\frac{\mathrm{d}\mathrm{u}}{\mathrm{dt}}.$$
 (1.10)

Тепер послідовно скористаємось рівняннями зв'язку між миттєвими струмами і напругами в ємності та індуктивності і отримаємо

$$\frac{d^{2}u_{C}}{dt^{2}} + \frac{R}{L}\frac{du_{C}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{C} = \frac{1}{LC}u,$$

$$\frac{d^{2}u_{L}}{dt^{2}} + \frac{R}{L}\frac{du_{L}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{L} = \frac{d^{2}u}{dt^{2}}.$$
(1.11)

Порівняння диференціальних рівнянь (1.10) та (1.11) показує, що всі вони мають однакову структуру лівих частин. Це означає, що ні порядок рівняння, ні його коефіцієнти в лівій частині не залежать від того, для якої зі змінних електричних величин воно складене. При переході від однієї змінної величини до іншої змінюється лише права частина рівняння, до якої входять зовнішнє збудження u(t) та його похідні з деякими коефіцієнтами. Причому найвищий порядок похідних правої частини рівняння ніколи не може перевищувати порядку похідних лівої частини. У разі багатоконтурного кола (рис. 1.2, б) спочатку складають систему рівнянь електричної рівноваги за законами Кірхгофа, число яких дорівнює числу віток кола, якщо струми цих віток невідомі.

Диференціальне рівняння кола запишемо відносно струму i₃(t), тому контури для складання рівнянь за другим законом Кірхгофа в схемі виберемо так, щоб значення цього струму входило у рівняння якомога більше разів.

В цьому випадку система рівнянь для схеми на рис. 1.2, б матиме такий вигляд:

$$i_{1} = i_{2} + i_{3}; \quad R_{1}i_{1} + L\frac{di_{3}}{dt} + R_{2}i_{3} = u; -\frac{1}{C}\int_{0}^{t}i_{2}dt + L\frac{di_{3}}{dt} + R_{2}i_{3} = 0.$$
(1.12)

Продиференціюємо останнє рівняння системи (1.12) та знайдемо з нього струм і₂ –

$$i_2 = LC \frac{d^2 i_3}{dt^2} + R_2 C \frac{d i_3}{dt}.$$
 (1.13)

Далі підставимо в друге рівняння системи (1.12) спочатку перше рівняння цієї системи, а потім (1.13) і відповідно одержимо

$$(i_2 + i_3)R_1 + L\frac{di_3}{dt} + R_2i_3 = u$$

та

$$LCR_{1}\frac{d^{2}i_{3}}{dt^{2}} + (R_{1}R_{2}C + L)\frac{di_{3}}{dt} + (R_{1} + R_{2})i_{3} = u.$$
(1.14)

Якщо поділити ліву та праву частини рівняння (1.14) на LCR₁, то отримаємо диференціальне рівняння кола в канонічній формі –

$$\frac{d^{2}i_{3}}{dt^{2}} + \frac{R_{1}R_{2}C + L}{LCR_{1}}\frac{di_{3}}{dt} + \frac{R_{1} + R_{2}}{LCR_{1}}i_{3} = \frac{1}{LCR_{1}}u.$$
(1.15)

Як і для першого кола маємо диференціальне рівняння другого порядку, оскільки обидва кола мають у своєму складі по два енергонезалежні пасивні елементи-накопичувачі.

Діючи аналогічно, можна для кола на рис. 1.2, б одержати диференціальні рівняння відносно будь-яких інших значень струму або напруги. Зазначимо, що диференціальні рівняння багатоконтурних кіл мають такі самі властивості як і розглянуті раніше рівняння одноконтурних кіл.

1.1.4. Зв'язок диференціального рівняння з комплексною частотною характеристикою кола

Визначення диференціального рівняння кола за допомогою КЧХ

Незалежно від початкових умов диференціальне рівняння післякомутаційного кола можна одержати, не складаючи рівнянь за законами Кірхгофа. Для цього достатньо визначити КЧХ кола у відповідності з виразом

$$K(j\omega) = \frac{\underline{x}(t)}{\underline{s}(t)},$$
(1.16)

де <u>s</u>(t) – миттєвий комплекс зовнішнього збудження, що діє на коло;

 $\underline{x}(t)$ – миттєвий комплекс реакції кола.

Для визначення зв'язку між КЧХ та диференціальним рівнянням електричного кола скористаємося загальною формою запису цього рівняння (1.7).

Нехай зовнішнє збудження s(t) є гармонічним, тоді його миттєвий комплекс дорівнює

$$\underline{\mathbf{s}}(\mathbf{t}) = \underline{\mathbf{S}}_{\mathrm{m}} \mathbf{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}} \,. \tag{1.17}$$

Оскільки кола, що аналізуються, є лінійними, то їх реакція в усталеному режимі є також гармонічною і змінюється з тою ж частотою, але має іншу комплексну амплітуду –

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{X}}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\mathrm{\omega} t} \,. \tag{1.18}$$

Якщо підставити (1.17) та (1.18) у вираз (1.16), то для комплексної амплітуди реакції кола одержимо

$$\underline{\mathbf{X}}_{\mathrm{m}} = \underline{\mathbf{S}}_{\mathrm{m}} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega}), \tag{1.19}$$

а (1.18) матиме вигляд

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{S}}_{\mathrm{m}} \cdot \mathbf{K}(j\omega) \cdot \mathbf{e}^{j\omega t} \,. \tag{1.20}$$

Підстановка миттєвих комплексів <u>x</u>(t) та <u>s</u>(t) у рівняння (1.7) дає тотожність

$$K(j\omega) \cdot \underline{S}_{m} e^{j\omega t} \cdot \sum_{k=0}^{n} a_{k} \cdot (j\omega)^{k} = \underline{S}_{m} e^{j\omega t} \cdot \sum_{k=0}^{m} b_{k} \cdot (j\omega)^{k}.$$
(1.21)

15

Якщо ліву та праву частини рівняння (1.21) скоротити на величину $\underline{S}_{m}e^{j\omega t}$, то для КЧХ лінійного кола одержимо

$$K(j\omega) = \frac{b_{m} \cdot (j\omega)^{m} + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + b_{1} \cdot (j\omega) + b_{0}}{a_{n} \cdot (j\omega)^{n} + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{1} \cdot (j\omega) + a_{0}}.$$
 (1.22)

Співставляючи одержане співвідношення з диференціальним рівнянням (1.7), можна побачити, що в цих виразах коефіцієнти a_k, b_k однакові, $(j\omega) - символ першої похідної, <math>(j\omega)^k - символ k$ -ї похідної. Добуток $a_k \cdot (j\omega)^k$ у

виразі для КЧХ кола відповідає члену $a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ диференціального рівняння,

а
$$\mathbf{b}_k \cdot (\mathbf{j}\omega)^k$$
 – члену $\mathbf{b}_k \frac{\mathbf{d}^k \mathbf{s}(t)}{\mathbf{d}t^k}$

Таким чином, за допомогою знаменника виразу (1.22), можна записати ліву частину, а за допомогою виразу чисельника цього співвідношення – праву частину диференціального рівняння кола.

Якщо в знаменнику (1.22) замінити уявну частоту $j\omega$ на комплексний оператор $p = \sigma + j\omega$, то одержимо так званий характеристичний поліном лінійного кола. Прирівнюючи останній до нуля, отримаємо характеристичне рівняння кола –

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$
 (1.23)

Це рівняння дозволяє знайти загальний вигляд розв'язку диференціального рівняння кола та визначити характер перехідного процесу.

Приклад визначення диференціального рівняння кола на основі його КЧХ

Інколи використання запису для КЧХ електричного кола значно спрощує знаходження диференціального рівняння. Так, наприклад, для схеми, що зображена на рис. 1.2, б, при необхідності отримання диференціального рівняння відносно струму $i_3(t)$ можна записати КЧХ кола у вигляді передатної комплексної провідності

$$Y_{31}(j\omega) = \frac{\underline{I}_3}{\underline{U}}$$

Для цього знайдемо відношення струмів

$$\frac{I_1}{I_3} = \frac{j\omega C + \frac{1}{j\omega L + R_2}}{\frac{1}{1/(j\omega L + R_2)}} = (j\omega)^2 LC + (j\omega)R_2C + 1$$
(1.24)

та вхідну напругу кола

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{I}}_{1} \cdot \mathbf{Z}_{_{BX}}(j\omega) = \underline{\mathbf{I}}_{1} \left(\frac{1}{j\omega C + 1/(j\omega L + R_{2})} + R_{1} \right),$$

або інакше

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{I}}_{1} \left(\frac{\mathbf{R}_{2} + j\omega \mathbf{L}}{(j\omega)^{2}\mathbf{L}\mathbf{C} + (j\omega)\mathbf{R}_{2}\mathbf{C} + 1} + \mathbf{R}_{1} \right).$$
(1.25)

Знайдемо з (1.24) струм <u>I</u>₁ і підставимо вираз для нього в (1.25). Тоді для комплексної передатної провідності $Y_{31}(j\omega)$ кола одержимо

$$Y_{31}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 LCR_1 + (j\omega)(R_2R_1C + L) + (R_1 + R_2)}.$$
 (1.26)

Користуючись співвідношенням (1.26), складемо диференціальне рівняння

LCR₁
$$\frac{d^2i_3}{dt^2} + (R_2R_1C + L)\frac{di_3}{dt} + (R_1 + R_2)i_3 = u,$$

яке співпадає з рівнянням (1.14), що було отримане за допомогою рівнянь Кірхгофа для миттєвих напруг та струмів.

Треба зазначити, що при аналізі кіл в частотній області можна визначити КЧХ кола за допомогою його диференціального рівняння.

1.1.5. Розв'язання диференціального рівняння кола

Розв'язання диференціального рівняння в загальному вигляді

Відомо, що розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння кола (1.7) дорівнює сумі часткового розв'язку цього рівняння та загального розв'язку однорідного диференціального рівняння, яке можна отримати з (1.7) в разі нульового зовнішнього збудження (s(t) = 0):

$$a_{n} \frac{d^{n} x(t)}{dt^{n}} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{1} \frac{dx(t)}{dt} + a_{0} = 0.$$
(1.27)

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (1.27) характеризує так званий вільний перехідний процес у колі, який відбувається в ньому після комутації при відсутності джерел енергії. Тобто характер вільного перехідного процесу не залежить від того, який вигляд має зовнішнє збудження, а визначається лише параметрами пасивних елементів та топологією кола після комутації. Вільні перехідні процеси в колах протікають за рахунок різниці енергій, що відповідають усталеним режимам роботи кіл до та після комутації. Оскільки ця різниця завжди має скінченне значення, вільні процеси в колах із втратами згасають з плином часу.

Частковий розв'язок диференціального рівняння (1.7) визначається вимушеним режимом роботи кола, тобто режимом, що створюється за рахунок діючих в колі незалежних джерел енергії.

Отже, при використанні класичного методу аналізу перехідних процесів шукана реакція кола у вигляді струму або напруги якої-небудь вітки після комутації може бути розрахована як сума вільної x_{віл}(t) та вимушеної x_{вим}(t) складових –

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\rm BIJ}(t) + \mathbf{x}_{\rm BUM}(t). \tag{1.28}$$

Оскільки вільна складова з плином часу згасає –

$$\lim_{t\to\infty} x_{\rm Bin}(t) = 0 ,$$

то вимушена складова реакції кола являє собою усталене значення струму або напруги для ділянки кола після комутації –

$$\mathbf{x}_{\text{BUM}}(t) = \lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t). \tag{1.29}$$

Якщо після комутації струми всіх незалежних джерел струму та напруги залишаються незмінними за величиною, то в колі після комутації з плином часу встановлюється режим, при якому вимушена складова реакції кола являє собою постійний струм або напругу.

Якщо після комутації коло знаходиться під впливом гармонічного збудження, то вимушена складова реакції кола також буде гармонічною і для її визначення можна скористатись методом комплексних амплітуд.

Якщо після комутації в колі діють декілька незалежних джерел гармонічних коливань, то можна скористатись методом накладання. В цьому випадку вимушену складову реакції кола можна визначити як суму окремих складових, викликаних в усталеному режимі кожним із джерел окремо.

Застосовуючи принцип накладання, можна знайти вимушену складову і тоді, коли зовнішнє збудження являє собою періодичну функцію складної

форми, яка задовольняє умовам Дирихле. В цьому випадку функцію s(t) розкладають в ряд Фур'є, що являє собою суму гармонічних коливань з кратними частотами, і розв'язують задачу аналогічно до попереднього випадку.

Незалежно від характеру зовнішнього збудження для визначення вільної складової реакції кола необхідно знайти корені характеристичного рівняння (1.23). Це рівняння може мати дійсні або комплексні корені. Причому всі корені характеристичного рівняння лінійного кола розташовуються в лівій напівплощині комплексної площини, включаючи й уявну вісь.

Якщо корені характеристичного рівняння (1.23) прості та різні, то вільна складова його реакції має вигляд

$$\mathbf{x}_{Bi\pi}(t) = \mathbf{A}_1 e^{\mathbf{p}_1 t} + \mathbf{A}_2 e^{\mathbf{p}_2 t} + \dots + \mathbf{A}_n e^{\mathbf{p}_n t} = \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k e^{\mathbf{p}_k t}, \qquad (1.30)$$

де p₁, p₂, ..., p_n – корені характеристичного рівняння; A₁, A₂,..., A_n – сталі інтегрування розв'язку диференціального рівняння кола.

Повний розв'язок диференціального рівняння кола, що аналізується, в цьому випадку має вигляд

$$x(t) = x_{BUM}(t) + \sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t}.$$
 (1.31)

Якщо серед n коренів характеристичного рівняння є ℓ коренів, кратних, наприклад, кореню p_1 , то розв'язок диференціального рівняння матиме вигляд

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{BHM}}(t) + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 t + \dots + \mathbf{A}_{\ell} t^{\ell-1}) \mathbf{e}^{\mathbf{p}_1 t} + \sum_{k=\ell+1}^{n} \mathbf{A}_k \mathbf{e}^{\mathbf{p}_k t}.$$
 (1.32)

Для того, щоб на основі розв'язку диференціального рівняння кола в загальному вигляді записати розв'язок, що відповідає конкретним початковим умовам у колі, треба знайти сталі інтегрування у виразі (1.31) або (1.32).

Визначення сталих інтегрування розв'язку диференціального рівняння кола

Щоб знайти сталі інтегрування в загальному розв'язку диференціального рівняння кола треба скористатись незалежними початковими умовами у вигляді струмів індуктивностей та напруг на ємностях в момент часу безпосередньо після комутації, тобто $i_{L_k}(0_+)$ та $u_{C_k}(0_+)$. На їх основі знаходять залежні початкові умови у вигляді значень шуканої реакції кола та (n - 1)-ї похідних цієї реакції в післякомутаційний момент часу $(t = 0_+)$.

Для знаходження n постійних інтегрування треба мати таку ж кількість незалежних рівнянь. Щоб сформувати таку систему рівнянь, використовують загальний розв'язок диференціального рівняння та (n - 1)-у похідну від цього розв'язку, знайдені знову ж таки для моменту часу $t = 0_+$, тобто безпосередньо після комутації. При різних коренях характеристичного рівняння сформована таким чином система рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0_{+}) &= \mathbf{x}_{BMM}(0_{+}) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{k}; \\ \frac{d\mathbf{x}(0_{+})}{dt} &= \frac{d\mathbf{x}_{BMM}(0_{+})}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{p}_{k} \mathbf{A}_{k}; \\ \\ \frac{d\mathbf{x}^{n-1}}{dt^{n-1}} &= \frac{d^{n-1}\mathbf{x}_{BMM}(t)}{dt^{n-1}} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{p}_{k}^{n-1} \mathbf{A}_{k}. \end{aligned}$$
(1.33)

Розв'язуючи систему лінійних рівнянь (1.33), можна знайти постійні інтегрування A_k, які визначаються конфігурацією схеми кола, параметрами її елементів та початковими умовами в колі. Після підстановки значень постійних інтегрування в загальний розв'язок (1.31) або (1.32) отримаємо конкретний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння кола для заданих початкових умов.

1.1.6. Загальна схема застосування класичного методу аналізу перехідних процесів

Перерахуємо основні етапи класичного методу аналізу перехідних процесів в лінійних колах із зосередженими параметрами.

1. Аналіз кола до комутації. В результаті цього аналізу необхідно визначити струми індуктивностей та напруги на ємностях в момент часу безпосереднью перед комутацією (t = 0_).

2. Визначення незалежних початкових умов. Незалежні початкові умови являють собою струми індуктивностей та напруги на ємностях в момент часу безпосереднью після комутації ($t = 0_+$). Ці умови знаходять за допомогою законів комутації.

3. Знаходження характеристичного рівняння післякомутаційного кола або шляхом складання диференціального рівняння, або шляхом запису відповідної КЧХ цього кола.

4. Аналіз усталеного режиму в колі після комутації ($t \rightarrow \infty$). В результаті цього аналізу знаходять вимушену складову реакції кола, тобто частковий розв'язок його диференціального рівняння.

5. Визначення вільної складової реакції кола. Для цього знаходять корені характеристичного рівняння і записують вільну складову в загальному вигляді у відповідності зі співвідношеннями (1.31) або (1.32).

6. Знаходження загального вигляду реакції або розв'язку неоднорідного диференціального рівняння кола в загальному вигляді шляхом підсумовування вимушеної та вільної складових реакції цього кола на зовнішнє збудження.

7. Визначення постійних інтегрування загального розв'язку диференціального рівняння кола, які знаходять за допомогою залежних початкових умов, що в свою чергу визначаються незалежними початковими умовами.

8. Знаходження реакції кола, що відповідає заданим початковим умовам, шляхом підстановки постійних інтегрування в загальний розв'язок диференціального рівняння кола.

1.2. Застосування класичного методу розв'язування диференціальних рівнянь для аналізу кіл першого порядку

1.2.1. Аналіз перехідних процесів у колах першого порядку класичним методом

Розглянемо приклади аналізу перехідних режимів у колах першого порядку з нульовими та ненульовими початковими умовами.

Аналіз кола з нульовими початковими умовами

Нехай маємо коло першого порядку (рис. 1.3), до якого підключається джерело постійної напруги u(t) = U. Знайдемо струм $i_2(t)$ в перехідному режимі, користуючись методикою, що викладена в під розділі 1.1.6.

1. Аналізуючи коло на рис. 1.3 до моменту комутації, коли елемент комутації S розімкнений, можна зробити висновок, що до цього моменту джерело напруги U відключене і напруга на ємності відсутня, тобто $u_C(0_-) = 0$.

2. Щоб знайти незалежні початкові умови, треба скористатись другим зако-



Рис. 1.3. Схема кола першого порядку з нульовими початковими умовами

ном комутації. Оскільки згідно з цим законом $u_{C_k}(0_+) = u_{C_k}(0_-)$, то в нашому випадку $u_C(0_+) = 0$.

3. Для одержання диференціального рівняння кола після комутації в ньому (коли елемент комутації S замкнений) складемо систему рівнянь електричної рівноваги кола за законами Кірхгофа. Контури виберемо таким чином, щоб шуканий струм i₂(t) входив у рівняння якомога більшу кількість разів:

$$i_1 = i_2 + i_3;$$

 $R_1 i_1 + R_2 i_2 = U;$ (1.34)
 $u_C - R_2 i_2 = 0.$

Позбудемося всіх змінних величин окрім шуканого струму і₂(t). Для цього підставимо перше рівняння системи (1.34) в друге і врахуємо, що

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = CR_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Тоді одержимо

$$R_1 i_2 + R_1 i_3 + R_2 i_2 = U$$

і далі

$$CR_1R_2 \frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 = U.$$

Тобто в канонічному вигляді диференціальне рівняння має вигляд

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} i_2 = \frac{U}{CR_1 R_2}.$$
 (1.35)

4. При аналізі кола в усталеному режимі врахуємо, що вимушена складова реакції кола дорівнюватиме

$$i_{2 \text{ bum}} = \lim_{t \to \infty} i_2$$
 ,

однак, якщо $t \rightarrow \infty$, то струм $i_3 \rightarrow 0$ і тому

$$i_{2_{BUM}} = i_{1_{BUM}} = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$
 (1.36)

5. Вільна складова реакції кола у відповідності з (1.30) має вигляд

$$i_{2Bin} = Ae^{pt}$$

Для знаходження значення кореня р складемо характеристичне рівняння кола на основі (1.35) –

$$p + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} = 0 \; .$$

Тоді $p = -(R_1 + R_2)/CR_1R_2$, а вільна складова струму

$$i_{2Bin} = Ae^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}t}.$$
 (1.37)

6. Загальний вигляд реакції кола з урахуванням (1.36) та (1.37) запишеться

$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} + Ae^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2}t}.$$
 (1.38)

7. Щоб у виразі (1.38) знайти постійну інтегрування A, треба визначити залежні початкові умови у вигляді шуканої реакції $i_2(t)$ в момент часу $t = 0_+$. Для цього скористаємось незалежними початковими умовами ($u_C(0_+) = 0$) та третім рівнянням системи (1.34). Тоді очевидно, що $i_2(0_+) = 0$, а із загального розв'язку (1.38) виходить, що $A = -U/(R_1 + R_2)$.

8. Остаточно для заданих початкових умов миттєвий струм i₂(t) дорівнює

$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} t} \right).$$
 (1.39)

На рис. 1.4 побудовані часові діаграми вхідної напруги u(t), перехідного струму $i_2(t)$ і його складових $i_{2вим}$ та $i_{2віл}$. Із діаграм видно, що в перший момент після комутації ($t = 0_+$) струм $i_2 = 0$. Фізично це мож-





на пояснити тим, що в цей момент часу незаряджена ємність еквівалентна короткому замиканню і весь струм $i_1(t)$ проходить через ємнісну вітку кола.

В усталеному режимі ємність повністю заряджена, постійний струм через неї не протікає, а це еквівалентно розриву кола. Тому в цьому випадку, як видно з рис. 1.4, $i_2(t) = i_{2 \text{ вим}}$ і дорівнює струму $i_{1 \text{ вим}}$ в нерозгалуженій частині кола.

Нехай маємо коло (рис. 1.5), де енергомісткий елемент – індуктивність L має деякий початковий запас енергії. Згідно з 1.1.6 знайдемо закон змінювання миттєвого струму $i_3(t)$ після комутації, якщо на вході кола діє джерело постійної напруги U, а всі активні опори $R_1 = R_2 = R_3 = R$ однакові:

1. До комутації кола маємо

$$i_{\rm L}(0_{\rm -}) = i_{\rm 2}(0_{\rm -}) = U/2R$$
.

2. Незалежні початкові умови в колі дорівнюють

$$i_L(0_+) = i_2(0_+) = i_L(0_-) = U/2R.$$



3. Система рівнянь Кірхгофа для післякомутаційного кола має такий вигляд:

$$i_1 = i_2 + i_3;$$

 $i_1 R + i_3 R = U;$ (1.40)
 $i_3 R - i_2 R - L \frac{di_2}{dt} = 0.$

Рис. 1.5. Коло першого порядку з ненульовими початковими умовами

3 першого рівняння системи (1.40) знайдемо i₂, а з другого – i₁: i₂ = i₁ – i₃; i₁ = U/R – i₃. (1.41)

Після підстановки другого рівняння системи (1.41) в перше, а потім результату в третє рівняння системи (1.40) одержимо шукане диференціальне рівняння кола відносно струму i₃(t) –

$$\frac{di_3}{dt} + \frac{3R}{2L}i_3 = \frac{U}{2L}.$$
 (1.42)



Рис. 1.6. Еквівалентна схема аналізованого кола в усталеному режимі

4. Оскільки в усталеному режимі індуктивність в колі постійного струму еквівалентна короткому замиканню ділянки кола між її виводами, то для вимушеної складової струму $i_3(t)$ можна знайти співвідношення, аналізуючи еквівалентне коло, яке зображене на рис. 1.6. Однак набагато простіше вимушену складову можна знайти за допомогою диференціального рівняння (1.42), якщо врахувати, що в усталеному режимі (тобто при $t \to \infty$) di₃/dt = 0. Тоді отримаємо

$$i_{3BMM} = U/3R.$$
 (1.43)

5. Характеристичне рівняння кола на основі (1.42) запишеться p + 3R/2L = 0,

а його корінь p = -3R/2L. Тоді вільна складова реакції кола дорівнюватиме

$$i_{3Bi\pi} = Ae^{-\frac{3R}{2L}t}$$
. (1.44)

6. Загальна формула для реакції кола з врахуванням (1.43) та (1.44) запишеться

$$i_3 = i_{3BMM} + i_{3BIT} = \frac{U}{3R} + Ae^{-\frac{3R}{2L}t}.$$
 (1.45)

7. Для знаходження постійної інтегрування А треба знати залежні початкові умови, що являють собою значення струму $i_3(0_+)$. Щоб його знайти, скористаємося першими двома рівняннями системи (1.40), записаними для моменту часу $t = 0_+$:

$$i_{1}(0_{+}) = i_{2}(0_{+}) + i_{3}(0_{+});$$

$$i_{1}(0_{+})R + i_{3}(0_{+})R = U,$$
(1.46)

та незалежними початковими умовами

$$i_{\rm L}(0_+) = i_2(0_+) = \frac{U}{2R}.$$
 (1.47)







Постійну інтегрування знайдемо з рівняння (1.45), записаного для моменту часу t = 0_+ :

$$i_3(0_+) = \frac{U}{3R} + A; \quad A = -\frac{U}{12R}$$

8. Шуканий струм i₃(t) дорівнює

$$i_3 = \frac{U}{3R} - \frac{U}{12R}e^{-\frac{3R}{2L}t}$$

На рис. 1.7 наведені часові діаграми прикладеної до кола постійної напруги U, а також струму i₃(t) і його складових i_{3вим} та i_{3віл}.

1.2.2. Спрощена методика застосування класичного методуаналізу перехідних процесів

Розрахунок перехідних процесів в колах першого порядку можна здійснити і спрощеним методом, який не потребує складання диференціального рівняння або знаходження комплексної частотної характеристики кола. Для цього використовують безпосередньо загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння

$$x(t) = x_{BHM}(t) + Ae^{pt}$$
, (1.48)

в якому невідомі величини x_{вим}(t), А та р визначаються на основі законів комутації та аналізу фізичних явищ у колі.

Відомо, що у випадку, коли зовнішня дія на коло є постійною величиною або періодичною функцією часу, вимушена складова реакції кола визначається як відгук кола на зовнішнє збудження в усталеному режимі. При цьому в колах постійного струму, коли $t \rightarrow \infty$, ємність еквівалентна розриву кола, а індуктивність – короткому замиканню між точками, до яких підключені ці елементи.

При будь-якому характері зовнішньої дії ємність, яка в момент часу безпосередньо перед комутацією ($t = 0_{-}$) не мала запасу енергії, в момент часу безпосередньо після комутації ($t = 0_{+}$) еквівалентна короткозамкненому провіднику. Індуктивність при аналогічних умовах еквівалентна розриву кола в місці її включення.

Якщо ж незалежні початкові умови в колі ненульові $(u_{C_k}(0_+) \neq 0)$ та $i_{L_k}(0_+) \neq 0$), то в момент часу безпосередньо після комутації ємність еквівалентна ідеалізованому джерелу ЕРС з напругою $u_{C_k}(0_+)$, а індуктивність – ідеалізованому джерелу струму, яке генерує струм $i_{L_k}(0_+)$.

Після цих попередніх зауважень визначимо загальний вигляд реакції кола для двох типових зовнішніх збуджень: постійних та гармонічних напруг і струмів.

1. Якщо зовнішнє збудження кола s(t) являє собою постійні напругу або струм, то $\lim_{t\to\infty} x_{\text{віл}}(t) = 0$ і згідно з (1.28)

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_{\text{BHM}}(t) = x(\infty) = \text{const.}$$
(1.49)

26

В цьому випадку розв'язок диференціального рівняння кола має вигляд

$$x(t) = x(\infty) + Ae^{pt}$$
. (1.50)

Щоб знайти постійну інтегрування A, як і раніше, скористаємося незалежними початковими умовами. Для цього запишемо рівняння (1.50) для моменту часу $t = 0_+$, а саме

$$\mathbf{x}(\mathbf{0}_{+}) = \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{A},$$

звідки маємо

$$A = x(0_{+}) - x(\infty).$$
(1.51)

Розв'язок диференціального рівняння матиме вигляд

$$x(t) = x(\infty) + [x(0_{+}) - x(\infty)]e^{pt}.$$
 (1.52)

Таким чином, якщо в колі першого порядку діють лише джерела постійної напруги та струму, то співвідношення для перехідного процесу в будьякому з елементів можна отримати на основі виразу (1.52). Для цього необхідно попередньо визначити початкове $x(0_+)$ та усталене $x(\infty)$ значення шуканої реакції кола, а також корінь **р** його характеристичного рівняння.

2. Тепер визначимо загальний вигляд реакції кола при дії на нього гармонічного збудження

$$s(t) = S_m \sin(\omega t + \psi),$$

де ψ – початкова фаза гармонічного коливання в момент комутації (t = 0₊).

Амплітуду та початкову фазу вимушеної складової $x_{вим}(t)$ реакції кола x(t) в цьому випадку можна знайти методом комплексних амплітуд. Для цього спочатку знаходимо комплексну амплітуду вхідного гармонічного збудження \underline{S}_{m} , потім відповідну комплексну частотну характеристику кола $K(j\omega)$ і нарешті – комплексну амплітуду реакції кола

$$\underline{\mathbf{X}}_{\mathrm{m}} = \underline{\mathbf{S}}_{\mathrm{m}} \cdot \mathbf{K}(j\omega) = \mathbf{S}_{\mathrm{m}} \cdot \mathbf{K}(\omega) e^{j(\psi + \phi(\omega))}.$$
(1.53)

В результаті для миттєвого значення вимушеної складової реакції кола одержимо

$$\mathbf{x}_{\text{BUM}}(t) = \mathbf{S}_{\text{m}} \cdot \mathbf{K}(\omega) \sin(\omega t + \psi + \varphi(\omega)). \tag{1.54}$$

Щоб знайти постійну інтегрування загального розв'язку (1.48), запишемо вираз останнього для моменту часу $t = 0_+$, а саме

$$\mathbf{X}(\mathbf{0}_{+}) = \mathbf{X}_{\text{BUM}}(\mathbf{0}_{+}) + \mathbf{A}.$$

Тоді

$$A = x(0_{+}) - x_{BUM}(0_{+}).$$
(1.55)

Тобто у випадку гармонічного характеру зовнішнього збудження шуканий розв'язок диференціального рівняння кола має вигляд

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{_{BUM}}(t) + \left[\mathbf{x}(0_{_{+}}) - \mathbf{x}_{_{BUM}}(0_{_{+}})\right] \mathbf{e}^{\mathbf{p}t},$$
 (1.56)

де х_{вим}(t) визначається у відповідності з виразом (1.54).

Для знаходження кореня **р** характеристичного рівняння кола треба врахувати, що однорідне диференціальне рівняння будь-якого кола першого порядку має стандартну форму –

$$a_1 \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 x(t) = 0,$$

або

$$\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0.$$
(1.57)

Величина a_1/a_0 в рівнянні (1.57) має розмірність часу і називається постійною часу кола τ . Таким чином, диференціальне рівняння кола першого порядку приймає вигляд

$$\tau \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathbf{x}(t) = 0,$$

звідки характеристичне рівняння

 $p\tau + 1 = 0$,

а його корінь $p = -1/\tau$.

Постійна часу τ кола характеризує швидкість змінювання вільної складової перехідного процесу в колі першого порядку. Із загального розв'язку диференціального рівняння кола (1.48) видно, що чисельно постійна часу τ дорівнює інтервалу часу, на протязі якого вільна складова реакції кола зменшується в е разів у порівнянні з її початковим значенням в момент комутації. Чим більша постійна часу кола τ , тим повільніше протікає перехідний процес.

Оскільки вільний перехідний процес виникає за рахунок накопиченої в елементі-накопичувачі енергії при відсутності зовнішнього збудження, то, аналізуючи цей процес, можна знайти постійну часу т. Для цього необхідно всі джерела ЕРС та джерела струму замінити їх внутрішніми опорами і, вважаючи накопичувальний елемент джерелом енергії, визначити відносно точок його підключення еквівалентний активний опір кола R_e. Якщо маємо коло з індуктивністю, то постійну часу знаходять з виразу

$$\tau = L/R_e, \qquad (1.58)$$

а для кола з ємністю – з виразу

$$\tau = R_e C. \tag{1.59}$$

Отже, остаточно розв'язок диференціального рівняння для кола постійного струму матиме вигляд

$$x(t) = x(\infty) + [x(0_{+}) - x(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}}, \qquad (1.60)$$

а для кола гармонічного струму –

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{BUM}}(t) + \left[\mathbf{x}(0_{+}) - \mathbf{x}_{\text{BUM}}(0_{+})\right] e^{-\frac{t}{\tau}}.$$
 (1.61)

Розглянутий спрощений метод розрахунку перехідних процесів може застосовуватись до будь-яких кіл першого порядку як з нульовими, так і з ненульовими початковими умовами.

На закінчення зазначимо, що співвідношення (1.60) можна використати для знаходження тривалості перехідного процесу, коли реакція кола x(t) змінюється від деякої початкової величини $x(0_+)$ до деякого заданого значення $x(t_{nep})$. Якщо у виразі (1.60) покласти, що $t = t_{nep}$, і розв'язати його відносно t_{nep} , то отримаємо

$$t_{nep} = \tau \ln \frac{x(\infty) - x(0_{+})}{x(\infty) - x(t_{nep})}.$$
 (1.62)

Вираз (1.62) широко використовується при розрахунках параметрів сигналів та елементів пристроїв імпульсної техніки.

1.2.3. Аналіз перехідних процесів у колі першого порядку спрощеним методом

Оскільки з чотирьох можливих варіантів найпростіших активнореактивних кіл першого порядку на практиці найчастіше застосовуються RC-кола інтегруючого та диференціюючого типу, то в якості прикладу застосування спрощеного класичного методу аналізу перехідних процесів розглянемо процес включення в такі кола постійної, гармонічної та імпульсної напруги.

Аналіз таких самих процесів в інтегруючих та диференціюючих RL-колах може бути проведений аналогічно. Нехай просте послідовне RC-коло (рис. 1.8) підключається до джерела постійної напруги u(t) = U. Знайдемо напруги на елементах кола та ^{u(t)} стум в ньому в перехідному режимі.



Рис. 1.8. Послідовне

Згідно з другим законом Кірхгофа отримаємо

$$RC$$
-коло першого порядку
 $u = u_R + u_C$, (1.63)

Для знаходження миттєвої напруги u_R скористаємось універсальним співвідношенням (1.60), яке в цьому випадку запишеться у вигляді

$$u_{R}(t) = u_{R}(\infty) + [u_{R}(0_{+}) - u_{R}(\infty)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де $\tau = RC - постійна часу послідовного RC-кола.$

В даному колі початкові умови нульові, тобто $u_C(0_+) = 0$ і тому $u_R(0_+) = U$, а в усталеному режимі ємність заряджена і $u_C(\infty) = U$, тобто $u_R(\infty) = 0$. Тоді миттєві напруги на опорі та ємності дорівнюють –

$$u_{R} = Ue^{-\frac{t}{\tau}},$$
 (1.64)
 $u_{C} = u - u_{R} = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$

Як видно з часових діаграм на рис. 1.9, напруга на ємності в процесі заряджання останньої зростає, наближаючись до величини напруги джерела живлення U. Одночасно напруга на опорі за таким же законом і з такою ж





швидкістю зменшується до нуля. При цьому для кожного моменту часу виконується співвідношення (1.63), а швидкість установлення напруг в колі залежить від величини постійної часу т.

Якщо ж в даному RC-колі початкові умови ненульові і $u_C(0_+) = U_{поч}$, де $U_{поч} -$ деяка початкова напруга будь-якого знаку, то згідно з (1.60) та (1.63) для напруг u_C та u_R отримаємо

$$u_{\rm C} = U + (U_{\rm nov} - U) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$
$$u_{\rm R} = (U - U_{\rm nov}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Користуючись цими двома виразами або загальним співвідношенням (1.62), можна визначити інтервал часу, на протязі якого будь-яка з напруг у колі зміниться від початкового значення до деякого заданого рівня. Якщо, наприклад, початкове значення напруги на ємності позначити як $U_{\text{поч}}$, а кінцеве – $U(t_{\text{пер}})$, то шуканий часовий інтервал, на протязі якого напруга u_{C} змінюється від $U_{\text{поч}}$ до $U(t_{\text{пер}})$, дорівнюватиме

$$t_{nep} = \tau \ln \frac{U - U_{noy}}{U - U(t_{nep})}.$$
 (1.65)

Аналогічний вираз для часу перехідного процесу в опорі –

$$t_{nep} = \tau \ln \frac{U_{noy}}{U(t_{nep})}.$$
(1.66)

Скориставшись одним з виразів (1.65), (1.66) або загальним виразом (1.62), можна встановити, що в будь-якому колі першого порядку вільна складова перехідного процесу згасає на 95 відсотків за інтервал часу $t_{nep} \approx 3\tau$, а за інтервал часу $t_{nep} \approx 5\tau$ – на 99 відсотків від свого початкового значення в момент часу $t = 0_+$. Таким чином, можна вважати, що в колах першого порядку перехідні процеси закінчуються на протязі інтервалу часу $t_{nep} \approx 3...5\tau$ після свого початку.

Тепер знайдемо струм у досліджуваному RC-колі

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{u_R}{R} = \frac{U}{R} e^{-\frac{U}{\tau}}.$$
 (1.67)

Очевидно, що цей струм має такий самий характер змінювання, як і напруга на опорі R.

Коротко зупинимося на енергетичних процесах в колі. Під час перехідного процесу ємність накопичує енергію в електричному полі, яка при $t \rightarrow \infty$ сягає максимального значення $W_{Cmax} = CU^2/2$. Одночасно в активному опорі витрачається енергія

$$W_{R} = \int_{0}^{\infty} p_{R}(t) dt = \int_{0}^{\infty} i^{2} R dt = \frac{U^{2}}{R} \int_{0}^{\infty} e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = -\frac{U^{2}}{R} \cdot \frac{e^{-2\frac{t}{\tau}}}{2/\tau} \bigg|_{0}^{\infty}$$

Після підстановки границь визначеного інтеграла маємо

$$W_{R} = \frac{U^{2}}{R} \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{CU^{2}}{2} = W_{Cmax}$$

Отже, під час перехідного процесу в активному опорі R розсіюється така сама кількість енергії, як і та, що накопичується в ємності C.

Включення в RC-коло гармонічної напруги

Нехай при $t \ge 0$ в колі на рис. 1.8 діє гармонічна зовнішня напруга $u = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$. В цьому випадку вимушена складова струму в колі дорівнює

$$i_{\text{BUM}} = \frac{U_{\text{m}}}{Z} \cos(\omega t + \psi_{\text{u}} - \phi), \qquad (1.68)$$

де модуль Z та аргумент ф комплексного опору кола Z дорівнюють –

$$Z = \sqrt{R^{2} + (1/\omega C)^{2}},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_{C}}{R} = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\omega \tau}.$$
(1.69)

Вимушена складова напруги на ємності запізнюється відносно струму в колі на $\pi/2$

$$u_{C_{BUM}} = \frac{U_m x_C}{Z} \cos \left(\omega t + \psi_u - \varphi - \pi/2\right) = \frac{U_m x_C}{Z} \sin \left(\omega t + \psi_u - \varphi\right).$$

Якщо до моменту підключення зовнішнього джерела збудження ємність була розряджена, то напруга $u_C(0_+) = 0$, а вимушена складова напруги u_C в момент часу $t = 0_+$ дорівнює

$$u_{CBUM}(0_{+}) = \frac{U_{m} x_{C}}{Z} \sin(\psi - \phi). \qquad (1.70)$$

Згідно з універсальним співвідношенням (1.61) перехідна напруга на ємності дорівнює

$$u_{C}(t) = \frac{U_{m}x_{C}}{Z} \left[\sin\left(\omega t + \psi - \varphi\right) - \sin\left(\psi - \varphi\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \right], \quad (1.71)$$

а миттєвий струм

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_m}{Z} \left[\cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]. \quad (1.72)$$

В момент комутації, коли $t = 0_+$, струм в колі дорівнює

32

$$i(0_{+}) = \frac{U_{m}}{Z} \left[\cos(\psi - \phi) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi - \phi) \right].$$
(1.73)

Як видно з виразів (1.72) та (1.73), у випадку, коли виконується умова $\psi = \phi \pm n\pi$, де n = 0, 1, ..., k, вільна складова струму набуває нульового значення і в колі безпосередньо після комутації настає усталений режим роботи –

$$u_{c} = \frac{U_{m}x_{c}}{Z} \sin \omega t; \quad i = \frac{U_{m}}{Z} \cos \omega t.$$

У загальному випадку, коли $\psi \neq \phi$, на початковій стадії перехідного процесу напруга на ємності u_C може суттєво відрізнятись від свого усталеного значення. З виразу (1.71) видно, що найбільшою така різниця буде при $\psi - \phi = \pm \pi/2$.

На рис. 1.10 наведені часові діаграми напруги на ємності и_с та її складо-

вих u_{CBMM} і u_{CBIN} для кола з достатньо великою постійною часу τ , коли $\psi - \phi = \pi/2$. Як видно з цих діаграм, в даному випадку миттєва напруга на ємності в перехідному режимі може майже вдвічі перевищувати амплітуду цієї напруги в усталеному режимі. Ця обставина широко використовується на практиці при побудові схем модуляторів імпульсних передавачів.



Рис. 1.10. Перехідний процес в RC-колі при включенні гармонічної напруги

Включення в RC-коло імпульсної напруги

Короткочасні відхилення від нульового значення постійних або змінних напруг та струмів називаються імпульсними напругами і струмами. Якщо маємо справу з відхиленнями від нульового значення постійних напруг і струмів, то вони утворюють відеоімпульси напруги та струму. При відхиленні від нульового значення обвідних гармонічних напруг та струмів маємо справу з радіоімпульсами.

Нехай на коло першого порядку (рис. 1.8) діє відеоімпульс напруги прямокутної форми (рис. 1.11, а), який найчастіше використовується на практиці. Як видно, цей відеоімпульс має амплітуду U_0 та тривалість τ_i . При визначенні перехідних процесів у колі, аналіз будемо проводити окремо для двох інтервалів часу: $0 \le t \le \tau_i$ та $t > \tau_i$. В першому з цих двох інтервалів часу в колі діє постійна напруга, що має величину U_0 і підключається до кола в момент часу t = 0. В другому інтервалі часу, коли $t > \tau_i$, діюча в колі напруга



дорівнює нулю і в ньому виникає вільний перехідний процес з ненульовими початковими умовами.

Під час дії на коло відеоімпульсу, тобто в проміжок часу $0 \le t \le \tau_i$, напруги u_R та u_C можна визначити за допомогою співвідношень (1.64), оскільки початкові умови нульові. Якщо ж час $t > \tau_i$, то в колі спостерігається вільний перехідний процес, коли

$$u_{\rm C}(t') = -u_{\rm R} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$
 (1.74)

+′

(1.75)

Рис. 1.11. Перехідні процеси в RC-колі при включенні прямокутного відеоімпульсу

де час t' відраховується від моменту закінчення відеоімпульсу, а постійна інтег-

рування А визначається початковими умовами в колі в момент часу $t = \tau_{i+}$. З другого рівняння системи (1.64) виходить, що

$$u_{\rm C}(\tau_{i+}) = U_0 (1 - e^{-\tau_i/\tau})$$

і при спільному розв'язуванні (1.74) та (1.75), коли $t' = t - \tau_i = 0$, отримаємо

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_0 \left(\mathbf{1} - \mathbf{e}^{-\tau_i / \tau} \right)$$

Тоді для напруги на ємності в другому інтервалі часу, коли $t > \tau_i$, маємо $u_C = U_0 (1 - e^{-\tau_i/\tau}) e^{-t'/\tau}$. (1.76)

Якщо для обох інтервалів часу використати спільний початковий момент відліку часу t = 0, то у виразі (1.76) замість величини t' необхідно використати змінну $t - \tau_i$. В результаті для кожного з двох проміжків часу отримаємо:

$$\begin{split} u_{\rm C} &= U_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right), \ \ 0 \le t \le \tau_{\rm i} \,; \\ u_{\rm C} &= U_0 \left(1 - e^{-\tau_{\rm i}/\tau} \right) e^{-\frac{t-\tau_{\rm i}}{\tau}} = U_0 \left(e^{\tau_{\rm i}/\tau} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}}, \\ (1.77) \end{split}$$

Часова діаграма для напруги на ємності, яка побудована у відповідності з (1.77),



Рис. 1.12. Представлення прямокутного відеоімпульсу сумою постійних напруг, що включаються в 34 моменти часу t = 0 та t = т_i

наведена на рис. 1.11, б. Якщо врахувати, що в будь-який момент часу виконується співвідношення $u_C + u_R = U_0$, то можна легко побудувати і залежність для напруги на опорі R (рис. 1.11, в).

Розглянуту задачу можна розв'язати й іншим способом, наприклад, скориставшись методом накладання. В цьому випадку прямокутний відеоімпульс з амплітудою U_0 подають у вигляді суми двох постійних напруг, однакових за величиною та протилежних за знаком. Перша з цих напруг u_1 підключається до кола в момент часу t = 0, а друга $u_2 - i$ з затримкою на інтервал часу $\Delta t = \tau_i$ (рис. 1.12). В такому ж порядку, користуючись методом накладання, шукають і розв'язок

$$\mathbf{u}_{\mathrm{C}} = \mathbf{u}_{\mathrm{C}}^{+} + \mathbf{u}_{\mathrm{C}}^{-},$$

де u_{C}^{+} – напруга на ємності за рахунок включення позитивної напруги u_{1} ; u_{C}^{-} – напруга на ємності за рахунок включення негативної напруги u_{2} . Скориставшись співвідношенням для напруги u_{C} , із системи рівнянь (1.64) одержимо

$$\mathbf{u}_{\rm C} = \mathbf{u}_{\rm C}^+ + \mathbf{u}_{\rm C}^- = \mathbf{U}_0 \left(\mathbf{1} - \mathbf{e}^{-t/\tau} \right) - \mathbf{U}_0 \left(\mathbf{1} - \mathbf{e}^{-(t-\tau_{\rm i})/\tau} \right), \tag{1.78}$$

де друга складова u_C^- існує лише при $t > \tau_i$.

Аналіз часових діаграм розглянутого RC-кола (рис. 1.11) показує, що при дії на нього прямокутного відеоімпульсу відбувається перетворення форми останнього.

Причому, якщо вихідну напругу фіксувати на ємності (рис. 1.11, б), що є характерним для RC-кола інтегруючого типу, то можна отримати відеоімпульс, за формою близький до трикутного. Тривалість цього імпульсу приблизно вдвічі більша, ніж вхідного, а форма тим ближча до трикутної, чим краще виконується умова $\tau >> \tau_i$. Однак при цьому значно зменшується амплітуда та енергія вихідного імпульсу в порівнянні із вхідним.

Якщо ж вихідну напругу фіксувати на опорі кола (рис. 1.11, в), що характерно для RC-кола диференціюючого типу, то в результаті перетворення уніполярного вхідного відеоімпульсу отримаємо два різнополярні (біполярні), рознесені в часі на інтервал $\Delta t = \tau_i$ імпульси. При виконанні умови $\tau \ll \tau_i$ можна забезпечити дуже малу тривалість цих відеоімпульсів при однаковій з вхідним амплітуді. Однак при цьому, як і в попередньому випадку, значно зменшується енергія сигналу.

1.3. Перехідні процеси в колах другого порядку

1.3.1. Особливості розв'язання диференціальних рівнянь кіл другого порядку

Перехідні процеси в колах другого порядку, до яких також відносяться і послідовний та паралельний коливальні контури, описуються неоднорідними, лінійними диференціальними рівняннями другого порядку з постійними коефіцієнтами. В загальному випадку ці рівняння мають вигляд

$$a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t).$$
(1.79)

Розв'язок цього рівняння, як і для кіл першого порядку, складається з вимушеної та вільної складових. Причому перша з них має вигляд, подібний до зовнішньої дії s(t), що входить в праву частину рівняння (1.79), а вільна складова визначається початковими умовами в колі та коренями характеристичного рівняння цього кола –

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. (1.80)$$

Якщо корені характеристичного рівняння різні, то

$$\mathbf{x}_{\text{Bin}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{e}^{\mathbf{p}_1 t} + \mathbf{A}_2 \mathbf{e}^{\mathbf{p}_2 t}, \qquad (1.81)$$

якщо ж вони однакові, тобто кратні –

$$\mathbf{x}_{\text{Bin}}(t) = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 t)\mathbf{e}^{\text{pt}}.$$
 (1.82)

Методику аналізу перехідних процесів в колах другого порядку розглянемо на прикладі кола, що включає послідовно з'єднані елементи, а саме опір R, індуктивність L та ємність C, і співпадає зі схемою заміщення послідовного коливального контура.

1.3.2. Напруги та струм в послідовному RLC-колі у вільному режимі

Визначення напруг та струму в колі

Нехай ємність С, попередньо заряджена до величини напруги джерела EPC e(t) = E, підключається до кола, що включає послідовно з'єднані елементи R та L (рис. 1.13). Відповідно до другого закону Кірхгофа для післякомутаційного кола можна записати



Рис. 1.13. Підключення зарядженого конденсатора до послідовного RL-кола

$$u_{\rm L} + u_{\rm R} + u_{\rm C} = 0. \tag{1.83}$$

36
А з урахуванням рівнянь зв'язку між миттєвими струмами та напругами в елементах

$$L\frac{di}{dt} + Ri + u_{C}(0_{+}) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} idt = 0.$$
 (1.84)

Якщо продиференціювати (1.84) та почленно поділити його на L, то отримаємо диференціальне рівняння кола в канонічній формі –

$$\frac{d^{2}i}{dt^{2}} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0.$$
(1.85)

В рівнянні (1.85) позначимо $R/L = 2\alpha$, а $1/LC = \omega_0^2$. Тоді воно матиме вигляд

$$\frac{d^{2}i}{dt^{2}} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_{0}^{2}i = 0.$$
(1.86)

Оскільки рівняння (1.86) є лінійним однорідним, то його розв'язок має лише вільну складову вигляду (1.81) або (1.82). Цей розв'язок не залежить від способу підключення до послідовного RLC-кола джерела енергії, а це означає, що результати даного аналізу будуть справедливими і для послідовного, і для паралельного коливальних контурів, що працюють у вільному режимі.

Знайдемо вільні струм та напруги на елементах RLC-кола, припустивши, що корені характеристичного рівняння (1.80) різні. В цьому випадку розв'язок диференціального рівняння (1.86) має вигляд

$$i = i_{Bi\pi} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$
. (1.87)

Характеристичне рівняння кола, що аналізується, запишеться у вигляді

$$p^2+2\alpha p+\omega_0^2=0,$$

а його корені визначаються виразом

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \,. \tag{1.88}$$

Якщо позначити $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, то для шуканого струму в колі отримаємо

$$i = i_{Bi\pi} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}).$$
 (1.89)

Для знаходження невідомих постійних інтегрування A₁ та A₂ необхідно використати незалежні початкові умови в колі.

Оскільки в момент комутації електромагнітна енергія повністю зосереджена в ємності, то в момент часу безпосередньо перед комутацією ($t = 0_{-}$)

$$u_{\rm C}(0_{-}) = E, \ i_{\rm L}(0_{-}) = i(0_{-}) = 0.$$

У відповідності із законами комутації

$$u_{\rm C}(0_+) = u_{\rm C}(0_-) = E,$$
 (1.90)

$$i(0_{+}) = i_{Bi\pi}(0_{+}) = i(0_{-}) = 0.$$
 (1.91)

Якщо врахувати вираз (1.91), який являє собою першу з двох залежних початкових умов, то з рівняння (1.89) одержимо, що $A_1 = -A_2$. Тому

$$i = i_{Bin} = Ae^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}).$$
 (1.92)

В момент часу t = 0₊ напруга на опорі $u_R(0_+) = i(0_+)R = 0$, тому з виразу (1.83) виходить, що

$$u_{\rm C}(0_+) + u_{\rm L}(0_+) = 0,$$

або

$$L\frac{di_{Bin}(0_{+})}{dt} = -E, \ \frac{di_{Bin}(0_{+})}{dt} = -\frac{E}{L},$$
(1.93)

де другий з виразів системи (1.93) є другою залежною початковою умовою в колі.

Запишемо вираз для похідної шуканого струму на основі виразу (1.87), врахувавши при цьому, що $A_1 = A$, а $A_2 = -A$:

$$\frac{d\mathbf{i}_{Bi\pi}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{p}_1 \mathbf{e}^{\mathbf{p}_1 t} - \mathbf{p}_2 \mathbf{e}^{\mathbf{p}_2 t}).$$
(1.94)

Звідси з урахуванням (1.93) для постійної інтегрування А отримаємо

$$A = -\frac{E}{L(p_1 - p_2)} = -\frac{E}{2\beta L}.$$
 (1.95)

Таким чином, вираз для струму послідовного RLC-кола у вільному режимі приймає вигляд

$$i = i_{Bi\pi} = -\frac{E}{2\beta L} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$
 (1.96)

Напруга на індуктивності –

$$u_{\rm L} = L \frac{di_{\rm BIJ}}{dt} = -\frac{E}{2\beta} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}).$$
(1.97)

Напруга на ємності згідно з (1.83) дорівнює

$$\mathbf{u}_{\mathrm{C}} = -\mathbf{u}_{\mathrm{L}} - \mathbf{u}_{\mathrm{R}} = -\mathbf{u}_{\mathrm{L}} - \mathbf{i}\mathbf{R} \,,$$

а після підстановки (1.96) та (1.97) -

$$u_{\rm C} = \frac{E}{2\beta} \left[(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) + \frac{R}{L} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \right].$$
(1.98)

Якщо врахувати, що $R/L = 2\alpha$, то після групування у виразі (1.98) подібних членів для напруги на ємності остаточно маємо

$$u_{\rm C} = -\frac{E}{2\beta} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}).$$
(1.99)

Як видно з виразу (1.88), корені характеристичного рівняння кола, що розглядається, можуть бути дійсними, коли $\alpha \ge \omega_0$, або комплексними, коли $\alpha < \omega_0$. У відповідності з цими обставинами в колах другого порядку можуть виникати два вільні перехідні процеси різні за характером.

Аперіодичний перехідний процес в послідовному RLC-колі

Аперіодичним називається перехідний процес в колі другого порядку, при якому вільний струм, змінюючись в часі за величиною, не змінює свого знаку.

Нехай величина $\alpha > \omega_0$ і тоді коефіцієнт $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ є дійсною величиною. При цьому виконуються умови

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\rho, \ Q_{\kappa} = \frac{\rho}{R} < \frac{1}{2}.$$
 (1.100)

В цьому випадку обидва корені характеристичного рівняння кола є дійсними від'ємними числами, причому $|p_1| < |p_2|$. А це означає, що і вільний струм у колі, і напруги на ємності та індуктивності, які визначаються співвідношеннями (1.96), (1.97) та (1.99), являють собою суми двох експоненціальних функцій, які згасають з різною швидкістю.

Як видно з наведених на рис. 1.14 часових діаграм, струм у цьому випадку, змінюючись в часі, не перетинає осі часу, тобто не змінює свого знаку, що відповідає визначенню аперіодичного перехідного процесу.

Напруга на ємності у вільному режимі безперервно зменшується, наближаючись в кінцевому значенні до нуля. Напруга на індуктивності змінює свій знак, коли похідна di_{віл}/dt дорівнює нулю, і має екстремум, коли додатнє значення тієї ж похідної найбіль-



Рис. 1.14. Аперіодичний перехідний процес в RLC-колі

ше. З плином часу перехідний процес поступово згасає, оскільки електромагнітна енергія, що була накопичена в колі, розсіюється в активному опорі R. У випадку, коли величина $\alpha = \omega_0$, маємо однакові дійсні корені характеристичного рівняння, тобто $p_1 = p_2 = -\alpha$. При цьому згідно з виразом (1.82) загальний розв'язок диференціального рівняння кола має вигляд

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_{\text{віл}} = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{t}) \mathbf{e}^{-\alpha t}$$
. (1.101)

Для визначення у виразі (1.101) постійних інтегрування A_1 та A_2 скористаємося знайденими раніше залежними початковими умовами, які визначаються виразами (1.91) та (1.93). Перша із залежних початкових умов (1.91) дозволяє безпосередньо з виразу (1.101) визначити, що $A_1 = 0$. Для знаходження величини A_2 спочатку запишемо вираз для похідної струму. Згідно з (1.101) маємо

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}_{\mathrm{Bi}\pi}}{\mathrm{d}\mathbf{t}} = \mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{t}} (\mathbf{A}_2 - \alpha \mathbf{A}_1 - \alpha \mathbf{A}_2 \mathbf{t}). \tag{1.102}$$

Якщо врахувати другу залежну початкову умову (1.93), а також той факт, що $A_1 = 0$, то одержимо

$$A_2 = \frac{di_{Bin}(0_+)}{dt} = -\frac{E}{L}.$$
 (1.103)

Отже, струм у цьому випадку дорівнює

$$i = i_{Bi\pi} = -\frac{E}{L} t e^{-\alpha t}$$
. (1.104)

Напруга на індуктивності –

$$u_{\rm L} = L \frac{di_{\rm Bin}}{dt} = -E(1 - \alpha t)e^{-\alpha t},$$
 (1.105)

а напруга на ємності –

$$u_{\rm C} = -u_{\rm R} - u_{\rm L} = -i_{\rm Bin}R - u_{\rm L} =$$

= 2E\alpha te^{-\alpha t} + E(1-\alpha t)e^{-\alpha t} = E(1+\alpha t)e^{-\alpha t}. (1.106)

Як і у випадку дійсних різних коренів характеристичного рівняння кола, перехідний процес в разі дійсних однакових коренів також носить аперіодичний характер, оскільки у виразах (1.104) – (1.106) експоненціальний множник змінюється значно швидше, ніж лінійно зростаючий. Тобто, умова $\alpha = \omega_0$ характеризує граничний випадок, коли перехідний процес ще має аперіодичний характер.

Коливальний перехідний процес в послідовному RLC-колі

Коливальним називається перехідний процес в колі другого порядку, при якому вільна складова струму, змінюючись в часі за величиною, періодично

змінює свій знак.

Нехай величина $\alpha < \omega_0$, тоді коефіцієнт $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ є уявною величиною. При цьому опір $R < 2\rho$, а добротність кола $Q_{\kappa} > 1/2$. Позначимо $\beta = j\omega_{\rm B}$, тоді комплексно-спряжені корені характеристичного рівняння запишуться

$$\mathbf{p}_{1,2} = -\alpha \pm \mathbf{j}\omega_{\rm B}, \qquad (1.107)$$

де величина $\omega_{\rm B}$ є дійсною і дорівнює

$$\omega_{\rm \scriptscriptstyle B} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.\tag{1.108}$$

З урахуванням викладеного на основі співвідношення (1.96) для стуму в колі отримаємо

$$i = i_{Bi\pi} = -\frac{E}{2j\omega_{B}L}e^{-\alpha t}(e^{j\omega_{B}t} - e^{-j\omega_{B}t}) =$$
$$= -\frac{E}{\omega_{B}L}e^{-\alpha t}\frac{e^{j\omega_{B}t} - e^{-j\omega_{B}t}}{2j}.$$

Остаточно

$$i = i_{Bin} = -\frac{E}{\omega_{B}L} e^{-\alpha t} \sin \omega_{B} t.$$
(1.109)

Як видно з виразу (1.109), при комплексно-спряжених коренях характеристичного рівняння перехідний струм є знакозмінним, тобто відповідає визначенню коливального перехідного процесу.

Напруга на індуктивності –

$$u_{\rm L} = L \frac{{\rm d}i_{\rm Bi\pi}}{{\rm d}t} = -\frac{E}{\omega_{\rm B}} (-\alpha e^{-\alpha t} \sin \omega_{\rm B} t + \omega_{\rm B} e^{-\alpha t} \cos \omega_{\rm B} t).$$
(1.110)

Скористаємось відомим тригонометричним співвідношенням

$$A\sin\alpha + B\cos\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\alpha + \psi), \qquad (1.111)$$

де $\psi = \operatorname{arctg}(B/A)$ – початкова фаза сумарного коливання.

Тоді на основі виразу (1.110) отримаємо

$$u_{\rm L} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_{\rm B}^2}}{\omega_{\rm B}} \cdot E \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\rm B} t + \psi_{\rm L}) = \frac{\omega_0}{\omega_{\rm B}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\rm B} t + \psi_{\rm L}), \quad (1.112)$$

де $\psi_L = arctg(-\omega_{_B}/\alpha)$ – початкова фаза напруги на індуктивності;

 $\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega_{\scriptscriptstyle B}^2}$ — резонансна частота RLC-кола.

Напруга на ємності згідно з (1.99) матиме вигляд

$$u_{C} = -\frac{E}{2j\omega_{B}}e^{-\alpha t}(p_{2}e^{j\omega_{B}t} - p_{1}e^{-j\omega_{B}t}) =$$
$$= -\frac{E}{2j\omega_{B}}e^{-\alpha t}\left[(-\alpha - j\omega_{B})e^{j\omega_{B}t} - (-\alpha + j\omega_{B})e^{-j\omega_{B}t}\right] =$$
$$= -\frac{E}{2j\omega_{B}}e^{-\alpha t}\left[-\frac{\alpha(e^{j\omega_{B}t} - e^{-j\omega_{B}t})\cdot 2j}{2j} - \frac{j\omega_{B}(e^{j\omega_{B}t} + e^{j\omega_{B}t})\cdot 2}{2}\right].$$

Якщо в останньому виразі скоротити чисельник та знаменник на 2j і скористатись формулою Ейлера, то одержимо

$$u_{\rm C} = \frac{E}{\omega_{\rm B}} e^{-\alpha t} (\alpha \sin \omega_{\rm B} t + \omega_{\rm B} \cos \omega_{\rm B} t). \qquad (1.113)$$

Далі з (1.113) на основі співвідношення (1.111) отримаємо

$$u_{\rm C} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_{\rm B}^2}}{\omega_{\rm B}} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}^{-\alpha t} \sin(\omega_{\rm B} t + \psi_{\rm C}) = \frac{\omega_0}{\omega_{\rm B}} \mathbf{E} \mathbf{e}^{-\alpha t} \sin(\omega_{\rm B} t + \psi_{\rm C}), \quad (1.114)$$

де $\psi_{\rm C} = \operatorname{arctg}(\omega_{\rm B}/\alpha)$ – початкова фаза напруги на ємності.

Таким чином, у випадку, коли добротність RLC-кола $Q_{\kappa} > 1/2$, не тільки струм, але й напруги на елементах кола у вільному режимі змінюються за гармонічними законами, хоча з плином часу амплітуди коливань при цьому безперервно зменшуються. Швидкість згасання напруг та струму визначається множником $e^{-\alpha t}$ у виразах (1.109), (1.112) та (1.114), тому коефіцієнт $\alpha = R/2L$, що визначає швидкість розсіювання енергії в колі, називається коефіцієнтом згасання. Частота $\omega_{\rm B} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, що входить у ті самі вирази, називається частотою власних коливань або власною частотою послідовного RLC-кола. Якщо в останньому коефіцієнт згасання $\alpha \neq 0$, то завжди виконусться умова $\omega_{\rm B} < \omega_0$.

Зсув фаз між струмом та напругами на елементах кола визначається співвідношеннями між частотою власних коливань $\omega_{\rm B}$ та коефіцієнтом згасання α . Якщо $Q_{\rm K} \ge 5$, тобто RLC-коло є високодобротним, і втрати в ньому малі (R << ρ), то виконується умова $\alpha << \omega_0$ і частота власних коливань $\omega_{\rm B}$ практично збігається з резонансною частотою кола ($\omega_{\rm B} \approx \omega_0$). В цьому випадку співвідношення (1.109), (1.112) та (1.114) дещо спрощуються:

$$i = i_{Bin} \approx -\frac{E}{\rho} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t = \frac{E}{\rho} e^{-\alpha t} \sin (\omega_0 t - \pi); \qquad (1.115)$$

$$u_{\rm L} \approx {\rm Ee}^{-\alpha t} \sin{(\omega_0 t - \pi/2)};$$
 (1.116)

42

$$u_{\rm C} \approx \text{Ee}^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \pi/2). \tag{1.117}$$

Очевидно, що в перехідному режимі співвідношення між початковими фазами напруг та струму такі ж самі, як і в усталеному режимі роботи послідовного RLC-кола при гармонічній дії. Тобто, напруга на індуктивності u_L випереджає за фазою струм $i_{віл}$ на $\pi/2$, напруга на ємності u_C запізнюється відносно струму на $\pi/2$, а різниця фаз між напругами u_L та u_C в будь-який момент часу дорівнює π .

Параметри згасання вільних коливань в RLC-колі

На рис. 1.15 наведені залежності для струму i(t) та напруги на ємності $u_C(t)$ послідовного RLC-кола, що має малі втрати, у вільному режимі. Швидкість згасання вільних коливань можна оцінити кількісно за допомогою відношення амплітуд напруги або струму, що знаходяться один від одного на інтервалі в один період власних коливань T_B (рис. 1.15, а). Із співвідношень для струму (1.109) та напруг на елементах кола (1.112) і (1.114), а також з рис. 1.15, а видно, що відношення зазначених вище амплітуд, яке називають декрементом згасання Δ , дорівнює

$$\Delta = \frac{U_{mC}(t_1)}{U_{mC}(t_1 + T_B)} = \frac{I_{mBIJ}(t_1)}{I_{mBIJ}(t_1 + T_B)} =$$

$$= \frac{U_{mL}(t_1)}{U_{mL}(t_1 + T_B)} = \frac{e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha (t_1 + T_B)}} = e^{\alpha T_B}.$$
(1.118)

Натуральний логарифм цього відношення називається логарифмічним декрементом згасання –

$$\delta = \ln \Delta = \ln \frac{X_{\rm m}(t_1)}{X_{\rm m}(t_1 + T_{\rm B})} = \alpha T_{\rm B}.$$
 (1.119)



Рис. 1.15. Вільні або власні коливання в RLC-колі

Для кола з малими втратами, коли $\omega_{\rm B} \approx \omega_0$, а $T_{\rm B} \approx T_0$, маємо

$$\delta = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{R\pi}{L} \sqrt{LC} =$$

$$= \pi \frac{R}{\rho} = \frac{\pi}{Q_{\kappa}} = \pi d_{\kappa}.$$
(1.120)

Проміжок часу, на протязі якого амплітуда вільного струму або напруги зменшується в е разів, називається постійною часу τ_{κ} кола другого порядку. Виходячи з виразів для струму та напруг (1.115) – (1.117), можна зробити висновок, що

$$\tau_{\kappa} = 1/\alpha. \tag{1.121}$$

Разом з тим

$$\tau_{\kappa} = \frac{2L}{R} \approx \frac{2\omega_0 L}{\omega_0 R} = \frac{2Q_{\kappa}}{\omega_0} = \frac{2}{\Delta\omega_{\kappa}}.$$
(1.122)

Таким чином, чим вища добротність кола Q_{κ} та вужча його смуга пропускання $\Delta \omega_{\kappa}$, тим більша постійна часу τ_{κ} і тривалішими будуть перехідні процеси.

Якщо в RLC-колі R = 0, тобто коло не має втрат, то коефіцієнт згасання $\alpha = 0$ і на основі виразів (1.115) – (1.117) отримаємо

$$i = i_{Bi\pi} = \frac{E}{\rho} \sin (\omega_0 t - \pi),$$

$$u_L = E \sin (\omega_0 t - \pi/2),$$

$$u_C = E \sin (\omega_0 t + \pi/2).$$

(1.123)

Очевидно, що напруги та струм у цьому випадку мають незатухаючий коливальний характер.

Величини енергій електричного та магнітного полів в ідеальному RLC-колі визначаються співвідношеннями

$$w_{\rm C} = \frac{{\rm C}{\rm E}^2}{2}\cos^2\omega_0 t, \ w_{\rm L} = \frac{{\rm Li}_{\rm Bin}^2}{2} = \frac{{\rm L}{\rm E}^2}{2\rho^2}\sin^2\omega_0 t = \frac{{\rm C}{\rm E}^2}{2}\sin^2\omega_0 t.$$
(1.124)

З аналізу співвідношень (1.124) видно, що в моменти часу t = 0, T/2, T, ...вся енергія, яка накопичується в колі, зосереджена в електричному полі ємності, а енергія магнітного поля індуктивності $w_L = 0$. Якщо ж t = T/4, 3T/4, 5T/4, ..., то навпаки $w_C = 0$, а енергія магнітного поля індуктивності досягає максимального значення.

Таким чином, подібно до усталеного режиму роботи послідовного RLC-кола при гармонічному збудженні, з енергетичної точки зору вільний перехідний процес в цьому колі можна розглядати як результат безперервного перерозподілу енергії між електричним полем ємності та магнітним полем індуктивності. Це означає, що в RC- та RL-колах другого порядку, де такого перерозподілу не буває, перехідний процес коливальним бути не може і завжди є аперіодичним.

1.3.3. Включення в послідовне RLC-коло постійної напруги

Проаналізуємо процеси, що виникають у послідовному RLC-колі в разі підключення до нього джерела постійної напруги (рис. 1.16). В цьому випадку лінійне інтегро-диференціальне рівняння кола має вигляд

$$L\frac{di}{dt} + Ri + u_{C}(0_{+}) + \frac{1}{C}\int idt = E.$$
 (1.125)

Після диференціювання (1.125) та нескладних перетворень одержимо однорідне диференціальне рівняння другого порядку, аналогічне до того, яке





мало місце при аналізі вільного перехідного процесу в такому ж колі –

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{i}}{\mathrm{dt}^2} + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\frac{\mathrm{d}\mathrm{i}}{\mathrm{dt}} + \frac{1}{\mathrm{LC}}\mathrm{i} = 0.$$

Оскільки це рівняння однорідне, то вимушена складова його розв'язку дорівнює

нулю і перехідний струм в колі визначається співвідношенням (1.87), як і у вільному режимі. В перший момент після комутації ($t = 0_+$) струм в колі $i(0_+)$ та напруга на ємності $u_C(0_+)$, що визначають початковий енергетичний стан кола, дорівнюють нулю. В той самий момент часу, як видно з рівняння (1.125), напруга на індуктивності дорівнює

$$L\frac{di(0_+)}{dt} = E.$$

Отже, у відповідності з викладеним для кола, що аналізується, залежні початкові умови запишуться так:

$$i(0_{+}) = 0; \ \frac{di(0_{+})}{dt} = \frac{E}{L}.$$
 (1.126)

Таким чином, при включенні в RLC-коло постійної EPC, диференціальне рівняння буде таким самим, як і у вільному режимі, але, як виходить із порівняння (1.93) та (1.126), змінюється одна із залежних почат-кових умов. Якщо скористатись першою із залежних початкових умов (1.126) та виразом (1.87), то видно, що, як і у вільному режимі, $A_1 = A$, $A_2 = -A$ і шуканий струм в загальному вигляді запишеться

$$i = A(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$
 (1.127)

Якщо знайти похідну струму

$$\frac{di}{dt} = A(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

45

і скористатись другою з початкових умов (1.126), то одержимо

$$\frac{E}{L} = A(p_1 - p_2); \ A = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{E}{2\beta L}.$$
 (1.128)

З порівняння виразів (1.95) та (1.128) виходить, що постійні інтегрування, отримані у разі вільного режиму та при підключенні постійної напруги, відрізняються лише знаками.

В результаті для струму в колі при підключенні постійної ЕРС маємо

$$i = \frac{E}{2\beta L} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}), \qquad (1.129)$$

а для напруги на індуктивності –

$$u_{L} = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{2\beta} (p_{1} e^{p_{1}t} - p_{2} e^{p_{2}t}).$$
(1.130)

Якщо порівняти вирази (1.96) і (1.129), а також (1.97) і (1.130), то видно, що струми та напруги на індуктивності у вільному та вимушеному режимах відрізняються лише знаками. Тобто

$$i = -i_{(Bi\pi)}, u_L = -u_{L(Bi\pi)}.$$
 (1.131)

Спад напруги на ємності дорівнює

$$u_{\rm C} = E - u_{\rm L} - u_{\rm R} = E - u_{\rm C(Bi,I)},$$
 (1.132)

а з урахуванням (1.99) -

$$u_{\rm C} = E + \frac{E}{2\beta} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}).$$
(1.133)

Слід підкреслити, що у виразах (1.131) і (1.132) струм $i_{(віл)}$ та напруги $u_{L(віл)}$, $u_{C(віл)}$ – це струм та напруги в колі у вільному режимі, які визначаються співвідношеннями (1.96), (1.97) і (1.99).

Перехідні процеси в RLC-колі при включенні джерела постійної EPC, як і у вільному режимі, можуть мати або аперіодичний, або коливальний характер. В першому випадку корені характеристичного рівняння p₁ і p₂ будуть



Рис. 1.17. Аперіодичні перехідні процеси в RLC-колі при включенні постійної ЕРС

дійсні та різні, тому струм і напруги в колі описуються співвідношеннями (1.129), (1.130) та (1.133). Часові діаграми для цих перехідних процесів можна легко одержати за допомогою графіків на рис. 1.14, якщо врахувати вирази (1.131) та (1.132).

З аналізу графіків струму і напруг в аперіодичному режимі (рис. 1.17) видно, що на-

пруга на ємності в процесі зарядки останньої зростає до свого максимального значення Е. Струм i(t) в колі, який пропорційний швидкості зростання напруги на ємності u_C , відрізняється від струму у вільному режимі лише знаком. Так само лише знаком відрізняється від напруги у вільному режимі і напруга на індуктивності u_L , яка пропорційна швидкості змінювання струму в колі.

Коливальний перехідний процес при підключенні до RLC-кола постійної EPC спостерігається при виконанні умови $\alpha < \omega_0$, коли добротність $Q_{\kappa} > 1/2$. В цьому випадку вирази для струму в колі та напруг на його елементах можна легко отримати на основі співвідношень (1.109), (1.112) та (1.114), якщо врахувати (1.131) і (1.132):

$$i = \frac{E}{\omega_{\rm B}L} e^{-\alpha t} \sin \omega_{\rm B} t; \qquad (1.134)$$

$$u_{\rm L} = -\frac{\omega_0}{\omega_{\rm B}} {\rm E} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\rm B} t + \psi_{\rm L}); \qquad (1.135)$$

$$u_{\rm C} = E - \frac{\omega_0}{\omega_{\rm B}} E e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\rm B} t + \psi_{\rm C}). \qquad (1.136)$$



Рис. 1.18. Перехідний коливальний процес в RLC-колі при включенні джерела постійної ЕРС

На рис. 1.18 наведені часові діаграми для перехідного струму в колі та перехідної напруги на ємності при малих втратах, коли $Q_{\kappa} > 5$, а $\omega_{\rm B} \approx \omega_0$. Як видно, перехідний струм змінюється в часі так само, як і струм в режимі вільних коливань, але має протилежну фазу. Напруга на ємності коливається біля рівня, що дорівнює величині ЕРС, і поступово наближається до нього. Слід зазначити, що максимальне значення напруги на ємності під час перехідного процесу може майже вдвічі перевищувати величину прикладеної до кола напруги.

1.3.4. Включення в послідовне RLC-коло гармонічної напруги

Розв'язування диференціального рівняння кола

Розглянемо випадок, коли до схеми послідовного RLC-кола, яка є аналогічною схемі заміщення послідовного коливального контура, підключається джерело гармонічної EPC –

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}_{\mathrm{m}} \cos(\omega \mathbf{t} + \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{e}}).$$

Рівняння електричної рівноваги такого кола має вигляд

$$L\frac{di}{dt} + Ri + u_{C}(0_{+}) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} idt = E_{m}\cos(\omega t + \psi_{e}).$$
(1.137)

Оскільки зовнішнє збудження є гармонічним, то, не розв'язуючи диференціального рівняння кола, для вимушеної складової струму в колі отримаємо

$$i_{\text{вим}} = \frac{E_{\text{m}}}{Z} \cos(\omega t + \psi_{\text{e}} - \phi) = I_{\text{m}} \cos(\omega t + \psi_{\text{e}} - \phi), \qquad (1.138)$$

де Z – повний опір кола; φ – зсув фаз між напругою та струмом у колі.

В результаті загальний розв'язок диференціального рівняння кола при різних коренях характеристичного рівняння запишеться таким чином:

$$i = i_{BMM} + i_{BIJ} = I_m \cos(\omega t + \psi_e - \phi) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$
(1.139)

При включенні в коло змінної ЕРС його початковий стан буде визначатися незалежними початковими умовами –

$$u_{C}(0_{+}) = u_{C}(0_{-}) = 0, \quad i(0_{+}) = i(0_{-}) = 0.$$

Якщо скористатись цими початковими умовами, то за допомогою рівняння (1.137) можна знайти необхідні для розв'язування диференціального рівняння кола залежні початкові умови:

$$i(0_{+}) = 0; \quad \frac{di(0_{+})}{dt} = \frac{E_{m}}{L} \cos \psi_{e}.$$
 (1.140)

На основі загального виразу для шуканого струму (1.139) та залежних початкових умов (1.140) можна записати систему рівнянь для знаходження постійних інтегрування A₁ і A₂ розв'язку диференціального рівняння:

$$I_{m} \cos(\psi_{e} - \phi) + A_{1} + A_{2} = 0;$$

$$p_{1}A_{1} + p_{2}A_{2} - \omega I_{m} \sin(\psi_{e} - \phi) = \frac{E_{m}}{L} \cos\psi_{e}.$$
(1.141)

Знайдемо з першого рівняння системи (1.141) величину А₁-

$$A_1 = -A_2 - I_m \cos(\psi_e - \phi)$$

Підставимо це значення величини А1 в друге рівняння системи –

$$p_1(-A_2 - I_m \cos(\psi_e - \phi) + p_2 A_2 - \omega I_m \sin(\psi_e - \phi) = \frac{E_m}{L} \cos\psi_e$$

та знайдемо постійну інтегрування А2-

$$A_{2} = \frac{p_{1}}{p_{2} - p_{1}} I_{m} \cos(\psi_{e} - \phi) + \frac{\omega I_{m}}{p_{2} - p_{1}} \sin(\psi_{e} - \phi) + \frac{E_{m}}{L(p_{2} - p_{1})} \cos\psi_{e}.$$
 (1).142)

Здійснимо підстановку знайденого значення постійної інтегрування A₂ в друге рівняння системи (1.141) і знайдемо постійну інтегрування A₁ –

$$A_{1} = -\frac{p_{2}}{p_{2} - p_{1}} I_{m} \cos(\psi_{e} - \phi) - \frac{p_{2}}{p_{1}} \cdot \frac{\omega I_{m}}{p_{2} - p_{1}} \sin(\psi_{e} - \phi) - \frac{p_{2}}{p_{1}} \cdot \frac{E_{m}}{L(p_{2} - p_{1})} \cos\psi_{e} + \frac{\omega I_{m}}{p_{1}} \sin(\psi_{e} - \phi) + \frac{E_{m}}{p_{1}L} \cos\psi_{e}.$$

Після приведення подібних членів та невеликих спрощень отримаємо

$$A_{1} = \frac{p_{2}}{p_{1} - p_{2}} I_{m} \cos(\psi_{e} - \phi) + \frac{\omega I_{m}}{p_{1} - p_{2}} \sin(\psi_{e} - \phi) + \frac{E_{m}}{L(p_{1} - p_{2})} \cos\psi_{e}.$$
(1.143)

Використовуючи знайдені значення постійних інтегрування A₁ та A₂, запишемо розв'язок диференціального рівняння кола:

$$i = I_{m} \cos(\omega t + \psi_{e} - \varphi) + \left[\frac{E_{m}}{L(p_{1} - p_{2})} \cos\psi_{e} + \frac{\omega I_{m}}{p_{1} - p_{2}} \sin(\psi_{e} - \varphi) + \frac{p_{2}I_{m}}{p_{1} - p_{2}} \cos(\psi_{e} - \varphi) \right] \times e^{p_{1}t} + \left[-\frac{E_{m}}{L(p_{1} - p_{2})} \cos\psi_{e} - \frac{\omega I_{m}}{p_{1} - p_{2}} \sin(\psi_{e} - \varphi) - \frac{p_{1}I_{m}}{p_{1} - p_{2}} \cos(\psi_{e} - \varphi) \right] \cdot e^{p_{2}t}.$$

Якщо згрупувати члени з однаковими множниками – тригонометричними функціями, а множники I_m при тригонометричній функції $sin(\psi_e - \phi)$ замінити співвідношенням $\frac{E_m \cdot L}{Z \cdot L}$, то для шуканого струму отримаємо

$$i = I_{m} \cos(\omega t + \psi_{e} - \varphi) + \frac{I_{m}}{p_{1} - p_{2}} \cos(\psi_{e} - \varphi)(p_{2}e^{p_{1}t} - p_{1}e^{p_{2}t}) + \frac{E_{m}}{L(p_{1} - p_{2})} \left[\cos\psi_{e} + \frac{\omega L}{Z}\sin(\psi_{e} - \varphi)\right](e^{p_{1}t} - e^{p_{2}t}).$$
(1.144)

Проведемо аналіз одержаного виразу для струму в колі стосовно найбільш важливих для практики випадків.

Аналіз розв'язку диференціального рівняння кола

З точки зору практичного застосування в радіотехніці найбільший інтерес викликає дослідження перехідних процесів у колі другого порядку, які мають коливальний характер і виникають у випадку, коли коефіцієнт згасання $\alpha < \omega_0$. В цьому випадку корені характеристичного рівняння кола є комплексно-спряженими. Отже, маємо

$$p_{1} - p_{2} = (-\alpha + j\omega_{B}) - (-\alpha - j\omega_{B}) = 2j\omega_{B},$$

$$e^{p_{1}t} - e^{p_{2}t} = e^{-\alpha t}(e^{j\omega_{B}t} - e^{-j\omega_{B}t}) \cdot \frac{2j}{2j} = 2j \cdot e^{-\alpha t} \sin \omega_{B}t,$$

$$p_{2}e^{p_{1}t} - p_{1}e^{p_{2}t} = -2j \cdot e^{-\alpha t}(\omega_{B} \cos \omega_{B}t + \alpha \sin \omega_{B}t) =$$

$$= -2j\sqrt{\omega_{B}^{2} + \alpha^{2}} \cdot e^{-\alpha t} \sin (\omega_{B}t + \psi_{C}) = -2j\omega_{0} \cdot e^{-\alpha t} \sin (\omega_{B}t + \psi_{C}).$$
(1.145)

На основі розв'язку (1.144) диференціального рівняння кола, що розглядається, та допоміжних співвідношень (1.145) для струму в колі отримаємо

$$i = I_{m} \cos(\omega t + \psi_{e} - \phi) - I_{m} \frac{\omega_{0}}{\omega_{B}} \cos(\psi_{e} - \phi) e^{-\alpha t} \sin(\omega_{B} t + \psi_{C}) + + \frac{E_{m}}{\omega_{B} L} \left[\cos\psi_{e} + \frac{\omega L}{Z} \sin(\psi_{e} - \phi) \right] e^{-\alpha t} \sin\omega_{B} t.$$
(1.146)

Якщо втрати в RLC-колі малі, то $\alpha = R/2L \ll \omega_0$. При цьому $\omega_{\rm B} \approx \omega_0$, $\psi_{\rm C} \approx \pi/2$. Тоді для струму в колі отримаємо приблизне співвідношення

$$i \approx I_{m} \cos(\omega t + \psi_{e} - \varphi) - I_{m} \cos(\psi_{e} - \varphi) e^{-\alpha t} \cos \omega_{0} t + \frac{E_{m}}{\omega_{0} L} \left[\cos \psi_{e} + \frac{\omega L}{Z} \sin(\psi_{e} - \varphi) \right] e^{-\alpha t} \sin \omega_{0} t.$$
(1.147)

Аналізуючи одержаний вираз для перехідного струму, можна передбачити, що особливості коливальних перехідних процесів при включенні в RLC-коло гармонічної EPC будуть залежати від співвідношення між величинами частоти ω зовнішнього коливання та резонансної частоти ω_0 кола.

Перехідні процеси при однакових частотах ω та ω_0

Нехай частота гармонічних косинусоїдних коливань ω зовнішньої ЕРС e(t) співпадає з резонансною частотою ω_0 RLC-кола, а початкова фаза зовнішнього коливання $\psi_e = -\pi/2$. В цьому випадку крива вхідної ЕРС в момент часу t = 0₊ проходить через нуль, а у виразі (1.147) для перехідного струму $\omega = \omega_0$, Z = R, $\varphi = 0$ i cos $\psi_e = 0$. Тоді замість (1.147) матимемо

$$i \approx I_m \cos(\omega_0 t - \pi/2) - \frac{E_m}{R} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$$

або остаточно

$$i \approx \frac{E_m}{R} (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_0 t.$$
 (1.148)

З виразу (1.148) видно, що амплітуда перехідного струму в RLC-колі з плином часу зростає за експоненціальним законом, наближаючись за величиною до свого граничного значення E_m/R

(рис. 1.19). Можна показати, що закон зростання амплітуди струму не залежить від значення початкової фази зовнішньої ЕРС.

Щоб отримати чіткіше уявлення про особливості такого перехідного процесу, знайдемо швидкість наростання амплітуди струму в колі. Для цього визначимо похідну від обвідної струму i(t), яка має вигляд

 $I_{m}(t) = I_{m}(1 - e^{-\alpha t}).$



Рис. 1.19. Коливальний перехідний процес в RLC-колі при включенні гармонічної EPC (ω = ω₀)

Похідна обвідної струму в момент часу $t = 0_+$ має значення

$$\frac{\mathrm{dI}_{\mathrm{m}}(0_{+})}{\mathrm{dt}} = \alpha \mathrm{I}_{\mathrm{m}}.$$
(1.149)

Оскільки коефіцієнт згасання α кола дорівнює

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1}{\tau_{\kappa}} = \frac{\omega_0}{2Q_{\kappa}} = \frac{\Delta\omega_{\kappa}}{2}, \qquad (1.150)$$

то на основі (1.149) та (1.150) отримаємо

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{I}_{\mathrm{m}}(\mathbf{0}_{+})}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau_{\kappa}}\mathbf{I}_{\mathrm{m}} = \frac{\omega_{0}}{2\mathbf{Q}_{\kappa}}\mathbf{I}_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta\omega_{\kappa}}{2}\mathbf{I}_{\mathrm{m}}.$$
(1.151)

Таким чином, чим вища добротність і постійна часу кола та чим вужча його смуга пропускання і менша амплітуда зовнішнього збудження, тим повільніше в такому колі протікають перехідні процеси.

Перехідні процеси при різних частотах ω та ω_o

Нехай частота ω зовнішньої гармонічної косинусоїдної ЕРС не співпадає з резонансною частотою ω_0 RLC-кола, а початкова фаза зовнішньої ЕРС $\psi_e = \pi/2$. У цьому випадку вираз для перехідного струму кола має вигляд

$$\mathbf{i} = \mathbf{I}_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \pi/2 - \varphi) - \mathbf{I}_{\mathrm{m}} e^{-\alpha t} \sin \varphi \cdot \cos \omega_{\mathrm{o}} t + \frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}} \mathbf{I}_{\mathrm{m}} e^{-\alpha t} \cos \varphi \cdot \sin \omega_{\mathrm{o}} t.$$

В області дуже малих розстройок, коли $\omega \approx \omega_0$, маємо

$$\mathbf{i} = -\mathbf{I}_{\mathrm{m}}\sin(\omega t - \varphi) + \mathbf{I}_{\mathrm{m}}e^{-\alpha t}(\sin\omega_0 t \cdot \cos\varphi - \cos\omega_0 t \cdot \sin\varphi)$$

або інакше –

$$i = -I_{m}\sin(\omega t - \varphi) + I_{m}e^{-\alpha t}\sin(\omega_{0}t - \varphi).$$
(1.152)

Якщо в колі втрат немає (α = 0), то перехідний струм являє собою сукупність двох гармонічних коливань з близькими частотами, однаковими амплітудами та протилежними початковими фазами. При складанні цих двох коливань виникають так звані биття –

$$i = -I_{m} \sin(\omega t - \varphi) + I_{m} \sin(\omega_{0} t - \varphi) =$$

= $-2I_{m} \sin \frac{\omega - \omega_{0}}{2} t \cdot \cos \left(\frac{\omega + \omega_{0}}{2} t - \varphi\right).$ (1.153)

Як видно із співвідношення (1.153) та показано на рис. 1.20, в разі виникнення биттів амплітуда струму в колі повільно змінюється за законом

$$I_{m}(t) = 2I_{m} \left| \sin \frac{\omega - \omega_{0}}{2} t \right|.$$
 (1.154)



Частота струму в колі дорівнює $\omega_{\kappa} = (\omega + \omega_0)/2$. При цьому максимальне значення струму може в два рази перевищувати амплітуду вимушеної складової струму.

Рис. 1.20. Биття в колі другого порядку без втрат

Виникнення биттів при підключенні джерела гармонічної напруги до кола другого порядку без втрат пояснюється тим, що внаслідок неспів-

падання частот зовнішнього коливання та частоти власних коливань кола фазові співвідношення між вільною та вимушеною складовими струму безперервно змінюються, причому різниця фаз цих складових лінійно наростає в часі

$$\Delta \varphi(t) = (\omega - \omega_0)t.$$

В ті моменти часу, коли різниця фаз дорівнюватиме $2k\pi$, де k = 0, n, сума миттєвих значень вимушеної та вільної складових струму буде максимальною, а коли різниця фаз дорівнюватиме $(2k + 1)\pi$, ця сума матиме мінімальне значення. Частоту повторювання максимумів обвідної струму (рис. 1.20) називають частотою биттів. Таким чином, кутова частота биттів дорівнює абсолютному значенню різниці кутових частот і

вільної та вимушеної складових струму –

$$\omega_{\tilde{0}} = |\omega - \omega_{0}|.$$



Рис. 1.21. Згасаючі биття в реальному RLC-колі

В реальних колах другого порядку биття носять згасаючий характер (рис. 1.21), оскільки коефіцієнт згасання таких кіл є завжди ненульовим і вільна складова струму зменшується в часі за експоненціальним законом.

1.4. Часові характеристики лінійних кіл

1.4.1. Типові імпульсні збудження та їх властивості

Якщо зовнішнє електричне збудження, що діє на лінійне коло, має довільну форму, то найкращий результат при аналізі кола в будь-якому режимі, в тому числі і в перехідному, можна отримати в разі використання методу накладання. В цьому випадку зовнішнє збудження s(t) представляють у вигляді лінійної комбінації однотипних елементарних складових $s_k(t)$ –

$$\mathbf{s}(\mathbf{t}) = \sum_{k} \alpha_k \mathbf{s}_k(\mathbf{t}).$$

Реакцію кола на таке збудження шукають у вигляді лінійної комбінації часткових реакцій x_k(t) на дію кожної з елементарних складових зовнішнього збудження окремо –

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k} \alpha_k \mathbf{x}_k(t).$$

Якщо виходити з результатів, отриманих при аналізі кіл в усталеному та перехідному режимах, то можна зробити висновок, що при певному вигляді елементарного збудження $s_k(t)$ вигляд реакції кола $x_k(t)$ буде залежати лише від топології схеми та параметрів її елементів.

Систему функцій $s_k(t)$ треба вибирати так, щоб, по-перше, їх сукупність дозволяла представити будь-яке зовнішнє збудження s(t), що має фізичний смисл, а по-друге, визначення реакцій кола на збудження $s_k(t)$ повинні бути якомога простішими.

При дослідженні динамічних властивостей лінійних кіл, тобто їх поведінки в неусталеному режимі, найбільше розповсюдження одержали елементарні або типові імпульсні збудження у вигляді одиничного стрибка, який ще називають функцією Хевісайда або одиничним ступінчастим збудженням, та у вигляді одиничного імпульса, що частіше іменується δ-функцією, або функцією Дірака.

Одиничне ступінчасте збудження

Одиничне ступінчасте збудження, або одиничний стрибок, задають за допомогою одиничної функції часу 1(t). Стосовно електричного кола таке збудження являє собою одиничні незмінні напругу або струм, які підключаються до кола в момент часу t = 0 і відповідають законові:

$$1(t) = \begin{cases} 1, \ t > 0; \\ 1/2, t = 0; \\ 0, \ t < 0. \end{cases}$$
(1.155)

Іноді говорять, що при t = 0 функція 1(t) невизначена, тоді

$$1(t) = \begin{cases} 1, \ t \ge 0, \\ 0, \ t < 0. \end{cases}$$
(1.156)

Якщо одинична функція (рис. 1.22, а) зміщується в часі відносно моменту t = 0, то у випадку, коли інтервал зміщення $\tau > 0$ (рис. 1.22, б), маємо

$$l(t - \tau) = \begin{cases} 1, t \ge \tau, \\ 0, t < \tau. \end{cases}$$
(1.157)

Якщо ж $\tau < 0$ (рис. 1.22, в), то

$$l(t + \tau) = \begin{cases} 1, t \ge -\tau, \\ 0, t < -\tau. \end{cases} (1.158)$$

За допомогою одиничного ступінчастого збудження будь-яка функція часу s(t) може бути представлена у вигляді добутку s(t)·1(t). Цей добуток дорівнює нулю при t < 0 і дорівнює s(t) при t \geq 0. Наприклад, коли коло підключається до джерела постійної напруги величиною U₀, то



$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{l}(\mathbf{t}). \tag{1.159}$$

Вираз (1.159) показує, що напруга u(t) стрибкоподібно зростає до величини U₀ тільки в момент вмикання (t = 0), а далі діє безперервно, залишаючись незмінною. Якщо збудження U₀ підключається до кола не в момент часу t = 0, а із запізненням на τ , то його можна записати за допомогою одиничної функції з іншим аргументом –

$$u = U_0 \cdot l(t - \tau).$$
 (1.160)

За допомогою функції одиничного стрибка можна представити велику

кількість різноманітних сигналів. Наприклад, прямокутний відеоімпульс напруги з амплітудою U₀ та тривалістю τ_i можна записати за допомогою співвідношення

$$u = U_0(l(t) - l(t - \tau_i)).$$

Якщо ж напруга або струм має більш складну форму (рис. 1.23), то в цьому випадку сигнал можна представити за допомогою суми **n** ступінчастих функцій –

$$s(t) = s(0) \cdot l(t) + \sum_{k=0}^{n} \Delta s_{k} l(t - k\Delta t), \qquad (1.161)$$

де Δs_k – мале прирощення функції s(t); Δt – крок дискретизації функції s(t).



Рис. 1.23. Представлення складного сигналу сумою ступінчастих функцій

Нехай крок дискретизації Δt функції s(t) зменшується, тобто $\Delta t \rightarrow 0$, тоді дискретну змінну величину k Δt можна замінити безперервною τ , а малі прирощення функції Δs_k – диференціалами $ds = \frac{ds}{d\tau} d\tau$. В результаті отримаємо формулу для так званого динамічного представлення довільного сигналу за допомогою фу-

нкції Хевісайда –

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}(0) \cdot \mathbf{l}(t) + \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \cdot \mathbf{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$
(1.162)

Слід однак зазначити, що динамічне представлення (1.162) не є єдино можливим.

Дельта-функція, або функція Дірака

Розглянемо прямокутний відеоімпульс, що має тривалість Δt та амплітуду $1/\Delta t$ (рис. 1.24, а). Очевидно, що площа цього імпульсу дорівнює одиниці і не залежить від його тривалості Δt . Якщо тривалість такого імпульсу зменшува-



ти, то його амплітуда зростатиме і у випадку, коли $\Delta t \rightarrow 0$, вона стане нескінченно великою, хоча площа імпульсу залишиться рівною одиниці.

Імпульс нескінченно малої тривалості та нескінченно великої амплітуди, площа якого дорівнює одиниці, називається дельта-функцією, або функцією Дірака. У загальному випадку ця функція позначається $\delta(t - t_0)$, зображується як показано на рис. 1.24, б і аналітично записується:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, \ t \neq t_0, \\ \infty, \ t = t_0. \end{cases}$$
(1.163)

Для випадку, коли $t_0 = 0$, зображення δ -функції приведено на рис. 1.24, в, а в аналітичній формі маємо

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, \ t \neq 0, \\ \infty, \ t = 0. \end{cases}$$
(1.164)

Згідно з визначенням б-функція характеризується властивістю нормування, оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$
(1.165)

Найбільш цінними властивостями δ -функції є ті її особливості, що проявляються в разі її взаємодії з довільними функціями часу. Так, добуток деякої обмеженої функції часу s(t) та δ -функції виду $\delta(t - t_0)$ дорівнює

$$s(t) \cdot \delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, \ t \neq t_0, \\ s(t_0) \cdot \delta(0), t = t_0. \end{cases}$$
(1.166)

Отже, можна записати, що

$$s(t)\delta(t-t_0) = s(t_0)\delta(t-t_0).$$
 (1.167)

Тобто, такий добуток дорівнює δ-функції, вага або площа якої уже не дорівнює одиниці згідно з властивістю нормування, а визначається значенням функції s(t) в момент часу, коли існує δ-функція. Якщо співвідношення (1.167) проінтегрувати, то одержимо

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t)\delta(t-t_0)dt = s(t_0)\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t_0)dt = \begin{cases} s(t_0) , t_0 \in [t_1, t_2], \\ 0 , t_0 \notin [t_1, t_2]. \end{cases}$$
(1.168)

Тобто, результат інтегрування дорівнює або значенню функції s(t) в момент часу $t = t_0$, якщо він належить інтервалу інтегрування, або нулю, якщо цей момент в інтервал інтегрування не потрапляє.

Таким чином, за допомогою δ-функції можна виділити значення довільної функції s(t) в будь-який момент часу t₀. Цю особливість функції Дірака називають властивістю фільтрації і широко використовують на практиці для отримання відліків сигналів в задані моменти часу.

Якщо у виразі (1.168) здійснити підстановку δ-функції, яка безперервно зміщується відносно початку координат, то отримаємо співвідношення для динамічного представлення довільного сигналу за допомогою функції Дірака:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)d\tau. \qquad (1.169)$$

Між функцією Дірака б(t) та функцією Хевісайда 1(t) існує однозначний зв'язок –

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t) dt = l(t).$$
 (1.170)

Дійсно, якщо t < 0, то функція $\delta(t)$ та її інтеграл дорівнюють нулю. Якщо ж аргумент t зростає, то в момент часу t = 0 значення інтегралу стрибком збільшується на одиницю і залишається таким при будь-якому t > 0.

Аналогічно для функції $\delta(t - t_0)$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t - t_0) dt = l(t - t_0).$$
 (1.171)

З іншого боку

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{1}(t), \qquad (1.172)$$

або

$$\delta(t - t_0) = \frac{d}{dt} l(t - t_0).$$
 (1.173)

Вирази (1.172) та (1.173) є справедливими, оскільки в першому випадку похідна $\frac{d}{dt} \mathbf{1}(t) = 0$ при $t \neq 0$ і ця ж похідна $\frac{d}{dt} \mathbf{1}(t) = \infty$, якщо t = 0. В другому випадку похідна $\frac{d}{dt} \mathbf{1}(t-t_0) = 0$ при $t \neq t_0$ і $\frac{d}{dt} \mathbf{1}(t-t_0) = \infty$, якщо $t = t_0$.

Строге обґрунтування математичних операцій над одиничною ступінчастою функцією та функцією Дірака наведено в математичній теорії узагальнених функцій.

1.4.2. Перехідна та імпульсна характеристики лінійних кіл

Часовою характеристикою лінійного кола називається функція часу, значення якої чисельно визначаються реакцією кола на типове імпульсне збудження.

Реакція кола на задане типове збудження залежить лише від конфігурації кола та параметрів його елементів і тому може служити характеристикою цього кола. Часові характеристики визначають для лінійних кіл, які не мають у своєму складі незалежних джерел енергії та починають свою роботу при нульових початкових умовах.

В залежності від того, яке типове імпульсне збудження вибрано, розрізняють перехідні та імпульсні часові характеристики.

Перехідна характеристика лінійного кола

Нехай маємо довільне лінійне коло, що не має в своєму складі незалежних джерел струму та напруги. Зовнішнє збудження кола являє собою неодиничний стрибок напруги або струму $s(t) = S \cdot l(t)$, а реакція кола на це збудження при нульових початкових умовах дорівнює x(t).

Якщо час $t \ge 0$, то зовнішнє збудження, тобто напруга або струм на вході кола, не змінюється. Однак при цьому змінюються напруги і струми на всіх інших ділянках кола, а значить змінюється в часі і його реакція. З плином часу коло переходить з одного усталеного стану в інший. Саме такий перехід і визначається перехідною характеристикою кола.

Перехідною характеристикою h(t) лінійного кола, що не містить в собі незалежних джерел енергії, називається відношення реакції цього кола x(t) на дію неодиничного стрибка напруги або струму до величини цього стрибка S при нульових початкових умовах –

$$h(t) = \frac{x(t)}{S}.$$
 (1.174)

3 виразу (1.174) виходить, що перехідна характеристика h(t) = x(t), якщо величина стрибка S = 1, тобто у випадку, коли зовнішнє збудження має вигляд одиничного стрибка.

Таким чином, перехідна характеристика лінійного кола чисельно дорівнює реакції кола на збудження у вигляді одиничного стрибка напруги або струму при нульових початкових умовах. Це означає, що перехідна характеристика дає уявлення про перехідні процеси в колі при його підключенні до джерела постійної напруги величиною 1 В або до джерела струму величиною 1 А. Очевидно, що аналіз цих процесів, а значить і визначення перехідних характеристик, можна здійснити за допомогою будь-якого з раніше розглянутих методів аналізу перехідних процесів.

В залежності від того, що є збудженням кола та його відгуком (реакцією) на це збудження, розрізняють декілька різновидів перехідних характеристик.

Якщо збудження задано у вигляді стрибка напруги U, а реакцією кола є миттєва напруга на деякій ділянці кола, то перехідна характеристика буде безрозмірною і називатиметься перехідною характеристикою кола відносно напруги –

$$h_u(t) = \frac{u(t)}{U}.$$
 (1.175)

Якщо ж реакцією кола є миттєвий струм будь-якої вітки, то перехідна характеристика має розмірність провідності і називається перехідною провідністю –

$$h_y(t) = y(t) = \frac{i(t)}{U}.$$
 (1.176)

В разі заданого збудження у вигляді стрибка струму І та реакції у вигляді миттєвої напруги u(t) перехідна характеристика має розмірність опору і називається перехідним опором –

$$h_z(t) = z(t) = \frac{u(t)}{I}.$$
 (1.177)

Якщо ж при такому вхідному збуджені реакцією кола є миттєвий струм i(t), то перехідна характеристика буде безрозмірною і називатиметься перехідною характеристикою кола відносно струму –

$$h_i(t) = \frac{i(t)}{I}.$$
 (1.178)

Для прикладу знайдемо перехідні характеристики простого Г-подібного RC-чотириполюсника (рис. 1.25), якщо зовнішнім збудженням є напруга U джерела постійної EPC E, а відгуками – струм i(t) в колі та на-



Рис. 1.25. До визначення перехідних характеристик RC-кола

пруга на ємності $u_C(t)$. Тобто визначенню підлягають перехідна провідність $h_y(t) = i/U$ та перехідна характеристика кола відносно напруги на ємності $h_u(t) = u_C/U$.

Як видно з викладеного, для знаходження цих характеристик необхідно розрахувати перехідні процеси в колі при підключенні до нього постійної напруги U.

Оскільки аналізу підлягає коло першого порядку, то для знаходження перехідного струму та напруги можна скористатись спрощеним методом аналізу перехідних процесів, що викладений в підрозділі 1.2.2. При цьому будьякий струм або напругу можна знайти за допомогою універсального співвідношення

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\infty) + \left[\mathbf{x}(0_{+}) - \mathbf{x}(\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

У схемі на рис. 1.25 початкові умови є нульовими ($u_C(0_+)=0$), тому при знаходженні струму і(t) треба враховувати, що $x(0_+)=i(0_+)=U/R$, $x(\infty)=i(\infty)=0$, а постійна часу кола $\tau = RC$. Тоді струм в колі дорівнює

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$
 (1.179)

Перехідна провідність кола дорівнює

$$h_{y}(t) = \frac{i(t)}{U} = \frac{1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$
 (1.180)

Щоб знайти напругу u_C(t), слід врахувати, що u_C(0₊) = 0, а u_C(∞) = U, тому

$$u_{\rm C} = U(1 - e^{-\frac{t}{\rm RC}}),$$

а перехідна характеристика відносно напруги на ємності має вигляд

$$h_{u}(t) = \frac{u_{C}(t)}{U} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}.$$
 (1.181)

Як видно з виразів (1.180) та (1.181), перехідна характеристика $h_y(t)$ має розмірність провідності, а перехідна характеристика $h_u(t)$ – безрозмірна.

Таким чином, методика визначення перехідних характеристик лінійних кіл нічим не відрізняється від методики аналізу перехідних процесів у таких колах при підключенні джерел постійної напруги або струму.

Імпульсна характеристика лінійного кола

Нехай зовнішнє збудження, що діє на лінійне коло, має вигляд нескінченно короткого імпульсу нескінченно великої амплітуди та обмеженої площі S. Тоді це збудження можна записати у вигляді

$$\mathbf{s}(\mathbf{t}) = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\delta}(\mathbf{t}). \tag{1.182}$$

Імпульсною характеристикою g(t) лінійного кола, яке не має в своєму складі незалежних джерел енергії, називається відношення реакції цього кола x(t) на збудження у вигляді нескінченно короткого імпульсу нескінченно великої амплітуди та скінченної площі до площі S цього імпульсу при нульових початкових умовах. Тобто згідно з визначенням

$$g(t) = \frac{x(t)}{S}.$$
 (1.183)

Як видно з виразу (1.183), імпульсна характеристика кола чисельно дорівнює реакції кола на збудження у вигляді імпульсу нескінченно малої тривалості та нескінченно великої амплітуди з одиничною площею, тобто функції Дірака.

Як і перехідна характеристика кола, імпульсна характеристика має декілька різновидностей, вигляд яких визначається вибором типу збудження та виду реакції кола.

Якщо перехідна характеристика ілюструє перехід лінійного кола з одного усталеного режиму в інший, то імпульсна характеристика дає уявлення про вільний перехідний процес в колі, оскільки збудження у вигляді δ -функції існує лише в момент часу t = 0. Дійсно, враховуючи, що амплітуда, а значить, і потужність δ -функції нескінченно великі, струм через індуктивність або напруга на ємності в момент часу t = 0 можуть змінюватися стрибкоподібно. При цьому в реактивних елементах кола миттєво створюється деякий запас енергії. В момент часу t = 0₊ збудження у вигляді δ -функції уже не існує, а в колі розпочинається вільний перехідний процес за рахунок накопиченої ра-



ніше в реактивних елементах енергії магнітного та електричного поля.

Раніше було встановлено, що

$$\delta(t) = \frac{dl(t)}{dt}$$

Однак реакція кола на збудження у вигляді одиничного стрибка є перехідною

Рис. 1.26. До визначення зв'язку між імпульсною та перехідною характеристиками кола

характеристикою h(t) цього кола. Оскільки предметом аналізу є лінійні кола, для яких наслідки знаходяться в тих самих співвідношеннях, що й причини, які їх викликають, то реакція кола на збудження у вигляді δ -функції повинна дорівнювати похідній від реакції кола на збудження у вигляді одиничного стрибка. Іншими словами, оскільки δ -функція дорівнює похідній від функції одиничного стрибка, то імпульсна характеристика кола g(t) є похідною від перехідної характеристики h(t) –

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$
 (1.184)

Зазначимо, що вираз (1.184) не можна використовувати у випадку, коли перехідна характеристика стрибкоподібно змінюється в момент часу t = 0 (рис. 1.26, а). Як видно з рис. 1.26, б та рис. 1.26, в, перехідну характеристику, у якої $h(0) \neq 0$, можна записати у вигляді

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) = h_1(t) + h(0)l(t).$$
 (1.185)

Тоді для імпульсної характеристики отримаємо

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{dh_1(t)}{dt} + h(0) \cdot \delta(t).$$

Оскільки в останньому виразі похідна $dh_1(t)/dt$ для будь-яких значень аргументу t, окрім t = 0, дорівнює похідній dh(t)/dt, то остаточно для імпульсної характеристики отримаємо

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \cdot l(t) + h(0) \cdot \delta(t).$$
 (1.186)

Наявність у виразі (1.186) добутку $(dh(t)/dt) \cdot 1(t)$ означає, що при t < 0 і значення перехідної характеристики h(t), і значення її похідної dh(t)/dt дорівнюють нулю. Інтегруючи вираз (1.184), одержимо рівняння зв'язку між перехідною та імпульсною характеристиками кола

$$\mathbf{h}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{g}(t) dt. \qquad (1.187)$$

Для визначення імпульсної характеристики кола можна скористатись не тільки розрахунковим, але й експериментальним методом.

В основу експериментального методу покладено той факт, що реакцію лінійного кола на імпульсне збудження малої тривалості можна наближено знайти у вигляді добутку імпульсної характеристики та площі цього імпульсу незалежно від його форми –

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{S} \,. \tag{1.188}$$

62

3 виразу (1.188) одержимо

$$g(t) \approx \frac{x(t)}{S}.$$
 (1.189)

Вираз (1.189) буде тим точніший, чим менша тривалість імпульсу збудження. Ця тривалість повинна бути набагато меншою ніж час практичної тривалості перехідних процесів у колі. Імпульс збудження можна вважати достатньо коротким, якщо його тривалість буде більше ніж на порядок меншою в порівнянні з постійною часу кола або в порівнянні з періодом його власних коливань.

Для аналітичного знаходження імпульсної характеристики кола найбільш зручним є використання співвідношення (1.186). Розглянемо приклад застосування цього методу для знаходження імпульсних характеристик кола, що зображене на рис. 1.25.

Використовуючи вирази (1.180) та (1.181) для знайдених у попередньому розділі перехідних характеристик $h_y(t)$ і $h_u(t)$ цього кола, за допомогою співвідношення (1.186) одержимо

$$g_{y}(t) = h'_{y}(t) \cdot l(t) + h_{y}(0) \cdot \delta(t) = -\frac{1}{R^{2}C} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{R} \cdot \delta(t),$$
$$g_{u}(t) = h'_{u}(t) \cdot l(t) + h_{u}(0) \cdot \delta(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Як видно з першого з отриманих виразів у випадку, коли $h(0) \neq 0$, одна зі складових отриманої імпульсної характеристики являє собою функцію Дірака, вага якої дорівнює величині стрибка перехідної характеристики кола в момент часу $t = 0_+$.

Розділ 2

ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

2.1. Математичні основи операційного обчислення

2.1.1. Поняття про перетворення Лапласа

В теорії електричних кіл для розв'язування лінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь знайшов широке застосування так званий операторний метод, що використовує перетворення Лапласа.

Сутність цього методу полягає в тому, що функції дійсної змінної величини **t** перетворюють в функції комплексної змінної величини $p = \sigma + j\omega$ таким чином, щоб замість диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь електричної рівноваги отримати алгебраїчні рівняння. Після розв'язання цих рівнянь здійснюють зворотний перехід від функцій комплексної змінної величини **p** до функцій дійсної змінної величини **t**. Такий підхід значно спрощує розв'язування диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь електричних кіл, а значить, і процес аналізу перехідних процесів у цих колах.

Перехід від функції дійсної змінної величини **t** до функції комплексної змінної величини **p** здійснюється за допомогою прямого перетворення Лапласа:

$$S(p) = \int_{0}^{\infty} s(t)e^{-pt}dt;$$

$$X(p) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt,$$
(2.1)

де s(t) і x(t) – вхідне збудження кола та реакція останнього на це збудження відповідно; S(p) і X(p) – комплексні зображення за Лапласом вхідного збудження та реакції кола.

Зворотний перехід від функції комплексної змінної величини **p** до функції дійсної змінної величини **t** здійснюють, користуючись оберненим перетворенням Лапласа:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} S(p) e^{pt} dp; \qquad (2.2)$$

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma - j\infty} X(\mathbf{p}) e^{\mathbf{p}t} d\mathbf{p}.$$

64

Функції s(t) і x(t) називають оригіналами, а функції S(p) і X(p) – зображеннями цих оригіналів за Лапласом або просто зображеннями. Для того, щоб функція дійсної змінної величини t мала зображення, необхідно, щоб вона:

– задовольняла умовам Дирихле, тобто мала на всій осі змінної t скінченне число екстремумів та скінченне число розривів першого роду;

- дорівнювала б нулю для від'ємних значень t;

в інтервалі часу t ∈ (0,∞) функції s(t) і x(t) не повинні зростати швид ше, ніж деяка показникова функція

$$|\mathbf{s}(\mathbf{t})| \le \mathbf{M} \mathbf{e}^{\alpha \mathbf{t}},\tag{2.3}$$

де М та α-довільні додатні числа.

Таким чином, при використанні перетворення Лапласа немає необхідно-сті вимагати абсолютної інтегрованості функцій часу, як це було у випадку використання перетворення Фур'є. У зв'язку з цим перетворення Лапласа вважається більш універсальним, оскільки може бути застосоване до більш широкого класу функцій, ніж перетворення Фур'є.

2.1.2. Основні властивості перетворення Лапласа

Нагадаємо основні властивості перетворення Лапласа, що відомі з курсу вищої математики.

1. Властивість лінійності.

Якщо

$$s(t) = \sum_{k=1}^{n} s_k(t), \qquad (2.4)$$

то

$$S(p) = \sum_{k=1}^{n} S_k(p).$$
 (2.5)

Тобто зображення суми функцій дійсної змінної величини t дорівнює сумі зображень кожної функції окремо.

2. Диференціювання оригіналу.

Якщо функції s(t) дійсної змінної величини t відповідає зображення S(p), що в аналітичній формі записується $s(t) \rightarrow S(p)$, то

$$\frac{ds(t)}{dt} \to pS(p) - s(0_{+}),$$

$$\frac{d^{2}s(t)}{dt^{2}} \to p^{2}S(p) - ps(0_{+}) - s'(0_{+}),$$
(2.6)
$$\frac{d^{n}s(t)}{dt^{n}} \to p^{n}S(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} \frac{d^{k-1}s(0_{+})}{dt^{k-1}}.$$

При нульових початкових умовах, коли значення функції s(t) та її похідних при t = 0 дорівнюють нулю, одержимо

$$\frac{\mathrm{d}^{n}\mathbf{s}(t)}{\mathrm{d}t^{n}} \to p^{n}\mathbf{S}(p). \tag{2.7}$$

З виразу (2.7) видно, що при нульових початкових умовах n-кратному диференціюванню оригіналу відповідає n-кратне множення зображення на оператор **p**.

3. Інтегрування оригіналу.

Якщо $s(t) \rightarrow S(p)$, то

$$\int_{0}^{t} s(t)dt \to \frac{S(p)}{p} .$$
(2.8)

Тобто операції інтегрування оригіналу в границях від 0 до t відповідає ділення його зображення на оператор **p**.

4. Теорема запізнення.

Якщо $s(t) \rightarrow S(p)$, то

$$s(t-\tau) \rightarrow e^{-p\tau} S(p).$$
 (2.9)

Тобто запізненню оригіналу на інтервал часу τ відповідає множення зображення на множник $e^{-p\tau}$.

5. Теорема зміщення.

Якщо $s(t) \rightarrow S(p)$, то

$$S(p \pm \delta) \rightarrow e^{+\delta t} \cdot s(t).$$
 (2.10)

Тобто замінюванню в зображенні оператора **р** на оператор ($p \pm \delta$) відповідає множення оригіналу на множник $e^{\pm \delta t}$.

6. Множення зображень або теорема згортання.

Якщо $s_1(t) \rightarrow S_1(p)$, а $s_2(t) \rightarrow S_2(t)$, то

$$S_{1}(p) \cdot S_{2}(p) \to \int_{0}^{t} s_{1}(\tau) s_{2}(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{t} s_{2}(\tau) s_{1}(t-\tau) d\tau.$$
(2.11)

Тобто множенню зображень відповідає операція згортання оригіналів. Вираз (2.11) являє собою одну з форм запису так званого інтеграла Дюамеля, який широко використовується при аналізі кіл для знаходження реакції кола на задане збудження довільної форми.

7. Теорема розкладання.

Нехай зображення S(p) має вигляд раціонального дробу

$$S(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0},$$
 (2.12)

у якого степінь багаточлена M(p) менший за степінь багаточлена N(p), а коефіцієнти a_k, b_k – дійсні числа. Якщо корені p_k рівняння N(p) = 0 різні, то оригінал визначається співвідношенням

$$s(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t}.$$
 (2.13)

Якщо ж рівняння M(p) = 0 має один нульовий корінь, тобто $N(p) = pN_1(p)$, то оригінал можна також знайти і за допомогою виразу

$$s(t) = \frac{M(0)}{N_1(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{M(p_k)}{p_k N_1(p_k)} e^{p_k t}.$$
 (2.14)

Якщо серед коренів рівняння N(p) = 0 є кратні, то вираз для знаходження оригіналу шуканої функції значно ускладнюється і тут не наводиться.

Теорема розкладання разом з іншими властивостями перетворення Лапласа дають можливість скласти таблиці зображень та оригіналів, які прискорюють знаходження зображень конкретних оригіналів, та навпаки.

Деякі операторні відповідності, що зустрічаються найчастіше, наведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Оригінал		Зображення	Оригінал	Зображення
1.	δ(t)	1	7. $\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p+\alpha)}$
2.	1(t)	1/p	8. $\frac{1}{\omega}\sin \omega t$	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)}$
3.	t	$1/p^{2}$	9. coswt	$\frac{p}{(p^2+\omega^2)}$

$4. \ \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1},$	$1/p^n$	10. $\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$	$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)}$
n > 0, n – ціле			
5. $e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{p \mp \alpha}$	11. $\frac{1}{\beta - \alpha} (\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t})$	$\frac{p}{(p+\alpha)(p+\beta)}$
6. $te^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{\left(p\mp\alpha\right)^2}$	12. $\beta e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{p}{\left(p+\alpha\right)^2+\beta^2}$

2.2. Закон Ома в операторній формі

Розглянемо послідовне RLC-коло, до якого в момент часу t = 0 при ненульових початкових умовах підключається EPC e(t) (рис. 2.1).

Оскільки $i_L(0_+) \neq 0$ і $u_C(0_+) \neq 0$, то відповідно до другого закону Кірхгофа для миттєвих напруг та струмів отримаємо таке інтегродиференціальне рівняння:



Ri + L
$$\frac{di}{dt}$$
 + $\frac{1}{C}\int_{0}^{t} idt + u_{C}(0_{+}) = e(t)$. (2.15)

Рис. 2.1. Підключення до послідовного RLC-кола EPC e(t)

Нехай заданій ЕРС e(t) та шуканому струму i(t) відповідають зображення E(p) i I(p). Оскільки початкова напруга на ємності

 $u_{C}(0_{+}) = U_{C}(0_{+}) \in$ величиною постійною, то

$$u_{C}(0_{+}) \rightarrow \frac{U_{C}(0_{+})}{p}.$$
 (2.16)

На основі властивості лінійності перетворення Лапласа, а також теорем про диференціювання та інтегрування оригіналів рівнянню (2.15) можна поставити у відповідність таке операторне рівняння:

$$RI(p) + pLI(p) - Li(0_{+}) + \frac{1}{pC}I(p) + \frac{U_{C}(0_{+})}{p} = E(p).$$
(2.17)

Співвідношення (2.17) є виразом, який складений за другим законом Кірхгофа для даного кола при ненульових початкових умовах в операторній формі. Цей вираз можна переписати у вигляді

$$\left(R + pL + \frac{1}{pC}\right)I(p) = E(p) + Li(0_{+}) - \frac{U_{C}(0_{+})}{p}, \qquad (2.18)$$

або інакше –

$$Z(p) \cdot I(p) = \hat{E}(p), \qquad (2.19)$$

68

де Z(p) = (R + pL + 1/pC) - операторний опір кола;

лi.

 $\hat{E} = E(p) + Li(0_{+}) - U_C(0_{+})/p$ – приведена операторна EPC, що діє в ко-

Приведена операторна ЕРС Ê(p) враховує, окрім зовнішньої ЕРС E(p), ненульові початкові умови в колі: струми в індуктивностях та напруги на ємностях в момент часу безпосередньо після комутації. Причому напрямок ЕРС додаткового джерела Li(0₊) збігається з напрямком початкового струму i(0₊), а напрямок ЕРС додаткового джерела U_C(0₊)/p визначається полярністю початкової напруги U_C(0₊) і є протилежним до неї.

Введення поняття приведеної ЕРС дозволяє звести задачу з ненульовими початковими умовами до розв'язування задачі з нульовими початковими умовами. Якщо ж в момент комутації початкові умови нульові $(i_L(0_+) = 0, u_C(0_+) = 0)$, то $\hat{E}(p) = E(p)$ і рівняння (2.19) матиме вигляд

$$Z(p) \cdot I(p) = E(p) \tag{2.20}$$

Виходячи з виразу (2.20), операторний опір кола Z(p) можна визначити як відношення зображення напруги, прикладеної до кола, до зображення струму в цьому колі при нульових початкових умовах:

$$Z(p) = {U(p) \over I(p)}.$$
 (2.21)

Якщо в цьому разі до співвідношень між миттєвими напругами та струмами в пасивних елементах кола –

$$u_{R} = iR$$
, $u_{C} = \frac{1}{C}\int idt$, $u_{L} = L\frac{di}{dt}$

застосувати перетворення Лапласа, то отримаємо

$$U_{R}(p) = RI(p), \ U_{C}(p) = \frac{1}{pC}I(p), \ U_{L}(p) = pL \cdot I(p).$$
 (2.22)

На основі виразів (2.21) та (2.22) можна записати вирази для операторних опорів пасивних елементів кола:

$$Z_{R}(p) = R; \quad Z_{C}(p) = \frac{1}{pC}; \quad Z_{L}(p) = pL.$$
 (2.23)

Величину Y(p), обернену до операторного опору Z(p), називають операторною провідністю –

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{I(p)}{U(p)}.$$
 (2.24)

Для пасивних елементів кола матимемо

$$Y_{R}(p) = \frac{1}{R}, \quad Y_{C}(p) = pC, \quad Y_{L}(p) = \frac{1}{pL}.$$
 (2.25)

Операторний опір Z(p) та операторна провідність Y(p) формально відрізняються від комплексного опору Z(jw) та комплексної провідності Y(jw) тільки тим, що в перших місце уявного оператора іω займає комплексний оператор $p = \sigma + i\omega$. Тобто

$$Z(p) = Z(j\omega)|_{j\omega=p}, \quad Y(p) = Y(j\omega)|_{j\omega=p}.$$
(2.26)

Очевидно, що методика знаходження операторних опорів складних кіл не відрізняється від методики знаходження комплексних опорів цих кіл.

Для запису рівняння закону Ома в операторній формі можна скористатись виразом (2.19). В результаті отримаємо

$$I(p) = \frac{\hat{E}(p)}{Z(p)}.$$
 (2.27)

Якщо ж початкові умови в колі нульові, то закон Ома в операторній формі запишеться

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)}, \quad I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}.$$
 (2.28)

Таким чином, рівнянню електричної рівноваги (2.19), яке складене в операторній формі для післякомутаційного RLC-кола, що зображене на

рис. 2.1, можна поставити у відповідність операторну еквівалентну схему, наведену на рис. 2.2.

Операторну еквівалентну схему кола можна одержати на основі еквівалентної схеми кола для миттєвих струмів та напруг, якщо в останній пасивні елементи замінити їх операторними опорами, миттєві струми, напруги та ЕРС – їх зображеннями, а ненульові початкові умови врахувати шляхом введення в схему додаткових джерел EPC Li(0₊) та U_C(0₊)/p.



Рис. 2.2. Еквівалентна операторна схема послідовного RLC-кола

Останне дозволяє стверджувати, що при ненульових початкових умовах в операторній схемі заміщення ємність можна розглядати як незалежне джерело ЕРС $U_{C}(0_{+})/p$ з внутрішнім опором 1/pC, а індуктивність – як незалежне джерело ЕРС $Li(0_+)$ з внутрішнім опором pL. Зрозуміло, що ці джерела ЕРС при необхідності можна перетворити в еквівалентні джерела струму $Cu_c(0_+)$ та $i(0_+)/p$ з внутрішніми провідностями pC та 1/pL відповідно. При цьому згідно із загальними правилами перетворення джерела ЕРС в джерело струму переходять від послідовних операторних схем заміщення до паралельних.

2.3. Закони Кірхгофа в операторній формі

Згідно з першим законом Кірхгофа, алгебраїчна сума миттєвих значень струмів у будь-якому вузлі електричного кола дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} i_{k}(t) = 0.$$

Застосуємо властивість лінійності перетворення Лапласа до цього рівняння. Тоді одержимо

$$\sum_{k=1}^{n} I_{k}(p) = 0.$$
 (2.29)

Як видно із виразу (2.29), алгебраїчна сума зображень струмів, що сходяться в будь-якому вузлі кола, дорівнює нулю. Це і є формулювання першого закону Кірхгофа в операторній формі.

Згідно з другим законом Кірхгофа для будь-якого контура електричного кола можна скласти рівняння для миттєвих значень спадів напруг на пасивних елементах та миттєвих ЕРС, що входять в цей контур. При цьому алгебраїчна сума миттєвих спадів напруг на елементах контура дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих ЕРС, що включені в цей контур. Тобто

$$\sum_{k=l}^{n} u_{k}(t) = \sum_{k=l}^{m} e_{k}(t).$$

Застосовуючи перетворення Лапласа до лівої та правої частини цього рівняння, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} U_{k}(p) = \sum_{k=1}^{m} E_{k}(p), \qquad (2.30)$$

де $U_k(p) = Z_k(p)I_k(p) - L_ki_{Lk}(0_+) + U_{Ck}(0_+)/p$ – операторна напруга на k-й вітці контура; $Z_k(p)$ – операторний опір k-ї вітки; $I_k(p)$ – зображення струму

k-ї вітки.

Складові, що обумовлені ненульовими початковими умовами, можна перенести в праву частину рівняння (2.30). Тоді в лівій частині цього рівняння залишаться лише спади напруг на операторних опорах віток схеми, а в правій – сума приведених операторних ЕРС в контурі –

$$\sum_{k=1}^{n} I_{k}(p) Z_{k}(p) = \sum_{k=1}^{m} \hat{E}_{k}(p), \qquad (2.31)$$

де $\hat{E}_k(p)$ – приведена операторна ЕРС k-ї вітки.

Згідно з виразом (2.31) алгебраїчна сума зображень спадів напруг на операторних опорах будь-якого контура кола дорівнює алгебраїчній сумі приведених операторних ЕРС, що діють в цьому контурі. Це є формулювання другого закону Кірхгофа в операторній формі.

Таким чином, для операторних еквівалентних схем вирази, записані за законами Кірхгофа в операторній формі, збігаються за формою із записом таких рівнянь в комплексній формі. В результаті, для знаходження зображень струмів та напруг в еквівалентних операторних схемах застосовуються ті ж самі методи розрахунку, що й для кіл гармонічного струму.

Перехід від отриманих зображень струмів та напруг до їх оригіналів можна здійснити як безпосередньо, користуючись зворотним перетворенням Лапласа, так і за допомогою інших методів, які полегшують розв'язання цієї задачі. До таких методів відносять табличний метод, що передбачає використання таблиць відповідностей, методи, що базуються на використанні теорем операційного обчислення, та ін.

2.4. Загальна схема застосування операторного методу для аналізу перехідних процесів

Розрахунок лінійних кіл операторним методом здійснюється в такій послідовності.

1. Аналіз електричного кола до моменту комутації та визначення незалежних початкових умов. Здійснюється так само, як і у випадку класичного методу аналізу перехідних процесів.

2. Складання операторної еквівалентної схеми кола після комутації, що здійснюється на основі перетворення еквівалентної схеми кола для миттєвих значень струмів та напруг шляхом заміни пасивних елементів кола їх операторними опорами, врахування ненульових початкових умов у колі й представлення струмів та напруг ідеалізованих джерел струму і напруги їх операторними зображеннями.

При нульових початкових умовах розрахунок кіл можна здійснювати і без складання операторних схем заміщення.
3. Складання системи рівнянь електричної рівноваги кола в операторній формі, яка може бути сформована згідно з операторною схемою заміщення за допомогою будь-якого з раніше розглянутих методів аналізу кіл.

4. Розв'язування рівнянь електричної рівноваги кола відносно зображень шуканих струмів та напруг. Здійснюється будь-яким методом, що дозволяє розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

5. Визначення оригіналів шуканих струмів та напруг, що здійснюється шляхом застосування властивостей перетворення Лапласа і використання таблиць відповідностей оригіналів та зображень. Якщо зображення шуканого струму або напруги являє собою відношення двох поліномів комплексної змінної величини **p**, то для отримання оригіналу можна скористатись теоремою розкладання.

2.5. Розрахунок перехідних процесів операторним методом

Розглянемо декілька прикладів розрахунку перехідних процесів операторним методом в простих колах першого порядку з нульовими та ненульо-



Рис. 2.3. Коло першого порядку з нульовими початковими умовами

вими початковими умовами.

Нехай в колі, що зображене на рис. 2.3, треба знайти стум $i_3(t)$, якщо до цього кола в момент часу t = 0 підключається джерело Е постійної ЕРС.

Очевидно, що в колі мають місце нульові початкові умови, оскільки $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$. В такому випадку операторну схему заміщення кола можна не

складати і задачу можна розв'язати за допомогою закону Ома та методів перетворення кіл.

Щоб знайти зображення $I_3(p)$ шуканого струму, виразимо його через операторний струм $I_1(p)$, користуючись властивістю подільника струму:

$$\frac{I_1(p)}{I_3(p)} = \frac{1/R_2 + 1/pL}{1/R_2} = \frac{(R_2 + pL)}{pL};$$

$$I_3(p) = I_1(p)\frac{pL}{R_2 + pL}; \quad I_1(p) = \frac{E/p}{R_1 + \frac{R_2 \cdot pL}{R_2 + pL}}$$

Тоді отримаємо

$$I_{3}(p) = \frac{E/p}{R_{1} + \frac{R_{2} \cdot pL}{R_{2} + pL}} \cdot \frac{pL}{R_{2} + pL} = \frac{EL}{R_{1}R_{2} + pL(R_{1} + R_{2})}.$$
 (2.32)

Поділимо почленно чисельник та знаменник (2.32) на величину $L(R_1 + R_2)$ і отримаємо

$$I_3(p) = \frac{U}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{p + 1/\tau_e}$$

де $\tau_e = \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2}$ – еквівалентна постійна часу кола.

Згідно з табл. 2.1 оригінал операторного струму І₃(р) дорівнює

$$i_3(t) = \frac{U}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau_e}}.$$
 (2.33)

Як видно з виразу (2.33), шуканий струм зменшується від свого найбільшого значення в момент часу $t = 0_+$ до нульового значення, коли $t \to \infty$.

Тепер визначимо напругу на ємності в піс-лякомутаційному колі, що наведене на рис. 2.4, якщо в цьому колі, як і у попередньому, діє джерело Е постійної ЕРС.



Рис. 2.4. Коло першого порядку з ненульовими початковими умовами

В даній схемі початкові умови ненульові

$$U_{c}(0_{+}) = U_{c}(0_{-}) = \frac{E}{R_{1} + R_{2}}R_{2}$$

Тому необхідно скласти операторну еквівалентну схему кола після комутації (рис. 2.5). Згідно із законом Ома в операторній формі для цієї схеми отримаємо

$$U_{C}(p) = I(p) \cdot \frac{1}{pC} + \frac{U_{c}(0_{+})}{p} =$$
$$= \frac{E/p - U_{C}(0_{+})/p}{R_{1} + 1/pC} \cdot \frac{1}{pC} + \frac{U_{C}(0_{+})}{p}$$

Після нескладних перетворень для зображення шуканої напруги матимемо такий вираз у канонічній формі:



Рис. 2.5. Операторна схема заміщення аналізованого кола

$$U_{C}(p) = \frac{E}{C(R_{1} + R_{2})} \cdot \frac{1}{p(p + 1/\tau_{e})} + \frac{ER_{2}}{R_{1} + R_{2}} \cdot \frac{1}{p},$$

де $\tau_{e} = R_{1}C$ – постійна часу кола після комутації.

За допомогою табл. 2.1 знаходимо оригінал шуканої напруги

$$u_{C}(t) = \frac{ER_{1}}{R_{1} + R_{2}} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_{e}}\right) + \frac{E}{R_{1} + R_{2}}R_{2}.$$





На рис. 2.6 зображена часова діаграма напруги на ємності.

Слід зазначити, що дві розглянуті вище задачі можна розв'язати набагато швидше спрощеним класичним методом, а використання операторного методу аналізу кіл є доцільним, якщо аналізоване коло достатньо складне, або якщо зовнішнє збудження має складну форму.

Для прикладу знайдемо напругу $u_2(t)$ в колі, що зображене на рис. 2.7, якщо на його вхід в момент часу t = 0 підключається експоненціальна напру-га $u_1(t) = Ue^{-\alpha t}$. Як видно з наведеної

схеми, початкові умови в колі нульові $u_C(0_+) = 0$, а значить, операторну схему заміщення можна не складати. Вхідна напруга, що діє на коло, має зображення

$$U_1(p) = \frac{U}{p+\alpha}$$

Визначимо зображення напруги U₂(p), скориставшись законом Ома в операторній формі:

$$U_{2}(p) = \frac{U_{1}(p)}{Z_{BX}(p)} \cdot R_{2} = \frac{UR_{2}}{\left(p + \alpha\right) \left(R_{2} + \frac{1}{1/R_{1} + pC}\right)}$$



Рис. 2.7. Схема кола, на яке діє експоненціальний імпульс

Після нескладних перетворень та позначення $R_1C = \tau_1, a \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}C = \tau_2$ остаточно одержимо $U_2(p) = U \frac{(p+1/R_1C)}{(p+1/R_1C)} = U \frac{(p+1/\tau_1)}{(p+1/\tau_2)}.$ (2.34)

$$U_{2}(p) = U \frac{(p + 1/R_{1}C)}{(p + \alpha)\left(p + \frac{1}{R_{1}R_{2}C/(R_{1} + R_{2})}\right)} = U \frac{(p + 1/\tau_{1})}{(p + \alpha)(p + 1/\tau_{2})}.$$
 (2.34)

Щоб знайти оригінал шуканої напруги, можна скористатися теоремою розкладання, оскільки зображення U₂(p) має вигляд відношення поліномів комплексної змінної величини **p**.

Корені полінома знаменника виразу (2.34) є дійсними різними числами $p_1 = -\alpha, \ p_2 = -1/\tau_2.$

Тому для знаходження оригіналу напруги $U_2(p)$ можна скористатись співвідношенням (2.13). Для нашого прикладу це співвідношення прийме вигляд

$$u_2(t) = U \sum_{k=1}^{2} \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t},$$

причому

$$M(p) = p + 1/\tau_1, \quad N(p) = (p + \alpha)(p + 1/\tau_2), \quad N'(p) = 2p + \alpha + 1/\tau_2$$

Таким чином, для оригіналу шуканої напруги остаточно отримаємо

$$u_{2}(t) = U \frac{1/\tau_{1} - \alpha}{1/\tau_{2} - \alpha} e^{-\alpha t} + U \frac{1/\tau_{1} - 1/\tau_{2}}{\alpha - 1/\tau_{2}} e^{-t/\tau_{2}}.$$
 (2.35)

З виразу (2.35) видно, що знайдена напруга має вимушену складову у вигляді експоненціального імпульсу, аналогічного за формою до вхідного, та вільну складову, яка також має експоненціальну форму, але іншу швидкість згасання, що визначається постійною часу кола τ_2 .

2.6. Операторні характеристики лінійних кіл

2.6.1. Поняття про операторні характеристики лінійних кіл

Розглянемо ідеалізоване лінійне коло, що не має в своєму складі незалежних джерел напруги та струму і в якому виділені пара вхідних і пара вихідних затискачів (рис. 2.8).

Операторною характеристикою або узагальненою частотною характе-



Рис. 2.8. Лінійне пасивне коло

ристикою лінійного кола К(р) називається відношення операторного зображення реакції кола Х(р) до операторного зображення зовнішнього збудження S(р) при нульових початкових умовах –

$$K(p) = \frac{X(p)}{S(p)}$$
 (2.36)

Для переходу від операторної характеристики кола K(p) до її комплексної частотної характеристики $K(j\omega)$ достатньо у виразі (2.36) замінити комплексний оператор $p = \sigma + j\omega$, який ще називають узагальненою частотою, на уявний оператор $j\omega$, що зветься уявною частотою. Це означає, що КЧХ кола можна розглядати як окремий випадок узагальненої частотної характеристики, коли Re{p} = σ = 0. Тобто

$$\mathbf{K}(\mathbf{j}\omega) = \mathbf{K}(\mathbf{p})\Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{j}\omega} \,. \tag{2.37}$$

Одночасно це означає, що оскільки

$$\mathbf{K}(\mathbf{j}\omega) = \frac{\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{\underline{\mathbf{s}}(\mathbf{t})} \Big|_{\underline{\mathbf{s}}(\mathbf{t}) = \underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{m}} \mathbf{e}^{\mathbf{j}\omega\mathbf{t}}},$$

то узагальнена частотна характеристика

$$\mathbf{K}(\mathbf{p}) = \frac{\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{\underline{\mathbf{s}}(\mathbf{t})} \Big|_{\underline{\mathbf{s}}(\mathbf{t}) = \underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{m}} \mathbf{e}^{\mathbf{p}\mathbf{t}}}$$

Подібно до КЧХ лінійного кола операторна характеристика не залежить від вигляду зовнішнього збудження та від діючих в колі напруг і струмів, а визначається лише топологією кола та параметрами його елементів. Як і комплексні частотні характеристики кіл, їх операторні характеристики поділяються на вхідні, вихідні та передатні. При цьому кожній КЧХ відповідає операторна характеристика. Розглянемо вхідні та передатні операторні характеристики.

В залежності від того, яка електрична величина вважається зовнішнім збудженням кола, а яка – відгуком (рис. 2.9), розрізняють:

операторний вхідний опір кола –

$$Z_{BX}(p) = \frac{U_1(p)}{I_1(p)};$$



Рис. 2.9. До визначення операто-

рних характеристик кола

(2.38)

операторну вхідну провідність кола –

$$Y_{BX}(p) = \frac{I_1(p)}{U_1(p)}; \qquad (2.39)$$

операторні передатні характеристики кола відносно напруги -

$$K_{\rm U}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$$
(2.40)

та відносно струму –

$$K_{I}(p) = \frac{I_{2}(p)}{I_{1}(p)}; \qquad (2.41)$$

операторний передатний опір кола –

$$Z_{21}(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)}; \qquad (2.42)$$

операторну передатну провідність кола –

$$Y_{21}(p) = \frac{I_2(p)}{U_1(p)}.$$
 (2.43)

У співвідношеннях (2.38) – (2.43) операторна вихідна напруга $U_2(p)$ та операторний вихідний струм $I_2(p)$ являють собою операторні зображення напруги та струму будь-якого пасивного елемента аналізованого кола, який вважають його навантаженням. Оскільки між комплексними частотними та операторними характеристиками існує однозначний зв'язок, то і методи їх визначення ідентичні.

Якщо знайдена операторна характеристика кола та відоме зображення вхідного збудження, то, скориставшись виразом (2.36), можна знайти зображення реакції кола:

$$X(p) = K(p) \cdot S(p). \qquad (2.44)$$

77

Цим співвідношенням можна скористатись при аналізі операторним методом перехідних процесів в лінійних колах, які не мають в своєму складі незалежних джерел енергії і в момент комутації характеризуються нульовими початковими умовами.

Узагальнюючи одержані результати, можна запропонувати таку методику розрахунку перехідних процесів на основі використання операторної характеристики кола:

– знаходять зображення відомого зовнішнього збудження s(t) довільної форми;

визначають потрібну операторну характеристику кола К(р);

 – за допомогою виразу (2.44) знаходять зображення реакції кола на вхідне збудження;

– на основі знайденого зображення реакції кола визначають її оригінал.

2.6.2. Нулі та полюси операторних характеристик лінійних кіл

Разом із традиційними методами знаходження операторних характеристик лінійних кіл часто використовують ту обставину, що ці характеристики являють собою відношення багаточленів, записаних відносно комплексного оператора **p**. Дійсно, якщо скористатись записом в загальному вигляді неоднорідного лінійного диференціального рівняння кола

$$a_{n} \frac{d^{n} x(t)}{dt^{n}} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{1} \frac{dx(t)}{dt} + a_{0} x(t) =$$

= $b_{m} \frac{d^{m} s(t)}{dt^{m}} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} s(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{1} \frac{ds(t)}{dt} + b_{0} s(t)$

та, вважаючи початкові умови в колі нульовими, застосувати до цього рівняння властивості перетворення Лапласа, то отримаємо вираз для операторної характеристики довільного лінійного кола –

$$K(p) = \frac{X(p)}{S(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} .$$
(2.45)

Тобто в загальному випадку операторна характеристика лінійного кола являє собою раціональний дріб, степінь багаточлена в чисельнику якого не більший, ніж степінь багаточлена в знаменнику.

Позначимо корені багаточлена N(p) в знаменнику виразу (2.45), які називаються полюсами операторної характеристики, через $p_{1\infty}, p_{2\infty}, ..., p_{n\infty}$, а корені багаточлена M(p) в чисельнику, що називаються нулями цієї ж характеристики, через $p_{10}, p_{20}, ..., p_{m0}$. Тоді співвідношення (2.45) можна переписати у вигляді

$$K(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{b_{m}}{a_{n}} \cdot \frac{(p - p_{10})(p - p_{20})\dots(p - p_{m0})}{(p - p_{1\infty})(p - p_{2\infty})\dots(p - p_{m\infty})}.$$
 (2.46)

3 виразу (2.46) видно, що при $p \rightarrow p_{k0}$

$$\lim_{p \to p_{k0}} K(p) = 0$$

а при $p \rightarrow p_{k\infty}$

$$\lim_{p\to p_{k\infty}} K(p) = \infty.$$

Очевидно, що знання коренів багаточленів M(p) та N(p), тобто нулів і полюсів операторної характеристики K(p), дозволяє визначити значення останньої з точністю до постійного множника b_m/a_n . Більше того, знаючи розташування нулів та полюсів операторної характеристики в площині комплексної частоти **p**, можна отримати повну інформацію про властивості кола, зокрема, з точністю до постійного множника знайти реакцію кола на зовнішнє збудження.

Графічне зображення розташування нулів та полюсів операторної характеристики кола в площині комплексної частоти $p = \sigma + j\omega$ називається діаграмою нулів і полюсів або полюсно-нульовою діаграмою. У разі побудови полюсно-нульових діаграм уявну та дійсну осі площини комплексної частоти **р** позначають відповідно $j\omega$ та σ , нулям відповідають кружки а полюсам – хрестики.

Слід зазначити, що для лінійних електричних кіл із втратами всі полюси знаходяться в лівій напівплощині площини комплексної частоти **р**. Дійсно, у цьому випадку всі корені характеристичного рівняння кола, що співпадають із значеннями полюсів, є дійсними від'ємними числами, а якщо ж ці корені комплексні, то вони мають від'ємні дійсні частини. Тільки при виконанні цих умов вільні складові струмів та напруг у колі з плином часу згасають. В ідеалізованих лінійних колах, коли втрати відсутні, полюси операторної характеристики є уявними і розташовуються на уявній осі комплексної площини.

Подібні обмеження не розповсюджуються на нулі операторних характеристик. Останні можуть знаходитись як в лівій, так і в правій напівплощинах комплексної площини.

Операторні характеристики, що не мають нулів у правій напівплощині, називаються операторними характеристиками мінімальної фази, а операторні характеристики, що мають нулі в правій напівплощині, називаються операторними характеристиками немінімальної фази. У відповідності з цим розрізняють і кола мінімальної та немінімальної фази.

Зобразимо на полюсно-нульових діаграмах кіл мінімальної (рис. 2.10, а) та немінімальної (рис. 2.10, б) фази вектори \vec{M} і \vec{N} , які відповідають багаточленам в чисельнику та знаменнику виразу (2.46) для операторної характерис-



Рис. 2.10. Розташування нулів та полюсів операторної характеристики для кола мінімальної (а) та немінімальної (б) фази

тики кола. Як видно із цього рисунку, для обох кіл відношення довжин зображених векторів, які відповідають модулям багаточленів M(p) та N(p), однакові. Однак фазові характеристики даних кіл суттєво відрізняються. А саме, операторна характеристика кола мінімальної фази завжди характеризується меншим в алгебраїчному смислі фазовим зсувом, ніж відповідна характеристика кола немінімальної фази з такою ж амплітудно-частотною характеристикою. Дійсно, як видно з рис. 2.10, в разі однакових аргументів ψ_2 векторів \vec{N} обох кіл аргумент ψ_1 вектора \vec{M} кола мінімальної фази при будь-якій частоті ω завжди менший, ніж аргумент $\pi - \psi_1$ вектора \vec{M} кола немінімальної фази. А це означає, що різниця аргументів $\psi_2 - (\pi - \psi_1)$ для кола мінімальної фази завжди менша, ніж аналогічна різниця $\psi_2 - (\pi - \psi_1)$ для кола немінімальної фази завзи.

Таким чином, при однаковому числі нулів та полюсів немінімальнофазове коло забезпечує більше за абсолютною величиною змінювання фази в порівнянні з мінімально-фазовим колом. При цьому розташування нулів та полюсів на полюсно-нульовій діаграмі повністю визначається топологією кола.

Практично всі кола, розглянуті як в першій так і другій частинах посібника, є мінімально-фазовими. У таких колах передачу сигналу з входу на вихід можна припинити шляхом розриву лише однієї вітки. Між амплітудночастотними і фазочастотними характеристиками кіл мінімальної фази існує однозначний зв'язок, тому при їх проектуванні не можна задавати довільно частотні характеристики.

Немінімально-фазові кола мають, як правило, структуру мостового або схрещеного типу, в якій сигнал на вихід кола потрапляє двома або більшим числом каналів. Прикладом такого кола може служити розглянуте в першій частині посібника мостове фазозсовуюче коло. Однак не завжди мостова структура кола гарантує його належність до мінімально-фазового типу, тому в будь-якому випадку необхідно аналізувати полюсно-нульову діаграму.

Немінімально-фазові кола характеризуються дуже важливою властивістю: при змінюванні частоти зовнішнього гармонічного збудження змінюється лише фазочастотна характеристика кола. В той же час амплітудночастотна характеристика такого кола залишається незмінною. Включаючи такі кола в більш складні, можна цілеспрямовано змінювати фазочастотну характеристику цього складного кола, залишаючи незмінною його АЧХ.

2.6.3. Зв'язок між операторними та часовими характеристиками лінійних кіл

Для визначення зв'язку між часовими та операторними характеристиками лінійних кіл можна скористатись рівнянням зв'язку (2.44) між зображеннями вхідного збудження S(p) та вихідної реакції X(p). Перехідна характеристика лінійного кола h(t) визначається як відгук на збудження у вигляді одиничного стрибка l(t) при нульових початкових умовах. Однак відомо, що одиничному стрибку за Лапласом відповідає зображення

$$l(t) \rightarrow l/p$$

і тоді згідно з виразом (2.44) операторне зображення перехідної характеристики матиме вигляд

$$h(t) \rightarrow H(p) = K(p) \cdot \frac{1}{p} . \qquad (2.47)$$

Імпульсна характеристика кола g(t) визначається як відгук на збудження у вигляді δ-функції при нульових початкових умовах. Оскільки операторне зображення δ-функції

 $\delta(t) \rightarrow 1$,

то зображення імпульсної характеристики збігається з операторною характеристикою кола

$$g(t) \rightarrow G(p) = K(p) \cdot 1 = K(p). \qquad (2.48)$$

Таким чином, якщо відома операторна характеристика кола, то можна легко визначити і його перехідну та імпульсну характеристики. Оскільки одночасно існує зв'язок між операторною характеристикою кола та його КЧХ, то часові характеристики кола можна знайти і на основі останньої.

На практиці часто розв'язують і зворотну задачу знаходження операторних або комплексних частотних характеристик, якщо відомими є часові характеристики кола.

Розділ З

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО НЕЛІНІЙНІ ТА ПАРАМЕТРИЧНІ ЕЛЕМЕНТИ І КОЛА

3.1. Основні властивості нелінійних елементів і кіл

3.1.1. Поняття про нелінійний елемент та нелінійне коло

Як відомо, нелінійним елементом електричного кола називають такий елемент, параметри якого залежать від величин або напрямків його струму та напруги.

Відповідно нелінійним колом називається таке коло, параметри хоча б одного елемента якого залежать від величини або напрямку його струму чи напруги. Тобто в нелінійному колі хоча б один з його елементів є нелінійним.

Фізичні процеси, що протікають в нелінійних електричних колах, описуються нелінійними алгебраїчними або диференціальними рівняннями. Ці рівняння мають у своєму складі нелінійні функції струму, напруги та їх похідних. Окрім того, такі рівняння можуть мати коефіцієнти, які залежать від величин струмів та напруг.

Нелінійні кола характеризуються такими основними особливостями.

1. До нелінійних кіл не можна застосовувати принцип суперпозиції. Це обумовлено тим, що відгук кола на суму зовнішніх дій не дорівнює сумі відгуків на кожну дію окремо. Наприклад, якщо в нелінійному колі маємо квадратичну залежність струму від напруги $i = au^2 i$ в цьому колі одночасно діють два послідовно включені джерела напруги u_1 та u_2 , то струм кола дорівнює

$$i = a \cdot (u_1 + u_2)^2 = au_1^2 + 2au_1u_2 + au_2^2.$$
 (3.1)

Тобто цей струм не дорівнює сумі струмів, які створюються в колі дією кожного джерела окремо –

$$i \neq i_1 + i_2 = au_1^2 + au_2^2$$
. (3.2)

2. На відміну від лінійних кіл в нелінійних колах в усталеному режимі при гармонічній вхідній дії вихідна величина є негармонічною. В результаті реакція нелінійного кола має у своєму спектрі гармонічні складові, яких немає у спектрі вхідного збудження. Слід зазначити, що перетворення спектрів сигналів є однією з найбільш важливих властивостей нелінійних кіл.

3. На відміну від лінійних пасивних елементів електричних кіл, для яких вольт-амперна характеристика опору i = F(u), кулон-вольтна характеристика ємності q = F(u), та вебер-амперна характеристика індуктивності $\Psi = F(i) \epsilon$ лінійними, в нелінійних колах ці залежності нелінійні.

4. На відміну від лінійних елементів, які характеризуються єдиним незалежним від режиму роботи параметром, для характеристики нелінійних елементів уводять так звані статичні та динамічні параметри, що залежать від режиму роботи елемента. Причому статичні параметри характеризують поведінку нелінійних елементів при повільних, а динамічні при швидких змінюваннях напруг та струмів.

3.1.2. Класифікація нелінійних елементів

Всі нелінійні елементи можна розділити на нелінійні активні опори R(u), нелінійні індуктивності L(i) та нелінійні ємності C(u). Відповідні умовні позначення нелінійних елементів наведені на рис. 3.1.

Прикладом нелінійних активних опорів є вакуумні та напівпровідникові діоди і тріоди, прикладом нелінійних індуктивностей – котушки індуктивності та трансформатори з феромагнітними магнітопроводами, прикладом нелінійних ємностей – конденсатори з нелінійним діелектриком між обкладками



Рис. 3.1. Умовні позначення нелінійних пасивних елементів

та конденсатори на основі запертого p-n – переходу.

Окрім того, нелінійні елемен-ти діляться на некеровані та керовані. Некеровані нелінійні елементи завжди можна представити у вигляді двополюсників, па-

раметри яких залежать лише від прикладеної до них напруги або протікаючого через них струму. Такі нелінійні елементи мають лише одну вольтамперну, кулон-вольтну або вебер-амперну характеристику.

Керовані нелінійні елементи зазвичай є багатополюсниками. Струм у головному колі такого елемента залежить не тільки від напруги, прикладеної до цього кола, але й від інших параметрів, які називаються керуючими факторами і необов'язково повинні мати електричний характер. Такі нелінійні елементи характеризуються цілим набором характеристик, які одержують при різних фіксованих значеннях керуючих факторів.

Слід також відмітити, що нелінійні активні опори за принципами теплової інерційності можна розділити на інерційні та безінерційні. В безінерційних опорах при будь-якій швидкості змінювання прикладеної напруги струм встигає відслідковувати ці змінювання. В інерційних опорах протікаючий струм може нагрівати елемент і його температура буде змінюватись. В усталеному режимі вона буде відповідати значенню діючої на опорі напруги.

При цьому по відношенню до швидких змінювань напруги або струму опір буде себе поводити як лінійний елемент, а між діючими значеннями струму та напруги існуватиме нелінійна залежність.

Наостанок зазначимо, що всі без виключення реальні елементи електричних кіл характеризуються деякою нелінійністю. Тому поділ кіл на лінійні та нелінійні є умовним.

3.1.3. Нелінійні активні опори

Нелінійний активний опір, як і лінійний, характеризується необоротним перетворенням електромагнітної енергії в тепло. При розгляді активних опорів найчастіше як зовнішню дію розглядають прикладену напругу, а як відгук – струм через цей опір. Тому основною характеристикою активного опору, в

тому числі і нелінійного, є вольт-амперна характеристика і = F(u), яка для нелінійного опору має яскраво виражений нелінійний характер (рис. 3.2). Цю характеристику часто називають статичною, оскільки її одержують при дуже малих швидкостях змінювання напруги, що прикладається до опору. Користуючись статичною вольт-амперною характеристикою, можна знайти статичні та динамічні параметри нелінійного опору. Такими параметрами останнього є статичний та динамічний, або диференціальний, опори.



Статичним опором нелінійного активного опору називається відношення постійної напруги, прикладеної до опору, до усталеного значення постійного струму в ньому –

$$R_{c}(u) = \frac{U}{I}.$$
(3.3)

Цей опір чисельно дорівнює котангенсу кута нахилу прямої лінії, що проведена з початку координат через задану точку вольт-амперної характеристики нелінійного елемента (рис. 3.2).

Динамічним або диференціальним опором нелінійного активного опору називається величина, що обернена до похідної вольт-амперної характеристики цього опору в заданій точці –

$$R_{\pi}(u) = \frac{1}{\frac{dF(u)}{du}} = \frac{du}{di} . \qquad (3.4)$$

Цей опір чисельно дорівнює котангенсу кута нахилу дотичної в заданій точці вольт-амперної характеристики нелінійного активного опору (рис. 3.2).

Очевидно, що статичний та динамічний опори, а також відповідні їм провідності є деякими функціями прикладеної напруги. В тих випадках, коли нелінійний опір живиться від джерела струму, більш зручно користуватися вольт-амперною характеристикою виду u = F(i), тобто вважати зовнішньою дією струм i(t), а відгуком – напругу u(t), що ним створюється.

У відповідності із зовнішнім виглядом вольт-амперних характеристик нелінійні активні опори розділяють на симетричні та несиметричні.

Симетричними називають такі нелінійні опори, для яких виконується умова

$$i(u) = i(-u)$$
. (3.5)

Тобто вольт-амперна характеристика симетричного нелінійного опору являє собою непарну функцію напруги або струму. Параметри такого нелі-



Рис. 3.3. Статичні вольт-амперні характеристики варистора (а) та напівпровідникового діода (б)

нійного опору залежать лише від величини і не залежать від знаку прикладеної напруги або протікаючого крізь нього струму.

Прикладом симетричного нелінійного опору може служити варистор, характеристика якого наведена на рис.3.3, а.

Для несиметричного опору умова (3.5) не виконується, тобто $i(u) \neq i(-u)$. Прикладом несиметричного нелінійного опору може служити напів-

провідниковий діод. Вітки його вольт-амперної характеристики, отримані при різній полярності прикладеної напруги, значно відрізняються одна від одної (рис. 3.3, б).

3.1.4. Нелінійні індуктивності

Нелінійна індуктивність, як і лінійна, характеризується можливістю запасання енергії в магнітному полі, однак на відміну від другої має нелінійну вебер-амперну характеристику $\Psi = F(i)$.

При заданій геометричній конфігурації котушки індуктивності з феромагнітним магнітопроводом (осердям) її індуктивність визначається головним чином властивостями магнітопроводу та зовнішнього середовища.

Магнітні властивості будь-якого матеріалу, як відомо, характеризуються кривою намагнічуваності, тобто залежністю індукції магнітного поля В від діючої в середовищі напруженості цього магнітного поля Н. Для багатьох матеріалів залежність $B = F(H) \in лінійною. Для феромагнітних матеріалів вона$ нелінійна, що й покладено в основу реалізації нелінійних індуктивностей.

Якщо вважати, що напруженість магнітного поля Н це зовнішня дія, а магнітна індукція В – відгук середовища, то можна ввести поняття статичного параметра середовища, що характеризує його магнітні властивості –

Цей параметр називається статичною магнітною проникністю.

Крутість кривої намагнічуваності В = F(H) називається динамічною або диференціальною магнітною проникністю –

$$\mu_{\rm c} = \frac{\rm B}{\rm H}.\tag{3.6}$$



Рис. 3.4. Крива намагнічуваності (а) та залежності µ_c (H) і µ_д(H) для феромагнетиків

$$\mu_{\pi} = \frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dH}}.$$
(3.7)

Оскільки для лінійних (немагнітних) матеріалів залеж-ність $B = F(H) \epsilon$ лінійною, то для них виконується умова $\mu_c = \mu_{d}$. Внаслідок же суттєвої нелінійності кривої намагнічуваності феромагнетиків (рис. 3.4, а) залежності від напруженості магнітного поля статичної μ_c та динамічної μ_d магнітних проникностей суттєво відрізняються. Ці величини значно змінюються при змінюванні H (рис. 3.4, б).

Розглянемо котушку індуктивності з тороїдним феромагнітним осердям (рис. 3.5). Якщо число витків котушки w, а площа перерізу осердя S, то її повне потокозчеплення дорівнює

$$\Psi = \mathbf{w} \cdot \Phi = \mathbf{w} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}. \tag{3.8}$$

З іншого боку, для створення напруженості магнітного поля Н необхідно в котушці створити струм і(t), який дорівнює

 $i = \frac{H \cdot \ell}{W}, \qquad (3.9)$

де *l* – середня довжина магнітної силової лінії в осерді.

Рис. 3.5. Тороїдна котушка індуктивності

Як видно з виразів (3.8) та (3.9), для даної котушки індуктивності потокозчеплення Ф пропорційне індукції магнітного поля В в осерді, а струм і(t) пропорційний

напруженості магнітного поля Н. Таким чином, маючи криву намагні-чуваності матеріалу осердя B = F(H), можна за допомогою відповідної зміни масштабів отримати вебер-амперну характеристику котушки індуктивності $\Psi = F(i)$, яка дійсно буде суттєво нелінійною.

В результаті можна ввести поняття статичної та динамічної, або диференціальної, індуктивності нелінійної котушки індуктивності.

Для статичної індуктивності матимемо

$$L_{c}(i) = \frac{\Psi}{I}, \qquad (3.10)$$

де Ψ – потокозчеплення в заданій точці вебер-амперної характеристики;

I – постійний струм, що відповідає цій точці.

Динамічна, або диференціальна, індуктивність дорівнює

$$L_{\mu}(i) = \frac{d\Psi}{di}.$$
(3.11)

Порівнюючи вирази (3.10) та (3.11) з виразами (3.6) та (3.7), можна стверджувати, що статична індуктивність пропорційна статичній магнітній проникності, а динамічна – динамічній магнітній проникності.

На відміну від лінійної індуктивності, яка має втрати лише в дротах котушки, нелінійна індуктивність має додаткові втрати на гістерезис та вихрові

 \frown

струми. Втрати на гістерезис пов'язані із затратами на перемагнічування осердя і при зростанні частоти також зростають:

$$\mathbf{P}_{\Gamma} = \mathbf{k}_{\Gamma} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{B}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{n}} \cdot \mathbf{V}, \qquad (3.12)$$

де k_r – коефіцієнт, що залежить від властивостей матеріалу осердя; f – частота змінювання напруженості поля; B_m – максимальне значення магнітної індукції; n – коефіцієнт, величина якого в залежності від значення B_m лежить в границях 1,6...2; V – об'єм осердя.

Втрати на вихрові струми викликані тим, що змінне магнітне поле індукує в товщі осердя струми, проходження яких і викликає втрати енергії. Потужність втрат на вихрові струми дорівнює

$$\mathbf{P}_{\mathbf{B}} = \mathbf{k}_{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{m}}^2 \cdot \mathbf{V}, \qquad (3.13)$$

де $k_{\rm B}$ – коефіцієнт, що залежить від матеріалу осердя та його конструкції.

Якщо врахувати усі зазначені види втрат в нелінійній індуктивності, то її еквівалентну схему можна подати у вигляді, що показаний на рис. 3.6. У цій схемі R_{κ} – активний опір дроту котушки, $R_{\rm B}$ – опір, що характеризує втрати на вихрові струми, $R_{\rm r}$ – опір, який визначається втратами на гістерезис. Опори $R_{\rm r}$ та $R_{\rm B}$ не тільки суттєво залежать від частоти, але й характеризуються сильними нелінійними властивостями, тобто залежать від протікаючого крізь них струму.

Для зменшення втрат на вихрові струми осердя виконують у вигляді пакету тонких ізольованих одна від одної пластин, площина поперечного перерізу яких перпендикулярна до напрямку магнітних силових ліній.



Рис. 3.6. Еквівалентна схема нелінійної котушки індуктивності

Для застосування на радіочастотах створено магнітні матеріали, що називаються магнітодіелектриками. У цих матеріалів частинки феромагнітного порошку, що мають розміри декількох мікрометрів, зв'язані між собою діелектриком. Для їх виготовлення використовують магнетит, карбонільне залізо, альсифер та інші матеріли.

Широке застосування знаходять матеріали, які мають високий питомий опір $(10^2....10^8$ Om · cm) та характеризуються малими втратами. Передусім це ферити, які мають дуже високу магнітну проникність (100...50 000). В основу цих матеріалів покладено хімічні сполуки окислів металів, що характеризуються формулою Me·Fe₂·O₃, де Me – символ двовалентного металу.

3.1.5. Нелінійні ємності

Нелінійна ємність, як і лінійна, характеризується можливістю запасати енергію в електричному полі, але на відміну від другої має нелінійну кулон – вольтну характеристику q = F(u).

Найпоширенішими методами реалізації нелінійних ємностей є створення конденсаторів з діелектриками, що характеризуються нелінійними властивостями, та конденсаторів на основі запертих p-n – переходів.

Для будь-якого діелектрика існує зв'язок між зміщенням D та напруженістю E електричного поля D = F(E). Для більшості діелектриків ця залежність лінійна, а відношення D/E характеризує діелектричну проникність є середовища і є величиною незмінною.

Для нелінійних діелектриків залежність D = F(E) нелінійна і тому за аналогією з феромагнетиками вводять два основні параметри нелінійного діелектрика: статичну діелектричну проникність

$$\varepsilon_{\rm c} = {\rm D/E} \tag{3.14}$$

та динамічну, або диференціальну, діелектричну проникність

$$\varepsilon_{\pi} = dD/dE. \qquad (3.15)$$

Такі нелінійні діелектрики одержали назву сегнетоелектриків. Найбільш яскравими їх представниками є титанат барію BaTiO₃ та титанат свинцю PbTiO₃.

Поведінка сегнетоелектриків в електричних колах аналогічна поведінці феромагнетиків у магнітних полях. Як і нелінійна залежність B = F(H), характеристика D = F(E) при циклічному знакозмінному характері напруженості електричного поля має гістерезисний характер. У зв'язку з цим нелінійні діелектрики часто називають фероелектриками.

Якщо поміж обкладками конденсатора помістити сегнетоелектрик, то кулон-вольтна характеристика його ємності буде мати такий самий вигляд, що й залежність зміщення D від напруженості E електричного поля для сегнетоелектрика. Дійсно, електричний потік Φ_E через діелектрик плоского конденсатора дорівнює

$$\Phi_{\rm E} = \varepsilon \, {\rm E} \, {\rm S} = {\rm D} \, {\rm S} = {\rm q} \,, \qquad (3.16)$$

де S – площа пластин конденсатора.

Напруга на затискачах конденсатора дорівнює

$$\mathbf{u}_{\mathrm{c}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}, \tag{3.17}$$

де d – відстань між обкладками конденсатора.

Отже, заряд на обкладках конденсатора пропорційний за величиною зміщенню D, а напруга u_c – напруженості E електричного поля. Якщо вважати, що напруга u_C є зовнішньою дією по відношенню до конденсатора, а відгуком є заряд q, то для статичної ємності нелінійного конденсатора одержимо

$$C_{c}(u) = \frac{q}{U_{c}}, \qquad (3.18)$$

а для динамічної, або диференціальної –

$$C_{\mu}(u) = \frac{dq}{du_{c}}.$$
(3.19)

88

(3.20)

(3.22)

Порівняння виразів (3.18) та (3.19) з виразами (3.14) – (3.17) дозволяє зробити висновок, що статична ємність пропорційна статичній діелектричній проникності, а динамічна – динамічній діелектричній проникності.

Нелінійні конденсатори, що використовують сегнетодіелектрики, називаються сегнетоконденсаторами або варикондами. Внаслідок явища гістерезису нелінійні конденсатори мають втрати на діелектричний гістерезис, які визначаються, як і у випадку використання феромагнетиків, площею петлі гістерезису. В даному випадку це є затрати енергії на переполяризацію матеріалу діелектрика.

Всі без виключення втрати, що виникають в недосконалому діелектрику, можна врахувати в послідовній еквівалентній схемі конденсатора з одним

вним опором R_c (рис. 3.7). Покажемо, що цей опір є нелінійним. При гарному характері струму в колі на рис. 3.7 маємо

Рис. 3.7. Еквівалентна схема нелінійного конденсатора

ΤT

ID

де P_a – сумарні втрати в діелектрику разом із втратами на гістерезис.

Оскільки опір втрат R_c достатньо малий, то зовнішня напруга $U_m \approx$ U_{mc} , а амплітуда струму $I_m \approx I_m/x_c$. Тоді для потужності втрат P_a запишемо

$$P_{a} = \frac{1}{2} I_{m}^{2} R_{c} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{U_{m}^{2}}{x_{c}} \cdot \frac{1}{Q_{c}}.$$
 (3.21)

Кут зсуву фаз між напругою та струмом в нелінійній ємності можна представити у вигляді

де δ – так званий кут діелектричних втрат, що визначається вибором діелектрика.

 $\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta,$

З векторної діаграми для конденсатора (рис. 3.8) видно, що тангенс кута діелектричних втрат дорівнює T 🕯

$$tg\delta = \frac{U_{R_c}}{U_c} = \frac{IK_c}{Ix_c} = \frac{K_c}{x_c} = \frac{I}{Q_c}.$$
 (3.23)

Тому вираз (3.21) можна представити у вигляді

$$P_{a} \approx \frac{1}{2} U_{m}^{2} \omega C \operatorname{tg} \delta.$$
 (3.24)

Таким чином, для сегнетодіелектриків тангенс кута діелектричних втрат дорівнює

$$tg\delta \approx \frac{1}{2} \frac{P_a}{U_m^2 \omega C}.$$
(3.25)

Рис. 3.8. Векторна діаграма конденсатора

$$U_{R_{c}} \phi U_{c}$$

$$R_{c} = \frac{2P_{a}}{I_{m}^{2}},$$

Очевидно, що величина tg δ суттєво залежить від напруженості електричного поля в діелектрику і є нелінійною функцією напруги. Це означає, що і опір втрат R_c також за характером є нелінійним.

На жаль нелінійні сегнетоелектричні конденсатори мають великі втрати, а їх параметри суттєво залежать від температури. Тому набагато ширше застосування знаходять нелінійні конденсатори, що використовують явище виникнення бар'єрної ємності C_6 при зворотному зміщенні напівпровідникового p-n – переходу.

Оскільки втрати на гістерезис в такому переході дуже малі, то кулон-вольтна характеристика напівпровідникового конденсатора, що носить назву варикапа, є однозначною (рис. 3.9). Загальні втрати в напівпровідниковому конденсаторіварикапі дуже малі і визначаються малим зворотним струмом витікання. Тому в даному випадку опір втрат $R_c \approx 0$, а добротність варикапа характеризується такими ж величинами, як і добротність якісних високочастотних конденсаторів постійної ємності.



характеристика нелінійного конденсатора-варикапа

На практиці замість кулон-вольтної характеристики q = F(u) часто користуються вольт-фарадною залежністю варикапа $C_6 = F(u)$, перехід до якої можна здійснити, скориставшись рівнянням

$$C_{\sigma}(u) = \frac{dq}{du}.$$

ний на рис. 3.10, добре передається виразом, що отриманий за допомогою теорії фізики напівпровідників:

$$C_{\delta}(u) = C_0 \sqrt[n]{\frac{\phi_{\kappa}}{\phi_{\kappa} + |u|}}, \qquad (3.26)$$



C_ճ(u

Рис. 3.10. Вольт-фарадна характеристика нелінійного конденсатораварикапа

де $C_0 - \epsilon$ мність p-n – переходу при відсутності прикладеної до нього напруги; ϕ_{κ} – контактна різниця потенціалів p-n – переходу; u – прикладена до p-n – переходу запираюча напруга; n – постійна величина, що залежить від розподілу домішок в напівпровіднику і лежить в межах 2...3.

Звичайно ємність p-n – переходу, яку часто називають бар'єрною, використовується при напругах, що відповідають запертому p-n – переходу, тобто в умовах, коли струми провідності дуже малі, а добротність приладу, використовуваного в якості конденсатора, дуже висока.

3.1.6. Нелінійні кола постійного струму

Розрахунки нелінійних електричних кіл є, як правило, більш трудомісткими та громіздкими, ніж розрахунок лінійних кіл. Це пов'язано з нелінійним характером основних характеристик нелінійних елементів та неможливістю застосування до нелінійних кіл принципу суперпозиції. При розрахунках нелінійних кіл використовують графічні, аналітичні та чисельні методи. Окрім того, часто використовують і комбіновані, наприклад, графо-аналітичні методи.

При розрахунках нелінійних кіл постійного струму найчастіше використовують графічні та аналітичні методи.

Графічний метод розрахунку

Розглянемо просте електричне коло, що має в своєму складі послідовно з'єднані джерело Е постійної ЕРС, а також ліній-

ний R_2 та нелінійний R_1 активні опори (рис. 3.11). Треба знайти струм i_0 в колі та напругу u_1 на нелінійному опорі.

Для розрахунку цього кола складемо рівняння згідно з другим законом Кірхгофа, який є справедливим як для лінійних, так і для нелінійних кіл:

$$E = u_1 + u_2 = u_1 + i_0 R_2$$
. (3.27)
З виразу (3.27) для шуканих величин i_0 та u_1 отримаємо

$$i_0 = \frac{E - u_1}{R_2}, \quad u_1 = E - i_0 R_2.$$
 (3.28)

Розв'яжемо задачу визначення величин і₀ та u₁ графічним методом. Для цього в спільній системі координат (рис. 3.12) побудуємо вольтамперну характеристику нелінійного опору R₁ $i = F_1(u)$ залежність, та шо визначається рівняннями (3.28). При цьому слід заначити, що обидва ці рівняння визначають вольт-амперну характеристику лінійного двополюсника, який включає в себе послідовне з'єднання джерела Е постійної ЕРС та лінійного опору R2. Вольтхарактеристику лінійного амперну двополюсника будують за допомогою ДВОХ



Рис. 3.11. Схема простого нелінійного кола



Рис. 3.12. Ілюстрація до графічного методу розрахунку простого нелінійного кола

точок, координати яких знаходять, переводячи двополюсник по черзі в режим холостого ходу та короткого замикання.

В режимі короткого замикання струм лінійного двополюсника $I_{\kappa_3} = E/R_2$, а напруга на його затискачах $u = u_1 = 0$. В режимі ж холостого ходу навпаки, $u = u_1 = E$, а струм $I_{xx} = 0$.

Проведемо через точки з координатами (E/R₂, 0) та (0, E) пряму лінію, що і буде являти собою вольт-амперну характеристику лінійного двополюсника. Точка перетину цієї прямої лінії з вольт-амперною характеристикою нелінійного опору R₁ якраз і дозволяє знайти шукані струм i_0 та напугу u_1 .

Аналітичний метод розрахунку

При аналізі нелінійного кола (рис. 3.11) можна скористатись і аналітичним методом розрахунку, якщо є можливість виразити зв'язок між струмом та напругою нелінійного елемента достатньо простою функцією.

Нехай струм нелінійного опору визначається співвідношенням

$$i = au_1^2$$
,

де а – постійний коефіцієнт.

Тоді у відповідності з першим із виразів (3.28) запишемо

$$au_1^2 = \frac{E - u_1}{R_2},$$

або інакше

$$au_1^2 + \frac{1}{R_2}u_1 - \frac{E}{R_2} = 0.$$
 (3.29)

Якщо розв'язати квадратне рівняння (3.29), одержимо

$$u_{1} = -\frac{1}{2aR_{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^{2}R_{2}^{2}} + \frac{E}{aR_{2}}}.$$
 (3.30)

Остаточно значення напруги u₁ визначаємо, виходячи з фізичних міркувань.

Якщо аналітична залежність струму нелінійного елемента від напруги дуже складна, то доцільніше використовувати чисельні методи аналізу кіл із застосуванням ЕОМ.

Розрахунок складних нелінійних кіл

При наявності в колі декількох нелінійних елементів його розрахунок значно ускладнюється. Розглянемо випадки, які зустрічаються найбільш часто, коли нелінійні опори в колі постійного струму з'єднуються послідовно або паралельно. В обох



Рис. 3.13. Послідовне з'єднання нелініних опорів (а) та методика отримання вольт-амперної характеристики еквівалентного елемента (б)

випадках з'єднання опорів замінюють одним еквівалентним нелінійним опором, а надалі розрахунки ведуть так, як це було зроблено вище.

При послідовному з'єднанні двох нелінійних опорів (рис. 3.13, а) їх

можна замінити одним нелінійним елементом, вольт-амперна характери-стика якого визначається співвідношеннями

 $i = i_1 = i_2, u = u_1 + u_2.$

(3.31)

Оскільки через обидва опори протікає той самий струм i(t), то для отримання вольт-амперної характеристики еквівалентного опору треба на одному рисунку розташувати характеристики окремих опорів $i_1 = F_1(u)$ та $i_1 = F_2(u)$ о потім одійстви до торо



Рис. 3.14. Паралельне з'єднання нелінійних опорів (а) та їх вольт-амперна характеристика (б)

 $i_2 = F_2(u)$, а потім здійснити додавання напруг для всіх можливих значень струму (рис. 3.13, б). Очевидно, що цей прийом можна розповсюдити на будьяку кількість нелінійних опорів, з'єднаних послідовно.

Паралельне з'єднання двох нелінійних опорів (рис. 3.14, а) характеризується співвідношеннями

$$u = u_1 = u_2, i = i_1 + i_2.$$
 (3.32)

Щоб одержати вольт-амперну характеристику еквівалентного нелінійного опору, треба на спільному рисунку зобразити характеристику кожного з елементів, а потім здійснити додавання струмів i_1 та i_2 для всіх можливих значень напруги и (рис. 3.14, б). Цей прийом легко розповсюджується і на більшу кількість нелінійних опорів, з'єднаних паралельно.

3.1.7. Методи апроксимації характеристик нелінійних елементів

Поняття про апроксимацію нелінійних характеристик

Для розрахунку електричних кіл, які мають в своєму складі нелінійні елементи, необхідно мати характеристики останніх. Зазвичай ці характеристики задають у вигляді графіків або табличних даних. Такий спосіб представлення характеристик нелінійних елементів зручний у разі графічного методу розрахунків простих кіл, але забезпечує порівняно невисоку точність. Для реалізації аналітичних або чисельних методів розрахунку графік або табличне представлення характеристики треба замінити аналітичним виразом, тобто формулою.

Процес одержання аналітичного виразу для характеристики нелінійного елемента, заданої графічно або таблично, називається апроксимацією. Дуже

часто характеристику нелінійного елемента в залежності від режиму роботи останнього та призначення схеми доводиться апроксимувати по-різному.

При виборі способу апроксимації намагаються задовольнити такі, в значній мірі суперечливі, вимоги.

1. Можливість виявлення властивостей схеми, що аналізується.

2. Достатня точність (її підвищення зазвичай пов'язане з використанням більш складної апроксимуючої функції).

3. Простота апроксимуючої функції, яка допускає просту математичну обробку результатів розрахунків.

4. Наочність апроксимації, що дозволяє прогнозувати характер змінювання параметрів апроксимуючого виразу при змінюванні виду нелінійності, режиму роботи схеми та інших умов.

Загальна задача апроксимації розпадається на дві самостійні задачі:

 вибір класу функцій, тобто вибір функціональної структури апроксимуючого виразу;

 визачення коефіцієнтів апрксимації, тобто постійних, які входять у вираз апроксимуючої функції.

Задача вибору класу функції не має однозначного розв'язання. Цей клас вибирають, виходячи з подібності тієї чи іншої функціїї і характеристики, що апроксимується, та з міркувань, пов'язаних із подальшим використанням вибраних функцій.

Для визначення коефіцієнтів апроксимації потрібно конкретизувати умови апроксимації, тобто уточнити кількісно ступінь наближення апроксимуючої функції до заданої характеристики. Найчастіше використовують такі умови наближення:

– рівномірне наближення: апроксимуюча функція $\hat{F}(x)$ не повинна відрізнятися від заданої F(x) більше, ніж на деяке додатне число ε , тобто повинна виконуватись умова

$$\left| \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right| \le \varepsilon;$$
 (3.33)

– середньоквадратичне наближення: апроксимуюча функція $\hat{F}(x)$ не повинна відрізнятися від тієї, що апроксимується, в середньоквадратичному більш, ніж на величину δ , тобто повинна виконуватися вимога

$$\left(\frac{1}{X}\int_{0}^{x} \left[\hat{F}(x) - F(x)\right]^{2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \delta, \qquad (3.34)$$

де $\overline{0, X}$ – інтервал апроксимації, тобто границі змінювання аргумента x, в яких задано функцію, що апроксимується; δ – інтерполяційне (точкове або вузлове) наближення: апроксимуюча функція $\hat{F}(x)$ повинна збігатися з тією, що апроксимується, в ряді вибраних точок. Часто ставляться умови збігу похідних $\hat{F}^{(n)}(x)$ з похідними $F^{(n)}(x)$ у вибраних точках. Вимоги до поведінки функції $\hat{F}(x)$ між вибраними точками в більшості випадків не ставлять.

Вимоги до апроксимуючих функцій

Розглянемо види функцій, які частіше за інші використовуються при апроксимації характеристик нелінійних елементів. Щоб апроксимуюча функція якнайточніше відтворювала форму нелінійної характеристики та була зручною для аналізу і математичної обробки, зазвичай апроксимують не всю характеристику, а тільки робочу ділянку, під якою розуміють використовувану частину характеристики.

В ряді випадків апроксимацію характеристик нелінійних елементів можна здійснювати за допомогою елементарних функцій. До таких функцій відносяться: експонента $y = Ae^{\alpha x}$, степенева функція $y = ax^k$, гіперболічний тангенс y = th ах та ін.

Наприклад, на достатньо великій ділянці змінювання напруги вольтамперну характеристику вакуумного діода можна представити функцією виду

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 \mathbf{e}^{\alpha \mathbf{u}},\tag{3.35}$$

де I_0 , α – параметри апроксимуючої характеристики, які треба визначити.

Також достатньо простою є апроксимуюча функція для аналогічної нелінійної характеристики напівпровідникового діода. При прямому зміщенні на діоді, коли напруга u > 0, така функція має вигляд

$$i = I_0(e^{\alpha_1 u} - 1),$$
 (3.36)

а при зворотному зміщенні, коли напруга u < 0 –

$$i = I_0 (e^{-\alpha_2 |u|} - 1).$$
 (3.37)

У виразах (3.36) та (3.37) параметри I_0 , α_1 та α_2 треба визначати при розв'язуванні задачі апрксимації.

Якщо апроксимувати характеристику нелінійного елемента елементарними функціями не вдається, то використовують комбінації елементарних функцій.

В нелінійній теорії кіл та радіотехніці для цілей апроксимації найчастіше використовують такі функції:

- степеневий поліном

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$
; (3.38)

– експоненціальний поліном

$$y = A_0 + A_1 e^{a_1 x} + A_2 e^{a_2 x} + \dots + A_n e^{a_n x};$$
(3.39)

- тригонометричний поліном

$$y = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(x + \phi_1) + A_2 \cos(2x + \phi_2) + \dots + A_n \cos(nx + \phi_n).$$
(3.40)

Окрім цього, для апроксимації використовують кусково-лінійні та кусково-нелінійні функції, що являють собою сукупності відрізків прямих та кривих ліній відповідно. Аналітично ці функції можна записувати за допомогою ряду окремих виразів, кожний з яких справедливий лише на певному інтервалі. Найчастіше використовують степеневу та кусково-лінійну апроксимації.

Апроксимація степеневим поліномом

Найчастіше використовується апроксимуюча функція у вигляді степеневого полінома (3.38). У цьому випадку характеристику нелінійного елемента або її робочу ділянку представляють скінченною кількістю складових ряду Тейлора. Наприклад, при апроксимації нелінійної вольт-амперної характеристики (рис. 3.15) поблизу робочої точки А матимемо

 $i = F(u) = a_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)^2 + ... + a_n(u - u_0)^n$, (3.41) де u_0 – напруга в робочій точці вольт-амперної характеристики; $i^{(k)}(u_0)$

 $a_k = \frac{i^{(k)}(u_0)}{k!}$ – коефіцієнти ряду Тейлора, що визначаються значеннями

похід-них $i^{(k)}(u_0) = \frac{di^{(k)}(u)}{du^{(k)}}\Big|_{u=u_0}$ характеристики в робочій точці.

Число складових ряду (3.41) визначається необхідною точністю розрахунків.



Рис. 3.15. Характеристика, що підлягає апроксимації

Для визначення коефіцієнтів апроксимуючого полінома найчастіше використовують метод вибраних точок. При цьому на характеристиці нелінійного елемента в межах ділянки, що апроксимується, вибирають точки, кількість яких має бути на одну більше, ніж степінь полінома, тобто k = n + 1. Координати цих точок:

 $u_1, i_1; u_2, i_2; ...; u_n, i_n,$

які знаходять за допомогою заданої графіч-

но або таблично нелінійної характеристики, по черзі підставляють в апроксимуючу функцію (3.41) і отримують систему рівнянь

$$\begin{split} & i_1 = a_0 + a_1(u_1 - u_0) + a_2(u_1 - u_0)^2 + ... + a_n(u_1 - u_0)^n , \\ & i_2 = a_0 + a_1(u_2 - u_0) + a_2(u_2 - u_0)^2 + ... + a_n(u_2 - u_0)^n , \\ & \dots \\ & i_n = a_0 + a_1(u_n - u_0) + a_2(u_n - u_0)^2 + ... + a_n(u_n - u_0)^n . \end{split}$$

Розв'язуючи систему (3.42) відносно коефіцієнтів апроксимації, знаходять останні, а потім підставляють їх значення в степеневий ряд (3.41). Степеневими поліномами апроксимують такі нелінійні характеристики, для яких поліном повинен мати степінь не вищий за п'ять.

Кусково-лінійна апроксимація

При великих рівнях сигналів, що діють на нелінійні елементи, в практиці інженерних розрахунків часто використовується апроксимація характеристик ламаною лінією, тобто кусково-лінійна апроксимація.

Цей вид апроксимації є найбільш простим та зручним, якщо основне значення має нижній згин нелінійної характеристики (рис. 3.16). В цьому випадку її можна апроксимувати лише двома відрізками прямих ліній, а рівняння апроксимованої характеристики матиме вигляд

$$i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } u < u_0, \\ \text{Su}, & \text{якщо } u \ge u_0, \end{cases}$$
(3.43)

де S = di/du - крутість висхідної ділянки лінеаризованої характеристики.

Слід підкреслити, що заміна реальної нелінійної характеристики лінійними відрізками не означає лінеарізації кола, оскільки в разі великих амплітуд зовнішньої напруги, коли U_m > u₀, це коло є принципово нелінійним.



Рис. 3.16. Апроксимація ламаною лінією

3.2. Загальні відомості про параметричні елементи і кола

3.2.1. Поняття про параметричні елементи та кола

Якщо параметри елементів електричного кола змінюються в часі, то такі елементи називаються параметричними.

Електричні кола, в яких хоча б один параметр будь-якого елемента є функцією часу, називаються параметричними. На рис. 3.17 наведені умовні позначення пасивних параметричних елементів електричних кіл.

В якості зовнішніх збуджень та відгуків на них для параметричних еле-



Рис. 3.17. Умовні позначення параметричних елементів

ментів використовують ті ж самі електричні величини, що й для раніше розглянутих лінійних та нелінійних елементів.

Якщо параметри елементів електричного кола залежать лише від часу і не залежать від його режиму роботи, то таке електричне коло є лінійним. До лінійних параметричних кіл можна застосовувати принцип суперпозиції.

У загальному випадку зв'язок між дією s(t) на параметричний елемент та відгуком x(t) має вигляд

$$x(t) = p(t) \cdot s(t).$$
 (3.44)

Причому вигляд керуючої функції p(t), яка характеризує поведінку в часі параметричного елемента, може бути довільним.

Якщо зовнішня керуюча параметром елемента дія гармонічна, то

$$p(t) = p_0 + \Delta p_m \cos \omega_{\kappa} t$$
,

або

 $\mathbf{p}(\mathbf{t}) = \mathbf{p}_0(1 + \mathbf{m}_{\mathrm{p}} \cos \omega_{\mathrm{k}} \mathbf{t}),$ (3.45)

де p₀ – середнє значення параметра елемента; ω_к – частота керуючої гармонічної дії; Δp_m – найбільша величина (амплітуда) змінювання параметра р; $m_p = \Delta p_m / p_0 - \kappa oe \phi i цієнт варіації параметра елемента.$

У більшості випадків змінювання параметрів електричного кола повинно відбуватися з великою швидкістю, що потребує застосування елементів з малою інерційністю. Цього можна досягти тільки шляхом електричного керування величинами параметрів елементів кола.

Практично безінерційні параметричні елементи можна одержати, використовуючи раніше розглянуті пасивні нелінійні елементи. Для цього пасивний нелінійний елемент підключають одночасно до двох різних кіл – кола сигналу та кола керування. За рахунок дії відносно великої керуючої напруги u_к відбувається змінювання параметра нелінійного елемента, а по відношенню до невеликої за величиною напруги сигналу u_c коло поводить себе як лінійне. Як приклад розглянемо отримання параметричного двополюсника на основі нелінійного активного опору.

Нехай нелінійний опір R(u) (рис. 3.18) знаходиться під дією суми двох гармонічних напруг: корисного сигналу $u_c = U_{mc} \cos \omega_c t$ та сигналу керування $u_{\kappa} = U_{m\kappa} cos \omega_{\kappa} t$. При цьому обов'язково повинна виконуватись умова $U_{mc} <<$ U_{тк}. Оскільки в цьому колі опір має нелінійну вольт-амперну характеристику

i = F(u), то корисну напругу u_c можна розглядати як мале відхилення від набагато більшої керуючої напруги ик. Тоді залежність струму і(t) в колі від сумарної напруги $u = u_c + u_\kappa$ можна розкласти в ряд Тейлора відносно степенів малої напруги u_c-



 $i = F(u_{\kappa} + u_{c}) = i(u_{\kappa}) + \frac{di(u = u_{\kappa})}{du} \cdot u_{c} + \frac{1}{2!} \frac{d^{2}i(u = u_{\kappa})}{du^{2}} \cdot u_{c}^{2} + \frac{\text{Рис. 3.18. Використання}}{\text{нелінійного опору як}}$ параметричного елемента (3.46)

Враховуючи малу величину корисного сигналу и, у виразі (3.46) можна відкинути складові, які мають в своєму складі степені цього сигналу, що перевищують першу. В результаті отримаємо i

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}(\mathbf{u}_{\kappa}) + \mathbf{S}(\mathbf{u}_{\kappa}) \cdot \mathbf{u}_{c}, \qquad (3.47)$$

де $S(u_{\kappa}) = \frac{di(u = u_{\kappa})}{du}$ – диференціальна провідність або крутість вольт-

амперної характеристики нелінійного опору.

Як видно з виразу (3.47), друга складова струму i(t) в колі залежить як від керуючої напруги u_{κ} , так і від корисного сигналу u_{c} .

Тобто для сигнальної складової струму в колі маємо

$$\mathbf{u}_{c} = \mathbf{S}(\mathbf{u}_{\kappa}) \cdot \mathbf{u}_{c} = \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{u}_{c} .$$
(3.48)

З виразу (3.48) видно, що відносно слабкого корисного сигналу розглянуте коло є лінійним параметричним.

На рис. 3.19 показані умовні позначення нелінійних пасивних елемен-



тів, які виконують функції елементів зі змінними в часі параметрами. Кола, що мають в своєму складі такі елементи, є нелінійними параметричними; вони лише наближено при конкретно окреслених умовах можуть вважатися ліній-

ними. Процеси, що відбуваються в параметричних колах, описуються рівняннями зі змінними коефіцієнтами: в найпростіших випадках – алгебраїчними, а в більш складних – диференціальними.

3.2.2. Елементарні параметричні кола

Коло з параметричним активним опором

Нехай на коло у вигляді лінійного активного параметричного опору (рис. 3.20), діє корисна напруга

$$u_{c} = U_{mc} \cos(\omega_{c} t + \psi_{u}), \qquad (3.49)$$

а закон змінювання провідності опору має вигляд

$$g(t) = g_0(1 + m_g \cos(\omega_\kappa t + \psi_\kappa)),$$
 (3.50)

де g_0 – середнє значення провідності; $m_g = \Delta g_m / g_0$ – коефіцієнт варіації провідності; ω_{κ} , ψ_{κ} – частота та початкова фаза ке-

руючої напруги.

Струм в даному колі дорівнює

$$i = g(t) \cdot u_{c}(t) = g_{0}(1 + m_{g} \cos(\omega_{\kappa} t + \psi_{\kappa})) \times \times U_{mc} \cos(\omega_{c} t + \psi_{u}).$$
(3.51)



Після нескладних перетворень на основі (3.51) матимемо

Рис. 3.20. Коло з лінійним параметричним опором

$$i = g_0 U_{mc} \cos(\omega_c t + \psi_u) + \frac{g_0 m_g U_{mc}}{2} \cos[(\omega_\kappa - \omega_c)t + \psi_\kappa - \psi_u] + \frac{g_0 m_g U_{mc}}{2} \cos[(\omega_\kappa + \omega_c)t + \psi_\kappa + \psi_u].$$
(3.52)

З виразу (3.52) видно, що відгук кола на гармонічне збудження має в своєму складі коливання не тільки з частотою корисного сигналу ω_c , але й складові з комбінаційними частотами $\omega_{\kappa} \pm \omega_c$. Тобто, не дивлячись на те, що дане коло є лінійним, в ньому, як і в нелінійному, відбувається перетворення спектра сигналу.

Якщо діюча ззовні напруга u_c та провідність g(t) змінюються синхронно, тобто $\omega_c = \omega_{\kappa}$, то струм у колі запишеться

$$i = g_0 U_{mc} \cos(\omega_c t + \psi_u) + \frac{g_0 m_g}{2} U_{mc} \cos(\psi_\kappa - \psi_u) + \frac{g_0 m_g}{2} U_{mc} \cos(\psi_\kappa - \psi_u) + \frac{g_0 m_g}{2} U_{mc} \cos(2\omega_c t + \psi_\kappa + \psi_u).$$
(3.53)

У цьому випадку в складі струму з'являється коливання з подвоєною частотою $2\omega_c$ а також складова у вигляді постійного струму, що називається струмом детекторного ефекту I_д. Як видно з виразу (3.53), струм детекторного ефекту залежить від різниці початкових фаз зовнішнього гармонічного збудження та керуючої гармонічної величини і дорівнює

$$I_{a} = \frac{g_{0}m_{g}}{2} U_{mc} \cos(\psi_{\kappa} - \psi_{u}).$$
(3.54)

Таким чином, при несинхронному змінюванні зовнішньої напруги u_c та параметра елемента g(t) досліджуване коло може працювати як перетворювач частоти. Якщо ж змінювання величин u_c та g(t) синхронне, то таке коло може працювати як помножувач частоти, або як фазочутливий випрямляч (фазовий детектор). Щоб реалізувати ці режими практично, в коло потрібно ввести відповідні фільтруючі пристрої.

У загальному випадку, коли напруга u_c та провідність g(t) є складними періодичними функціями, відгук кола має вигляд

$$i = g_0 (1 + \sum_{n=1}^{\infty} m_{gn} \cos(n\omega_{\kappa} t + \psi_{\kappa n})) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k\omega_c t + \psi_{uk}), \qquad (3.55)$$

де U_{mk} – амплітуда k-ї гармонічної складової прикладеної напруги u_c , що має частоту $k\omega_c$ та початкову фазу ψ_{uk} ; m_{gn} – парціальний коефіцієнт варіації параметра, що відповідає складовій функції g(t), яка змінюється з частотою $n\omega_{\kappa}$ та має початкову фазу $\psi_{\kappa n}$.

Вираз (3.55) можна представити у вигляді, який буде аналогічним співвідношенням (3.52) або (3.53). Результуючий струм у колі в цьому випадку включає суму великої кількості коливань з комбінаційними частотами. Значення цих частот визначаються співвідношенням $n\omega_c \pm k\omega_n$, де n та k – цілі додатні числа, що змінюються від 1 до ∞ . При цьому деякі зі складових, для яких виконується умова $n\omega_n \pm k\omega_c = 0$, у відповідності з детекторним ефектом дають постійні складові випрямленого струму.

Коло з параметричним реактивним елементом

Розглянемо електричне коло, яке має в своєму складі ємнісний параметричний елемент C(t) та джерело гармонічного струму (рис. 3.21). Нехай струм джерела змінюється у відповідності з таким виразом:

$$i_c = I_{mc} \cos(\omega_c t + \psi_i)$$

а ємність кола характеризується залежністю

 $\mathbf{C}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}_0 (1 + \mathbf{m}_{\rm c} \sin \omega_{\rm \kappa} \mathbf{t}),$

де $m_c = \Delta C/C_0$ – коефіцієнт варіації ємності.

Тоді для закону змінювання заряду на ємності C(t) одержимо

$$q = \int i(t)dt = \frac{I_{mc}}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \psi_i) + q_0.$$
(3.57)

Якщо попередньо ємність заряду не мала, то постійна інтегрування q₀ дорівнює нулю. Знаючи величину заряду q ємності та закон змінювання останньої, можемо знайти величину на-

пруги
$$u_{C}(t)$$
 на ємності –
 $u_{C} = \frac{q}{C(t)} = \frac{I_{mc}}{\omega_{c}C_{0}} \cdot \frac{\sin(\omega_{c}t + \psi_{i})}{1 + m_{C}\sin\omega_{\kappa}t}.$
(3.58)

Будемо вважати, що коефіцієнт варіації ємності $m_C \ll 1$. Тоді можна скористатись відомим з математики співвідношенням $1/(1+x) \approx 1-x$, яке справедливе при $x \ll 1$. В результаті на основі (3.58) одержимо



Рис. 3.21. Схема кола з параметричною ємністю (а) та часова залежність ємності (б)

$$u_{\rm C} = \frac{I_{\rm mc}}{\omega_{\rm c}C_0} (1 - m_{\rm C}\sin\omega_{\rm \kappa}t)\sin(\omega_{\rm c}t + \psi_{\rm i}). \qquad (3.59)$$

Позначимо $1/\omega_c C_0 = x_0$ та скористаємося формулами елементарної тригонометрії. Тоді для напруги на параметричній ємності отримаємо

$$u_{\rm C} = I_{\rm mc} x_0 \sin(\omega_{\rm c} t + \psi_{\rm i}) - \frac{x_0 I_{\rm mc}}{2} \cos[(\omega_{\rm \kappa} - \omega_{\rm c})t - \psi_{\rm i}] + \frac{x_0 I_{\rm mc}}{2} \cos[(\omega_{\rm \kappa} + \omega_{\rm c})t + \psi_{\rm i}].$$
(3.60)

Отже, при живленні параметричного кола у вигляді ємності C(t) від генератора гармонічного струму напруга на ємності має характер, що властивий і для раніше розглянутого резистивного параметричного кола.

(3.56)

При синхронному змінюванні ємності C(t) та зовнішнього струму i(t), коли $\omega_{\kappa} = \omega_{c}$, як і в резистивному колі, спектр вихідної напруги має складову з подвоєною частотою сигналу та постійну складову. Причому остання дорівнює

$$U_{C0} = -\frac{x_0 I_{mc}}{2} \cos \psi_i.$$
 (3.61)

Таким чином, при живленні від джерела струму коло з параметричною ємністю може виконувати ті ж самі функціїї, що і резистивне параметричне коло, однак втрати енергії в ємнісному колі будуть набагато меншими.

Інший можливий варіант параметричного ємнісного кола – це випадок, коли живлення ємності C(t) здійснюється від джерела гармонічної напруги

$$\mathbf{u}_{c} = \mathbf{U}_{mc} \cos(\omega_{c} \mathbf{t} + \boldsymbol{\psi}_{u}). \tag{3.62}$$

У цьому випадку струм у колі дорівнює

$$\mathbf{i}_{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\mathbf{u}_{\mathrm{c}} \cdot \mathbf{C}(t) \right] = \mathbf{u}_{\mathrm{c}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{C}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathbf{C}(t) \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t},$$

а з урахуванням співвідношень (3.56) та (3.62) отримаємо

$$\mathbf{i}_{\mathrm{C}} = \mathbf{m}_{\mathrm{C}} \mathbf{U}_{\mathrm{mc}} \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{\kappa}} \mathbf{C}_{0} \cos(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{c}} \mathbf{t} + \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{u}}) \cdot \cos\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{\kappa}} \mathbf{t} -$$

$$-U_{\rm mc}\omega_{\rm c}C_0(1+m_{\rm C}\sin\omega_{\rm \kappa}t)\cdot\sin(\omega_{\rm c}t+\psi_{\rm u})$$

Після застосування формул тригонометричних перетворень маємо

$$i_{\rm C} = -\omega_{\rm c}C_{\rm 0}U_{\rm mc}\sin(\omega_{\rm c}t + \psi_{\rm u}) + \frac{m_{\rm C}U_{\rm mc}\omega_{\rm \kappa}C_{\rm 0}}{2} \left[\cos((\omega_{\rm c}-\omega_{\rm \kappa})t - \psi_{\rm u}) + \cos((\omega_{\rm c}+\omega_{\rm \kappa})t + \psi_{\rm u})\right] - (3.63)$$
$$-\frac{m_{\rm C}U_{\rm mc}\omega_{\rm c}C_{\rm 0}}{2} \left[\cos((\omega_{\rm \kappa}-\omega_{\rm c})t - \psi_{\rm u}) - \cos((\omega_{\rm \kappa}+\omega_{\rm c})t + \psi_{\rm u})\right].$$

Зведемо у виразі (3.63) подібні члени і, враховуючи, що косинус – функція парна, одержимо

$$i_{\rm C} = -\omega_{\rm c}C_{\rm 0}U_{\rm mc}\sin(\omega_{\rm c}t + \psi_{\rm u}) + \frac{m_{\rm C}U_{\rm mc}}{2}(\omega_{\rm \kappa} - \omega_{\rm c})\cdot C_{\rm 0}\cos((\omega_{\rm \kappa} - \omega_{\rm c})t - \psi_{\rm u}) + \frac{m_{\rm C}U_{\rm mc}}{2}(\omega_{\rm \kappa} + \omega_{\rm c})\cdot C_{\rm 0}\cos((\omega_{\rm \kappa} + \omega_{\rm c})t + \psi_{\rm u}).$$
(3.64)

З виразу (3.64) видно, що й при живленні параметричної ємності від джерела гармонічної ЕРС струм в колі буде негармонічним. Окрім складової з частотою зовнішнього збудження ω_c , в складі струму з'являються складові з різницевою ($\omega_{\kappa} - \omega_c$) та сумарною ($\omega_{\kappa} + \omega_c$) частотами. Однак при живленні від джерела ЕРС в складі струму принципово не може бути постійної складової. Це обумовлено тим, що при синхронному змінюванні зовнішньої напруги u_c та ємності C(t), коли $\omega_{\kappa} = \omega_c$, друга складова у виразі (3.64) буде дорівнювати нулю. Тобто у цьому випадку коло не може виконувати функцію фазочутливого випрямляча. Можна аналогічно розглянути елементарне коло з параметричною індуктивністю. Форма струму або напруги в цьому колі незалежно від типу джерела зовнішнього сигналу також буде спотвореною. Однак постійна складова вихідного сигналу в такому колі буде дорівнювати нулю при його живленні не від джерела ЕРС, як у попередньому випадку, а від джерела струму. Цей висновок неважко зробити, якщо врахувати, що ємність та індуктивність є дуальними елементами електричного кола.

Розділ 4

ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ З ПОСТІЙНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

4.1. Основні визначення, класифікація та рівняння прохідних чотириполюсників

4.1.1. Визначення та класифікація чотириполюсників

Частина електричного кола, що розглядається у відношенні до будь-яких двох пар його виводів, називається чотириполюсником (рис. 4.1). Цим понят-



Рис. 4.1. Умовне позначення чотириполюсника

тям широко користуються, якщо необхід-но визначити струми та напруги лише двох віток або двох пар виводів електричного кола.

У вигляді чотириполюсника можна представити довгу лінію, електричний фільтр, трансформатор, підсилювач та будь-який інший пристрій з двома парами виводів, що включений між джерелом та приймачем електромагнітної

енергії, якщо предметом дослідження є струми та напруги на цих виводах, а не струми та напруги всередині самого чотириполюсника. Виводи, до яких підключається джерело електромагнітної енергії, називають-ся вхідними, а виводи, до яких приєднується навантаження, – вихідними.

Чотириполюсники можуть бути класифіковані за різними ознаками.

За ознакою лінійності елементів, що входять до складу чотириполюсників, останні підрозділяються на лінійні та нелінійні. До лінійних відносять такі чотириполюсники, параметри яких не залежать від величини і напрямку протікаючих в них струмів та прикладених до їх затискачів напруг. Далі розглядаються лише лінійні чотириполюсники.

Відносно схем внутрішніх з'єднань елементів розрізняють чотири-



Рис. 4.2. Основні різновидності лінійних чотириполюсників: а – Г-подібні; б – Т-подібні; в – П-подібні; г – мостові; д – Т-подібно-мостові

полюсники різної конфігурації (рис. 4.2).

Чотириполюсники також діляться на активні і пасивні. Чотириполюсник називається активним, якщо в його схемі є джерела електромагнітної енергії. Такі чотириполюсники поділяються на автономні та неавтономні. В перших з них джерела енергії є незалежними, і на розімкнутих виводах чотириполюсника завжди мають місце одна або дві напруги, викликані джерелами, які входять до його складу. Очевидно, що в цьому випадку дія джерел енергії не компенсується всередині чотириполюсника.

У випадку неавтономного активного чотириполюсника його джерела енергії є залежними, як наприклад, в схемах заміщення електровакуумних та напівпровідникових приладів. Після відключення такого чотириполюсника від іншої частини складного кола напруги на його затискачах відсутні.

Чотириполюсник називається пасивним, якщо він не має в своєму складі джерел електромагнітної енергії або якщо його внутрішні джерела енергії включені таким чином, що напруги на обох парах розімкнутих виводів чотириполюсника дорівнюють нулю.

Два чотириполюсника називаються еквівалентними, якщо є можливість їх взаємної заміни в складному електричному колі без зміни струмів і напруг в іншій його частині.

Чотириполюсник є симетричним, якщо переміна місцями його вхідних та вихідних виводів не змінює струмів і напруг в колі, до складу якого він входить.

Чотириполюсник називається оборотним, якщо виконується теорема оборотності (принцип взаємності). Тобто відношення напруги на вході до струму на виході дорівнює відношенню напруги на виході до струму на вході. Це означає, що передатний опір вхідного та вихідного контурів чотириполюсника не залежить від того, яка з двох пар виводів є вхідною, а яка вихідною. В іншому випадку чотириполюсник називається необоротним. Звичайно пасивні лінійні чотириполюсники є оборотними, а несиметричні активні і автономні та неавтономні чотириполюсники – необоротними.

Складне електричне коло, що має вхідні та вихідні затискачі, можна розглядати як сукупність окремих чотириполюсників, що з'єднані за деякою схемою. Теорія чотириполюсників дозволяє оцінити параметри такого складного чотириполюсника за параметрами окремих складових чотириполюсників і таким чином отримати аналітичну залежність між струмами та напругами на вході і виході складного чотириполюсника, не здійснюючи розрахунків струмів та напруг всередині заданої схеми. Ця сама теорія дозволяє також розв'язувати задачу синтезу, тобто знаходити структуру та параметри елементів схеми чотириполюсника, якщо відомі його характеристики.

4.1.2. Рівняння чотириполюсників

Із загального зображення чотириполюсника (рис. 4.1) видно, що режим роботи чотириполюсника визначається струмами та напругами на його вході i_1, u_1 та виході i_2, u_2 . У зв'язку з цим в теорії чотириполюсників задача аналізу формулюється наступним чином. Дві з чотирьох електричних величин, що визначають режим роботи чотириполюсника, відомі, причому їх можна розглядати як задані збудження кола. Необхідно знайти дві інші електричні величин.

У відповідності з формулою сполучень по два елементи з чотирьох, можливі шість варіантів рівнянь зв'язку між заданими електричними величинами, що відображено в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Варіанти систем рівнянь	Y	А	Н	Z	В	G
Задані збудження	u_1, u_2	u ₂ ,i ₂	i ₁ ,u ₂	i ₁ ,i ₂	u ₁ ,i ₁	u ₁ ,i ₂
Шукані відгуки	i_{1}, i_{2}	u ₁ ,i ₁	u ₁ ,i ₂	u_1, u_2	u ₂ ,i ₂	i ₁ ,u ₂

В будь-якому з цих варіантів для визначення невідомих відгуків треба мати систему двох рівнянь, які називаються основними рівняннями чотириполюсника.

Система Ү-параметрів чотириполюсника

Нехай заданими є напруги на вході u_1 та виході u_2 чотириполюсника, а шуканими відгуками є струми i_1 та i_2 . Стосовно такої постановки задачі умовно-позитивні напрямки напруг та струмів вказані на рис. 4.3, де зображено

навантажений на комплексний опір \underline{Z}_{H} чотириполюс-ник, який живиться від джерела EPC e(t) з внутрішнім опором \underline{Z}_{i} . В цьому випадку струми i_{1} та i_{2} залежать від напруг u_{1}, u_{2} , тому струми є залежними а напруги –



Рис. 4.3. Прохідний лінійний чотириполюсник

незалежними змінними величинами і можна записати

$$i_1 = F_1(u_1, u_2),$$

 $i_2 = F_2(u_1, u_2).$
(4.1)

Якщо напруги отримують нескінченно малі прирощення du_1 та du_2 , то змінювання струмів описуються повними диференціалами:

$$di_{1} = \frac{\partial i_{1}}{\partial u_{1}} du_{1} + \frac{\partial i_{1}}{\partial u_{2}} du_{2};$$

$$di_{2} = \frac{\partial i_{2}}{\partial u_{1}} du_{1} + \frac{\partial i_{2}}{\partial u_{2}} du_{2}.$$
(4.2)

Частинні похідні, що входять в ці рівняння, мають розмірності провідностей і можуть бути позначені таким чином:

$$\frac{\partial i_1}{\partial u_1} = y_{11}; \quad \frac{\partial i_1}{\partial u_2} = y_{12}; \quad \frac{\partial i_2}{\partial u_1} = y_{21}; \quad \frac{\partial i_2}{\partial u_2} = y_{22}. \tag{4.3}$$

В результаті рівняння (4.2) можна записати у вигляді

$$di_{1} = y_{11}du_{1} + y_{12}du_{2},$$

$$di_{2} = y_{21}du_{1} + y_{22}du_{2}.$$
(4.4)

Одержані диференціальні співвідношення справедливі для будь-якої форми зовнішнього збудження і при будь-якому вигляді кола.

Покажемо, що у випадку гармонічного зовнішнього збудження співвідношення, аналогічні до виразів (4.4), будуть справедливими і для комплексних амплітуд, або діючих значень, напруг та струмів на вході і виході чотириполюсника.

Можна вважати, що комплексні діючі напруги \underline{U}_1 та \underline{U}_2 – це напруги двох джерел, що діють на вході і виході пасивного чотириполюсника. Тоді згідно з принципом суперпозиції маємо

$$\underline{I}_{1} = \underline{I}_{1}' + \underline{I}_{1}'', \ \underline{I}_{2} = \underline{I}_{2}' + \underline{I}_{2}'',$$
(4.5)

де \underline{I}_1' та \underline{I}_2' – струми на вході і виході чотириполюсника, що викликані дією джерела \underline{U}_1 (рис. 4.4, а);

 $\underline{I}_1^{''}$ та $\underline{I}_2^{''}$ – струми, що протікають в колі при наявності лише джерела на-



Рис. 4.4. До визначення Ү-параметрів чотириполюсника

107

пруги \underline{U}_2 (рис.4.4, б).

Вирази для частинних струмів чотириполюсника матимуть вигляд, який обумовлюється системою рівнянь (4.3):

$$\mathbf{I}_{1}' = \underline{\mathbf{Y}}_{11}\underline{\mathbf{U}}_{1}; \quad \mathbf{I}_{1}'' = \underline{\mathbf{Y}}_{12}\underline{\mathbf{U}}_{2}; \quad \mathbf{I}_{2}' = \underline{\mathbf{Y}}_{21}\underline{\mathbf{U}}_{1}; \quad \mathbf{I}_{2}'' = \underline{\mathbf{Y}}_{22}\underline{\mathbf{U}}_{2}.$$
(4.6)

Для комплексних коефіцієнтів у виразах (4.6) можна записати:

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \Big|_{\underline{U}_2 = 0}$$
 – вхідна провідність чотириполюсника при короткому за-

миканні на його виході;

 $\underline{Y}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \Big|_{\underline{U}_2=0}$ – пряма передатна провідність чотириполюсника при ко-

роткому замиканні на його виході;

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \Big|_{\underline{U}_1 = 0}$$
 – обернена передатна провідність при короткому зами-

канні на вході чотириполюсника;

 $\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} |_{\underline{U}_1 = 0}$ – вихідна провідність чотириполюсника при короткому

замиканні на його вході.

Якщо здійснити підстановку частинних струмів (4.6) в рівняння системи (4.5), то одержимо

$$\underline{I}_{1} = \underline{Y}_{11}\underline{U}_{1} + \underline{Y}_{12}\underline{U}_{2},$$

$$\underline{I}_{2} = \underline{Y}_{21}\underline{U}_{1} + \underline{Y}_{22}\underline{U}_{2}.$$
(4.7)

Одержані рівняння називаються рівняннями чотириполюсника в системі У-параметрів. Комплексні коефіцієнти \underline{Y}_{11} , \underline{Y}_{12} , \underline{Y}_{21} , \underline{Y}_{22} , які входять в рівняння системи (4.7), називаються первинними Y- параметрами чотириполюсника.

Система рівнянь (4.7) може бути записана і в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_1 \\ \underline{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_{11} & \underline{\mathbf{Y}}_{12} \\ \underline{\mathbf{Y}}_{21} & \underline{\mathbf{Y}}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_1 \\ \underline{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix} = \| \underline{\mathbf{Y}} \| \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_1 \\ \underline{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix}.$$
(4.8)

Для пасивних чотириполюсників, які є оборотними, виконується принцип взаємності, в результаті чого пряма передатна провідність кола буде дорівнювати оберненій передатній провідності –

$$\underline{\mathbf{Y}}_{21} = \underline{\mathbf{Y}}_{12}.\tag{4.9}$$

Якщо ж чотириполюсник ще й симетричний, то однаковими будуть також вхідна та вихідна провідності –

$$\underline{\mathbf{Y}}_{11} = \underline{\mathbf{Y}}_{22}.\tag{4.10}$$

108
Таким чином, необоротні чотириполюсники повністю характеризуються чотирма первинними параметрами, оборотні – трьома, а симетричні – лише двома.

Якщо на чотириполюсник діють джерела постійних струмів та напруг, то замість комплексних Y-параметрів маємо Y-параметри з такими ж індексами, які є дійсними числами.

Комплексні Y-параметри переважно використовуються при аналізі пасивних та активних кіл в області високих частот, оскільки в цьому діапазоні можна якісно реалізувати досліди короткого замикання на вході та виході чотириполюсника при експериментальному визначенні первинних параметрів.

Система А-параметрів чотириполюсника

Якщо чотириполюсник виконує роль проміжної ланки між джерелом енергії та опором навантаження, то найчастіше відомими є параметри навантаження — напруга \underline{U}_2 та струм \underline{I}_2 . В такому разі шуканими є величини, що характеризують режим на вході чотириполюсника — напруга \underline{U}_1 та струм \underline{I}_1 .

Оскільки в цьому випадку здійснюється передача енергії від вхідних затискачів чотириполюсника до вихідних, то доцільно умовно-позитивні напрямки напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_2 вибрати такими, які б збігалися (рис. 4.5). \underline{I}_2

Як наслідок, в рівняннях системи (4.7), яка описує роботу чотириполюсника при дії на нього гармонічного збудження, знак перед струмом <u>I</u>₂ треба змінити на протилежний:

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \underline{\mathbf{Y}}_{11} \underline{\mathbf{U}}_1 + \underline{\mathbf{Y}}_{12} \underline{\mathbf{U}}_2;$$

$$-\underline{\mathbf{I}}_2 = \underline{\mathbf{Y}}_{21} \underline{\mathbf{U}}_1 + \underline{\mathbf{Y}}_{22} \underline{\mathbf{U}}_2.$$



Рис. 4.5. Умовно-позитивні напрямки струмів та напруг при визначенні А-параметрів чотириполюсника

(4.11)

Після цього розв'яжемо одержану систему рівнянь (4.11) відносно вхідних електричних величин чотириполюсника \underline{U}_1 та \underline{I}_1 . З другого рівняння системи (4.11) маємо

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = -\frac{\underline{\mathbf{Y}}_{22}}{\underline{\mathbf{Y}}_{21}} \underline{\mathbf{U}}_{2} - \frac{1}{\underline{\mathbf{Y}}_{21}} \underline{\mathbf{I}}_{2}.$$
(4.12)

Якщо підставимо (4.12) в перше рівняння системи (4.11), то одержимо

$$\underline{\mathbf{I}}_{1} = \underline{\mathbf{Y}}_{11} \left(-\frac{\underline{\mathbf{Y}}_{22}}{\underline{\mathbf{Y}}_{21}} \underline{\mathbf{U}}_{2} - \frac{1}{\underline{\mathbf{Y}}_{21}} \underline{\mathbf{I}}_{2} \right) + \underline{\mathbf{Y}}_{12} \underline{\mathbf{U}}_{2},$$

або

$$\underline{\mathbf{I}}_{1} = -\frac{|\mathbf{Y}|}{\underline{\mathbf{Y}}_{21}} \underline{\mathbf{U}}_{2} - \frac{\underline{\mathbf{Y}}_{11}}{\underline{\mathbf{Y}}_{21}} \underline{\mathbf{I}}_{2}, \qquad (4.13)$$

де $|Y| = \underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}$ – визначник, складений з Y-параметрів чотириполюсника у відповідності з системою рівнянь (4.7).

Якщо в рівняннях (4.12) та (4.13) покласти

$$\underline{A}_{11} = -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}, \quad \underline{A}_{12} = -\frac{1}{\underline{Y}_{21}}, \quad \underline{A}_{21} = -\frac{|\underline{Y}|}{\underline{Y}_{21}}, \quad \underline{A}_{22} = -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}, \quad (4.14)$$

то одержимо систему рівнянь чотириполюсника в А-параметрах:

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = \underline{\mathbf{A}}_{11}\underline{\mathbf{U}}_{2} + \underline{\mathbf{A}}_{12}\underline{\mathbf{I}}_{2};$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{1} = \underline{\mathbf{A}}_{21}\underline{\mathbf{U}}_{2} + \underline{\mathbf{A}}_{22}\underline{\mathbf{I}}_{2}.$$
(4.15)

У загальному випадку і А-параметри, і раніше розглянуті Ү-параметри є комплексними величинами і залежать від частоти. А-параметри можна визначити таким чином:

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \Big|_{\underline{I}_2 = 0}$$
 – величина, обернена до передатної КЧХ відносно напруги

при холостому ході на виході чотириполюсника;

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \Big|_{\underline{U}_2 = 0}$$
 – величина, обернена до передатної КЧХ відносно струму

при короткому замиканні на виході чотириполюсника;

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\Big|_{\underline{U}_2=0}$$
 – величина, обернена до передатної провідності при коро-

ткому замиканні на виході чотириполюсника;

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \Big|_{\underline{I}_2 = 0}$$
 – величина, обернена до передатного опору при холосто-

му ході на виході чотириполюсника.

Визначник, що складений з А-параметрів чотириполюсника, з урахуванням (4.14) дорівнює

$$|\mathbf{A}| = \underline{\mathbf{A}}_{11}\underline{\mathbf{A}}_{22} - \underline{\mathbf{A}}_{12}\underline{\mathbf{A}}_{21} = \frac{\underline{\mathbf{Y}}_{12}}{\underline{\mathbf{Y}}_{21}}.$$
(4.16)

У випадку оборотного чотириполюсника $\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12}$ і тому |A| = 1. Якщо ж чотириполюсник симетричний, то на основі (4.10) з урахуванням (4.14) одержимо

$$\underline{\mathbf{A}}_{11} = \underline{\mathbf{A}}_{22}.\tag{4.17}$$

Очевидно, що у випадку оборотного симетричного чотириполюсника число незалежних первинних параметрів дорівнює двом, а інші два можуть бути знайдені за допомогою рівнянь зв'язку:

$$\underline{\mathbf{A}}_{11}\underline{\mathbf{A}}_{22} - \underline{\mathbf{A}}_{12}\underline{\mathbf{A}}_{21} = \mathbf{1}; \quad \underline{\mathbf{A}}_{11} = \underline{\mathbf{A}}_{22}. \tag{4.18}$$

Систему рівнянь чотириполюсника в А-параметрах можна записати і в матричній формі

$$\left\| \frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{I}_1} \right\| = \left\| \mathbf{A} \right\| \cdot \left\| \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{I}_2} \right\|, \quad \left\| \mathbf{A} \right\| = \left\| \frac{\mathbf{A}_{11}}{\mathbf{A}_{21}} \cdot \frac{\mathbf{A}_{12}}{\mathbf{A}_{22}} \right\|.$$
(4.19)

Ця система рівнянь використовується в енергетиці при аналізі передавання великих обсягів електромагнітної енергії від джерела до споживача.

Система Н-параметрів чотириполюсника

При аналізі активних чотириполюсників в області низьких та середніх частот використовують переважно систему рівнянь з так званими гібридними параметрами. В цьому випадку незалежними змінними величинами є вхідний струм і₁ та вихідна напруга u₂, а залежними – вхідна напруга u₁ та вихідний струм і₂. Умовно-позитивні напрямки напруг та струмів вибирають такими, як і при використанні системи Y-параметрів.

При дії на коло гармонічних струмів і напруг систему рівнянь чотириполюсника в Н-параметрах, як і рівняння в А-параметрах, можна отримати на основі системи рівнянь (4.7).

З першого рівняння цієї системи отримаємо

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = \frac{1}{\underline{\mathbf{Y}}_{11}} \underline{\mathbf{I}}_{1} - \frac{\underline{\mathbf{Y}}_{12}}{\underline{\mathbf{Y}}_{11}} \underline{\mathbf{U}}_{2}. \tag{4.20}$$

Якщо підставити (4.20) у друге рівняння системи (4.7), то одержимо

$$\underline{\mathbf{I}}_{2} = \frac{\underline{\mathbf{Y}}_{21}}{\underline{\mathbf{Y}}_{11}} \underline{\mathbf{I}}_{1} + \left(\underline{\mathbf{Y}}_{22} - \frac{\underline{\mathbf{Y}}_{21}\underline{\mathbf{Y}}_{12}}{\underline{\mathbf{Y}}_{11}}\right) \underline{\mathbf{U}}_{2}.$$
(4.21)

Після введення позначень

$$\underline{\mathbf{H}}_{11} = \frac{1}{\underline{\mathbf{Y}}_{11}}, \quad \underline{\mathbf{H}}_{12} = -\frac{\underline{\mathbf{Y}}_{12}}{\underline{\mathbf{Y}}_{11}}, \quad \underline{\mathbf{H}}_{21} = \frac{\underline{\mathbf{Y}}_{21}}{\underline{\mathbf{Y}}_{11}}, \quad \underline{\mathbf{H}}_{22} = \frac{|\mathbf{Y}|}{\underline{\mathbf{Y}}_{11}}$$
(4.22)

111

отримаємо систему рівнянь чотириполюсника в Н-параметрах –

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = \underline{\mathbf{H}}_{11}\underline{\mathbf{I}}_{1} + \underline{\mathbf{H}}_{12}\underline{\mathbf{U}}_{2},$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{2} = \underline{\mathbf{H}}_{21}\underline{\mathbf{I}}_{1} + \underline{\mathbf{H}}_{22}\underline{\mathbf{U}}_{2},$$
(4.23)

або в матричній формі –

$$\left\| \frac{\underline{\mathbf{U}}_1}{\underline{\mathbf{I}}_2} \right\| = \left\| \mathbf{H} \right\| \cdot \left\| \frac{\underline{\mathbf{I}}_1}{\underline{\mathbf{U}}_2} \right\|, \quad \left\| \mathbf{H} \right\| = \left\| \frac{\underline{\mathbf{H}}_{11}}{\underline{\mathbf{H}}_{21}} \quad \underline{\mathbf{H}}_{12} \right\|.$$
(4.24)

У відповідності з системою рівнянь (4.23) гібридні Н-параметри визначаються таким чином:

$$\underline{\mathbf{H}}_{11} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_1}{\underline{\mathbf{I}}_1} \Big|_{\underline{\mathbf{U}}_2 = 0} - \mathbf{B} \mathbf{x} \mathbf{i} \mathbf{g}$$
ний комплексний опір чотириполюсника при корот-

кому замиканні на його виході;

$$\underline{\mathbf{H}}_{12} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_1}{\underline{\mathbf{U}}_2}\Big|_{\underline{\mathbf{I}}_1=0}$$
 – величина, обернена до передатної КЧХ відносно напру-

ги при холостому ході на вході чотириполюсника;

$$\underline{H}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \Big|_{\underline{U}_2 = 0}$$
 – передатна КЧХ відносно струму при короткому зами-

канні на виході чотириполюсника;

<u>H</u>₂₂ = $\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \Big|_{\underline{I}_1=0}$ – вихідна комплексна провідність чотириполюсника при

холостому ході на вході.

Інші системи первинних параметрів чотириполюсника

Системи первинних Y-, А- та Н-параметрів чотириполюсника найбільш широко застосувуються при дослідженні лінійних кіл. Розглянемо три інші системи параметрів, які використовуються значно рідше.

Якщо в чотириполюснику заданими є струми \underline{I}_1 та \underline{I}_2 , а невідомими – напруги \underline{U}_1 та \underline{U}_2 , то рівняння зв'язку напруг і струмів матимуть вигляд

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = \underline{\mathbf{Z}}_{11}\underline{\mathbf{I}}_{1} + \underline{\mathbf{Z}}_{12}\underline{\mathbf{I}}_{2},$$

$$\underline{\mathbf{U}}_{2} = \underline{\mathbf{Z}}_{21}\underline{\mathbf{I}}_{1} + \underline{\mathbf{Z}}_{22}\underline{\mathbf{I}}_{2}.$$
(4.25)

У виразах системи (4.25) комплексні коефіцієнти при струмах мають розмірності опорів і являють собою так звані Z-параметри чотириполюсника. Два з цих параметрів \underline{Z}_{11} і \underline{Z}_{21} можна знайти за допомогою досліду холостого ходу на виході чотириполюсника ($\underline{I}_2 = 0$), а параметри \underline{Z}_{12} і \underline{Z}_{22} – за допомогою досліду холостого ходу на вході ($\underline{I}_1 = 0$). В тому випадку, коли заданими є комплексні діючі значення вхідної напруги \underline{U}_1 та вхідного струму \underline{I}_1 , а визначити треба вихідні значення напруги \underline{U}_2 і струму \underline{I}_2 , зв'язок між ними задають за допомогою системи рівнянь у В-параметрах:

$$\underline{\mathbf{U}}_{2} = \underline{\mathbf{B}}_{11}\underline{\mathbf{U}}_{1} + \underline{\mathbf{B}}_{12}\underline{\mathbf{I}}_{1};$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{2} = \underline{\mathbf{B}}_{21}\underline{\mathbf{U}}_{1} + \underline{\mathbf{B}}_{22}\underline{\mathbf{I}}_{1}.$$
(4.26)

Значення параметрів <u>B</u>₁₁ та <u>B</u>₂₁ визначаються за допомогою досліду холостого ходу на вході чотириполюсника (<u>I</u>₁ = 0), а параметри <u>B</u>₁₂ та <u>B</u>₂₂ – із досліду короткого замикання на його вході (<u>U</u>₁ = 0).

I нарешті, у випадку, коли заданими величинами є вхідна напруга \underline{U}_1 та вихідний струм \underline{I}_2 , а шуканими – вхідний струм \underline{I}_1 та вихідна напруга \underline{U}_2 , маємо систему рівнянь чотириполюсника в G-параметрах:

$$\underline{\mathbf{I}}_{1} = \underline{\mathbf{G}}_{11}\underline{\mathbf{U}}_{1} + \underline{\mathbf{G}}_{12}\underline{\mathbf{I}}_{2};$$

$$\underline{\mathbf{U}}_{2} = \underline{\mathbf{G}}_{21}\underline{\mathbf{U}}_{1} + \underline{\mathbf{G}}_{22}\underline{\mathbf{I}}_{2}.$$
(4.27)

В системі рівнянь (4.27) G-параметри можна знайти за допомогою дослідів холостого ходу на виході чотириполюсника ($I_2 = 0$) та короткого замикання на вході ($U_1 = 0$).

При використанні систем Z- та G-параметрів умовно-позитивні напрямки напруг і струмів вибирають такими, як і у випадках описання чотириполюсників за допомогою рівнянь з Y- та H-параметрами. Якщо ж використовується система рівнянь з B-параметрами, то напрямки напруг і струмів вибирають протилежними по відношенню до тих, що мали місце при отриманні системи рівнянь чотириполюсника з A-параметрами.

Очевидно, що, як і у випадку Y-, A- та H-параметрів, параметри трьох останніх систем можна також знайти шляхом переведення параметрів з однієї системи в іншу. Формули перерахування для всіх шести систем первинних параметрів чотириполюсника наведені в додатку. Окрім того їх можна знайти в довідковій літературі та в підручниках з теорії кіл.

4.1.3. Способи визначення первинних параметрів чотириполюсника

Кожен з шести типів рівнянь чотириполюсника включає чотири коефіцієнти, які називаються первинними параметрами чотириполюсника.

Для оборотного чотириполюсника незалежними є лише три коефіцієнти, а значення четвертого можна визначити, скориставшись одним з рівнянь зв'язку між первинними параметрами оборотного чотириполюсника:

$$\underline{\mathbf{Y}}_{12} = \underline{\mathbf{Y}}_{21}; \ |\mathbf{A}| = 1; \ \underline{\mathbf{H}}_{12} = -\underline{\mathbf{H}}_{21};$$

$$\underline{\mathbf{Z}}_{12} = \underline{\mathbf{Z}}_{21}; \ |\mathbf{B}| = 1; \ \underline{\mathbf{G}}_{12} = -\underline{\mathbf{G}}_{21}.$$
(4.28)

Для симетричних оборотних чотириполюсників є справедливими співвідношення (4.28) і має місце додатковий зв'язок між первинними параметрами:

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}; \ \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}; \ |\mathbf{H}| = 1;$$

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}; \ \underline{B}_{11} = \underline{B}_{22}; \ |\mathbf{G}| = 1.$$
 (4.29)

Тому незалежними є лише два первинні параметри з чотирьох, а два інші можна знайти за допомогою співвідношень (4.28) та (4.29).

Окрім того, визначення первинних параметрів однієї системи за допомогою відомих первинних параметрів іншої значно спрощується, якщо врахувати, що визначники складені з Y- та Z-параметрів, з H- та G-параметрів а також з A- та B-параметрів, є взаємно оберненими:

$$|\mathbf{Y}| = \frac{1}{|\mathbf{Z}|} = |\mathbf{Z}|^{-1}; \quad |\mathbf{H}| = \frac{1}{|\mathbf{G}|} = |\mathbf{G}|^{-1}; \quad |\mathbf{A}| = \frac{1}{|\mathbf{B}|} = |\mathbf{B}|^{-1}.$$

Оскільки пасивні чотириполюсники є оборотними, то у випадку їх несиметричності вони характеризуються трьома параметрами. Якщо ж вони ще й симетричні, то для їх описання достатньо двох первинних параметрів.

Первинні параметри чотириполюсника можна знайти за допомогою одного з наступних методів:

 – розрахунковим методом, що полягає в складанні рівнянь електричної рівноваги кола та наступному знаходженні на їх основі первинних параметрів;

 – розрахунковим або експериментальним методом за допомогою дослідів холостого ходу та короткого замикання;

шляхом представлення складного чотириполюсника у вигляді
 з'єднання більш простих, параметри яких є відомими.

Розрахункові методи визначення первинних параметрів чотириполюсника

Для знаходження коефіцієнтів будь-якої з систем рівнянь чотириполюсника розрахунковим методом необхідно знати електричну схему цього чотириполюсника. Застосовуючи один з відомих методів аналізу електричних кіл, записують співвід-





ношення, які зв'язують струми та напруги на вході і виході чотириполюсника, а потім співставляють ці співвідношення з відповідними типами рівнянь чотириполюсника.

Для прикладу знайдемо цим методом А-пара-метри Г-подібного чотириполюсника (рис.4.6).

При цьому необхідно скласти систему рівнянь, в яких напруга U_1 та струм I_1 були б виражені через напругу U_2 та струм I_2 . Скористаємося для цього методом рівнянь Кірхгофа і складемо одне з рівнянь за другим, а інше за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = \underline{\mathbf{U}}_{2} + \underline{\mathbf{Z}}_{2} \underline{\mathbf{I}}_{2},$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{1} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{1}}{\underline{\mathbf{Z}}_{1}} + \underline{\mathbf{I}}_{2}.$$
(4.30)

Підставимо перше рівняння системи (4.30) в друге –

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \frac{\underline{\mathbf{U}}_2 + \underline{\mathbf{Z}}_2 \underline{\mathbf{I}}_2}{\underline{\mathbf{Z}}_1} + \underline{\mathbf{I}}_2 = \frac{\underline{\mathbf{U}}_2}{\underline{\mathbf{Z}}_1} + (1 + \underline{\mathbf{Z}}_2/\underline{\mathbf{Z}}_1)\underline{\mathbf{I}}_2.$$

Отже, шукана система рівнянь матиме вигляд

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = \underline{\mathbf{U}}_{2} + \underline{\mathbf{Z}}_{2} \underline{\mathbf{I}}_{2},$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{1} = \frac{1}{\underline{Z}_{1}} \underline{\mathbf{U}}_{2} + (\mathbf{1} + \underline{Z}_{2}/\underline{Z}_{1}) \underline{\mathbf{I}}_{2}.$$
(4.31)

Якщо рівняння системи (4.31) порівняти з рівняннями системи (4.15), то для первинних А-параметрів чотириполюсника, схема якого зображена на рис. 4.6, одержимо

$$\underline{\mathbf{A}}_{11} = \mathbf{1}, \quad \underline{\mathbf{A}}_{12} = \underline{\mathbf{Z}}_2, \quad \underline{\mathbf{A}}_{21} = \frac{1}{\underline{\mathbf{Z}}_1}, \quad \underline{\mathbf{A}}_{22} = \left(\mathbf{1} + \underline{\mathbf{Z}}_2/\underline{\mathbf{Z}}_1\right). \tag{4.32}$$

Якщо розв'язати систему рівнянь (4.31) відносно іншої пари електричних величин, то можна легко отримати первинні параметри будь-якої іншої системи.

Часто при використанні розрахункового методу визначення первинних параметрів чотириполюсника буває доцільно розглядати режими холостого ходу та короткого замикання. При цьому, маючи еквівалентну схему досліджуваного чотириполюсника, за допомогою методів аналізу схем знаходять значення електричних величин, що визначають первинні параметри заданої системи в цих режимах.

Знайдемо таким способом Y-параметри T-подібного чотириполюсника, який зображений на рис. 4.7.

Якщо даний чотириполюсник оборотний та симетричний, то $\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12}$, а $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$. Це означає, що система рівнянь чотириполюсника в Y-параметрах матиме вигляд

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2,$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{12}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{11}\underline{U}_2.$$
(4.33)

У випадку, коли реалізовано режим короткого замикання на виході чотириполюсника, одержимо

$$\underline{\mathbf{I}}_{1\kappa} = \underline{\mathbf{Y}}_{11}\underline{\mathbf{U}}_1, \quad \underline{\mathbf{I}}_{2\kappa} = \underline{\mathbf{Y}}_{12}\underline{\mathbf{U}}_1. \tag{4.34}$$

Для цього ж режиму знайдемо ті самі струми $I_{1\kappa}$ і $I_{2\kappa}$ за допомогою методу еквівалентних перетворень та закону Ома в комплексній формі:



Рис. 4.7. Т-подібний чотириполюсник

$$I_{1\kappa} = \frac{\underline{U}_{1}}{\underline{Z}_{1} + \frac{\underline{Z}_{2}\underline{Z}_{3}}{\underline{Z}_{2} + \underline{Z}_{3}}} = \underline{U}_{1}\frac{\underline{Z}_{2} + \underline{Z}_{3}}{\underline{Z}_{1}\underline{Z}_{2} + \underline{Z}_{1}\underline{Z}_{3} + \underline{Z}_{2}\underline{Z}_{3}};$$

$$I_{2\kappa} = \frac{\underline{U}_{1}}{\underline{Z}_{1} + \frac{\underline{Z}_{2}\underline{Z}_{3}}{\underline{Z}_{2} + \underline{Z}_{3}}} \cdot \frac{\underline{Z}_{2}\underline{Z}_{3}}{(\underline{Z}_{2} + \underline{Z}_{3})} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{3}} = \underline{U}_{1}\frac{\underline{Z}_{2}}{\underline{Z}_{1}\underline{Z}_{2} + \underline{Z}_{1}\underline{Z}_{3} + \underline{Z}_{2}\underline{Z}_{3}}.$$

$$(4.35)$$

Порівнюючи системи рівнянь (4.34) та (4.35), для шуканих Ү-параметрів, отримаємо

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3},$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}.$$
(4.36)

Оскільки даний чотириполюсник симетричний, то в його схемі $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3$, а це означає, що у випадку відомих Y-параметрів чотириполюсника можна, користуючись системою рівнянь (4.36), знайти параметри елементів схеми.

I нарешті, визначимо, користуючись дослідами холостого ходу та короткого замикання, первинні А-параметри несиметричних Т-подібного (рис. 4.7) та П-подібного (рис. 4.8) чотириполюсників.

Для Т-подібного чотириполюсника згідно з системою рівнянь (4.15) в режимі холостого ходу на виході отримаємо

$$\underline{\mathbf{A}}_{11} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_1}{\underline{\mathbf{U}}_2}\Big|_{\underline{\mathbf{I}}_2 = 0} = \frac{\underline{\mathbf{Z}}_1 + \underline{\mathbf{Z}}_2}{\underline{\mathbf{Z}}_2} = 1 + \frac{\underline{\mathbf{Z}}_1}{\underline{\mathbf{Z}}_2}, \quad \underline{\mathbf{A}}_{21} = \frac{\underline{\mathbf{I}}_1}{\underline{\mathbf{U}}_2}\Big|_{\underline{\mathbf{I}}_2 = 0} = \frac{\underline{\mathbf{I}}_1}{\underline{\mathbf{I}}_1\underline{\mathbf{Z}}_2} = \frac{1}{\underline{\mathbf{Z}}_2}.$$
(4.37)

116

В той самий час для цього ж чотириполюсника в режимі короткого замикання на його виході згідно з правилом подільника струму матимемо

$$\underline{\mathbf{A}}_{12} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_1}{\underline{\mathbf{I}}_2}\Big|_{\underline{\mathbf{U}}_2=0} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_1}{\underline{\mathbf{I}}_1} \cdot \frac{\underline{\mathbf{Z}}_2 + \underline{\mathbf{Z}}_3}{\underline{\mathbf{Z}}_2} = \underline{\mathbf{Z}}_{BX} \cdot \frac{\underline{\mathbf{Z}}_2 + \underline{\mathbf{Z}}_3}{\underline{\mathbf{Z}}_2} = \left(\underline{\mathbf{Z}}_1 + \frac{\underline{\mathbf{Z}}_2 \underline{\mathbf{Z}}_3}{\underline{\mathbf{Z}}_2 + \underline{\mathbf{Z}}_3}\right) \cdot \frac{\underline{\mathbf{Z}}_2 + \underline{\mathbf{Z}}_3}{\underline{\mathbf{Z}}_2},$$

або після нескладних перетворень –

$$\underline{\mathbf{A}}_{12} = \underline{\mathbf{Z}}_1 + \underline{\mathbf{Z}}_3 + \underline{\mathbf{Z}}_1 \underline{\mathbf{Z}}_3 / \underline{\mathbf{Z}}_2. \tag{4.38}$$

I нарешті, для четвертого з А-параметрів Т-подібного чотириполюсника можна записати

$$\underline{\mathbf{A}}_{22} = \frac{\underline{\mathbf{I}}_1}{\underline{\mathbf{I}}_2}\Big|_{\underline{\mathbf{U}}_2=0} = \frac{\underline{\mathbf{Z}}_2 + \underline{\mathbf{Z}}_3}{\underline{\mathbf{Z}}_2} = 1 + \underline{\mathbf{Z}}_3/\underline{\mathbf{Z}}_2.$$
(4.39)

Діючи аналогічно, для П-подібного чотириполюсника (рис. 4.8) в режимі холостого ходу на виході отримаємо



Рис. 4.8. П-подібний чотириполюсник

Одночасно для цієї ж схеми в режимі ко-

роткого замикання на виході матимемо

$$\underline{\mathbf{A}}_{12} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_1}{\underline{\mathbf{I}}_2} \bigg|_{\underline{\mathbf{U}}_2 = 0} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_1}{\underline{\mathbf{U}}_1/\underline{\mathbf{Z}}_2} = \underline{\mathbf{Z}}_2, \quad \underline{\mathbf{A}}_{22} = \frac{\underline{\mathbf{I}}_1}{\underline{\mathbf{I}}_2} \bigg|_{\underline{\mathbf{U}}_2 = 0} = \frac{\underline{\mathbf{Z}}_1 + \underline{\mathbf{Z}}_2}{\underline{\mathbf{Z}}_1} = 1 + \frac{\underline{\mathbf{Z}}_2}{\underline{\mathbf{Z}}_1}. \quad (4.42)$$

Слід зазначити, що отримані співвідношення для первинних А-параметрів несиметричних Т- та П-подібних чотириполюсників є універсальними, оскільки дозволяють легко отримати аналогічні первинні параметри для відповідних симетричних чотириполюсників, а також для несиметричних Г-подібних чотириполюсників.

Експериментальне визначення первинних параметрів чотириполюсника

Як видно з виразів для первинних параметрів будь-якої з систем, ці параметри можна знайти шляхом вимірювання струмів та напруг на вході і виході чотириполюсника в режимах холостого ходу та короткого замикання. Якщо чотириполюсник має в своєму складі лише активні опори, то для визначення первинних параметрів достатньо виміряти лише діючі або амплітудні значення струмів і напруг. У колах гармонічного струму з реактивними елементами необхідно додатково знайти і зсуви фаз між відповідними електричними величинами. Однак у випадку електричних кіл великої довжини, наприклад, ліній передачі електромагнітної енергії та зв'язку, здійснити вимірювання деяких фазових зсувів, що потребують підключення фазовимірювального приладу одночасно і до вхідних, і до вихідних затискачів, взагалі неможливо.

В результаті при дослідженні пасивних чотириполюсників дуже часто первинні параметри розраховують через заздалегідь визначені опори холостого ходу та короткого замикання. Вимірювальні прилади при визначенні цих опорів треба підключати лише з боку вхідних або вихідних затискачів чотириполюсника. Для більшості чотириполюсників вимірювання цих опорів виконується набагато простіше та точніше, ніж безпосереднє вимірювання первинних параметрів. При реалізації цього методу визначають:

 \underline{Z}_{1x} – опір чотириполюєника з боку вхідних затискачів при холостому ході на виході;

 $\underline{Z}_{1\kappa}$ – опір чотириполюсника з боку вхідних затискачів при замкнених вихідних;

 \underline{Z}_{2x} – опір чотириполюсника з боку вихідних затискачів при розімкнених вхідних;

 $\underline{Z}_{2\kappa}$ – опір чотириполюєника з боку вихідних затискачів при замкнених вихідних.

Цих чотирьох параметрів достатньо для визначення первинних параметрів будь-якого оборотного чотириполюсника і запису рівнянь будь-якої з шести систем. Для визначення первинних параметрів необоротного чотириполюсника опорів холостого ходу та короткого замикання буде недостатньо, оскільки тільки три з цих чотирьох параметрів є незалежними. Дійсно, як видно з систем рівнянь (4.7) та (4.25), опори холостого ходу та короткого замикання дорівнюють

$$\underline{Z}_{1\kappa} = 1/\underline{Y}_{11}, \quad \underline{Z}_{2\kappa} = 1/\underline{Y}_{22}, \quad \underline{Z}_{1\kappa} = \underline{Z}_{11}, \quad \underline{Z}_{2\kappa} = \underline{Z}_{22}.$$
(4.43)

На основі виразів (4.43) та рівнянь зв'язку між Z- та Y-параметрами, що приведені в додатку, тобто

$$\underline{\mathbf{Z}}_{11} = \underline{\mathbf{Y}}_{22}/|\mathbf{Y}|, \quad \underline{\mathbf{Z}}_{22} = \underline{\mathbf{Y}}_{11}/|\mathbf{Y}|,$$

можна одержати

$$\frac{\underline{Z}_{1\kappa}}{\underline{Z}_{1\kappa}} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}\underline{Z}_{11}} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}} \cdot \frac{|Y|}{\underline{Y}_{22}},$$
$$\frac{\underline{Z}_{2\kappa}}{\underline{Z}_{2\kappa}} = \frac{1}{\underline{Y}_{22}\underline{Z}_{22}} = \frac{1}{\underline{Y}_{22}} \cdot \frac{|Y|}{\underline{Y}_{11}}.$$

Отже, опори холостого ходу та короткого замикання зв'язані між собою співвідношенням

$$\frac{\underline{Z}_{1\kappa}}{\underline{Z}_{1\kappa}} = \frac{\underline{Z}_{2\kappa}}{\underline{Z}_{2\kappa}}.$$
(4.44)

Це означає, що незалежними є лише три з чотирьох розглянутих опорів.

Виразимо опори короткого замикання та холостого ходу через первинні параметри однієї з систем, наприклад, через А-параметри.

При живленні чотириполюсника з боку вхідних затискачів та при холостому ході на виході маємо напругу \underline{U}_{2x} на виході чотириполюсника, а на вході напругу \underline{U}_{1x} і струм \underline{I}_{1x} . При цьому вихідний струм $\underline{I}_2 = 0$. Тому з системи рівнянь (4.15) виходить, що

$$\underline{\mathbf{A}}_{11} = \underline{\mathbf{U}}_{1x} / \underline{\mathbf{U}}_{2x}, \quad \underline{\mathbf{A}}_{21} = \underline{\mathbf{I}}_{1x} / \underline{\mathbf{U}}_{2x}.$$

Тоді вхідний опір при холостому ході на виході дорівнює

$$\underline{Z}_{1x} = \underline{U}_{1x} / \underline{I}_{1x} = \underline{A}_{11} / \underline{A}_{21}.$$
(4.45)

При короткому замиканні на виході, коли напруга $\underline{U}_2 = 0$, маємо струми $\underline{I}_1 = \underline{I}_{1\kappa}, \ \underline{I}_2 = \underline{I}_{2\kappa}$ та напругу $\underline{U}_1 = \underline{U}_{1\kappa}$. Тоді з тієї ж самої системи рівнянь (4.15) одержимо

$$\underline{\mathbf{A}}_{12} = \underline{\mathbf{U}}_{1\kappa} / \underline{\mathbf{I}}_{2\kappa}, \quad \underline{\mathbf{A}}_{22} = \underline{\mathbf{I}}_{1\kappa} / \underline{\mathbf{I}}_{2\kappa}.$$

В результаті вхідний опір чотириполюсника при короткому замиканні на його виході дорівнює

$$\underline{Z}_{1\kappa} = \underline{U}_{1\kappa} / \underline{I}_{1\kappa} = \underline{A}_{12} / \underline{A}_{22}.$$
(4.46)

При короткому замиканні на вході, коли чотириполюсник живиться з боку виходу, напруга на вході $\underline{U}_1 = 0$, напруга на виході $\underline{U}_2 = \underline{U}_{2\kappa}$, а вихідний струм $\underline{I}_2 = -\underline{I}_{2\kappa}$. Тоді з першого рівняння системи (4.15) маємо

$$\underline{Z}_{2\kappa} = \underline{U}_{2\kappa} / \underline{I}_{2\kappa} = \underline{A}_{12} / \underline{A}_{11}.$$
(4.47)

I нарешті, при холостому ході на вході чотириполюсника, коли $I_1 = 0$, з другого рівняння системи (4.15) отримаємо

$$\underline{Z}_{2x} = \underline{U}_{2x} / \underline{I}_{2x} = \underline{A}_{22} / \underline{A}_{21}, \qquad (4.48)$$

або з урахуванням (4.45)

119

$$\underline{Z}_{2x} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}} \underline{Z}_{1x}.$$
(4.49)

Оскільки А-параметри оборотного чотириполюсника зв'язані співвідношенням

$$\underline{\mathbf{A}}_{11}\underline{\mathbf{A}}_{22} - \underline{\mathbf{A}}_{12}\underline{\mathbf{A}}_{21} = \mathbf{1}, \tag{4.50}$$

то їх можна виразити через будь-які три незалежні опори холостого ходу та короткого замикання. Для цього виразимо три з чотирьох А-параметрів через четвертий – <u>А</u>₁₁ та опори <u>Z</u>_{1x}, <u>Z</u>_{1k}, <u>Z</u>_{2k} –

$$\underline{\mathbf{A}}_{12} = \underline{\mathbf{Z}}_{2\kappa} \underline{\mathbf{A}}_{11}, \ \underline{\mathbf{A}}_{21} = \frac{1}{\underline{\mathbf{Z}}_{1\kappa}} \underline{\mathbf{A}}_{11}, \ \underline{\mathbf{A}}_{22} = \frac{\underline{\mathbf{A}}_{12}}{\underline{\mathbf{Z}}_{1\kappa}} = \frac{\underline{\mathbf{Z}}_{2\kappa}}{\underline{\mathbf{Z}}_{1\kappa}} \underline{\mathbf{A}}_{11}.$$
(4.51)

Після підстановки виразів (4.51) у співвідношення (4.50) одержимо

$$\underline{\mathbf{A}}_{11}^2 \frac{\underline{\mathbf{Z}}_{2\kappa}}{\underline{\mathbf{Z}}_{1\kappa}} - \underline{\mathbf{A}}_{11}^2 \frac{\underline{\mathbf{Z}}_{2\kappa}}{\underline{\mathbf{Z}}_{1\kappa}} = 1.$$

Звідки для четвертого з А-параметрів отримаємо

$$\underline{\mathbf{A}}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1\kappa}\underline{Z}_{1\kappa}}{\underline{Z}_{2\kappa}(\underline{Z}_{1\kappa} - \underline{Z}_{1\kappa})}}.$$
(4.52)

З виразів (4.51) та (4.52) видно, що первинні А-параметри чотириполюсника знаходять на основі двох параметрів короткого замикання ($\underline{Z}_{1\kappa}, \underline{Z}_{2\kappa}$) та одного параметра холостого ходу ($\underline{Z}_{1\kappa}$). Однак на практиці досліди короткого замикання не завжди можна реалізувати безпечно для досліджуваного кола. Тому доцільно використовувати для визначення первинних параметрів два параметри холостого ходу і лише один короткого замикання. У випадку, коли такими параметрами є трійка – $\underline{Z}_{1\kappa}, \underline{Z}_{2\kappa}, \underline{Z}_{2\kappa}$, для знаходження первинних параметрів \underline{A}_{12} та \underline{A}_{21} користуються двома першими виразами системи рівнянь (4.51), а параметр \underline{A}_{22} визначають за допомогою співвідношення (4.49) –

$$\underline{\mathbf{A}}_{22} = \frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}} \underline{\mathbf{A}}_{11}.$$
(4.53)

Підстановка цих виразів у співвідношення (4.50) дає

$$\underline{\mathbf{A}}_{11}^2 \frac{\underline{\mathbf{Z}}_{2x}}{\underline{\mathbf{Z}}_{1x}} - \underline{\mathbf{A}}_{11}^2 \frac{\underline{\mathbf{Z}}_{2\kappa}}{\underline{\mathbf{Z}}_{1x}} = 1,$$

звідки остаточно отримаємо

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2\kappa}}}.$$
(4.54)

120

Діючи аналогічно, можна записати співвідношення для знаходження А-параметрів у випадку визначення іншої трійки опорів – <u>Z</u>_{1x}, <u>Z</u>_{2x}, <u>Z</u>_{1k}.

4.1.4. Зміна напрямку передачі енергії через чотириполюсник

Якщо чотириполюсник живиться з боку вихідних затискачів і енергія передається з його виходу на вхід, то рівняння чотириполюсника в А-параметрах можна одержати на основі системи (4.15), якщо змінити напрямки струмів I_1 та I_2 на протилежні:

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = \underline{\mathbf{A}}_{11} \underline{\mathbf{U}}_{2} + \underline{\mathbf{A}}_{12} (-\underline{\mathbf{I}}_{2});$$

$$-\underline{\mathbf{I}}_{1} = \underline{\mathbf{A}}_{21} \underline{\mathbf{U}}_{2} + \underline{\mathbf{A}}_{22} (-\underline{\mathbf{I}}_{2}).$$
 (4.55)

Оскільки у випадку зворотного напрямку передачі енергії незалежними будуть величини \underline{U}_1 та \underline{I}_1 , а залежними \underline{U}_2 та \underline{I}_2 , то систему рівнянь (4.55) треба розв'язувати відносно двох останніх електричних величин. Вважаючи чотириполюсник оборотним, отримаємо такий розв'язок методом визначників. У цьому випадку маємо

$$\underline{\mathbf{U}}_{2} = \frac{\Delta_{\mathbf{U}_{2}}}{\Delta_{\mathbf{A}}}, \quad \underline{\mathbf{I}}_{2} = \frac{\Delta_{\mathbf{I}_{2}}}{\Delta_{\mathbf{A}}}.$$
(4.56)

У виразах (4.56) визначники Δ_A, Δ_{U_2} та Δ_{I_2} мають вигляд

$$\Delta_{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{11} & -\underline{\mathbf{A}}_{12} \\ \underline{\mathbf{A}}_{21} & -\underline{\mathbf{A}}_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\mathbf{U}_2} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{U}}_1 & -\underline{\mathbf{A}}_{12} \\ -\underline{\mathbf{I}}_1 & -\underline{\mathbf{A}}_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\mathbf{I}_2} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{11} & \underline{\mathbf{U}}_1 \\ \underline{\mathbf{A}}_{21} & -\underline{\mathbf{I}}_1 \end{vmatrix}.$$
(4.57)

На основі співвідношень (4.56) та (4.57) для шуканих напруги \underline{U}_2 і струму \underline{I}_2 одержимо

$$\underline{U}_{2} = \frac{-\underline{A}_{22}\underline{U}_{1} - \underline{A}_{12}\underline{I}_{1}}{-\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = \frac{-\underline{A}_{22}\underline{U}_{1} - \underline{A}_{12}\underline{I}_{1}}{-1},$$

$$\underline{I}_{2} = \frac{-\underline{A}_{11}\underline{I}_{1} - \underline{A}_{21}\underline{U}_{1}}{-\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = \frac{-\underline{A}_{11}\underline{I}_{1} - \underline{A}_{21}\underline{U}_{1}}{-1}.$$
(4.58)

Остаточно система рівнянь чотириполюсника в А-параметрах при передачі енергії з виходу на вхід має вигляд

$$\underline{\mathbf{U}}_{2} = \underline{\mathbf{A}}_{22}\underline{\mathbf{U}}_{1} + \underline{\mathbf{A}}_{12}\underline{\mathbf{I}}_{1},$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{2} = \underline{\mathbf{A}}_{21}\underline{\mathbf{U}}_{1} + \underline{\mathbf{A}}_{11}\underline{\mathbf{I}}_{1}.$$
(4.59)

Порівнюючи системи рівнянь (4.15) та (4.59), можна зробити висновок, що при змінюванні напрямку передачі енергії через чотириполюсник в згаданих системах рівнянь коефіцієнти \underline{A}_{11} і \underline{A}_{22} міняються місцями. Це означає, що для несиметричних чотириполюсників умови передачі енергії в прямому

та зворотному напрямках різні. На відміну від цього, для симетричних чотириполюсників, у яких $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$, умови передачі енергії в обох напрямках є однаковими.

4.2. Схеми заміщення та вторинні параметри чотириполюсника

4.2.1. Схеми заміщення чотириполюсника

Режим роботи будь-якого прохідного чотириполюсника можна описати за допомогою однієї з раніше розглянутих систем рівнянь в А-, В-, Ү-, Z-, Набо G-параметрах. В загальному випадку рівняння кожної з цих систем включають чотири незалежних коефіцієнти. Тому найбільш проста еквіва-лентна схема чотириполюсника повинна складатися не більш ніж з чотирьох елементів, параметри яких визначаються за допомогою первинних параметрів чотириполюсника. При цьому можна скласти декілька рівноцінних схем заміщення, що мають в своєму складі мінімальну кількість елементів.

Розглянемо схеми заміщення чотириполюсника, параметри яких виражаються через Ү-, Z-, H-, G- та А-параметри.

На рис. 4.9 наведені еквівалентні схеми чотириполюсників, в яких ліва та права частини моделюють окремо кожне з рівнянь систем (4.7), (4.23), (4.25) та (4.27). Подібні схеми не можна ставити у відповідність системам рівнянь (4.15) та (4.26), оскільки для них неможливо змоделювати кожне рівняння окремою схемою.

Як виходить з аналізу наведених схем, кожна з них, незалежно від типу чотириполюсника, має в своєму складі два залежних джерела енергії, одне з яких діє у вхідному, а інше у вихідному контурах схем заміщення. При цьому джерело енергії у вихідному контурі кожної з цих схем характеризує процес передачі енергії з входу на вихід чотириполюсника, а наявність залежного джерела енергії у вхідному контурі показує наявність процесу зворотної передачі енергії з виходу чотириполюсника на його вхід.

Очевидно, що, користуючись рівняннями зв'язку між первинними параметрами різних систем, можна в кожній з наведених схем виразити параметри елементів через первинні параметри інших систем. Недоліком наведених схем є наявність двох джерел енергії при моделюванні як активних, так і пасивних чотириполюсників.



та G- (г) параметрах

Вільними від такого недоліку є П- та Т-подібні еквівалентні схеми чотириполюсників. Розглянемо такі схеми заміщення для необоротних та оборотних чотириполюсників, параметри яких виражаються через Ү- та Z-параметри.

На рис. 4.10, а наведена П-подібна еквівалентна схема активного чотириполюсника, в якій провідності віток виражені через Ү-параметри. При цьому схема має одне залежне джерело струму ($Y_{21} - Y_{12}$) U_1 , яке зберігається лише в схемі заміщення необоротного чотириполюсника. Якщо ж чотириполюсник оборотний, то $Y_{21} = Y_{12}$, і джерело струму в еквівалентній схемі відсутнє (рис. 4.10, б). Покажемо, що схема на рис. 4.10, а відповідає системі рівнянь чотириполюсника в Ү-параметрах. Для цього запишемо рівняння за першим законом Кірхгофа відносно струмів I_1 та I_2 –

$$\underline{I}_{1} = (\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12})\underline{U}_{1} - \underline{Y}_{12}(\underline{U}_{1} - \underline{U}_{2}) = \underline{Y}_{11}\underline{U}_{1} + \underline{Y}_{12}\underline{U}_{2},
\underline{I}_{2} = (\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12})\underline{U}_{2} - \underline{Y}_{12}(\underline{U}_{2} - \underline{U}_{1}) + (\underline{Y}_{21} - \underline{Y}_{12})\underline{U}_{1} = \underline{Y}_{21}\underline{U}_{1} + \underline{Y}_{22}\underline{U}_{2}.$$
(4.60)

Дійсно, система рівнянь (4.60) повністю відповідає системі (4.7). Так са-



Рис. 4.10. Еквівалентна схема необоротного (а) та оборотного (б) чотириполюсника в Y-параметрах

мо можна довести, що цій системі відповідає і пасивна схема заміщення оборотного чотириполюсника, яка наведена на рис. 4.10, б.

На рис. 4.11, а наведена Т-подібна еквівалентна схема необоротного чотириполюсника, в якій параметри елементів виражені через первинні Z-параметри. Складемо рівняння для вхідного та вихідного контурів цієї схеми за другим законом Кірхгофа і отримаємо



Рис. 4.11. Еквівалентні схеми необоротного (а) та оборотного (б) чотириполюсників в Z-параметрах

$$\underline{U}_{1} = \underline{I}_{1}(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}) + (\underline{I}_{1} + \underline{I}_{2})\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{11}\underline{I}_{1} + \underline{Z}_{12}\underline{I}_{2},
\underline{U}_{2} = \underline{I}_{2}(\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}) + (\underline{I}_{1} + \underline{I}_{2})\underline{Z}_{12} + (\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{12})\underline{I}_{1} = \underline{Z}_{21}\underline{I}_{1} + \underline{Z}_{22}\underline{I}_{2}.$$
(4.61)

Очевидно, що отримана система рівнянь точно повторює систему (4.25).

В еквівалентній схемі оборотного чотириполюсника (рис. 4.11, б), для якого $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$, залежне джерело енергії відсутнє і схема є пасивною.

Параметри елементів розглянутих П- та Т-подібної схем заміщення, так само, як і схем на рис. 4.9, можна виразити і через первинні параметри чотириполюсника інших систем. Для цього найкраще скористатись таблицею відповідності між первинними параметрами різних систем. Наприклад, на рис. 4.12, а наведена П-подібна схема заміщення необоротного чотири-полюсника, параметри елементів якого виражені через первинні А-параметри.

Аналогічна схема для оборотного чотириполюсника зображена на рис. 4.12, б.



Рис. 4.12. Еквівалентні схеми необоротного (а) та оборотного (б) чотириполюсників, параметри елементів яких виражені через А-параметри

Остання найчастіше використовується при розрахунках енергетичних систем.

Наостанок зазначимо, що П-подібні схеми заміщення чотириполюсників можуть бути перетворені в Т-подібні або навпаки за допомогою типового еквівалентного перетворення трикутник – зірка.

4.2.2. Характеристичні параметри прохідного чотириполюсника

Якщо несиметричний чотириполюсник, що працює в режимі прямої передачі енергії, навантажити опором Z_2 , то його вхідний опір при використанні системи А-параметрів згідно з (4.15) буде визначатися співвідношенням

$$\underline{Z}_{BX1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2}.$$
(4.62)

Вважаючи, що опір навантаження чотириполюсника $\underline{Z}_2 = \underline{U}_2 / \underline{I}_2$, одержимо

$$\underline{Z}_{BX1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}.$$
(4.63)

У випадку, коли цей самий чотириполюсник працює в режимі зворотної передачі енергії і навантажений з боку вхідних затискачів опором Z_1 , його вхідний опір з боку вихідних затискачів можна знайти, скориставшись виразом (4.59)

$$\underline{Z}_{BX2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{U}_1 + \underline{A}_{12}\underline{I}_1}{\underline{A}_{21}\underline{U}_1 + \underline{A}_{11}\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_1 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_1 + \underline{A}_{11}}.$$
(4.64)

Якщо в обох розглянутих випадках опори навантаження \underline{Z}_2 та \underline{Z}_1 підібрати таким чином, щоб виконувались умови

$$\underline{Z}_{BX1} = \underline{Z}_1, \quad \underline{Z}_{BX2} = \underline{Z}_2, \tag{4.65}$$

то можна вважати, що існують деякі два опори \underline{Z}_{x1} та \underline{Z}_{x2} , які задовольняють наступній умові: при прямій передачі енергії (рис. 4.13, а) вхідний опір



Рис. 4.13. Навантаження несиметричного чотириполюсника характеристичними опорами при прямій (а) та зворотній (б) передачі енергії

чотириполюсника, навантаженого опором Z_{x2} , дорівнює Z_{x1} ; при зворотній 125

передачі енергії (рис. 4.13, б) вхідний опір чотириполюсника, навантаженого з боку входу опором Z_{x1} , дорівнює Z_{x2} . Такі два опори Z_{x1} та Z_{x2} називаються характеристичними опорами несиметричного чотириполюсника.

Якщо чотириполюсник в режимі прямої або зворотної передачі енергії навантажений відповідним характеристичним опором, то він працює в режимі узгодженого навантаження, при якому виконується умова передачі максимальної енергії зі входу на вихід чотириполюсника або навпаки. При цьому необхідно також узгодити чотириполюсник і з джерелом енергії.

Нехай у виразах (4.63) та (4.64) прийнято

$$\underline{Z}_{BX1} = \underline{Z}_1 = \underline{Z}_{X1}, \quad \underline{Z}_{BX2} = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{X2},$$

тоді одержимо

$$\underline{Z}_{x1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{x2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{x2} + \underline{A}_{22}}, \quad \underline{Z}_{x2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{x1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{x1} + \underline{A}_{11}}.$$
(4.66)

Якщо ж систему рівнянь (4.66) розв'язати відносно характеристичних опорів \underline{Z}_{x1} та \underline{Z}_{x2} , то матимемо

$$\underline{Z}_{x1} = \sqrt{\underline{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}}_{\underline{\underline{A}_{21}\underline{\underline{A}_{22}}}}, \quad \underline{Z}_{x2} = \sqrt{\underline{\underline{A}_{22}\underline{\underline{A}_{12}}}}_{\underline{\underline{A}_{21}\underline{\underline{A}_{11}}}}.$$
(4.67)

Очевидно, що несиметричний чотириполюсник і в разі прямої, і в разі зворотної передачі енергії, як і трансформатор, є перетворювачем опору.

У випадку симетричного чотириполюсника <u>A</u>₁₁ = <u>A</u>₂₂ і характеристичні опори <u>Z</u>_{x1} та <u>Z</u>_{x2} однакові:

$$\underline{Z}_{x1} = \underline{Z}_{x2} = \sqrt{\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}}.$$
(4.68)

Це означає, що симетричний чотириполюсник не перетворює, а тільки повторює на своїх вхідних затискачах узгоджений опір навантаження. Тому в симетричних чотириполюсниках узгоджений опір навантаження часто називають повторним і позначають \underline{Z}_n .

Якщо чотириполюсник несиметричний та оборотний, то, як відомо, для повної характеристики його властивостей необхідно знати три незалежних параметри. Тому окрім характеристичних опорів Z_{x1} та Z_{x2} вводять ще й третій параметр, який дозволить порівнювати струми й напруги на вході та виході чотириполюсника. Для такого порівняння струмів та напруг складемо рівняння для відношень напруг і струмів на вході та виході чотириполюсника, що навантажений на узгоджений опір Z_{x2} . В цьому випадку рівняння чотириполюсника в А-параметрах мають такий вигляд:

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = \underline{\mathbf{A}}_{11}\underline{\mathbf{U}}_{2} + \underline{\mathbf{A}}_{12}\frac{\underline{\mathbf{U}}_{2}}{\underline{\mathbf{Z}}_{x2}} = \left(\underline{\mathbf{A}}_{11} + \frac{\underline{\mathbf{A}}_{12}}{\sqrt{\underline{\mathbf{A}}_{12}\underline{\mathbf{A}}_{22}/\underline{\mathbf{A}}_{21}\underline{\mathbf{A}}_{11}}}\right)\underline{\mathbf{U}}_{2};$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{1} = \underline{\mathbf{A}}_{21}\underline{\mathbf{Z}}_{x2}\underline{\mathbf{I}}_{2} + \underline{\mathbf{A}}_{22}\underline{\mathbf{I}}_{2} = \left(\underline{\mathbf{A}}_{21}\sqrt{\underline{\mathbf{A}}_{12}\underline{\mathbf{A}}_{22}/\underline{\mathbf{A}}_{21}\underline{\mathbf{A}}_{11}} + \underline{\mathbf{A}}_{22}\right)\underline{\mathbf{I}}_{2}.$$

$$(4.69)$$

Тоді для шуканих відношень отримаємо

$$\frac{\underline{\mathbf{U}}_{1}}{\underline{\mathbf{U}}_{2}} = \left(\sqrt{\underline{\mathbf{A}}_{11}\underline{\mathbf{A}}_{22}} + \sqrt{\underline{\mathbf{A}}_{12}\underline{\mathbf{A}}_{21}}\right) \sqrt{\frac{\underline{\mathbf{A}}_{11}}{\underline{\mathbf{A}}_{22}}},$$

$$\frac{\underline{\mathbf{I}}_{1}}{\underline{\mathbf{I}}_{2}} = \left(\sqrt{\underline{\mathbf{A}}_{11}\underline{\mathbf{A}}_{22}} + \sqrt{\underline{\mathbf{A}}_{12}\underline{\mathbf{A}}_{21}}\right) \sqrt{\frac{\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{22}}{\underline{\mathbf{A}}_{11}}}.$$
(4.70)

Однаковий множник в правих частинах обох рівнянь системи (4.70) залежить лише від властивостей чотириполюсника і може бути використаний разом з характеристичними опорами Z_{x1} та Z_{x2} як третій його параметр. Фізично цей параметр характеризує згасання та фазовий або часовий зсув сигналу при його проходженні через чотириполюсник.

Звичайно при оцінці згасання сигналу найчастіше використовують логарифмічні одиниці, тому третій параметр чотириполюсника доцільно представити у вигляді

$$\underline{\Gamma} = \ln\left(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right),\tag{4.71}$$

або інакше

$$\sqrt{\underline{\mathbf{A}}_{11}\underline{\mathbf{A}}_{22}} + \sqrt{\underline{\mathbf{A}}_{12}\underline{\mathbf{A}}_{21}} = \mathbf{e}^{\underline{\Gamma}}, \qquad (4.72)$$

де <u>Г</u> – параметр чотириполюсника, що називається коефіцієнтом поширення або постійною передачі.

Оскільки первинні А-параметра чотириполюсника є величинами компле-ксними, то і введений параметр – коефіцієнт поширення <u>Г</u> також є комплексною величиною –

$$\underline{\Gamma} = \mathbf{A} + \mathbf{j}\mathbf{B} \,. \tag{4.73}$$

Таким чином, вихідний \underline{Z}_{x2} і вхідний \underline{Z}_{x1} характеристичні опори та коефіцієнт поширення $\underline{\Gamma}$ повністю характеризують оборотний чотириполюс-ник і називаються його характеристичними або вторинними параметрами. Всі вони є комплексними функціями частоти.

4.2.3. Характеристичні параметри симетричного чотириполюсника

Як відомо, характеристичні опори симетричного чотириполюсника однакові і визначаються співвідношенням (4.68). Це обумовлено тим, що первинні параметри <u>A</u>₁₁ та <u>A</u>₂₂ є однаковими. Таким чином, з виразів (4.70) і (4.72) видно, що

$$\mathbf{e}^{\underline{\Gamma}} = \underline{\mathbf{A}}_{11} + \sqrt{\underline{\mathbf{A}}_{12}\underline{\mathbf{A}}_{21}} , \qquad (4.74)$$

або

$$\mathbf{e}^{\Gamma} = \underline{\mathbf{U}}_1 / \underline{\mathbf{U}}_2 = \underline{\mathbf{I}}_1 / \underline{\mathbf{I}}_2 \,. \tag{4.75}$$

Якщо на вхід чотириполюсника надходить довільний гармонічний сигнал, то діючі вхідна та вихідна напруги дорівнюють

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = \mathbf{U}_{1} \mathbf{e}^{\mathbf{j}\psi_{u_{1}}}, \quad \underline{\mathbf{U}}_{2} = \mathbf{U}_{2} \mathbf{e}^{\mathbf{j}\psi_{u_{2}}}.$$
(4.76)

Тоді, скориставшись виразами (4.73), (4.75) та (4.76), можна записати

$$e^{\underline{\Gamma}} = e^{A+jB} = e^{A} \cdot e^{jB} = \frac{U_1}{U_2} e^{j(\psi_{u_1} - \psi_{u_2})}, \qquad (4.77)$$

звідки виходить, що

$$e^{A} = U_{1}/U_{2}, \quad B = \psi_{u_{1}} - \psi_{u_{2}},$$

або інакше

A = ln (U₁/U₂), B =
$$\psi_{u_1} - \psi_{u_2}$$
. (4.78)

Аналогічно для струмів \underline{I}_1 та \underline{I}_2 матимемо

$$A = \ln (I_1/I_2), \quad B = \psi_{i_1} - \psi_{i_2}. \tag{4.79}$$

Як видно з виразів (4.78) та (4.79), величина А є логарифмічною характеристикою ослаблення сигналу, що проходить через чотириполюсник, і називається коефіцієнтом згасання. Величина В характеризує зсув фази сигналу при його проходженні через симетричний чотириполюсник і називається коефіцієнтом фази. Одиницею вимірювання коефіцієнта фази В є радіан або градус.

Коефіцієнт згасання А найчастіше вимірюється в логарифмічних одиницях. Якщо використовується натуральний логарифм відношення напруг або струмів, як у виразах (4.78) та (4.79), то одиницею вимірювання згасання є непер (Нп). Згасанню сигналу в один непер відповідає зменшення напруги або струму на виході чотириполюсника в порівнянні з їх вхідними значеннями в е разів.

Іноді розглядають не відношення напруг або струмів, а відношення активних або повних потужностей. Для симетричного чотириполюсника з узгодженим навантаженням маємо

$$\frac{\mathbf{P}_{\mathbf{R}1}}{\mathbf{P}_{\mathbf{R}2}} = \frac{\mathbf{P}_{\mathbf{S}1}}{\mathbf{P}_{\mathbf{S}2}} = \frac{\mathbf{U}_1^2}{\mathbf{U}_2^2} = \frac{\mathbf{I}_1^2}{\mathbf{I}_2^2},$$

і тоді для коефіцієнта згасання отримаємо

$$A = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{R1}}{P_{R2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{S1}}{P_{S2}}.$$
 (4.80)

В сучасній радіотехніці та електрозв'язку разом з непером використовується й інша логарифмічна одиниця вимірювання згасання – бел (Б), в основу якої покладений десятковий логарифм відношення потужностей.

Якщо потужність корисного сигналу на вході чотириполюсника в десять разів більша, ніж потужність на його виході, то згасання дорівнює одному белу. Вираз для оцінки згасання в белах має вигляд

$$A = \lg \frac{P_{R1}}{P_{R2}} = \lg \frac{P_{S1}}{P_{S2}}.$$
 (4.81)

На практиці частіше використовують в десять разів меншу одиницю – децибел (дБ). В цьому випадку

A = 10lg
$$\frac{P_{R1}}{P_{R2}}$$
 = 10lg $\frac{P_{S1}}{P_{S2}}$. (4.82)

Одиниці вимірювання згасання бел та децибел можна використовувати і для оцінки величини відношень напруг і струмів:

A =
$$2 \lg \frac{U_1}{U_2} = 2 \lg \frac{I_1}{I_2};$$

A = $20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2}.$ (4.83)

Якщо скористатись відомим співвідношенням між натуральним та десятковим логарифмами числа $\ln x \approx 2,3 \lg x$, то можна знайти зв'язок між одиницями вимірювання згасання – бел, децибел і непер. Виходячи з виразів (4.78), (4.79) та другого виразу системи рівнянь (4.83), можна записати

$$\ln \frac{U_1}{U_2}\Big|_{H_{\Pi}} = 2,3 \lg \frac{U_1}{U_2}\Big|_{H_{\Pi}} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2}\Big|_{_{I_{B}}},$$

звідки виходить, що 2,3 Нп ≈ 20 дБ, або 1 Нп ≈ 8,686 дБ, 1 дБ ≈ 0,115 Нп, 1 Б ≈ 1,15 Нп.

4.3. Основні характеристики та способи з'єднання чотириполюсників

Розглянемо передатні характеристики окремих прохідних чотириполюсників та з'єднань таких чотириполюсників як в узгодженому, так і в неузгодженому режимі роботи.

4.3.1. Передатні характеристики прохідного чотириполюсника

Передатною комплексною частотною характеристикою прохідного чотириполюсника називається відношення комплексних амплітуд або комплексних діючих значень електричних величин на виході та вході чотириполюсника при заданому режимі передачі. При цьому відношення однойменних електричних величин визначають передатні КЧХ чотириполюсника відносно напруги і струму –

$$\mathbf{K}_{\mathrm{U}}(j\omega) = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{2}}{\underline{\mathbf{U}}_{1}}, \quad \mathbf{K}_{\mathrm{I}}(j\omega) = \frac{\underline{\mathbf{I}}_{2}}{\underline{\mathbf{I}}_{1}}, \quad (4.84)$$

а відношення різнойменних електричних величин – передатний комплексний опір та передатну комплексну провідність чотириполюсника –

$$Z_{21}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}, \quad Y_{21}(j\omega) = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}.$$
 (4.85)

Очевидно, що передатними характеристиками чотириполюсника є КЧХ, визначені відносно електричних величин на його вихідних та вхідних затискачах. Модулі цих КЧХ являють собою амплітудно-частотні, а їх аргументи – фазочастотні характеристики чотириполюсника.

Якщо чотириполюсник навантажений довільним опором Z_2 , то його передатні характеристики можна легко записати, використовуючи будь-яку систему первинних параметрів чотириполюсника. Наприклад, при використанні системи А-параметрів отримаємо

$$K_{U}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{2}}{\underline{U}_{1}} = \frac{\underline{U}_{2}}{\underline{A}_{11}\underline{U}_{2} + \underline{A}_{12}\underline{I}_{2}} = \frac{\underline{Z}_{2}}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{2} + \underline{A}_{12}},$$

$$K_{I}(j\omega) = \frac{\underline{I}_{2}}{\underline{I}_{1}} = \frac{\underline{I}_{2}}{\underline{A}_{21}\underline{U}_{2} + \underline{A}_{22}\underline{I}_{2}} = \frac{1}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{2} + \underline{A}_{22}}.$$
(4.86)

Якщо ж чотириполюсник симетричний і працює в узгодженому режимі, коли $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{\Pi}$, то, як видно з виразів (4.75) та (4.84), передатні КЧХ чотириполюсника відносно напруги і струму однозначно зв'язані з коефіцієнтом поширення <u>Г</u> –

$$K_{\rm U}(j\omega) = K_{\rm I}(j\omega) = e^{-\underline{\Gamma}},$$

$$\underline{\Gamma} = \ln \frac{1}{K_{\rm U}(j\omega)} = \ln \frac{1}{K_{\rm I}(j\omega)}.$$
(4.87)

В цьому випадку будь-яка з цих передатних характеристик може вважатися одним з вторинних параметрів чотириполюсника. Врахувавши (4.73), за допомогою (4.87) можна встановити зв'язок між передатними АЧХ і ФЧХ кола та його коефіцієнтами згасання A(ω) і фази B(ω) –

$$\ln \mathbf{K}(j\omega) = \ln \mathbf{K}(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)} = \ln \mathbf{K}(\omega) + \phi(\omega) =$$

= $-\Gamma(j\omega) = -\mathbf{A}(\omega) - j\mathbf{B}(\omega)$ (4.88)

Звідки виходить, що коефіцієнт згасання або АЧХ згасання чотириполюсника дорівнює

$$A(\omega) = -\ln K(\omega) = \ln \frac{1}{K(\omega)}, \qquad (4.89)$$

а його коефіцієнт фази

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\omega}) = -\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\omega}). \tag{4.90}$$

АЧХ згасання $A(\omega)$ та коефіцієнт фази $B(\omega)$ разом з передатними АЧХ і ФЧХ кола широко використовуються при аналізі частотно-вибірних кіл різного призначення.

4.3.2. Рівняння симетричного чотириполюсника з гіперболічними функціями

Вторинні параметри пасивного симетричного чотириполюсника – характеристичний (повторний) опір $\underline{Z}_x = \underline{Z}_n$ і коефіцієнт поширення <u>Г</u> – повністю описують цей чотириполюсник як елемент тракту передачі та перетворення сигналу. Тому симетричні чотириполюсники часто задають посередництвом цих двох вторинних параметрів. В цьому випадку і рівняння зв'язку між електричними параметрами чотириполюсника доцільно записувати, використовуючи вторинні параметри.

Якщо скористатись системою А-параметрів чотириполюсника, то у випадку симетричності останнього з виразу (4.44) виходить, що

$$\underline{\mathbf{A}}_{11}^2 - \underline{\mathbf{A}}_{12} \underline{\mathbf{A}}_{21} = 1. \tag{4.91}$$

Поділимо вираз (4.91) на (4.74) і отримаємо

$$\underline{\mathbf{A}}_{11} - \sqrt{\underline{\mathbf{A}}_{12}} \underline{\mathbf{A}}_{21} = \mathbf{e}^{-\Gamma}.$$
(4.92)

Вирази (4.74) та (4.92) утворюють систему рівнянь, розв'язання якої доречі й дозволяє виразити первинні параметри симетричного чотириполюсника через його вторинні параметри.

Спочатку розв'яжемо цю систему рівнянь відносно параметра <u> A_{11} </u> та комплексної величини $\sqrt{A_{12}A_{21}}$ і одержимо

$$\underline{A}_{11} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}}}{2} = ch\underline{\Gamma}, \quad \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} - e^{-\underline{\Gamma}}}{2} = sh\underline{\Gamma}.$$
 (4.93)

Почленно помножимо та поділимо друге рівняння системи (4.93) на вираз $\sqrt{\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}} = \underline{Z}_x$ і отримаємо, що

$$\underline{\mathbf{A}}_{12} = \underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{x}} \operatorname{sh}\underline{\Gamma}, \ \underline{\mathbf{A}}_{21} = \operatorname{sh}\underline{\Gamma}/\underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{x}}.$$
(4.94)

Врахуємо, що у симетричного чотириполюсника $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$, та підставимо отримані значення первинних А-параметрів у систему рівнянь (4.15) і запишемо рівняння симетричного чотириполюсника з гіперболічними функціями:

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = \underline{\mathbf{U}}_{2} \operatorname{ch}\underline{\Gamma} + \underline{\mathbf{I}}_{2}\underline{\mathbf{Z}}_{x} \operatorname{sh}\underline{\Gamma};$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{1} = \underline{\mathbf{U}}_{2}\frac{\operatorname{sh}\underline{\Gamma}}{\underline{\mathbf{Z}}_{x}} + \underline{\mathbf{I}}_{2}\operatorname{ch}\underline{\Gamma}.$$
(4.95)

Виходячи з (4.95), для вхідного опору симетричного чотириполюсника, навантаженого на опір <u>Z_н</u>, можна записати

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \operatorname{ch}\underline{\Gamma} + \underline{I}_2 \underline{Z}_x \operatorname{sh}\underline{\Gamma}}{\underline{U}_2 (\operatorname{sh}\underline{\Gamma})/\underline{Z}_x + \underline{I}_2 \operatorname{ch}\underline{\Gamma}}.$$
(4.96)

Якщо поділити чисельник та знаменник виразу (4.96) на величину $I_2 sh\Gamma$, то одержимо

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\underline{Z}_{H} \operatorname{cth}\underline{\Gamma} + \underline{Z}_{X}}{\underline{Z}_{H} / \underline{Z}_{X} + \operatorname{cth}\underline{\Gamma}} = \underline{Z}_{X} \frac{\underline{Z}_{H} \operatorname{cth}\underline{\Gamma} + \underline{Z}_{X}}{\underline{Z}_{H} + \underline{Z}_{X} \operatorname{cth}\underline{\Gamma}}.$$
(4.97)

В разі короткого замикання на виході чотириполюсника, коли $\underline{Z}_{H} = 0$, маємо

$$\underline{Z}_{BXK} = \underline{Z}_{1K} = \frac{\underline{Z}_{X}}{c t h \underline{\Gamma}} = \underline{Z}_{X} t h \underline{\Gamma}.$$
(4.98)

При холостому ході на виході, коли $\underline{Z}_{H} \rightarrow \infty$, маємо

$$\underline{Z}_{BXX} = \underline{Z}_{1X} = \underline{Z}_{X} \operatorname{cth}\underline{\Gamma}.$$
(4.99)

Зі співвідношень (4.98) та (4.99) можна знайти вторинні параметри симетричного чотириполюсника –

$$\underline{Z}_{x} = \sqrt{\underline{Z}_{1\kappa}\underline{Z}_{1x}}, \quad \text{th}\underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{Z}_{1\kappa}/\underline{Z}_{1x}}. \quad (4.100)$$

Таким чином, за допомогою дослідів холостого ходу та короткого замикання можна легко визначити вторинні параметри, які необхідні для запису системи рівнянь симетричного чотириполюсника і знаходження його вхідного опору.

4.3.3. Каскадне з'єднання чотириполюсників

Чотириполюсники з'єднуються різними способами. Найчастіше зустрічається каскадне з'єднання, при якому вихідні затискачі одного чотириполюсника з'єднуються із вхідними затискачами наступного.

Якщо каскадно з'єднуються декілька симетричних узгоджених чотириполюсників (рис. 4.14), то така схема також являє собою симетричний чотириполюсник. Останнє означає, що ця схема повністю характеризується двома



Рис. 4.14. Каскадне з'єднання симетричних узгоджених чотириполюсників

параметрами, один з яких – характеристичний опір \underline{Z}_{xk} , а другий – коефіцієнт поширення $\underline{\Gamma}_{\kappa}$.

Рівняння такої каскадної схеми матимуть вигляд, аналогічний до системи рівнянь (4.95):

$$\underline{U}_{1} = \underline{U}_{n} \operatorname{ch}\underline{\Gamma}_{\kappa} + \underline{I}_{n} \underline{Z}_{x\kappa} \operatorname{sh}\underline{\Gamma}_{\kappa};$$

$$\underline{I}_{1} = \frac{\underline{U}_{n}}{\underline{Z}_{x\kappa}} \operatorname{sh}\underline{\Gamma}_{\kappa} + \underline{I}_{n} \operatorname{ch}\underline{\Gamma}_{\kappa}.$$
(4.101)

Знайдемо параметри каскадного з'єднання чотириполюсників $\underline{Z}_{x\kappa}$ та $\underline{\Gamma}_{\kappa}$, якщо відомими є вторинні параметри кожної з ланок схеми \underline{Z}_{x} та $\underline{\Gamma}_{i}$ ($i = \overline{1,n}$). Якщо для схеми, зображеної на рис. 4.14, вибрати навантаження $\underline{Z}_{H} = \underline{Z}_{x}$, то вхідний опір будь-якої ланки, в тому числі і першої, дорівнюватиме \underline{Z}_{x} . Тобто в цьому випадку каскадна схема буде узгодженою з навантаженням, а її характеристичний опір

$$\underline{Z}_{XK} = \underline{Z}_X \,. \tag{4.102}$$

Коефіцієнт поширення даної схеми $\underline{\Gamma}_{\kappa}$, як і будь-якого іншого симетричного чотириполюсника, можна знайти, користуючись виразом (4.75):

$$\underline{\Gamma}_{\kappa} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_n} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_n}.$$
(4.103)

Відношення напруг і струмів на вході та виході каскадної схеми можна виразити через напруги і струми на входах та виходах проміжних ланок. Наприклад, використовуючи відношення напруг, отримаємо

$$\underline{\Gamma}_{\kappa} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3} \cdot \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_4} \cdot \dots \cdot \frac{\underline{U}_{n-1}}{\underline{U}_n}, \qquad (4.104)$$

або інакше

$$\underline{\Gamma}_{\kappa} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} + \ln \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3} + \ln \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_4} + \dots + \ln \frac{\underline{U}_{n-1}}{\underline{U}_n}.$$
(4.105)

Кожна складова у виразі (4.105) згідно з визначенням є коефіцієнтом поширення <u>Г</u>і окремої ланки з'єднання. Тоді для коефіцієнта поширення каскадного з'єднання узгоджених симетричних чотириполюсників матимемо

$$\underline{\Gamma}_{\kappa} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\Gamma}_{i} = \sum_{i=1}^{n} A_{i} + j \sum_{i=1}^{n} B_{i} .$$
(4.106)

Таким чином, при каскадному з'єднанні узгоджених симетричних чотириполюсників коефіцієнт згасання з'єднання дорівнює сумі коефіцієнтів згасання, а коефіцієнт фази – сумі коефіцієнтів фази окремих чотириполюсників.

Оскільки для симетричних узгоджених чотириполюсників є справедливим співвідношення (4.87) та (4.89), то для передатної комплексної частотної характеристики каскадного з'єднання з урахуванням (4.105) можна записати

$$K_{\kappa}(j\omega) = e^{-\sum_{i=1}^{n} \Gamma_{i}} = \prod_{i=1}^{n} K_{i}(j\omega),$$
 (4.107)

де K_i(j ω) – передатна КЧХ i-ï ланки схеми.

При каскадному з'єднанні несиметричних чотириполюсників можливі два принципово різні режими роботи. В першому з них маємо узгоджені, а в другому – неузгоджені несиметричні чотириполюсники.

В першому випадку каскадно з'єднують несиметричні чотириполюсники за принципом узгодження, коли характеристичний опір Z_{x2} попереднього чотириполюсника дорівнює характеристичному опору Z_{x1} наступного. Очевидно, що для з'єднання чотириполюсників на рис. 4.15, яке являє собою не-



Рис. 4.15. Узгоджене каскадне з'єднання несиметричних пасивних чотириполюсників

симетричний чотириполюсник, характеристичні опори дорівнюють \underline{Z}_{x1} та \underline{Z}_{x2} , а коефіцієнт поширення можна знайти, якщо перемножити ліві та праві частини виразів системи рівнянь (4.70) і врахувати (4.72). Тоді отримаємо

$$\mathrm{e}^{2\underline{\Gamma}} = \frac{\underline{\mathrm{U}}_1}{\underline{\mathrm{U}}_2} \cdot \frac{\underline{\mathrm{I}}_1}{\underline{\mathrm{I}}_2},$$

звідки коефіцієнт поширення однієї ланки каскадного з'єднання дорівнює

$$\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}.$$
(4.108)

Якщо застосувати той самий прийом, який було використано у випадку аналізу каскадної симетричної схеми, то можна показати, що при узгодженому каскадному з'єднанні несиметричних чотириполюсників коефіцієнт поширення Γ_{κ} , як і у випадку аналогічного з'єднання симетричних чотириполюсників, дорівнює сумі коефіцієнтів поширення окремих ланок. Тобто в цьому випадку буде справедливим співвідношення (4.106). В той же час у випадку несиметричних чотириполюсників не виконуються співвідношення (4.87), отже, неможливо користуватись при знаходженні передатних КЧХ з'єднання і виразом (4.107).

У разі каскадного з'єднання неузгоджених як симетричних, так і несиметричних чотириполюсників, набагато простішим є метод аналізу, при якому спочатку знаходять первинні параметри з'єднання за відомими первинними параметрами окремих ланок схеми.

4.3.4. Рівняння складних чотириполюсників в матричній формі

Окрім каскадного з'єднання на практиці зустрічаються також паралельне, послідовне, послідовно-паралельне та паралельно-послідовне з'єднання чотириполюсників різних типів. При недотриманні принципу узгодженості первинні параметри таких складних чотириполюсників розраховуються набагато простіше, якщо використати матричну форму запису їх рівнянь.

Залежно від виду з'єднання чотириполюсників в складну схему доцільно застосовувати різні форми запису рівнянь, а саме:

при каскадному з'єднанні чотириполюсників – форму А; при послідовному з'єднанні чотириполюсників – форму Z; при паралельному з'єднанні чотириполюсників – форму Y; при послідовно-паралельному з'єднанні чотириполюсників – форму H; при паралельно-послідовному з'єднанні чотириполюсників – форму G. Для розрахунку первинних параметрів чотириполюсника, що є еквівалентним каскадному з'єднанню двох чотириполюсників (рис. 4.16), необхідно скористатись системою рівнянь в А-параметрах.



Рис. 4.16. Каскадне з'єднання двох чотириполюсників

Ц^b₂
 Будемо вважати відомими матриці первинних параметрів першого
 U^b₂
 ↓ ||A^a|| та другого ||A^b|| чотириполюсни ків. Матричні рівняння кожного чотириполюсника мають вигляд

$$\left\|\frac{\underline{\mathbf{U}}_{1}^{a}}{\underline{\mathbf{I}}_{1}^{a}}\right\| = \left\|\mathbf{A}^{a}\right\| \cdot \left\|\frac{\underline{\mathbf{U}}_{2}^{a}}{\underline{\mathbf{I}}_{2}^{a}}\right\|, \quad \left\|\frac{\underline{\mathbf{U}}_{1}^{b}}{\underline{\mathbf{I}}_{1}^{b}}\right\| = \left\|\mathbf{A}^{b}\right\| \cdot \left\|\frac{\underline{\mathbf{U}}_{2}^{b}}{\underline{\mathbf{I}}_{2}^{b}}\right\|.$$

$$(4.109)$$

3 рис. 4.16 видно, що $\underline{U}_2^a = \underline{U}_1^b$ і $\underline{I}_2^a = \underline{I}_1^b$, і в першій з двох систем (4.109) величини \underline{U}_2^a та \underline{I}_2^a можна замінити однаковими з ними величинами \underline{U}_1^b та \underline{I}_1^b з другої системи. Тоді отримаємо

$$\left\| \frac{\underline{\mathbf{U}}_{1}^{\mathbf{a}}}{\underline{\mathbf{I}}_{1}^{\mathbf{a}}} \right\| = \left\| \mathbf{A}^{\mathbf{a}} \right\| \cdot \left\| \mathbf{A}^{\mathbf{b}} \right\| \cdot \left\| \frac{\underline{\mathbf{U}}_{2}^{\mathbf{b}}}{\underline{\mathbf{I}}_{2}^{\mathbf{b}}} \right\|.$$
(4.110)

Для еквівалентного чотириполюсника матричне рівняння в загальній формі має вигляд

$$\left\|\frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{I}_1}\right\| = \left\|\mathbf{A}\right\| \cdot \left\|\frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{I}_2}\right\|,\tag{4.111}$$

де $\underline{U}_1 = \underline{U}_1^a$; $\underline{I}_1 = \underline{I}_1^a$; $\underline{U}_2 = \underline{U}_2^b$; $\underline{I}_2 = \underline{I}_2^b$.

Порівняння виразів (4.110) та (4.111) показує, що при каскадному з'єднанні чотириполюсників матриця А-параметрів еквівалентного чотириполюсника дорівнює

$$\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}^{\mathbf{a}}\| \cdot \|\mathbf{A}^{\mathbf{b}}\| = \|\underline{\mathbf{A}}_{11}^{\mathbf{a}} \quad \underline{\mathbf{A}}_{12}^{\mathbf{a}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{A}}_{11}^{\mathbf{b}} \quad \underline{\mathbf{A}}_{12}^{\mathbf{b}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{A}}_{21}^{\mathbf{b}} \quad \underline{\mathbf{A}}_{22}^{\mathbf{b}}\|.$$
(4.112)

Оскільки при множенні матриць потрібно перемножувати відповідні елементи рядка та стовпця, то для елементів результуючої матриці ||A|| одержимо

$$\underline{\underline{A}}_{11} = \underline{\underline{A}}_{11}^{a} \underline{\underline{A}}_{11}^{b} + \underline{\underline{A}}_{12}^{a} \underline{\underline{A}}_{21}^{b}, \quad \underline{\underline{A}}_{12} = \underline{\underline{A}}_{11}^{a} \underline{\underline{A}}_{12}^{b} + \underline{\underline{A}}_{12}^{a} \underline{\underline{A}}_{22}^{b},$$

$$\underline{\underline{A}}_{21} = \underline{\underline{A}}_{21}^{a} \underline{\underline{A}}_{11}^{b} + \underline{\underline{A}}_{22}^{a} \underline{\underline{A}}_{21}^{b}, \quad \underline{\underline{A}}_{22} = \underline{\underline{A}}_{21}^{a} \underline{\underline{A}}_{12}^{b} + \underline{\underline{A}}_{22}^{a} \underline{\underline{A}}_{22}^{b}.$$

$$(4.113)$$

Якщо каскадно з'єднуються не два, а більша кількість чотириполюсників, то для знаходження первинних параметрів такого з'єднання необхідно послідовно замінювати еквівалентними сусідні пари чотириполюсників. При цьому матриці параметрів, що перемножуються, повинні бути записані в тому ж порядку, в якому з'єднані чотириполюсники. Це обумовлено тими обставинами, що математична операція перемноження матриць не підкоряється переставному закону.

Паралельне з'єднання чотириполюсників

При паралельному з'єднанні чотириполюсників (рис. 4.17) матричні рівняння окремих складових схеми в системі Y-параметрів мають вигляд

$$\begin{aligned} \left\| \underline{\mathbf{I}}_{1}^{a} \right\| &= \left\| \mathbf{Y}^{a} \right\| \cdot \left\| \underline{\underline{U}}_{1}^{a} \right\|, \\ \left\| \underline{\underline{I}}_{2}^{b} \right\| &= \left\| \mathbf{Y}^{b} \right\| \cdot \left\| \underline{\underline{U}}_{2}^{b} \right\|. \end{aligned}$$
(4.114)

Однак, як видно з рис. 4.17, при цьому є справедливими співвідношення $\underline{U}_1 = \underline{U}_1^a = \underline{U}_1^b, \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_2^a = \underline{U}_2^b, \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_1^a + \underline{I}_1^b, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2^a + \underline{I}_2^b.$ (4.115) Тоді на основі співвідношень (4.114) та (4.115) можна записати



$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathbf{I}_{1}}{\mathbf{I}_{2}} \right\| &= \left\| \frac{\mathbf{I}_{1}^{a}}{\mathbf{I}_{2}^{a}} \right\| + \left\| \frac{\mathbf{I}_{1}^{b}}{\mathbf{I}_{2}^{b}} \right\| = \\ &= \left\{ \left\| \mathbf{Y}^{a} \right\| + \left\| \mathbf{Y}^{b} \right\| \right\} \cdot \left\| \frac{\mathbf{U}_{1}}{\mathbf{U}_{2}} \right\| = \qquad (4.116) \\ &= \left\| \mathbf{Y} \right\| \cdot \left\| \frac{\mathbf{U}_{1}}{\mathbf{U}_{2}} \right\|, \end{aligned}$$

а матриця Y-параметрів з'єднання дорівнюватиме

Рис. 4.17. Паралельне з'єднання чотириполюсників

$$\|\mathbf{Y}\| = \|\mathbf{Y}^{a}\| + \|\mathbf{Y}^{b}\| = \|\underline{\mathbf{Y}}_{11}^{a} + \underline{\mathbf{Y}}_{11}^{b} \quad \underline{\mathbf{Y}}_{12}^{a} + \underline{\mathbf{Y}}_{12}^{b} \\ \underline{\mathbf{Y}}_{21}^{a} + \underline{\mathbf{Y}}_{21}^{b} \quad \underline{\mathbf{Y}}_{22}^{a} + \underline{\mathbf{Y}}_{22}^{b} \|.$$
(4.117)

Таким чином, при паралельному з'єднанні матриця Y-параметрів еквівалентного чотириполюсника дорівнює сумі матриць Y-параметрів окремих чотириполюсників.

Послідовне з'єднання чотириполюсників



Рис. 4.18. Послідовне з'єднання чотириполюсників

ливими є співвідношення

При послідовному з'єднанні чотириполюсників (рис. 4.18) матричні рівняння окремих чотириполюсників при використанні системи Z-параметрів мають вигляд

$$\left\| \underline{\underline{U}}_{1}^{a} \right\| = \left\| Z^{a} \right\| \cdot \left\| \underline{\underline{I}}_{1}^{a} \right\|, \quad \left\| \underline{\underline{U}}_{2}^{b} \right\| = \left\| Z^{b} \right\| \cdot \left\| \underline{\underline{I}}_{1}^{b} \right\|. (4.118)$$

Як видно з рис.4.18, при послідовному з'єднанні чотириполюсників справед-

 $\underline{I}_1 = \underline{I}_1^a = \underline{I}_1^b, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2^a = \underline{I}_2^b, \quad \underline{U}_1 = \underline{U}_1^a + \underline{U}_1^b, \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_2^a + \underline{U}_2^b.$

Тоді матриця напруг еквівалентного чотириполюсника дорівнює

$$\left\| \underline{\underline{U}}_1 \right\| = \left\| \underline{\underline{U}}_1^a \right\| + \left\| \underline{\underline{U}}_1^b \right\|,$$

а з урахуванням (4.118)

$$\left\|\frac{\underline{\mathbf{U}}_{1}}{\underline{\mathbf{U}}_{2}}\right\| = \left\{\left\|\mathbf{Z}^{\mathbf{a}}\right\| + \left\|\mathbf{Z}^{\mathbf{b}}\right\|\right\} \cdot \left\|\frac{\underline{\mathbf{I}}_{1}}{\underline{\mathbf{I}}_{2}}\right\| = \left\|\mathbf{Z}\right\| \cdot \left\|\frac{\underline{\mathbf{I}}_{1}}{\underline{\mathbf{I}}_{2}}\right\|.$$
(4.120)

Матриця Z-параметрів еквівалентного чотириполюсника має вигляд

$$\|\mathbf{Z}\| = \|\mathbf{Z}^{a}\| + \|\mathbf{Z}^{b}\| = \|\underline{Z}_{11}^{a} + \underline{Z}_{11}^{b} - \underline{Z}_{12}^{a} + \underline{Z}_{12}^{b}\|.$$
 (4.121)
$$\underline{Z}_{21}^{a} + \underline{Z}_{21}^{b} - \underline{Z}_{22}^{a} + \underline{Z}_{22}^{b}\|.$$

Отже, матриця Z-параметрів послідовного з'єднання чотириполюсників дорівнює сумі матриць Z-параметрів окремих чотириполюсників.

(4.119)

При послідовно-паралельному з'єднанні чотириполюсників (рис. 4.19) матричні рівняння окремих чотирипо-

люсників у разі використання системи Н-параметрів мають вигляд

$$\begin{aligned} \left\| \underline{\underline{U}}_{1}^{a} \\ \underline{\underline{I}}_{2}^{a} \\ \right\| &= \left\| \mathbf{H}^{a} \right\| \cdot \left\| \underline{\underline{I}}_{1}^{a} \\ \underline{\underline{U}}_{2}^{a} \\ \right\|, \\ \left\| \underline{\underline{U}}_{1}^{b} \\ \underline{\underline{I}}_{2}^{b} \\ \right\| &= \left\| \mathbf{H}^{b} \right\| \cdot \left\| \underline{\underline{I}}_{1}^{b} \\ \underline{\underline{U}}_{2}^{b} \\ \right\|. \end{aligned}$$
(4.1)



Рис. 4.19. Послідовно-паралельне

з'єднання чотириполюсників

Оскільки при такому з'єднанні чотириполюсників

$$\underline{\mathbf{I}}_1 = \underline{\mathbf{I}}_1^{\mathrm{a}} = \underline{\mathbf{I}}_1^{\mathrm{b}}, \quad \underline{\mathbf{I}}_2 = \underline{\mathbf{I}}_2^{\mathrm{a}} + \underline{\mathbf{I}}_2^{\mathrm{b}},$$

$$\underline{\mathbf{U}}_1 = \underline{\mathbf{U}}_1^{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{U}}_1^{\mathbf{b}}, \quad \underline{\mathbf{U}}_2 = \underline{\mathbf{U}}_2^{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{U}}_2^{\mathbf{b}},$$

то очевидно, що

$$\left\| \frac{\underline{\mathbf{U}}_1}{\underline{\mathbf{I}}_2} \right\| = \left\| \frac{\underline{\mathbf{U}}_1^a}{\underline{\mathbf{I}}_2^a} \right\| + \left\| \frac{\underline{\mathbf{U}}_1^b}{\underline{\mathbf{I}}_2^b} \right\|,$$

$$\left\|\frac{\mathbf{U}_{1}}{\mathbf{I}_{2}}\right\| = \left\{\left\|\mathbf{H}^{a}\right\| + \left\|\mathbf{H}^{b}\right\|\right\} \cdot \left\|\frac{\mathbf{I}_{1}}{\mathbf{U}_{2}}\right\|.$$
(4.123)

Матриця Н-параметрів еквівалентного чотириполюсника дорівнює

$$\|\mathbf{H}\| = \|\mathbf{H}^{a}\| + \|\mathbf{H}^{b}\| = \|\underline{\mathbf{H}}_{11}^{a} + \underline{\mathbf{H}}_{11}^{b} - \underline{\mathbf{H}}_{12}^{a} + \underline{\mathbf{H}}_{12}^{b} - \underline{\mathbf{H}}_{12}^{a} + \underline{\mathbf{H}}_{21}^{b} - \underline{\mathbf{H}}_{21}^{a} + \underline{\mathbf{H}}_{21}^{b} - \underline{\mathbf{H}}_{22}^{a} + \underline{\mathbf{H}}_{22}^{b} \|.$$
(4.124)

Отже, при послідовно-паралельному з'єднанні чотириполюсників матриця Н-параметрів еквівалентного чотириполюсника дорівнює сумі матриць

Н-параметрів окремих чотириполюсників.

Паралельно-послідовне з'єднання чотириполюсників

Рівняння окремих чотириполюсників, які входять в схему паралельно-



Рис. 4.20. Паралельно-послідовне з'єднання чотириполюсників

139

послідовного з'єднання (рис. 4.20), при використанні системи G-параметрів мають вигляд

$$\begin{vmatrix} \underline{I}_1^a \\ \underline{U}_2^a \end{vmatrix} = \left\| \mathbf{G}^a \right\| \cdot \left\| \frac{\underline{U}_1^a}{\underline{I}_2^a} \right\|,$$

$$\begin{vmatrix} \underline{I}_1^b \\ \underline{U}_2^b \end{vmatrix} = \left\| \mathbf{G}^b \right\| \cdot \left\| \frac{\underline{U}_1^b}{\underline{I}_2^b} \right\|.$$

$$(4.125)$$

Як видно з рис. 4.20, для такого з'єднання є справедливими співвідношення

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1^a + \underline{I}_1^b, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2^a = \underline{I}_2^b,$$
$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1^a = \underline{U}_1^b, \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_2^a + \underline{U}_2^b.$$

Звідси виходить, що

$$\begin{vmatrix} \underline{\mathbf{I}}_1 \\ \underline{\mathbf{U}}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{I}}_1^a \\ \underline{\mathbf{U}}_2^a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{I}}_1^b \\ \underline{\mathbf{U}}_2^b \end{vmatrix},$$

або з урахуванням (4.125) отримаємо

$$\left| \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{U}_2} \right| = \left\{ \left\| \mathbf{G}^{\mathbf{a}} \right\| + \left\| \mathbf{G}^{\mathbf{b}} \right\| \right\} \cdot \left\| \frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{I}_2} \right\|.$$
(4.126)

Матриця G-параметрів еквівалентного чотириполюсника дорівнює

$$\|G\| = \|G^a\| + \|G^b\|.$$
 (4.127)

Таким чином, при паралельно-послідовному з'єднанні чотириполюсників матриця G-параметрів еквівалентного чотириполюсника дорівнює сумі матриць G-параметрів окремих чотириполюсників.

Наостанок зазначимо, що одержані правила знаходження матриць первинних параметрів складних чотириполюсників справедливі лише для регулярних з'єднань чотириполюсників. З'єднання називаються регулярними, якщо на вході і виході складових чотириполюсників виконується умова рівності струмів у верхньому та нижньому виводах, як це мало місце при їх роздільній роботі. При каскадному з'єднанні питання про регулярність не виникає, оскільки рівність згаданих струмів виконується завжди. Якщо ж маємо інші види з'єднань, то умова регулярності може порушуватись через взаємний вплив окремих чотириполюсників.

4.3.5. Експлуатаційні параметри чотириполюсника

В разі узгодженого навантаження чотириполюсника розрахунок параметрів, що характеризують передачу сигналу, є найбільш простим, оскільки при

заданих характеристичних опорах Z_{x1} та Z_{x2} умови передачі повністю визначаються коефіцієнтом поширення Γ . При цьому для узгодження чотириполюсника на вході та виході повинні виконуватись умови

$$\underline{Z}_{i} = \underline{Z}_{x1}, \quad \underline{Z}_{H} = \underline{Z}_{x2}, \tag{4.128}$$

де <u>Z</u>_i – внутрішній опір джерела енергії;

 $\underline{Z}_{\rm H}$ – навантаження чотириполюсника.

Якщо ж одна з умов узгодження (4.128) не виконується, то замість коефіцієнта поширення вводиться поняття робочого коефіцієнта поширення, який характеризує змінювання повної потужності сигналу через вплив чотириполюсника та невиконання умов узгодження:

$$\underline{\Gamma}_{p} = \mathbf{A}_{p} + \mathbf{j}\mathbf{B}_{p} = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{\mathbf{U}}_{0}\underline{\mathbf{I}}_{0}}{\underline{\mathbf{U}}_{2}\underline{\mathbf{I}}_{2}},$$
(4.129)

де $\underline{U}_0, \underline{I}_0$ – комплексні напруга та струм навантаження при його безпосередньому узгодженому підключенні до джерела; $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ – комплексні напруга та стум навантаження при неузгодженому підключенні чотириполюсника між джерелом та навантаженням.

Дійсну частину робочого коефіцієнта поширення називають робочим коефіцієнтом згасання

$$A_{p} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_{0}I_{0}}{U_{2}I_{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{S_{0}}}{P_{S_{2}}},$$
(4.130)

а уявну частину робочого коефіцієнта поширення – робочим коефіцієнтом фази

$$B_{p} = \frac{1}{2} \left(\left(\psi_{u0} - \psi_{u2} \right) + \left(\psi_{i0} - \psi_{i2} \right) \right)$$
(4.131)

Щоб отримати розрахункові співвідношення для робочих коефіцієнтів поширення та згасання введемо поняття приведеного опору

$$\underline{Z}_{np} = \frac{\underline{E}_{\Gamma}}{\underline{I}_2}, \qquad (4.132)$$

де \underline{E}_{Γ} , \underline{I}_{2} – ЕРС джерела та струм навантаження в схемі на рис. 4.21.

Рівняння за другим законом Кірхгофа для вхідного контура цієї схеми має вигляд

$$\underline{Z}_i \underline{I}_1 + \underline{U}_1 = \underline{E}_{\Gamma}.$$

Якщо в цей вираз підставити значення струму <u>I</u>₁ та напруги <u>U</u>₁ згідно з системою рівнянь чотириполюсника в А-параметрах (4.15) і врахувати, що $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_{H}$, то для приведеного опору схеми на рис. 4.21 одержимо

$$\underline{Z}_{np} = \frac{\underline{E}_{\Gamma}}{\underline{I}_{2}} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_{H} + \underline{A}_{12} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_{H}\underline{Z}_{i} + \underline{A}_{22}\underline{Z}_{i}.$$
(4.133)

При безпосередньому узгодженому підключенні джерела енергії до навантаження отримаємо

$$\underline{\mathbf{U}}_{0}\underline{\mathbf{I}}_{0} = \frac{\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{\Gamma}}^{2}}{4\underline{\mathbf{Z}}_{\mathrm{i}}}.$$



Якщо ж навантаження до джерела підключене через чотириполюсник, то маємо

Рис. 4.21. Чотириполюсник, як передатна ланка

$$\underline{\mathbf{U}}_{2}\underline{\mathbf{I}}_{2} = \underline{\mathbf{Z}}_{\mathrm{H}}\underline{\mathbf{I}}_{2}^{2} = \frac{\underline{\mathbf{Z}}_{\mathrm{H}}\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{r}}^{2}}{\underline{\mathbf{Z}}_{\mathrm{np}}^{2}}$$

Тоді з урахуванням (4.129) для робочого коефіцієнта поширення можна записати

$$\underline{\Gamma}_{p} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\underline{E}_{i}^{2}}{4\underline{Z}_{i}} \cdot \frac{\underline{Z}_{np}^{2}}{\underline{Z}_{H} \underline{E}_{r}^{2}} \right) = \ln \frac{\underline{Z}_{np}}{2\sqrt{\underline{Z}_{i} \underline{Z}_{H}}}.$$
(4.134)

А згідно з (4.130) робочий коефіцієнт згасання дорівнює

$$A_{p} = \ln \frac{Z_{np}}{2\sqrt{Z_{i}Z_{H}}}.$$
 (4.135)

Як видно з виразів (4.134) та (4.135), на відміну від узгодженого режиму роботи чотириполюсника, коли його коефіцієнти поширення та згасання залежать лише від первинних параметрів, в неузгодженому режимі робочі коефіцієнти поширення і згасання визначаються не лише параметрами чотириполюсника, але й параметрами джерела енергії та навантаження.

Якщо чотириполюсник заданий не первинними, а вторинними параметрами, то вираз для робочого коефіцієнта згасання матиме вигляд

$$A_{p} = A + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{1 - \underline{p}_{1}^{2}} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{1}{1 - \underline{p}_{2}^{2}} \right| + \ln \left| 1 - \underline{p}_{1} \underline{p}_{2} e^{-2\underline{\Gamma}} \right|, \qquad (4.136)$$

де \underline{p}_1 та \underline{p}_2 – коефіцієнти неузгодженості, або відбиття, на вході та виході чотириполюсника відповідно.

Коефіцієнт неузгодженості <u>р</u> визначається ступенем неузгодженості джерела енергії та вхідного кола чотириполюсника, а коефіцієнт неузгодженості <u>р</u>₂ – ступенем неузгодженості вихідного кола чотириполюсника та навантаження:

$$\underline{\mathbf{p}}_{1} = \frac{\underline{Z}_{i} - \underline{Z}_{x1}}{\underline{Z}_{i} + \underline{Z}_{x1}}; \quad \underline{\mathbf{p}}_{2} = \frac{\underline{Z}_{H} - \underline{Z}_{x2}}{\underline{Z}_{H} + \underline{Z}_{x2}}.$$

Таким чином, робочий коефіцієнт згасання, що розраховується за допомогою виразу (4.136), має чотири складові: перша складова – це коефіцієнт згасання узгодженого чотириполюсника; друга та третя складові – це згасання, що вносяться внаслідок неузгодженостей на вході та виході чотириполюсника; четверта складова – це згасання, що виникає внаслідок взаємодії відбиттів сигналу на вході і виході чотириполюсника.

Розділ 5

ЧАСТОТНІ ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ

5.1. Основні характеристики та умови пропускання симетричних фільтрів

5.1.1. Призначення та класифікація частотних фільтрів

Частотними електричними фільтрами називаються пристрої, що пропускають сигнали в діапазоні одних частот і придушують сигнали в діапазоні інших частот. При цьому під пропусканням сигналів розуміють їх проходження через фільтр з малим згасанням, а під придушенням – проходження сигналів через фільтр з великим згасанням.

Діапазон частот, в якому фільтр пропускає сигнали з малим згасанням, називається смугою пропускання або смугою прозорості фільтра.

Діапазон частот, в якому сигнали проходять через фільтр з великим згасанням, називається смугою придушення або смугою непропускання фільтра. Частоти, які відповідають границям смуги пропускання, називаються граничними частотами смуги пропускання.

Сучасні фільтри діляться на аналогові та цифрові. Частотні аналогові фільтри підрозділяють на пасивні та активні. Пасивні фільтри являють собою різні комбінації з'єднань резисторів, котушок індуктивності та конденсаторів. Активні фільтри окрім пасивних елементів мають в своєму складі так звані активні елементи у вигляді напівпровідникових приладів, електронних ламп та інтегральних схем. Широке застосування в електронній техніці знаходять також п'єзоелектричні, електромеханічні фільтри та фільтри на поверхневих і об'ємних акустичних хвилях.

В даному розділі будуть розглянуті лише основи теорії пасивних реактив-них фільтрів, які складаються з конденсаторів та котушок індуктивності. При цьому вважають, що активні опори котушок індуктивності та активні провідності конденсаторів надзвичайно малі, тобто фільтри складені з ідеалізованих реактивних елементів.

При побудові та розрахунках електричних фільтрів базовими схемами є



Рис. 5.1. Несиметричні Г-подібні схеми електричних фільтрів


Рис. 5.2. Т-подібна (а) та П-подібна (б) схеми електричних фільтрів

несиметричні Г-подібні чотириполюсники (рис. 5.1), коефіцієнти поширення яких позначаються $\underline{\Gamma}/2$. При цьому у випадку узгодженого каскадного з'єднання двох таких чотириполюсників можна отримати симетричний Т- або П-подібний чотириполюсники (рис. 5.2) з удвічі більшим коефіцієнтом поширення $\underline{\Gamma}$. Для всіх цих схем характеристичні опори з боку паралельних віток позначаються через \underline{Z}_{π} , а з боку послідовних віток – через \underline{Z}_{τ} . Якщо поздовжні ланки Г-подібних чотириполюсників позначити $\underline{Z}_1/2$, а поперечні $2\underline{Z}_2$, то у Т-подібної схеми поздовжні ланки матимуть опори також $\underline{Z}_1/2$, а поперечна ланка – \underline{Z}_2 . У той же час для П-подібної схеми поздовжня ланка матиме опір \underline{Z}_1 , а поперечні – $2\underline{Z}_2$. Далі буде доведено, що при таких позначеннях елементів наведені Г-, П- та Т-подібні схеми реактивних фільтрів характеризуються однаковими співвідношеннями для розрахунку коефіцієнта поширення $\underline{\Gamma}$, тобто мають однакові передатні частотні характеристики. Слід однак враховувати, що для Г-подібних схем $\underline{\Gamma}_{\Gamma} = \underline{\Gamma}/2 = A/2 + jB/2$.

Симетричні або несиметричні пасивні реактивні фільтри з іншою конфігурацією схем можна привести до П-, Т- або Г-подібних шляхом еквівалентних перетворень.

Фільтри, у яких добуток комплексних опорів поздовжньої та поперечної ланок є постійним числом ($\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = K^2 = const$), що не залежить від частоти, називаються фільтрами типу К. Фільтри, у яких цей добуток залежить від частоти, називаються модифікованими фільтрами або фільтрами типу М.

5.1.2. Особливості частотних характеристик фільтрів

Оскільки обов'язковою умовою якісної роботи частотного фільтра є його узгодження з джерелом сигналу та навантаженням у смузі пропускання, то для несиметричних фільтрів намагаються досягти виконання умови

$$\underline{Z}_{i} = \underline{Z}_{x1}, \ \underline{Z}_{H} = \underline{Z}_{x2}, \tag{5.1}$$

а для симетричних фільтрів –

$$\underline{Z}_{i} = \underline{Z}_{x} = \underline{Z}_{H}.$$
(5.2)

Якщо ж умови (5.1) або (5.2) виконуються не в усій смузі пропускання, то можливі відбиття сигналу як на вході, так і на виході фільтра, що призводить до спотворення його частотних характеристик. Тому важливими частотними характеристиками і симетричних, і несиметричних фільтрів є частотні характеристики їх характеристичних опорів.

Для визначення передатних частотних характеристик узгоджених симетричних фільтрів можна скористатись співвідношенням (4.87), яке пов'язує комплексний коефіцієнт передачі та коефіцієнт поширення симетричного узгодженого чотириполюсника. Виходячи з цього співвідношення, отримаємо

$$K(j\omega) = K(\omega)e^{j\phi(\omega)} = e^{-\Gamma} = e^{-A-jB}$$

Звідси виходить, що

$$K(\omega) = e^{-A(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = -B(\omega),$$

$$A(\omega) = \ln \frac{1}{K(\omega)}, \quad B(\omega) = -\varphi(\omega).$$
(5.3)

Дві останні залежності, що збігаються з (4.89) та (4.90), являють собою амплітудно-частотну характеристику згасання $A(\omega)$ та коефіцієнт фази $B(\omega)$ і найчастіше використовуються при аналізі як симетричних Т- та П-подібних (рис. 5.2), так і несиметричних Г-подібних (рис. 5.1) фільтрів. Причому в останньому випадку значення цих характеристик удвічі менші, ніж у симетричних фільтрів.

Передатні АЧХ $K(\omega)$ та АЧХ згасання $A(\omega)$ дозволяють знайти смугу пропускання і смугу придушення фільтра, нерівномірність АЧХ та мінімальне згасання в смузі пропускання, а також ступінь придушення сигналу в смузі непропускання.

Залежності від частоти ФЧХ $\phi(\omega)$ та коефіцієнта фази В(ω) дозволяють оцінити фазові спотворення сигналу та знайти часові зсуви різних складових спектра сигналу при їх проходженні через фільтр.

У відповідності з розташуванням на осі частот смуги пропускання розрізняють чотири типи частотних фільтрів: фільтри нижніх і верхніх частот, а також смугові та загороджувальні фільтри.

Фільтри нижніх частот (ФНЧ) – це такі частотні фільтри, у яких смуга пропускання знаходиться між нижньою граничною частотою $\omega_{\rm H} = 0$ та деякою ненульовою частотою, що називається верхньою граничною частотою $\omega_{\rm B}$ смуги пропускання. Оскільки в реактивних фільтрах, які реалізуються за допомогою ідеалізованих реактивних елементів, сигнали, що потрапляють у смугу пропускання, не послаблюються, а сигнали, які не потрапляють у смугу пропускання, повністю придушуються, то, як видно з виразів (5.3), в смузі пропускання передатна АЧХ фільтра $K(\omega) = 1$, а коефіцієнт згасання $A(\omega) = 0$. У той же час у смузі придушення – передатна АЧХ $K(\omega) = 0$, а коефіцієнт згасання $A(\omega) = \infty$.

Побудовані у відповідності з цими положеннями передатна АЧХ К(ω) і АЧХ згасання А(ω) ідеалізованого фільтра нижніх частот наведені на рис. 5.3.



Рис. 5.3. Передатні амплітудно-частотні характеристики (а) та АЧХ згасання (б) ідеалізованих і реальних ФНЧ

Для порівняння на тих самих рисунах пунктирними лініями якісно зображені відповідні частотні характеристики реального ФНЧ. Як видно, передатна АЧХ К(ω) реального фільтра на верхній граничній частоті $\omega_{\rm B}$ зменшується в $\sqrt{2}$ разів у порівнянні з її найбільшим значенням на нижній граничній частоті $\omega_{\rm H}$ смуги пропускання. Що стосується коефіцієнта згасання A(ω), то він у



реального фільтра на граничній частоті збільшується на 3 децибели в порівнянні з його мінімальним значенням у смузі пропускання. В смузі придушення реальний ФНЧ має ненульове значення коефіцієнта передачі та значне, але скінченне за величиною згасання. Викладене є справедливим і по відношенню до інших типів фільтрів.

На рис. 5.4 наведені передатні АЧХ ідеалізованих та реальних фільтрів верхніх частот (ФВЧ). Ідеалізований ФВЧ пропускає без згасання сигнали з частотами, які перевищують деяку ненульову частоту, що називається нижньою граничною частотою $\omega_{\rm H}$. Якщо ж частота сигналу є меншою від граничної, то такий сигнал цим фільтром повністю придушується.

Ідеалізований смуговий фільтр (СФ) пропускає без згасання сигнали в деякій смузі частот, що знаходиться між нижньою $\omega_{\rm H}$ та верхньою $\omega_{\rm B}$ граничними частотами (рис. 5.5). При цьому повністю придушуються сигнали, що не потрапляють у смугу пропускання фільтра.

Ідеальний загороджувальний фільтр (ЗФ) повністю придушує сигнали в деякому діапазоні частот від нижньої $\omega_{\rm H}$ до верхньої $\omega_{\rm B}$ граничної частоти (рис. 5.6). Поза смугою придушення сигнали проходять через такий фільтр без послаблення.



Рис. 5.5. Передатні амплітудно-частотні характеристики (а) та АЧХ згасання (б) ідеалізованих і реальних смугових фільтрів



Рис. 5.6. Передатні амплітудно-частотні характеристики (а) та АЧХ згасання (б) ідеалізованих і реальних загороджувальних фільтрів

5.1.3. Умови пропускання реактивних фільтрів

Основні рівняння та нерівності фільтрів

Визначимо умови, при яких симетричні реактивні фільтри, виконані за Тта П-подібними схемами (рис. 5.2), пропускають сигнали з нульовим згасанням. Як видно з рис.5.2, а, в Т-подібному фільтрі опір кожної поздовжньої ланки $\underline{Z}_1/2$ складає половину від деякого спільного для обох схем послідовного опору \underline{Z}_1 . У той же час для П-подібного фільтра провідність кожної поперечної ланки $1/2\underline{Z}_2$ складає половину від деякої спільної для обох схем провідності $1/\underline{Z}_2$.

Якщо порівняти позначення елементів на схемах, що зображені на рис. 4.7 та рис. 5.2, а і на рис. 4.8 та рис. 5.2, б відповідно, а після цього скористатись першим з виразів (4.37) та виразом (4.40), то при такому виборі позначень, як на рис. 5.2, вирази для параметра <u>А</u>₁₁ обох чотириполюсників матимуть однаковий вигляд:

$$\underline{\mathbf{A}}_{11\mathrm{T}} = \underline{\mathbf{A}}_{11\mathrm{T}} = \underline{\mathbf{A}}_{11} = \mathbf{1} + \frac{\underline{\mathbf{Z}}_1}{2\mathbf{Z}_2}.$$
(5.4)

З іншого боку, як видно з виразу (4.93), для пасивних симетричних чотириполюсників, що працюють в узгодженому режимі –

$$\underline{\mathbf{A}}_{11} = \operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \operatorname{ch} (\mathbf{A} + \mathbf{j} \mathbf{B}).$$

Скористаємося відомим з тригонометрії співвідношенням для $ch(\alpha + \beta)$ і врахуємо, що cos jB = cos B, a sh jB = jsin B. Тоді отримаємо

$$\underline{A}_{11} = chA \cdot cosB + jshA \cdot sinB.$$
(5.5)

Оскільки в реактивних фільтрах комплексні опори <u>Z</u>₁ та <u>Z</u>₂ є уявними, тобто <u>Z</u>₁ = jX₁ а <u>Z</u>₂ = jX₂, то відношення <u>Z</u>₁/2<u>Z</u>₂, а значить і параметр <u>А</u>₁₁ будуть дійсними величинами. Тому з виразу (5.5) виходить, що

$$shA \cdot sin B = 0,$$

$$chA \cdot cosB = 1 + Z_1/2Z_2.$$
(5.6)

Співвідношення (5.6) називаються основними рівняннями реактивного фільтра і дозволяють визначити АЧХ згасання $A(\omega)$ та коефіцієнт фази $B(\omega)$ на всій осі частот.

Тепер визначимо умови пропускання сигналу симетричним реактивним фільтром, якщо його смугою пропускання є область частот, на яких згасання фільтра A дорівнює нулю. Тоді в смузі пропускання фільтра A = 0, а chA = 1, і на основі основних рівнянь фільтра (5.6) отримаємо

$$1 + \underline{Z}_1 / 2\underline{Z}_2 = \cos \mathbf{B}. \tag{5.7}$$

Як відомо, величина соѕ В може приймати значення, що лежать в межах від

(-1) до (+1). Тоді на основі виразу (5.7) можна отримати таку нерівність:

$$-1 \le 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \le 1.$$

$$(5.8)$$

Якщо до кожного члена нерівності (5.8) додати (-1) та поділити її почленно на 2, то одержимо

$$-1 \le \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \le 0, \tag{5.9}$$

або інакше –

$$0 \le 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \le 1. \tag{5.10}$$

Вирази (5.8) – (5.10) називаються основними нерівностями реактивних фільтрів і дозволяють знайти смугу пропускання та граничні частоти смуги пропускання фільтра, а значить одночасно визначити і його тип.

З виразу (5.9) видно, що основні нерівності реактивних фільтрів виконуються лише у випадку від'ємного значення відношення $\underline{Z}_1/4\underline{Z}_2$, коли останнє за абсолютною величиною не перевищує одиниці. Якщо врахувати, що комплексні опори \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 є уявними, то умовою існування смуги пропускання фільтра є виконання двох наступних нерівностей –

$$\frac{X_1}{4X_2} < 0, \quad \left| \frac{X_1}{4X_2} \right| < 1.$$
 (5.11)

Перша нерівність показує, що реактивні опори у поздовжній та поперечній вітках реактивного фільтра мають різний характер, а друга нерівність характеризує той факт, що в смузі пропускання за абсолютною величиною реактивний опір X_1 повинен бути меншим за величину $4X_2$. За допомогою нерівностей (5.11) можна легко визначити тип фільтра графічним методом, якщо відома його схема.

Виходячи з викладеного, основну нерівність (5.9) реактивного фільтра можна представити у вигляді

$$-1 \le \frac{X_1}{4X_2} \le 0. \tag{5.12}$$

За допомогою нерівності (5.12) можна знайти граничні частоти смуги пропускання будь-якого реактивного фільтра, якщо записати та розв'язати відносно цих граничних частот систему рівнянь

$$X_1 = -4X_2, \quad X_1 = 0. \tag{5.13}$$

Дійсно, реактивні опори X_1 та X_2 є функціями частоти і вигляд цих залежностей відомий, якщо відома схема фільтра. Граничні частоти смуги пропускання фільтра можна знайти за допомогою рівнянь (5.13) аналітично, якщо записати функціональні залежності $X_1(\omega)$ та $X_2(\omega)$, або графічно, якщо побудувати графіки цих частотних залежностей.

Повторні опори реактивних фільтрів

Знайдемо аналітичні вирази для характеристичних опорів реактивних фільтрів. З теорії симетричних чотириполюсників відомо, що їх характеристичні опори однакові за величиною, тобто $\underline{Z}_{x1} = \underline{Z}_{x2} = \underline{Z}_{x}$. При узгодженому навантаженні характеристичний опір називають повторним і його можна знайти з виразу

$$\underline{Z}_{\pi} = \underline{Z}_{x} = \sqrt{\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}}.$$
(5.14)

У разі позначень елементів, вибраних на рис. 5.2, на основі співвідношень (4.37) та (4.38) для Т-подібного фільтра отримаємо

$$\underline{\mathbf{A}}_{12_{\mathrm{T}}} = \underline{\mathbf{Z}}_{1} + \frac{\underline{\mathbf{Z}}_{1}^{2}}{4\underline{\mathbf{Z}}_{2}}, \quad \underline{\mathbf{A}}_{21_{\mathrm{T}}} = \frac{1}{\underline{\mathbf{Z}}_{2}}, \quad (5.15)$$

а на основі виразів (4.41) та (4.42) для П-подібного фільтра –

$$\underline{\mathbf{A}}_{12\pi} = \underline{\mathbf{Z}}_1, \ \underline{\mathbf{A}}_{21\pi} = \frac{\underline{\mathbf{Z}}_1 + 4\underline{\mathbf{Z}}_2}{4\underline{\mathbf{Z}}_2^2}.$$
(5.16)

Тоді для характеристичних опорів Т- та П-подібного фільтра можна записати

$$\underline{Z}_{\Pi\Pi} = \sqrt{\underline{Z}_{1}\underline{Z}_{2}(1 + \underline{Z}_{1}/4\underline{Z}_{2})},$$

$$\underline{Z}_{\Pi\Pi} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1}\underline{Z}_{2}}{1 + \underline{Z}_{1}/4\underline{Z}_{2}}}.$$
(5.17)

Вирази (5.17) можна використовувати і для розрахунку характеристичних опорів несиметричних Г-подібних реактивних фільтрів, які реалізуються за схемами, що зображені на рис. 5.1. При цьому характеристичний опір цих чотириполюсників з боку поперечних ланок дорівнюватиме Z_{nn} , а з боку поздовжних ланок — Z_{nr} .

Визначимо, який характер матимуть характеристичні опори симетричних і несиметричних реактивних фільтрів у смузі пропускання та поза нею. Для цього визначимо знаки співмножників підкорінних виразів у системі рівнянь (5.17). Оскільки в смузі пропускання фільтра опори Z_1 та Z_2 є уявними величинами різного знаку, то в цьому випадку добуток $Z_1Z_2 > 0$. Друга складова у виразах (5.17) в смузі пропускання також є додатною внаслідок виконання основної нерівності фільтра (5.10). Таким чином, у смузі пропускання характеристичні опори реактивних фільтрів носять чисто активний характер.

У смузі придушення, коли основні нерівності фільтра (5.8) – (5.10) не виконуються, і при однаковому, і при різному характері реактивних опорів X_1 та X_2 підкорінні вирази рівнянь (5.17) будуть від'ємними, а значить характеристичні опори реактивних фільтрів матимуть реактивний характер.

5.2. Реактивні фільтри нижніх частот

5.2.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання фільтрів нижніх частот

При проходженні крізь фільтри нижніх частот постійна складова сигналу та всі гармонічні коливання, що мають частоти менші ніж гранична частота $\omega_{\rm B}$, повинні без згасання проходити на вихід фільтра, а гармонічні коливання з частотами $\omega > \omega_{\rm B}$ повинні придушуватися в ньому.

Такі схеми можуть бути реалізовані як за Г-подібними (рис. 5.1), так і за Т- та П-подібними (рис. 5.2) схемами. Поздовжні ланки схем ФНЧ повинні мати незначний опір в області нижніх частот і, навпаки, дуже великий – в діапазоні верхніх частот. Таким вимогам задовольняє реактивний елемент – індуктивність. Поперечні ланки таких фільтрів повинні бути ємнісними, оскільки мають великий опір для сигналів нижніх частот і малий – для високочастотних сигналів.

Оскільки між параметрами і характеристиками симетричних та несиме-



Рис. 5.7. Схеми симетричних реактивних фільтрів нижніх частот

тричних фільтрів існує однозначний зв'язок, то в подальшому обмежимося розглядом лише симетричних Т- і П-подібних реактивних фільтрів. Схеми таких фільтрів нижніх частот наведені на рис. 5.7. Для обох цих схем спільними параметрами є комплексні опори –

$$\underline{Z}_1 = j\omega L, \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C}.$$
(5.18)

Добуток цих опорів $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = L/C = \text{const}$, тому наведені на рис. 5.7 фільтри є фільтрами типу К.



Рис. 5.8. Графічне визначення типу фільтра та його смуги пропускання

Доведемо, що дані фільтри дійсно являють собою ФНЧ. Для цього побудуємо в спільній системі координат частотні залежності $X_1(\omega)$ та $4X_2(\omega)$ і графічним методом розв'яжемо для даного випадку систему нерівностей (5.11). Результати такого розв'язання, які наведені на рис. 5.8, показують, що смуга пропускання даних фільтрів знаходиться в інтервалі частот від нижньої граничної частоти $\omega_{r1} = \omega_{H} = 0$ до верхньої — $\omega_{r2} = \omega_{B} \neq 0$, а це відповідає визначенню фільтра нижніх частот. Щоб знайти аналітичний вираз для верхньої

граничної частоти смуги пропускання ФНЧ, скористаємося першим з рівнянь системи (5.13) і отримаємо

$$\omega_{\rm B} \mathbf{L} = 4 \frac{1}{\omega_{\rm B} \mathbf{C}}, \quad \omega_{\rm B} = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{LC}}}.$$
(5.19)

Таким чином, реактивні фільтри нижніх частот мають смугу пропускання в інтервалі частот від $\omega_{\rm H} = 0$ до $\omega_{\rm B} = 2/\sqrt{\rm LC}$.

5.2.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів нижніх частот

Для реалізації узгодженої роботи частотних фільтрів важливе значення має знання частотних залежностей характеристичних опорів. Щоб отримати частотні характеристики цих опорів для Т- і П-подібного ФНЧ, скористаємося співвідношеннями (5.17), які характеризують повторні опори реактивних фільтрів будь-якого типу.

Якщо в ці вирази підставити значення опорів Z_1 та Z_2 , то для повторних опорів ФНЧ одержимо

$$\underline{Z}_{\Pi\Pi} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_B^2}},$$

$$\underline{Z}_{\Pi\Pi} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 LC/4}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_B^2}}.$$
(5.20)

З виразів (5.20) видно, що в смузі пропускання, коли $\omega < \omega_{\rm B}$, повторні опори чисто активні. Причому при виконанні умови ω << ω_в замість (5.20) можна записати

$$\underline{Z}_{\Pi\Pi} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot j \frac{\omega}{\omega_{B}} = \frac{j\omega L}{2}, \quad \underline{Z}_{\Pi\Pi} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{\omega_{B}}{j\omega} = \frac{2}{j\omega C}.$$
 (5.21)

Отже, виходить, що в смузі придушення повторний опір Т-подібного ФНЧ має індуктивний, а П-подібного – ємнісний характер. Дійсно, якщо частота вхідного сигналу зростає, то вхідний опір

будь-якої з двох розглянутих схем ФНЧ визна- Z_п(ω) чається першими їх ланками, оскільки різко зменшуються опори поперечних ємнісних ланок.

Як видно з наведених на рис. 5.9 амплітудно-частотних характеристик повторних опорів $Z_{III}(\omega)$ та $Z_{IIII}(\omega)$, характеристичні опори фільтрів слабо змінюються майже в усій смузі пропускання. Тому в разі розрахунків таких фільтрів наближено приймають, що в діапазоні частот $\Delta \omega \approx 0.8...0,85 \omega_{\rm B}$ характеристичні опори



Рис. 5.9. Амплітудно-частотні характеристики повторних опорів ФНЧ

$$Z_{\rm III} \approx Z_{\rm IIII} \approx \sqrt{L/C}.$$
 (5.22)

Однак при збільшенні частоти і наближенні її до границі смуги пропускання величина Z_{m} починає швидко збільшуватись, а величина Z_{m} – швидко зменшуватись. Через таку несталість характеристичних опорів у смузі пропускання робота фільтрів супроводжується відбиттями, які призводять до погіршення їх фільтруючих властивостей.

5.2.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази фільтрів нижніх частот

В якості основної амплітудно-частотної характеристики фільтрів найчастіше використовується залежність від частоти коефіцієнта згасання $A(\omega)$, а в якості фазочастотної характеристики – коефіцієнт фази $B(\omega)$. Ці частотні характеристики можна отримати за допомогою основних рівнянь фільтрів (5.6). При цьому передатні частотні характеристики Т- та П-подібних фільтрів відрізнятися не будуть, оскільки однаковими для таких фільтрів будуть первинні параметри <u>A_{11т}</u> і <u>A_{11п}</u>, на основі яких отримані основні рівняння фільтрів.

В смузі пропускання коефіцієнт згасання фільтра $A(\omega) = 0$, тому з основних рівнянь маємо

$$\underline{\mathbf{A}}_{11} = \mathbf{chA} \cdot \mathbf{cosB} = \mathbf{cosB} = 1 + \underline{\mathbf{Z}}_1 / 2\underline{\mathbf{Z}}_2,$$

а з урахуванням значень опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 одержимо

$$\cos \mathbf{B} = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} = 1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_{\rm B}^2}.$$
 (5.23)

Якщо частота вхідного сигналу $\omega = 0$, то соз B = 1, а коефіцієнт фази B = 0. На границі смуги пропускання, коли $\omega = \omega_{\rm B}$, величина соз B = -1, а коефіцієнт фази $B = \pm \pi$.

Щоб вирішити питання про знак коефіцієнта фази на границі смуги пропускання, а значить і в смузі пропускання, можна побудувати векторну діаграму для будь-якого з двох ФНЧ, що зображені на рис. 5.7.

На рис. 5.10 наведена векторна діаграма для Т-подібного фільтра нижніх частот, побудова якої розпочинається із зображення вектора вихідної напруги

<u>U</u>₂. Оскільки характеристичний опір <u>Z</u>_{пт} у смузі пропускання фільтра носить активний характер, то опір навантаження фільтра в разі його узгодженої роботи також активний і струм <u>I</u>₂ за фазою збігається з напругою <u>U</u>₂. Вектор напруги <u>U</u>_{L/2} на правому плечі фільтра випереджає на $\pi/2$ вектор струму <u>I</u>₂. Сума векторів напруг <u>U</u>₂ та <u>U</u>_{L/2} дає вектор напруги на ємності <u>U</u>_c. Вектор струму <u>I</u>_c випереджає на $\pi/2$ вектор напруги <u>U</u>_c. Якщо



п.с. 3.10. Бекторна дапрама для Т-подібного фільтра нижніх частот

складемо вектори струмів I_2 та I_c , то одержимо вектор вхідного струму I_1 , який за фазою випереджає вектор вихідного струму I_2 . Це означає, що в смузі пропускання коефіцієнт фази $B(\omega)$ додатний і змінюється від 0 до π . Отже, на основі викладеного та виразу (5.23) для коефіцієнта фази можна записати

$$B(\omega) = \arccos\left(1 - 2\omega^2 / \omega_{\rm B}^2\right). \tag{5.24}$$

У смузі придушення ФНЧ, коли $\omega > \omega_{\rm B}$, коефіцієнт згасання фільтра $A(\omega) \neq 0$. Як наслідок, перше з основних рівнянь фільтра (5.6) є справедливим лише у випадку, коли коефіцієнт фази $B(\omega) = 0, \pm \pi$, тобто є постійною, незалежною від частоти величиною. Оскільки на границі смуги пропускання величина $B(\omega) = \pi$, а стрибка фази бути не може, то і в усій смузі придушення коефіцієнт фази зберігає це постійне значення. Тоді в цьому діапазоні частот соsB = -1, і друге рівняння системи (5.6) матиме вигляд

$$chA \cdot cosB = -chA = 1 - 2\omega^2 / \omega_B^2$$
,

або інакше –

$$\mathrm{chA}=2\,\omega^2/\omega_{\rm\scriptscriptstyle B}^2-1.$$

Як результат, амплітудно-частотна характеристика згасання ФНЧ запишеться у вигляді

$$A(\omega) = \operatorname{Arch}\left(2\frac{\omega^2}{\omega_{\rm B}^2} - 1\right).$$
 (5.25)

Залежності від частоти АЧХ згасання та коефіцієнта фази, побудовані у відповідності з ⁴ виразами (5.25) і (5.24), показані на рис. 5.11.

Наостанок зазначимо, що недоліками реактивних ФНЧ типу К є висока нелінійність фазочастотних характеристик, яка призводить до фазових спотворень сигналів, та недостатньо висока крутість АЧХ згасання на границі смуги пропускання, внаслідок чого невисокими є вибірні властивості таких фільтрів.



Рис. 5.11. АЧХ згасання А(ω) та коефіцієнт фази В(ω) ФНЧ

5.2.4. Розрахунок реактивних фільтрів нжніх частот

Розрахунок реактивних фільтрів нижніх частот полягає у визначенні параметрів індуктивності L та ємності C, на основі яких знаходять параметри елементів конкретного фільтра. При цьому заданими вважають ширину смуги пропускання $\Delta \omega_{\phi}$ та активний опір навантаження R_н фільтра, з яким він повинен узгоджуватися.

Для узгодження фільтра з навантаженням у смузі пропускання необхідно забезпечити виконання умови (5.2). Виходячи з цього та враховуючи (5.22), можна записати

$$\mathbf{R}_{_{\mathrm{H}}} = \underline{Z}_{_{\mathrm{X}}} = \underline{Z}_{_{\mathrm{\Pi}}} = \sqrt{L/C}.$$
 (5.26)

Окрім того відомо, що верхня гранична частота смуги пропускання ФНЧ визначається виразом (5.19) і дорівнює ширині смуги пропускання –

$$\omega_{\rm B} = \Delta \omega_{\rm p} = 2/\sqrt{\rm LC}$$
.

З останнього виразу виходить, що

$$L = \frac{4}{\Delta \omega_{\phi}^2 C} = \frac{4}{\omega_{B}^2 C}.$$
(5.27)

Якщо вираз (5.27) підставити в (5.26), то для ємності отримаємо

$$C = 2/\omega_{\rm B}R_{\rm H}.$$
 (5.28)

Після підстановки (5.28) в (5.27) для розрахунку індуктивності отримаємо вираз

$$\mathbf{L} = 2\mathbf{R}_{\mathrm{H}}/\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} \,. \tag{5.29}$$

Після розрахунку ємності С та індуктивності L можна отримати конкретні значення параметрів елементів схем ФНЧ, що зображені на рис. 5.7. Так, для T-подібного фільтра ємність конденсатора визначається виразом (5.28), а індуктивність котушки дорівнює L/2. В свою чергу, для Пподібного ФНЧ індуктивність котушки знаходять за допомогою виразу (5.29), а ємність конденсатора дорівнює C/2.

5.3. Реактивні фільтри верхніх частот

5.3.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання фільтрів верхніх частот

У фільтрах верхніх частот постійна складова спектра сигналу та всі гармонічні сигнали з частотами, що менші від деякої граничної частоти $\omega_{\rm H}$, повинні придушуватися, а сигнали з частотами, які перевищують граничну частоту, безперешкодно проходитимуть через такий фільтр. Це означає, що в поз-довжніх ланках Т- та П-подібного ФВЧ (рис. 5.12) необхідно використовувати конденсатори, а в поперечних – котушки індуктивності. Дійсно, завдяки наяв-ності в поздовжніх ланках цих схем ємностей такі фільтри матимуть велике згасання для сигналів нижніх частот і мале для сигналів верхніх частот. Разом з тим, введення в поперечні ланки індуктивностей збільшує вхідну провідність на нижніх частотах і зменшує на верхніх, а це також призводить до придушення сигналів в області нижніх частот.



Рис. 5.12. Схеми симетричних реактивних фільтрів верхніх частот

Таким чином, для схем реактивних фільтрів, що наведені на рис. 5.12, маємо

$$\underline{Z}_1 = 1/j\omega C, \quad \underline{Z}_2 = j\omega L.$$

Очевидно, що ці фільтри, як і раніше розглянуті ФНЧ, є фільтрами типу К, оскільки $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = \sqrt{L/C} = \text{const.}$

Граничні частоти смуги пропускання ФВЧ визначимо за допомогою системи рівнянь (5.13). З цих рівнянь маємо

$$1 = 4\omega_{r}^{2}LC, -1/\omega_{r}C = 0.$$

Звідси можна отримати

$$\omega_{r1} = \omega_{H} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}, \quad \omega_{r2} = \omega_{B} = \infty.$$
 (5.30)

Таким чином, смуга пропускання фільтра верхніх частот лежить в інтервалі від $\omega_{\rm H} = 1/2\sqrt{\rm LC}$ до $\omega_{\rm B} = \infty$, а область частот, де $\omega < \omega_{\rm H}$, є його смугою придушення.

5.3.2. Частотні характеристики повторного опору фільтрів верхніх частот

Для аналізу характеристичних опорів фільтрів верхніх частот, як і у випадку ФНЧ, скористаємося загальними виразами для повторних опорів (5.17). При цьому врахуємо, що $\underline{Z}_1 = 1/j\omega C$, а $\underline{Z}_2 = j\omega L$, і одержимо

$$\underline{Z}_{\rm ITT} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{j\omega C \cdot 4j\omega L}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega^2 LC}},$$

або остаточно –

$$\underline{Z}_{\text{IIT}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{H}}^2}{\omega^2}}, \qquad (5.31)$$

158

Для схеми П-подібного ФВЧ отримаємо

$$\underline{Z}_{\Pi\Pi} = \sqrt{\frac{L}{C}} / \sqrt{1 - \frac{\omega_{\rm H}^2}{\omega^2}}.$$
(5.32)

Очевидно, що характер повторного опору залежить від співвідношення між частотою ω зовнішнього сигналу та нижньою граничною частотою смуги пропускання фільтра. У смузі пропускання, коли $\omega > \omega_{\rm H}$, цей опір має активний характер, оскільки $(1 - \omega_{\rm H}^2 / \omega^2) > 0$. У смузі придушення величина $(1 - \omega_{\rm H}^2 / \omega^2) < 0$ і характер повторного опору реактивний.

Нехай частота зовнішнього гармонічного сигналу $\omega \ll \omega_{\rm H}$. Нехтуючи в підкорінному виразі співвідношень (5.31) та (5.32) одиницею у порівнянні з величиною $\omega_{\rm H}^2/\omega^2$, одержимо

$$\underline{Z}_{\Pi\Pi} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \left(-j\frac{\omega_{H}}{\omega} \right) = -j\frac{1}{2\omega C},$$

$$\underline{Z}_{\Pi\Pi} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} / \left(j\frac{\omega}{\omega_{H}} \right) = j2\omega L.$$
(5.33)

Отже, в смузі придушення опір \underline{Z}_{nr} має ємнісний, а опір \underline{Z}_{nn} – індуктивний характер. Дійсно, якщо $\omega \rightarrow 0$, то ємнісні опори поздовжніх ланок фільтрів є нескінченно великими, а індуктивні опори поперечних ланок дуже малі. В результаті вхідні опори ФВЧ визначаються опорами їх перших віток:

$$\underline{Z}_{BXT} \approx -j \frac{1}{2\omega C}; \ \underline{Z}_{BXT} \approx j 2\omega L. \quad (5.34) \ Z_{\Pi}(\omega)$$

Цей результат збігається з отриманим вище.

Амплітудно-частотні характеристики повторних опорів Т- та П-подібних ФВЧ наведені на рис. 5.13. З цих залежностей видно, що в більшій частині інтервалу частот, який відповідає смузі пропускання, повторні опори зберігають майже незмінні значення –

$$\underline{Z}_{\rm III} \approx \underline{Z}_{\rm IIII} \approx \sqrt{L/C}. \tag{5.35}$$



Рис. 5.13. Амплітудно-частотні характеристики повторних опорів ФВЧ

Виходячи з (5.35), вибирають активний опір навантаження ФВЧ та внутрішній опір джерела сигналу з метою їх узгодження з фільтром. З іншого боку, різка залежність повторних опорів від частоти поблизу нижньої граничної частоти ФВЧ робить неможливим їх узгодження як на вході, так і на виході. Це, як і у випадку з ФНЧ, значно погіршує роботу ФВЧ, оскільки призводить до спотворення їх передатних частотних характеристик.

5.3.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази фільтрів верхніх частот

Коефіцієнт згасання $A(\omega)$ та коефіцієнт фази $B(\omega)$, як і у випадку аналізу ФНЧ, визначають за допомогою основних рівнянь фільтрів (5.6), які справедливі і для Т-подібних, і для П-подібних схем.

В смузі пропускання ФВЧ коефіцієнт згасання A = 0 і тому з другого рівняння системи (5.6) маємо

$$chA \cdot cosB = cosB = 1 + \underline{Z}_1 / 2\underline{Z}_2, \qquad (5.36)$$

а з урахуванням (5.34)

$$\cos \mathbf{B} = 1 - 2\omega_{\rm H}^2 / \omega^2 \,. \tag{5.37}$$

Якщо частота сигналу $\omega \to \infty$, то $\cos B = 1$ і коефіцієнт фази B = 0. На границі смуги пропускання, коли $\omega = \omega_{\rm H}$, $\cos B = 1$, а величина коефіцієнта фази $B = \pm \pi$. Питання про знак коефіцієнта фази на граничній частоті можна



Рис. 5.14. Векторна діаграма для П-подібного ФВЧ

вирішити, якщо побудувати векторну діаграму для ФВЧ. Відносне розташування векторів вхідних та вихідних напруг або струмів на цій діаграмі дозволяє однозначно визначити знак коефіцієнта фази.

Як приклад на рис. 5.14 наведена векторна діаграма для П-подібного фільтра верхніх частот. Її побудову починають з вихідного струму \underline{I}_2 , з яким збігається вектор вихідної напруги \underline{U}_2 внаслідок активного характеру узгодженого з фільт-

ром навантаження. Вектор струму індуктивності правої поперечної ланки I_{2L} відстає за фазою від вектора напруги U_2 на $\pi/2$. Сума векторів струмів I_2 та I_{2L} дає ємнісний струм I_c . Вектор напруги U_c відстає від струму I_c на кут $\pi/2$. Сума векторів напруг U_2 та U_c визначає вектор вхідної напруги U_1 . Цей вектор відстає від вектора вихідної напруги U_2 , а значить у смузі пропускання коефіцієнт фази $B(\omega) < 0$ і змінюється від - π до нуля. З виразу (5.37) для цього коефіцієнта отримаємо

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\omega}) = \arccos(1 - 2\omega_{\rm H}^2/\omega^2). \tag{5.38}$$

У смузі придушення фільтра його згасання $A(\omega) \neq 0$ і тому перше з основних рівнянь реактивного фільтра (5.6) є справедливим лише в тому випад-

ку, коли $B = 0, \pm \pi$. Тобто в смузі придушення ФВЧ коефіцієнт фази $B(\omega)$ є постійною незалежною від частоти величиною. Якщо врахувати, що на границі смуги пропускання, коли $\omega = \omega_{\rm H}$, коефіцієнт фази $B = -\pi$, то і в усій смузі придушення він зберігає це значення.

Отже, в смузі придушення соs B = -1 і на основі другого з основних рівнянь фільтра (5.6) можна записати

 $chA \cdot cosB = -chA = 1 - 2\omega_{H}^{2}/\omega^{2}$, а для АЧХ згасання ФВЧ матимемо

$$A(\omega) = \operatorname{Arch}\left(2\frac{\omega_{\rm H}^2}{\omega^2} - 1\right).$$
 (5.39)

На рис. 5.15 зображені залежності від частоти коефіцієнтів згасання $A(\omega)$ та фази $B(\omega)$, побудовані у відповідності з виразами (5.39) та (5.38). Слід зазначити, що Т- та П-подібні реактивні ФВЧ мають такі самі недоліки, як і раніше розглянуті ФНЧ, однак у разі малої за величи-



Рис. 5.15. АЧХ згасання А(ω) та коефіцієнт фази В(ω) ФВЧ

ною нижньої граничної частоти смуги пропускання крутість АЧХ згасання поблизу цієї частоти буде набагато більшою, ніж у ФНЧ.

5.3.4. Розрахунок реактивних фільтрів верхніх частот

Розрахунок фільтрів верхніх частот, як і раніше розглянутих фільтрів нижніх частот, полягає у визначенні індуктивності L та ємності C, якщо відома нижня гранична частота $\omega_{\rm H}$ смуги пропускання та узгоджений опір, на який навантажено фільтр.

Вважають, що в смузі пропускання опір навантаження повинен дорівнювати характеристичному опору фільтра –

$$\mathbf{R}_{_{\mathrm{H}}} = \underline{Z}_{_{\Pi\Pi}} = \underline{Z}_{_{\Pi\Pi}} = \sqrt{L/C} \; .$$

Окрім того, нижня гранична частота смуги пропускання ФВЧ дорівнює

$$\omega_{\rm H} = \frac{1}{2\sqrt{\rm LC}} \,.$$

Якщо розв'язати систему цих двох рівнянь, то можна записати розрахункові співвідношення для індуктивності L та ємності C:

$$L = \frac{R_{\rm H}}{2\omega_{\rm H}}; \quad C = \frac{1}{2\omega_{\rm H}R_{\rm H}}.$$
 (5.40)

161

Щоб розрахувати параметри реактивних елементів конкретних фільтрів, треба звернутися до схем на рис. 5.12 і врахувати, що у Т-подібного фільтра ємності у поздовжніх ланках мають величину 2С, а індуктивність у поперечній ланці – L. У П-подібного ФВЧ індуктивності в поперечних ланках мають величину 2L, а ємність поздовжньої ланки – C.

5.4. Реактивні смугові фільтри

5.4.1. Схеми та граничні частоти смуги пропускання смугових фільтрів

Відомо, що системи зв'язаних коливальних контурів можуть успішно використовуватися як смугові фільтри. Однак через слабку залежність від частоти реактивного опору зв'язку такі фільтри мають невисоку крутість АЧХ згасання при переході зі смуги пропускання в смугу придушення.

Можна значно покращити частотну вибірність смугових фільтрів, реалізованих на основі зв'язаних коливальних контурів, якщо в якості опору зв'язку використати паралельний або послідовний коливальний контур. На рис. 5.16 наведені Т- та П-подібні схеми реактивних смугових фільтрів, які використовують послідовні коливальні контури в поздовжніх ланках і паралельні — в поперечних. Параметри коливальних контурів вибирають таким чином, щоб їх резонансні частоти збігалися:

$$\omega_{01} = \omega_{p2} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}},$$
(5.41)

де ω₀₁, ω_{p2} – резонансні частоти послідовного та паралельного коливальних контурів відповідно.

3 виразу (5.41) видно, що $L_1C_1 = L_2C_2$, а значить добуток

$$\underline{Z}_{1}\underline{Z}_{2} = \frac{j(\omega L_{1} - 1/\omega C_{1})}{j(\omega C_{2} - 1/\omega L_{2})} = \frac{L_{2}}{C_{1}} = \frac{L_{1}}{C_{2}} = \text{const.}$$
(5.42)

Це означає, що реактивні симетричні смугові фільтри, схеми яких зображені на рис. 5.16, являють собою фільтри типу К. В цих фільтрах послідовний коливальний контур має дуже малий опір на резонансній та близьких до неї частотах і майже без ослаблення пропускає коливання в деякій смузі частот. Одночасно цей коливальний контур придушує коливання з тими частотами, які не потрапляють в його смугу пропускання. Паралельні коливальні контури, які входять до складу смугових фільтрів (СФ), для коливань з частотами, що потрапляють у смугу пропускання послідовного контура, мають дуже великий опір, а інші коливання будуть ними придушуватись.



Процес графічного визначення граничних частот смуги пропускання СФ за допомогою системи нерівностей (5.11) ілюструється рис. 5.17, з якого видно, що основні нерівності реактивних фільтрів (5.8) – (5.10) виконуються в інтервалі частот від $\omega_{\rm H}$ до $\omega_{\rm B}$.

Для визначення граничних частот смуги пропускання СФ аналітичним методом на основі нерівності (5.9) можна одержати рівняння

$$\underline{Z}_1/4\underline{Z}_2 = -1. \tag{5.43}$$

Для комплексних опорів \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 , відповідно до рис. 5.16, маємо

$$\underline{Z}_{1} = j \left(\omega L_{1} - \frac{1}{\omega C_{1}} \right) = j \rho_{1} \left(\frac{\omega}{\omega_{0}} - \frac{\omega_{0}}{\omega} \right),$$
$$\underline{Z}_{2} = \frac{j \omega L_{2} \cdot 1/j \omega C_{2}}{j \omega L_{2} + 1/j \omega C_{2}} = \rho_{2} \frac{1}{j \left(\frac{\omega}{\omega_{0}} - \frac{\omega_{0}}{\omega} \right)},$$
(5.44)



Рис. 5.17. Перевірка виконання основної нерівності для фільтрів, схеми яких наведені на рис. 5.16

де $\rho_1 = \sqrt{L_1/C_1}$ та $\rho_2 = \sqrt{L_2/C_2}$ – характеристичні опори послідовного та паралельного коливального контура відповідно.

Після підстановки виразів (5.44) в (5.43) отримаємо

$$\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2.$$
(5.45)

Оскільки резонансні частоти послідовного та паралельного коливальних контурів однакові, то

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1/\omega_0 C_1}{1/\omega_0 C_2} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Тоді вираз (5.45) прийме вигляд

$$\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\underline{C}_2}{\underline{C}_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2.$$
(5.46)

Отже, враховуючи (5.43), граничні частоти смуги пропускання смугових фільтрів можна знайти з рівняння

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1.$$
 (5.47)

Добудемо з виразу (5.47) корінь квадратний і здійснимо деякі прості перетворення:

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 1;$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} (\omega^2 - \omega^2) = \omega_0 \omega,$$

або в іншому вигляді –

$$\omega^2 - \omega_0^2 \mp 2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \omega_0 \omega = 0.$$

Оскільки $\omega_0 = 1 / \sqrt{L_1 C_1}$, то остаточно одержимо

$$\omega^2 \mp 2 \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \omega - \omega_0^2 = 0.$$
 (5.48)

Розв'яжемо квадратне рівняння (5.48), відкинувши від'ємні розв'язки як ті, що не мають сенсу, і для граничних частот смуги пропускання СФ отримаємо

$$\omega_{r2} = \omega_{B} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{L_{1}C_{2}}} + \sqrt{\frac{4}{L_{1}C_{2}}} + \frac{4}{L_{1}C_{1}} \right) = \sqrt{\frac{1}{L_{1}C_{2}}} + \frac{1}{L_{1}C_{1}} + \frac{1}{\sqrt{L_{1}C_{2}}},$$

$$\omega_{r1} = \omega_{H} = \sqrt{\frac{1}{L_{1}C_{2}}} + \frac{1}{L_{1}C_{1}} - \frac{1}{\sqrt{L_{1}C_{2}}}.$$
(5.49)

З виразів (5.49) видно, що добуток граничних частот смуги пропускання СФ дорівнює

$$\omega_{\rm H} \cdot \omega_{\rm B} = 1/L_1 C_1 = \omega_0^2, \qquad (5.50)$$

а ширина смуги пропускання таких фільтрів

$$\Delta \omega_{\phi} = \omega_{\rm \scriptscriptstyle B} - \omega_{\rm \scriptscriptstyle H} = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}.$$
(5.51)

Співвідношення (5.50) та (5.51) використовуються при розрахунках параметрів смугових фільтрів.

5.4.2. Частотні характеристики повторного опору смугових фільтрів

Як і у разі аналізу фільтрів нижніх та верхніх частот, для отримання АЧХ повторного опору СФ скористаємося співвідношеннями (5.17).

У випадку аналізу Т-подібної схеми смугового фільтра (рис. 5.16, а) скористаємося першим з виразів (5.17) і врахуємо, що добуток $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = L_1/C_2$, а відношення $\underline{Z}_1/4\underline{Z}_2$ визначається співвідношенням (5.46). Тоді отримаємо

$$\underline{Z}_{\Pi T} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{C_2}{4C_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}.$$
(5.52)



Частотна залежність модуля повіторного опору $Z_{nrr}(\omega)$, що відповідає виразу (5.52), і є амплітудно-частотною характеристикою повторного опору Т-подіб-ного СФ, наведена на рис. 5.18. В смузі пропускання опір Z_{nr} має активний характер і мало змінюється поблизу резо- $Z_{nr} \approx \sqrt{L_1/C_2}$. Якщо ж частота Z_{nr} є чисто реактивним і носить він також реактивний, але має 5.18 видно, що в діапазоні часто бе як Т-подібний ФВЧ, а в діапа-

нансної частоти ω_0 . При цьому маємо, що $\underline{Z}_{IIT} \approx \sqrt{L_1/C_2}$. Якщо ж частота вхідного сигналу $\omega < \omega_H$, то повторний опір \underline{Z}_{IIT} є чисто реактивним і носить ємнісний характер, а при частотах $\omega > \omega_B - він$ також реактивний, але має вже індуктивний характер. Окрім того, з рис. 5.18 видно, що в діапазоні частот, де $\omega < \omega_0$, смуговий фільтр поводить себе як Т-подібний ФВЧ, а в діапазоні частот, де $\omega > \omega_0$, як Т-подібний ФНЧ. Це пов'язано з тим, що при $\omega < \omega_0$ послідовний коливальний контур має ємнісний характер опору, а паралельний – індуктивний. Якщо ж частота сигналу $\omega > \omega_0$, то опори контурів змінюють свій характер на протилежний.

Скориставшись другим із співвідношень (5.17), для характеристичного опору П-подібного смугового фільтра одержимо

$$\underline{Z}_{\text{IIII}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C_2}{4C_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$
(5.53)

Амплітудно-частотна характеристика повторного опору П-подібного С Φ показана на рис. 5.19. Подібно до попереднього випадку на частотах $\omega < \omega_0$ да-

ний фільтр поводить себе як Пподібний ФВЧ, а на частотах $\omega > \omega_0 -$ як П-подібний ФНЧ. Слід також зазначити, що в смузі придушення характер вхідного опору СФ, так само як і раніше розглянутих ФНЧ та ФВЧ, визначається характером опорів вхідних ланок.



Рис. 5.19. АЧХ повторного опору П-подібного СФ

5.4.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази смуговихфільтрів

Для визначення АЧХ згасання $A(\omega)$ та коефіцієнта фази $B(\omega)$ смугових фільтрів треба, як і раніше, скористатись основними рівняннями фільтрів (5.6), а також співвідношенням (5.46).

У смузі придушення згасання $A \neq 0$, тому перше з основних рівнянь (5.6) є справедливим лише у випадку, коли $B(\omega) = 0, \pm \pi$. Тоді для частотної залежності згасання $A(\omega)$ можна записати

chA =
$$\left| 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \right| = \left| 1 - \frac{C_2}{2C_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right|,$$

або

$$A(\omega) = \operatorname{Arch} \left| 1 - \frac{C_2}{2C_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right|.$$
 (5.54)

Залежність, побудована у відповідності з виразом (5.54), наведена на

рис. 5.20, а. Як видно, в області нижніх частот ($\omega < \omega_0$) АЧХ згасання така сама, як і у ФВЧ, а в області верхніх частот ($\omega > \omega_0$) – така ж як і у ФНЧ.

Вираз для коефіцієнта фази СФ у смузі пропускання, де згасання A = 0, можна отримати також на основі тих самих основних рівнянь фільтрів. При цьому матимемо

$$\cos \mathbf{B} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} = 1 - \frac{C_2}{2C_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2,$$

або

$$\mathbf{B}(\omega) = \arccos\left(1 - \frac{\mathbf{C}_2}{2\mathbf{C}_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right). \tag{5.55}$$



Рис. 5.20. АЧХ згасання Α(ω) та коефіцієнт фази Β(ω) СΦ

Як видно з рис. 5.20, б, в діапазоні частот від ω_0 до $\omega_{\rm B}$ коефіцієнт фази зростає від нуля до π , а при змінюванні частоти від ω_0 до $\omega_{\rm H}$ цей коефіцієнт змінюється від 0 до - π . В смугах придушення коефіцієнт фази залишається незмінним і в області нижніх частот дорівнює - π , а в області верхніх частот дорівнює π .

Таким чином, обидві частотні характеристики СФ ідентичні частотним характеристикам ФВЧ в області нижніх частот, коли $\omega < \omega_0$, та ідентичні частотним характеристикам ФНЧ в області верхніх частот, коли $\omega > \omega_{\rm B}$.

5.4.4. Розрахунок реактивних смугових фільтрів

Для розрахунку параметрів смугових фільтрів можна скористатись співвідношеннями (5.50) та (5.51) і тією обставиною, що в смузі пропускання

$$\underline{Z}_{\rm III} \approx \underline{Z}_{\rm III} \approx \sqrt{L_1/C_2}.$$
(5.56)

Отже, в разі узгодженої роботи СФ його навантаження доцільно вибирати, виходячи з умови

$$R_{\rm H} = \sqrt{L_1/C_2}.$$
 (5.57)

Окрім опору навантаження R_н, як правило, відомими є верхня та нижня граничні частоти смуги пропускання. Однак відомо, що згідно з (5.51) маємо

$$\omega_{\rm B} - \omega_{\rm H} = 2 / \sqrt{L_1 C_2} ,$$

тому з урахуванням (5.57) одержимо

$$\omega_{\rm B} - \omega_{\rm H} = \frac{2}{C_2 R_{\rm H}}$$

звідки

$$C_{2} = \frac{2}{R_{H}(\omega_{B} - \omega_{H})}.$$
 (5.58)

Якщо скористатись виразом (5.50) і врахувати, що $L_1C_1 = L_2C_2$, то можна записати

$$L_{2} = \frac{1}{\omega_{0}^{2}C_{2}} = \frac{R_{H}(\omega_{B} - \omega_{H})}{2\omega_{B}\omega_{H}}.$$
 (5.59)

Після цього можна визначити параметри послідовного коливального контура:

$$L_{1} = R_{H}^{2}C_{2} = \frac{2R_{H}}{\omega_{B} - \omega_{H}};$$

$$C_{1} = \frac{1}{\omega_{0}^{2}L_{1}} = \frac{\omega_{B} - \omega_{H}}{2R_{H}\omega_{B}\omega_{H}}.$$
(5.60)

Щоб знайти параметри елементів смугових фільтрів необхідно звернутися до їх схем, що зображені на рис. 5.16.

5.5. Реактивні загороджувальні фільтри

5.5.1. Схеми та граничні частоти смуги придушення загороджувальних фільтрів

Якщо в схемах смугових фільтрів типу К поміняти місцями паралельні та послідовні коливальні контури, то можна отримати загороджувальні фільтри, або фільтри-пробки. Схеми таких фільтрів зображені на рис. 5.21.



Рис. 5.21. Схеми Т- (а) та П-подібного (б) загороджувальних фільтрів

Коливальні контури у загороджувальних фільтрах, як і у смугових, настроєні на одну й ту ж частоту ω_0 . Тоді при частоті вхідного сигналу $\omega = \omega_0$ поздовжні ланки цих фільтрів мають нескінченно великі опори, а поперечні – нескінченно малі. Отже, в цьому випадку фільтри мають нескінченно велике згасання.

Якщо частота вхідного сигналу $\omega > \omega_0$, то опір поздовжніх ланок фільтрів на рис. 5.21 має ємнісний характер, а поперечних — індуктивний. Схема працює як ФВЧ, який пропускає коливання з частотами, вищими за верхню граничну частоту смуги придушення.

Якщо ж частота вхідного сигналу $\omega < \omega_0$, то поздовжні ланки мають індуктивний характер опору, а поперечні — ємнісний. Тепер схема працює як ФНЧ і безперешкодно пропускає коливання з частотами, нижчими від нижньої граничної частоти смуги придушення.

Для визначення граничних частот смуги придушення загороджувального фільтра, як і граничних частот смуги пропускання СФ, можна скористатись рівнянням (5.43). У цьому випадку

$$\underline{Z}_{1} = \frac{\rho_{1}}{j\left(\frac{\omega}{\omega_{0}} - \frac{\omega_{0}}{\omega}\right)}, \quad \underline{Z}_{2} = j\rho_{2}\left(\frac{\omega}{\omega_{0}} - \frac{\omega_{0}}{\omega}\right), \quad (5.61)$$

тому для відношення $\underline{Z}_1/4\underline{Z}_2$ отримаємо

$$\frac{\underline{Z}_{1}}{4\underline{Z}_{2}} = -\frac{\rho_{1}}{\rho_{2}} \cdot \frac{1}{4\left(\frac{\omega}{\omega_{0}} - \frac{\omega_{0}}{\omega}\right)^{2}}.$$
(5.62)

Якщо отриманий результат підставити у вираз (5.43) та добути корінь квадратний з лівої та правої частини отриманого рівняння, то одержимо

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = 1.$$
(5.63)

Після нескладних перетворень матимемо квадратне рівняння

$$\omega^{2} \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_{1}L_{2}}} \omega - \omega_{0}^{2} = 0.$$
 (5.64)

При розв'язуванні рівняння (5.64) від'ємні розв'язки відкинемо як такі, що не мають сенсу, і в результаті для граничних частот смуги придушення ЗФ отримаємо

$$\omega_{\rm B} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{1}{C_1 L_2} + \frac{16}{L_1 C_1}} + \frac{1}{\sqrt{C_1 L_2}} \right),$$

$$\omega_{\rm H} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{1}{C_1 L_2} + \frac{16}{L_1 C_1}} - \frac{1}{\sqrt{C_1 L_2}} \right).$$
(5.65)

Добуток граничних частот смуги придушення ЗФ, як і у випадку СФ, дорівнює

$$\omega_{\rm B} \cdot \omega_{\rm H} = \frac{1}{L_1 C_1} = \omega_0^2, \tag{5.66}$$

а смуга придушення такого фільтра –

$$\Delta \omega_{\rm m} = \omega_{\rm B} - \omega_{\rm H} = \frac{1}{2\sqrt{C_1 L_2}}.$$
(5.67)

Вирази (5.66) та (5.67) можна використовувати при розрахунках параметрів загороджувальних фільтрів.

5.5.2. Частотні характеристики повторного опору загороджувальних фільтрів

Для визначення повторних опорів загороджувальних фільтрів знову скористаємося загальними співвідношеннями (5.17), а також врахуємо, що

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_2 = \rho_1\rho_2 = L_1/C_2 = \text{const.}$$

В результаті для повторних опорів отримаємо

$$\underline{Z}_{\Pi\Pi} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{C_2}{4C_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}},$$

$$\underline{Z}_{\Pi\Pi} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{C_2}{4C_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}\right)^{-1}.$$
(5.68)

Частотні залежності $Z_{nr}(\omega)$ та $Z_{nn}(\omega)$ зображені на рис. 5.22.



Рис. 5.22. Амплітудно-частотні характеристики повторних опорів Т- (а) та П-подібних (б) загороджувальних фільтрів

Як видно з цих залежностей, загороджувальні фільтри в діапазоні частот, коли $\omega < \omega_0$, поводять себе як ФНЧ, а на частотах $\omega > \omega_0 -$ як ФВЧ. Як і у випадку інших типів реактивних фільтрів, характер повторних опорів ЗФ у смузі придушення визначається характером опору вхідної ланки фільтра.

5.5.3. Аналіз коефіцієнтів згасання та фази загороджувальних фільтрів

Для визначення АЧХ згасання $A(\omega)$ та коефіцієнта фази $B(\omega)$ загороджувальних фільтрів, як і при аналізі інших типів фільтрів, використаємо основні рівняння фільтрів (5.6).

У смузі придушення ЗФ згасання $A \neq 0$ і тому коефіцієнт фази може приймати значення $B = 0, \pm \pi$. Оскільки на частотах $\omega < \omega_0$ загороджувальний фільтр поводить себе як ФНЧ, то в діапазоні частот від ω_0 до $\omega_{\rm H}$ коефіцієнт фази $B = \pi$. І навпаки, в діапазоні частот від ω_0 до $\omega_{\rm B}$, де фільтр поводить себе як ФВЧ, коефіцієнт фази $B = -\pi$. В результаті для АЧХ згасання ЗФ в смузі придушення одержимо

chA =
$$\left|1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}\right| = \left|1 - \frac{C_2}{2C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\right|,$$

або інакше –

$$A(\omega) = \operatorname{Arch} \left| 1 - \frac{C_2}{2C_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \right|.$$
(5.69)

У смузі пропускання, де згасання A = 0, для коефіцієнта фази загороджувальних фільтрів матимемо

$$\cos \mathbf{B} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} = 1 - C_2 / 2C_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2,$$

або інакше –

$$B(\omega) = \arccos\left(1 - C_2 / 2C_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right).$$
 (5.70)

Вигляд амплітудно-частотної характеристики згасання (рис. 5.23, а) та залежності від частоти коефіцієнта фази (рис. 5.23, б) загороджувальних фі-



Рис. 5.23. АЧХ згасання А(ω) та коефіцієнт фази Β(ω) ЗΦ

льтрів підтверджує раніше виголошену тезу про те, що в діапазоні частот, де $\omega < \omega_0$, такі фільтри поводять себе як ФНЧ, а в діапазоні частот, де $\omega > \omega_0$, – як ФВЧ. Слід також звернути увагу на стрибок фази у фазочастотної характеристики, який обумовлений зміною характеру повторного опору ЗФ (рис. 5.22) на резонансній частоті ω_0 .

5.5.4. Розрахунок реактивних загороджувальних фільтрів

Якщо розраховуваний ЗФ працює на узгоджений опір навантаження, то останній повинен визначатися з виразу

$$R_{\rm H} = \sqrt{L_1/C_2} = \sqrt{L_2/C_1}.$$
 (5.71)

Одночасно смуга придушення загороджувального фільтра визначається виразом (5.67), і тоді при заданих граничних частотах цієї смуги та відомому опорі навантаження з урахуванням (5.71) одержимо, що

$$C_{1} = \frac{1}{2R_{H}(\omega_{B} - \omega_{H})}.$$
 (5.72)

Оскільки між резонансними частотами контурів фільтра ω_0 та граничними частотами $\omega_{\rm B}$ та $\omega_{\rm H}$ існує зв'язок

$$\omega_0^2 = \omega_{\rm\scriptscriptstyle B} \omega_{\rm\scriptscriptstyle H} = 1/L_1 C_1,$$

то для індуктивності L₁ запишемо

$$L_{1} = \frac{1}{\omega_{0}^{2}C_{1}} = \frac{2R_{H}(\omega_{B} - \omega_{H})}{\omega_{B}\omega_{H}}.$$
 (5.73)

Далі легко знаходимо індуктивність L₂ та ємність C₂-

$$L_{2} = R_{\rm H}^{2} C_{1} = \frac{R_{\rm H}}{2(\omega_{\rm B} - \omega_{\rm H})},$$
(5.74)

$$C_{2} = \frac{1}{\omega_{0}^{2}L_{2}} = \frac{2(\omega_{B} - \omega_{H})}{\omega_{B}\omega_{H}R_{H}}.$$
 (5.75)

Щоб знайти параметри елементів загороджувальних фільтрів, треба звернутися до їх конкретних схем, які зображені на рис. 5.21.

5.6. Модифіковані реактивні фільтри

Найважливішою перевагою реактивних фільтрів типу К є їх надзвичайна простота, але, на жаль, вони погано узгоджуються з іншими пристроями внаслідок непостійності їх характеристичних опорів у смузі пропускання. Окрім того такі фільтри мають невисоку вибірність внаслідок низької крутості АЧХ згасання на границях цієї смуги.

Недоліки реактивних фільтрів типу К можна дещо компенсувати за рахунок їх модифікації шляхом незначного ускладнення електричних схем. Це ускладнення полягає у перерозподілі індуктивностей та ємностей між послідовною та поперечною ланками Т- та П-подібних схем фільтрів (рис. 5.2). Внаслідок цього перерозподілу опори плечей вихідного фільтра-прототипа змінюються на деяку величину, яка визначається перехідним коефіцієнтом М. Тому модифіковані фільтри отримали назву фільтрів типу М.

Щоб перейти від фільтра типу К до фільтра типу М, треба забезпечити виконання двох умов.

1. Характеристичні опори фільтрів-прототипів \underline{Z}_{nK} та модифікованих фільтрів \underline{Z}_{nM} повинні бути однаковими, оскільки обидва фільтри повинні працювати на одне й те ж навантаження. Отже, при цьому повинні виконуватися такі умови:

$$\underline{Z}_{\rm IT} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left(1 + \underline{Z}_1 / 4 \underline{Z}_2 \right)} = \sqrt{\underline{Z}_{\rm IM} \underline{Z}_{\rm 2M} \left(1 + \underline{Z}_{\rm IM} / 4 \underline{Z}_{\rm 2M} \right)}; \tag{5.76}$$

$$\underline{Z}_{\Pi\Pi} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \underline{Z}_1 / 4 \underline{Z}_2}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1M} \underline{Z}_{2M}}{1 + \underline{Z}_{1M} / 4 \underline{Z}_{2M}}},$$
(5.77)

де \underline{Z}_{1M} та \underline{Z}_{2M} – комплексні опори поздовжньої та поперечної ланок фільтра типу М.

2. В разі модифікації Т-подібних фільтрів змінюється величина опору поз-довжніх ланок –

$$\underline{Z}_{1M} = M\underline{Z}_1, \tag{5.78}$$

а в разі модифікації П-подібних фільтрів – опір поперечних ланок –

$$\underline{Z}_{2M} = \frac{\underline{Z}_2}{M}.$$
(5.79)

3. У виразах (5.78) та (5.79) коефіцієнт М є постійною додатною величи-ною, яка приймає значення 0 < M < 1.

5.6.1. Послідовно-похідні модифіковані фільтри

Нехай фільтр-прототип являє собою Т-подібний реактивний фільтр типу К, узагальнена схема якого зображена на рис. 5.2, а. Тоді опір \underline{Z}_{1M} модифікованого фільтра визначається співвідношенням (5.78), а опір \underline{Z}_{2M} можна знайти, скориставшись виразом (5.76).

Підставимо значення опору \underline{Z}_{1M} з (5.78) у співвідношення (5.76) і отримаємо

$$\sqrt{\underline{Z}_{1}\underline{Z}_{2}\left(1+\frac{\underline{Z}_{1}}{4\underline{Z}_{2}}\right)} = \sqrt{\underline{M}\underline{Z}_{1}\underline{Z}_{2M}\left(1+\frac{\underline{M}\underline{Z}_{1}}{4\underline{Z}_{2M}}\right)}.$$
(5.80)

Піднесемо обидві частини рівняння (5.80) до квадрату і розв'яжемо те рівняння, що отримано, відносно Z_{2M} . В результаті маємо

$$\underline{Z}_{2M} = \frac{\underline{Z}_2}{M} + \underline{Z}_1 \frac{1 - M^2}{4M}.$$
 (5.81)

Таким чином, для забезпечення виконання умови (5.76) необхідно поперечну ланку фільтра типу М скласти з двох послідовно з'єднаних опорів (рис. модифікований Длт 5.24). Тому такий фільтр називається послідовнопохідним. Один з послідовних опорів поперечної фільтра ланки цього



Рис. 5.24. Послідовно-похідний модифікований Т-подібний фільтр174

 (\underline{Z}_2/M) повинен мати той самий характер, що й опір поперечної ланки фільтра-прототипу. Інша ж складова опору цієї ланки з опором $\left(\frac{1-M^2}{4M}\cdot\frac{\underline{Z}_1}{4}\right)$ повинна мати характер опору як у поздовжньої ланки фільтра-прототипу. Останнє можливо лише в тому випадку, якщо коефіцієнт модифікації M < 1.

Очевидно, що модифікований Т-подібний фільтр (рис. 5.24) можна отримати з двох модифікованих Г-подібних фільтрів (рис. 5.25, а), якщо включити ці фільтри каскадно, з'єднавши паралельно їх П-сторони. Якщо ж



Рис. 5.25. Послідовно-похідні Г- (а) та П-подібний (б) фільтри типу М

Г-подібні модифіковані фільтри з'єднати Т-сторонами, то отримаємо послідовно-похідний П-подібний фільтр типу М (рис. 5.25, б).

Можна показати, що несиметричний послідовно-похідний Г-подібний фільтр (рис. 5.25, а) з боку Т-сторони має характеристичний опір \underline{Z}_{nr} , як і у обох розглянутих вище Т-подібних фільтрів, а з боку П-сторони – значення \underline{Z}_{nnM} , яке має нові у порівнянні з раніше розглянутими характеристичними опорами властивості.

Згідно з (5.77) маємо

$$\underline{Z}_{\pi\pi M} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1M}\underline{Z}_{2M}}{1 + \underline{Z}_{1M}/4\underline{Z}_{2M}}}.$$

У відповідності з (5.78) та (5.81) отримаємо

$$\underline{Z}_{1M} \cdot \underline{Z}_{2M} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1^2 \frac{1 - M^2}{4}, \quad \frac{\underline{Z}_{1M}}{4\underline{Z}_{2M}} = \frac{M^2 \underline{Z}_1 / 4\underline{Z}_2}{1 + (1 - M^2)\underline{Z}_1 / 4\underline{Z}_2}$$

і тому шуканий характеристичний опір дорівнює

$$\underline{Z}_{\Pi\Pi M} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \underline{Z}_1 / 4\underline{Z}_2}} \cdot \left[1 + (1 - M^2) \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right] = \underline{Z}_{\Pi\Pi} \left[1 + (1 - M^2) \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right]. \quad (5.82)$$

На рис. 5.26 зображені залежності $\sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} / \underline{Z}_{nnM}$ від величини $\sqrt{|\underline{Z}_1/4\underline{Z}_2|}$,



подібного послідовно-похідного модифікованого фільтра

побудовані у відповідності з виразом (5.82) для різних значень коефіцієнта модифікації М. Оскільки з визначення фільтрів типу К витікає, що $\sqrt{\underline{Z}_1}\underline{Z}_2 = K$, а величина $\sqrt{|\underline{Z}_1/4\underline{Z}_2|}$ є функцією частоти і, зокрема, для ФНЧ дорівнює $\omega/\omega_{\rm B}$, то кожна з кривих на рис. 5.26 являє собою визначену у відносних одиницях частотну залежність характеристичної провідності $1/\underline{Z}_{\rm nnM}$. Як видно, правильний вибір перехідного коефіцієнта М забезпечує набагато вищу рівно-мірність наведених залежність, побудована для значення коефіцієнта М = 1. Найкращу рівномірність у смузі пропускання частотні залежності і характеристичної опору $\underline{Z}_{\rm nnM}$ мають при зна-ченні перехідного коефіцієнта М = 0,59. Лише при частотах, що без-

посередньо примикають до верхньої граничної частоти, характеристична провідність 1/Z_{пп M} різко зменшується до нуля.

Отже, модифіковані послідовно-похідні реактивні П-подібні фільтри та Г-подібні фільтри з боку П-сторони набагато краще узгоджуються з джерелом сигналу і навантаженням, ніж фільтри типу К та модифіковані послідовно-похідні Т-подібні фільтри.

5.6.2. Паралельно-похідні модифіковані фільтри

Нехай фільтр-прототип являє собою П-подібний реактивний фільтр типу К, узагальнена схема якого зображена на рис. 5.2, б. Тоді опір Z_{2M} модифікованого фільтра визначається співвідношенням (5.79), а опір Z_{1M} можна знайти, скориставшись виразом (5.77).

Підставимо значення опору \underline{Z}_{2M} з (5.79) у співвідношення (5.77) і отримаємо

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1}\underline{Z}_{2}}{1+\underline{Z}_{1}/4\underline{Z}_{2}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1M}\,\underline{Z}_{2}/M}{1+\frac{\underline{Z}_{1}}{4\underline{Z}_{2}/M}}}.$$
(5.83)

Піднесемо обидві частини рівняння (5.83) до квадрату і розв'жемо рівняння, що отримано, відносно <u>Z</u>_{1M}. В результаті маємо

$$\frac{1}{\underline{Z}_{1M}} = \frac{1}{M\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \cdot \frac{1 - M^2}{4M}.$$
(5.84)

Таким чином, для забезпечення виконання умови (5.77) необхідно поздовжну ланку фільтра типу М скласти з двох паралельно з'єднаних опорів

(рис. 5.27). Тому такий модифікований фільтр називається паралельно-похідним. Один з паралельних опорів поздовжньої ланки MZ_1 повинен мати той самий характер, що й опір поздовжньої ланки фільтра-прототипу. Інша ж складова цієї паралельної ланки з опором $\frac{4M}{1-M^2}Z_2$ повинна мати характер опору як у поперечної ланки фільтра-прототипу. Остан-



Рис. 5.27. Паралельно-похідний модифікований П-подібний фільтр

нє, як і у випадку послі-довно-похідного фільтра, можливо лише якщо коефіцієнт модифікації M < 1.

Очевидно, що модифікований П-подібний фільтр (рис. 5.27) можна отримати з двох модифікованих Г-подібних фільтрів (рис. 5.28, а), якщо включити ці фільтри каскадно, з'єднавши їх Т-сторонами. Якщо ж паралельно з'єднати П-сторони двох Г-подібних паралельно-похідних модифікованих фільтрів, то отримаємо Т-подібний паралельно-похідний фільтр типу М (рис. 5.28, б).

Можна показати, що несиметричний паралельно-похідний Г-подібний



Рис. 5.28. Послідовно-похідні Г- (а) та Т-подібний (б) модифіковані фільтри

фільтр (рис. 5.28, а) з боку поперечної ланки має характеристичний опір \underline{Z}_{nn} , як і у П-подібного фільтра-прототипу та у аналогічного модифікованого фільтра, а з боку поздовжньої ланки – значення \underline{Z}_{nTM} , яке має нові у порівнянні з раніше розглянутим характеристичним опором \underline{Z}_{nn} властивості.

Розрахуємо величину характеристичного опору $\underline{Z}_{nтM}$ наведених на рис. 5.28 Г- та П- подібних паралельно-похідних модифікованих фільтрів. Тоді на основі виразу (5.76) з урахуванням (5.79) і (5.84) для шуканого характеристичного опору отримаємо

$$\underline{Z}_{\text{ITTM}} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} \cdot \sqrt{1 + \underline{Z}_1 / 4 \underline{Z}_2} \cdot \frac{1}{1 + (1 - M^2) \underline{Z}_1 / 4 \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_{\text{ITT}}}{1 + (1 - M^2) \underline{Z}_1 / 4 \underline{Z}_2}.$$
 (5.85)

Порівнюючи вирази (5.85) та (5.82), можна зробити висновок, що характеристичний опір \underline{Z}_{nTM} паралельно-похідного модифікованого фільтра має такі ж властивості, як і характеристична провідність $1/\underline{Z}_{nnM}$ послідовнопохідного модифікованого фільтра. Тому частотні залежності, наведені на рис. 5.26, можна використовувати і для визначення в діапазоні частот, який відповідає смузі пропускання, модуля характеристичного опору \underline{Z}_{nTM} . Однак при цьому слід зважити на те, що вздовж осі ординат відкладається величина $Z_{nTM}/\sqrt{Z_1Z_2} = Z_{nTM}/K$. Слід також зазначити, що, як і у випадку послідовнопохідного модифікованого фільтра, відхилення величини характеристичного опору паралельно-похідного фільтра від величини К при M = 0,59 в діапазоні частот від $\omega_{\rm H}$ до $0,9\omega_{\rm B}$ не перевищує ±5%. У той же час для фільтрів-прототипів типу К аналогічне відхилення в такому ж діапазоні частот складає ± 60%.

5.6.3. Особливості амплітудно-частотних характеристик згасання фільтрів типу М

Щоб визначити коефіцієнт згасання модифікованих фільтрів, треба так як і у випадку фільтрів типу К звернутися до основних рівнянь реактивних фільтрів (5.6), які є справедливими і для фільтрів типу М, якщо в другому з цих рівнянь опори \underline{Z}_1 та \underline{Z}_2 замінити на опори \underline{Z}_{1M} та \underline{Z}_{2M} відповідно. При цьому граничні частоти смуг пропускання та придушення обох різновидів фільтрів збігаються.

Як відомо, у смузі пропускання в узгодженому режимі коефіцієнт згасання A = 0. У смузі придушення згасання $A \neq 0$ і перше з основних рівнянь (5.6) виконується лише при умові, якщо коефіцієнт фази В дорівнює нулю або $\pm \pi$. Виходячи з цього, на основі другого з основних рівнянь фільтрів отримаємо

$$chA = \left| 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \right|, \qquad (5.86)$$

а з урахуванням (5.78) та (5.81) або (5.79) та (5.84) для амплітудно-частотної характеристики згасання і послідовно-похідних, і паралельно-похідних модифікованих фільтрів матимемо

$$A(\omega) = \operatorname{Arch} \left| 1 + \frac{\underline{Z}_{1M}}{2\underline{Z}_{2M}} \right| = \operatorname{Arch} \left| 1 + \frac{M^2 \underline{Z}_1 / 2\underline{Z}_2}{1 + (1 - M^2) \underline{Z}_1 / 4\underline{Z}_2} \right|.$$
(5.87)

Як видно з виразу (5.87), на тій частоті, при якій величина $1+(1-M^2)Z_1/4Z_2$ дорівнює нулю, згасання модифікованого фільтра має нескінченно велике значення. Це явище пояснюється тим, що в поперечних ланках послідовно-похідних модифікованих фільтрів (рис. 5.24 та 5.25) послідовно включені два реактивні опори різного характеру, а в поздовжніх ланках паралельно-похідних модифікованих фільтрів (рис. 5.27 та 5.28) паралельно включені дві реактивні провідності різного характеру. Як результат, в цих вітках на деякій

частоті настають резонанси: послідовний резонанс в послідовно-похідних фільтрах, поперечні ланки яких стають еквівалентними короткому замиканню; паралельний резонанс в паралельно-похідних фільтрах, поздовжні ланки яких стають еквівалентними розриву кола. Отже, дійсно, в обох випадках згасання модифікованих фільтрів на цих частотах приймає нескінченно великі значення ($A = \infty$).

При подальшому збільшенні частоти, коли $\omega \to \infty$, а відношення $\underline{Z}_1/2\underline{Z}_2$ та згасання фільтра типу К згідно з (5.86) також приймають нескінченно великі значення, модифіковані фільтри мають скінченну величину згасання. Дійсно, з виразу (5.87) видно, що у випадку, коли відношення $\underline{Z}_1/2\underline{Z}_2 \to \infty$, величина згасання фільтра типу М дорівнює

$$A(\infty) = \operatorname{Arch}\left(1 + \frac{2M^2}{1 - M^2}\right).$$
(5.88)

Отже, при частотах, набагато більших, ніж частота нескінченно великого згасання ω_{∞} , згасання модифікованого фільтра зменшується і буде меншим, ніж у фільтра типу К. Для компенсації цього недоліку можна використовувати складні фільтри, утворені шляхом каскадного з'єднання окремих ланок фільтрів типу К та типу М.

Розглянемо особливості модифікованих фільтрів більш докладно на прикладі послідовно- та паралельно-похідних фільтрів нижніх частот.

На рис. 5.29, а наведена схема Т-подібного фільтра-прототипа нижніх частот типу К, а на рис. 5.29, б – Г-подібна схема послідовно-похідного модифікованого ФНЧ, на основі якого утворені Т- та П-подібна симетричні схеми



Рис. 5.29. Схеми Т-подібного фільтра-прототипу нижніх частот типу К (а) та Г-подібного послідовно-похідного модифікованого ФНЧ (б)

послідовно-похідних модифікованих ФНЧ (рис. 5.30).


Рис. 5.30. Схеми Т- (а) та П-подібних (б) симетричних послідовно-похідних модифікованих ФНЧ





Рис. 5.31. Схеми П- подібного фільтра-прототипа нижніх частот типу К (а) та Г-подібного паралельно-похідного модифікованого ФНЧ (б)

частот типу К, а на рис. 5.31, б – Г-подібна схема паралельно-похідного модифікованого ФНЧ, на основі якого утворені П- та Т-подібна симетричні схеми паралельно-похідних модифікованих ФНЧ (рис. 5.32).

Як видно, всі без виключення схеми модифікованих фільтрів мають в своєму складі або послідовні (рис. 5.29, б, 5.30), або паралельні (рис. 5.31, б та рис. 5.32) коливальні контури. Резонансні частоти цих контурів однакові і визначаються виразом

$$\omega_0 = \omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{MC \cdot \frac{1 - M^2}{4M} \cdot L}} = \frac{1}{\sqrt{ML \cdot \frac{1 - M^2}{4M} \cdot C}} = \frac{\omega_B}{\sqrt{1 - M^2}}.$$
 (5.89)



Рис. 5.32. Схеми П- (а) та Т-подібного (б) симетричних паралельнопохідних модифікованих ФНЧ

Очевидно, що резонансні частоти зазначених коливальних контурів дещо перевищують значення верхньої граничної частоти смуги пропускання



Рис. 5.33. Амплітудно-частотна характеристика згасання модифікованих ФНЧ

льтрів типу К.

При каскадному з'єднанні фільтрів типу М та фільтрів типу К можна дещо компенсувати їх недоліки, однак при цьому треба обов'язково враховувати необхідність узгодження окремих ланок схеми. Так, наприклад, аналіз



Рис. 5.34. Схема комбінованого ФНЧ, утвореного каскадним з'єднанням фільтрів типу М та К

ФНЧ. На цих частотах згасання фільтрів приймає нескінченно великі значення. Отже, крутість АЧХ згасання на границі смуги пропускання у модифікованих фільтрів стає набагато вищою, ніж у фільтрів типу К (рис. 5.33). Однак на частотах, які суттєво перевищують частоту нескінченно великого згасання $\omega_{\infty} = \omega_0$, згасання модифікованих ФНЧ швидко зменшується і стає меншим ніж у фі-

наведених вище схем ФНЧ пока-

зує, що тільки Г-подібні ланки модифікованих фільтрів можуть

забезпечити і оптимальне узго-

кращі умови підключення

ДО

джерела сигналу або навантаження.

На рис. 5.34 як приклад наве-дена схема фільтра нижніх частот, що являє собою каскадне з'єднання двох послідовно-похідних модифікованих Гподібних фільтрів типу М, що включені на вході і виході, та одного Тподібного фільтра типу К, який розташований між ними. Оскільки характеристичні опори симетричного Т-подібного фільтра типу К дорівнюють \underline{Z}_{nr} і є такими ж, як і характеристичний опір несиметричного послідовно-похідного Г-подібного фільтра з боку Т-сторони, то в усіх точках з'єднання окремих ланок забезпечується їх узгодження. Завдяки тому, що на вході та виході фільтра включені Г-подібні ланки типу М, схема являє собою симетричний чотириполюсник, характеристичні опори якого дорівнюють <u>Z</u>_{ппM}, як і у симетричного П-подібного послідовно-похідного модифікованого фільтра типу М.

Якщо вибрати коефіцієнт модифікації М ≈ 0,59, то буде забезпечено високий рівень сталості величини характеристичного опору ДппМ в смузі пропускання фільтра, а значить і оптимальні умови його узгодження з навантаженням та джерелом сигналу. При цьому результуюче згасання утвореного фільтра буде складати величину

$$A = A_{K} + 2A_{M},$$

де A_К та A_М – згасання Т-подібної ланки фільтра типу К та Г-подібної ланки фільтра типу М відповідно.

На рис. 5.35 наведені частотні залежності згасання Т-подібного фільтра типу К А_к(ω), каскадного з'єднання двох узгоджених Г-подібних ланок фільтра типу М 2А_м(ю) та АЧХ зга-2A_M, сання А(ш) складного фільтра, схема А_к, якого зображена на рис. 5.34. Як вид- $2A_M$ но, завдяки наявності в схемі ланок фільтра типу М згасання А(ш) склад-A_K ного фільтра починає різко зростати при переході через верхню граничну частоту $\omega_{\rm B}$, що є суттєвою перевагою 0 ω_{∞} $\omega_{\rm B}$ перед фільтром типу К. На частотах, Рис. 5.35. Частотні залежності згасання які перевищують частоту нескінченно фільтра типу К А_к(ω), двох ланок великого згасання $ω_{\infty}$, згасання склафільтра типу М 2 $A_M(\omega)$ та комбінованого фільтра Α(ω) дного фільтра також достатньо висо-

ω

ке завдяки наявності в його складі ланки фільтра типу К. У цьому відношенні подібні комбіновані фільтри мають перевагу і в порівнянні з фільтрами типу М.

Подібно до фільтрів нижніх частот можна побудувати й інші види модифікованих фільтрів: верхніх частот, смугові та загороджувальні. При визначенні параметрів цих фільтрів треба виходити із загальних співвідношень: для послідовно-похідних ланок – з виразів (5.78), (5.81), а для паралельнопохідних ланок – з виразів (5.79), (5.84). При каскадному з'єднанні таких фільтрів з аналогічними за призначенням фільтрами типу К треба, як і у попередньому прикладі для ФНЧ, забезпечувати умови узгодження між окремими ланками складних фільтрів.

Розділ б

СИНТЕЗ ЧАСТОТНО-ВИБІРНИХ КІЛ

6.1. Задача синтезу лінійних електричних кіл

Задача синтезу лінійного електричного кола полягає у необхідності побудови такого кола, яке характеризується заданою реакцією x(t) на деяке зовнішнє збудження s(t).

Оскільки реакція лінійного кола на довільне зовнішнє збудження визначається його часовими або частотними характеристиками, то задача синтезу зводиться до знаходження схеми кола, яке має задані характеристики.

Синтез електричного кола на основі його частотних характеристик називається синтезом в частотній області, а синтез кола на основі часових характеристик – синтезом в часовій області. Найчастіше задачу синтезу в часовій області зводять до задачі синтезу в частотній області внаслідок кращої розробки методів розв'язання останньої.

На відміну від задачі аналізу лінійного кола, яка завжди має єдине розв'язання, розв'язання задачі синтезу, якщо воно існує, як правило, не є єдиним.

Якщо електричне коло, яке має деякі характеристики, можна побудувати з ідеалізованих елементів з дійсними додатними параметрами, то такі характеристики можна реалізувати фізично.

Набір допустимих типів елементів, що використовуються для синтезу, називається елементним базисом кола.

В залежності від заданого елементного базису розрізняють задачі синтезу реактивних, безіндуктивних, без'ємнісних, пасивних та активних електричних кіл.

Коло можна синтезувати як на основі вхідних, так і на основі передатних характеристик. В першому випадку шукане коло являтиме собою двополюсник, а в другому – чотириполюсник.

Характеристики кіл, що можуть бути реалізовані фізично, задовольняють певним умовам, які називаються критеріями фізичної реалізовності.

Якщо вхідні або передатні характеристики шуканого кола задані в аналітичній формі, то основними етапами розв'язання задачі синтезу є перевірка фізичної реалізовності заданих характеристик кола та безпосередня реалізація синтезованого кола, тобто визначення його еквівалентної схеми і параметрів елементів, що в нього входять. На практиці частотні та часові характеристики кіл часто задають в графічній або табличній формі, внаслідок чого виникає необхідність апроксимації заданих залежностей за допомогою наближених аналітичних виразів. На відміну від розглянутої раніше задачі апроксимації характеристик нелінійних елементів (див. розд. 3) для апроксимації частотних та часових характеристик не можна використовувати будь-які функції, що з необхідною точністю відтворюють задану залежність, а тільки такі функції, які задовольняють критеріям фізичної реалізовності.

6.2. Основні властивості та критерії фізичної реалізовності вхідних операторних характеристик лінійних кіл

Відомо, що будь-які операторні характеристики лінійних електричних кіл, які не мають в своєму складі незалежних джерел енергії, можна представити у вигляді відношення двох поліномів з дійсними коефіцієнтами:

$$K(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}.$$
 (6.1)

Таку раціональну функцію можна реалізувати як операторну вхідну характеристику лінійного пасивного кола, якщо К(р) є дійсною додатною функцією комплексної частоти $p = \sigma + j\omega$.

Дійсною додатною функцією комплексної змінної величини р називається функція К(р), дійсна частина якої невід'ємна при невід'ємних значеннях дійсної частини р, а уявна частина функції К(р) дорівнює нулю, якщо і уявна частина величини р дорівнює нулю. Тобто

Безпосередньо за допомогою виразів (6.2) визначити, чи є задана раціональна функція К(р) дійсною додатною функцію комплексної частоти р, дуже складно. На практиці перевіряють виконання таких шести умов, що безпосередньо витікають з цих співвідношень:

1. Всі коефіцієнти a_i та b_i поліномів M(p) та N(p) у виразі (6.1) повинні бути дійсними невід'ємними числами.

2. Найбільші та найменші степені поліномів M(p) та N(p) не повинні відрізнятися більше, ніж на одиницю, оскільки будь-який пасивний двополюсник при $p \rightarrow 0$ та при $p \rightarrow \infty$ поводить себе або як ємність $Z_c(p) = kp^{-1}$, або як індуктивність $Z_L(p) = kp$, або як опір $Z_R(p) = kp^0$. 3. Нулі p_{0i} та полюси p_{xi} вхідної операторної функції К(р) можуть розташовуватися лише в лівій напівплощині комплексної площини, включаючи й уявну вісь ($\text{Re}(p_{0i}) \le 0$, $\text{Re}(p_{xi}) \le 0$). Інакше в колі не виконуються умови згасання вільних складових перехідних процесів.

4. Нулі та полюси функції К(р), що розташовані на уявній осі, повинні бути лише простими (некратними). В іншому випадку розв'язок диференціального рівняння кола мав би наростаючу в часі складову.

5. Похідні функції К(р) в нулях та лишки в полюсах повинні бути дійсними та додатними.

6. Дійсна частина функції К(р) повинна бути невід'ємною на уявній осі, (Re[K(p)]≥0 при Re(p) = 0), оскільки при гармонічній дії на пасивне лінійне коло дійсна частина його комплексного вхідного опору або комплексної вхідної провідності не може бути від'ємною.

Зазначені умови є необхідними та достатніми для того, щоб задана раціональна операторна функція К(р) була дійсною додатною функцією комплексної частоти р. Тому вони можуть вважатися критеріями фізичної реалізовності цієї функції як вхідної операторної характеристики лінійного пасивного кола.

6.3. Умови фізичної реалізовності та особливості вхідних операторних характеристик реактивних кіл

Електричні кола, що складені лише з реактивних елементів, являють собою окремий випадок лінійних пасивних кіл і називаються реактивними колами або колами без втрат.

Необхідною та достатньою умовою того, щоб задану раціональну функцію K(p) = M(p)/N(p) можна було реалізувати як вхідну операторну характеристику реактивного кола, є можливість її представлення як дійсної додатної функції комплексної частоти р. Крім цього у неї або поліном N(p) повинен бути парним, а поліном M(p) – непарним, або навпаки. Функція, що має такі властивості, називається реактивною або реактансною.

Реактансна фінкція характеризується всіма властивостями дійсних додатних функцій комплексної частоти р, а також має ряд додаткових особливостей, а саме:

1. Нулі та полюси реактансної функції розташовані лише на уявній осі.

2. Нулі та полюси реактансної функції чергуються, причому як на початку координат (p = 0), так і в нескінченності ($p = \pm j\infty$) обов'язково є або нуль, або полюс.

3. Значення реактансної функції на уявній осі $(p = j\omega)$ є чисто уявним і зростає, якщо збільшується частота ω .

Для прикладу розглянемо операторні вхідні характеристики послідовного та паралельного LC-кіл.

Операторний вхідний опір послідовного LC-кола дорівнює

$$Z(p) = pL + \frac{1}{pC} = \frac{L(p^2 + \omega_0^2)}{p}.$$
 (6.3)

Очевидно, що раціональна функція (6.3) має полюси на початку координат ($p_{x1} = 0$) та в нескінченності ($p_{x2} = j\infty$, $p_{x3} = -j\infty$). Ця функція має також нулі, що розташовані на уявній осі: $p_{01} = j\omega_0$, $p_{02} = -j\omega_0$, де $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Причому нулі та полюси фукнкції Z(p) чергуються.

Нулям операторного вхідного опору Z(p) послідовного LC-кола відповідають полюси операторної вхідної провідності цього кола, а полюсам операторного вхідного опору – нулі операторної провідності кола Y(p) –

$$Y(p) = \frac{1}{pL + 1/pC} = \frac{p}{L(p^2 + \omega_0^2)}.$$
 (6.4)

На уявній осі значення операторних функцій Z(p) та Y(p) послідовного LC - кола є чисто уявними – $Z(j\omega) = jL(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega = jX(\omega)$, (6.5) $Y(j\omega) = -j\omega/L(\omega^2 - \omega_0^2) = jB(\omega)$, і зростають, якщо збільшується частота ω (рис. 6.1).

Паралельне LC-коло є дуальним по відношенню до послідовного LCкола. Як результат, операторний вхідний опір першого кола –

$$Z(p) = \frac{p}{C(p^{2} + \omega_{p}^{2})}$$
(6.6)

та його операторна вхідна провідність



Рис. 6.1. Залежність від частоти реактивного вхідного опору (а) та реактивної вхідної провідності (б) послідовного LC-кола

 $Y(p) = C(p^2 + \omega_p^2)/p$ (6.7)

188

характеризуються такими ж властивостями, як і відповідні характеристики послідовного LC-кола.

6.4. Методи синтезу реактивних двополюсників

6.4.1. Метод виділення найпростіших складових (метод Фостера)

Метод Фостера оснований на представленні заданої та фізично реалізовної операторної функції К(р) у вигляді суми найпростіших функцій –

$$K(p) = K_1(p) + K_2(p) + \dots + K_n(p),$$
(6.8)

кожну з яких можна розглядати як операторну вхідну характеристику деякого елементарного одно- або двоелементного двополюсника.

Якщо функція К(р) являє собою операторний вхідний опір, то шукане коло можна реалізувати у вигляді послідовного з'єднання елементарних двополюсників, які відповідають кожній з найпростіших функцій К_i(р).

Якщо ж функція К(р) є операторною вхідною провідністю, то синтезоване коло реалізується у вигляді паралельного з'єднання елементарних двополюсників, що відповідають кожній з найпростіших функцій.

Метод Фостера можна застосовувати для реалізації додатних дійсних функцій комплексної частоти р, нулі та полюси яких розташовані тільки на уявній осі та на від'ємній дійсній напівосі. Цьому обмеженню задовольняють опраторні вхідні функції реактивних, безіндуктивних та без'ємнісних двополюсників, а також операторні функції деяких RLC-кіл.

Розглянемо застосування методу Фостера для синтезу реактивних двополюсників згідно з їх реактансними вхідними операторними опорами та провідностями.

Синтез двополюсника по вхідному реактансному опору

Нехай реактансну функцію Z(p) = M(p)/N(p) треба реалізувати як операторний вхідний опір лінійного пасивного кола. Розкладемо функцію Z(p) на прості дроби

$$Z(p) = \alpha_{\infty} p + \alpha_0 / p + \sum_{i=1}^{N} 2\alpha_i p / (p^2 + \omega_i^2), \qquad (6.9)$$

де N – число пар комплексно-спряжених полюсів функції Z(p); $\alpha_{\infty}, \alpha_0, \alpha_i$ – постійні дійсні додатні коефіцієнти.

При цьому складова $\alpha_{\infty} p$ є цілою частиною функції Z(p), а величина

$$\alpha_{\infty} = \lim_{p \to \infty} \frac{Z(p)}{p}.$$
(6.10)

Коефіцієнт α_0 визначається як лишок функції Z(p) в полюсі p = 0, тобто

$$\alpha_0 = \operatorname{Res}_{p=0} Z(p) = \left[\frac{M(p)}{dN(p)/dp} \right]_{p=0}.$$
(6.11)

Коефіцієнти α_i визначаються як лишки функції Z(p) в полюсах $p_i = \pm j\omega_i$, тобто

$$\alpha_{i} = \operatorname{Res}_{p_{i}=\pm j\omega_{i}} Z(p) = \left[\frac{M(p)}{dN(p)/dp}\right]_{p_{i}=\pm j\omega_{i}}.$$
(6.12)

Очевидно, що перший член розкладання (6.8) можна розглядати як операторний вхідний опір індуктивності

$$\mathcal{L}_{\infty} = \alpha_{\infty}, \tag{6.13}$$

другий член – як операторний вхідний опір ємності

$$C_0 = 1/\alpha_0, \qquad (6.14)$$

а кожну зі складових, що має вигляд, аналогічний співвідношенню (6.6), – як операторний вхідний опір паралельного LC-кола:

$$Z_i(p) = 2\alpha_i p / (p^2 + \omega_i^2),$$

де ω_i – резонансна частота цього кола.

Кожне з паралельних LC-кіл повинно бути складене з ємності та індуктивності, що мають величини

$$C_{i} = \frac{1}{2\alpha_{i}}, \quad L_{i} = \frac{2\alpha_{i}}{\omega_{i}^{2}}, \quad (6.15)$$

де $\omega_{i} = \frac{1}{\sqrt{L_{i}C_{i}}} = \sqrt{\frac{2\alpha_{i}}{L_{i}}}$ – резонансна частота паралельного LC-кола.

Таким чином, співвідношенню (6.9) відповідає двополюсник, який складається з послідовно з'єднаних індуктивності L_{∞} , ємності C_0 та N паралельних LC-кіл. Схема цього двополюсника зображена на рис. 6.2 і називається першою канонічною (типовою) схемою Фостера.



Рис. 6.2. Перша канонічна схема Фостера

висновок, що перший член у виразі (6.6) не дорівнює нулю, якщо задана функція Z(p) має полюс в нескінченності. У таких функцій степінь полінома М(р), що в чисельнику, на одиницю більший, ніж степінь полінома N(р), що у знаменнику. Другий член у співвідношенні (6.6) не дорівнює нулю, якщо Z(p) має полюс при p = 0. У таких функцій множник р у знаменнику можна винести за дужки.

Синтез двополюсника по вхідній реактансній провідності

Аналогічно попередньому випадку синтезують двополюсник і у тому випадку, коли задана реактансна функція являє собою операторну вхідну провідність Y(p) = M(p)/N(p).

Розкладання функції У(р) має вигляд

$$Y(p) = \alpha'_{\infty}p + \alpha'_{0}/p + \sum_{i=1}^{N} 2\alpha'_{i}p/(p^{2} + \omega_{i}^{2}), \qquad (6.16)$$

де N – число пар комплексно-спряжених полюсів функції Y(p); $\alpha'_{\infty}, \alpha'_{0}, \alpha'_{i}$ – постійні дійсні додатні коефіцієнти.

Причому за аналогією з виразами (6.10) – (6.12) маємо

$$\alpha'_{\infty} = \lim_{p \to \infty} Y(p)/p, \quad \alpha'_0 = \operatorname{Res}_{p=0} Y(p), \quad \alpha'_i = \operatorname{Res}_{p_i = \pm j\omega_i} Y(p). \quad (6.17)$$

Тобто розкладенню (6.16) буде відповідати двополюсник, що включає паралельне з'єднання ємності

$$C_{\infty} = \alpha'_{\infty}, \qquad (6.18)$$

індуктивності

$$\mathcal{L}_0 = 1/\alpha'_0 \tag{6.19}$$

та N послідовних LC-кіл з параметрами

$$L_{i} = 1/2\alpha'_{i}, \quad C_{i} = 2\alpha'_{i}/\omega_{i}^{2}, \quad (6.20)$$

де $\omega_i = 1/\sqrt{L_i C_i} = \sqrt{2\alpha'_i/C_i}$ – резонансна частота послідовного LC-кола.

Схема двополюсника (рис. 6.3), що відповідає виразу (6.16), називається другою канонічною схемою Фостера. Очевидно, що синтезований двополюсник має у своєму складі ємність C_{∞} , Рис. 6.3. Друга канонічна схема Фостера якщо функція Y(p) має полюс у нескін-



ченності, та індуктивність L_0 , якщо функція Y(p) має полюс при p = 0.

6.4.2. Синтез двополюсника методом Фостера

Нехай треба здійснити синтез двополюсника, операторний вхідний опір якого дорівнює

$$Z(p) = \frac{p^2 + 4}{p^3 + 9p}.$$
 (6.21)

Роз'язання поставленої задачі здійснимо в три етапи.

На першому етапі за допомогою методики, яка викладена в розділі 6.3, визначимо, чи є задана функція Z(p) фізично реалізовною як операторна вхідна характеристика лінійного пасивного кола.

1. Безпосередній аналіз функції (6.21) показує, що всі коефіцієнти поліномів у її чисельнику і знаменнику є дійсними та додатними числами.

2. Найбільший та найменший степені поліновів М(р) та N(р) у виразі (6.21) не відрізняються більш, ніж на одиницю.

3. Всі нулі $p_{01} = +j2$, $p_{02} = -j2$ та всі полюси $p_{x1} = 0$, $p_{x2} = +j3$, $p_{x3} = -j3$ функції Z(p) розташовані на уявній осі.

4. Всі нулі та полюси функції Z(p) є простими, тобто некратними.

5. Якщо визначити похідні функції Z(p) в нулях та її лишки в полюсах –

$$\frac{dZ(p)}{dp}\Big|_{p_{01,2}=\pm j2} = \frac{p^4 + 3p^2 + 36}{-p^2(p^2 + 9)^2}\Big|_{p_{01,2}=\pm j2} = \frac{4}{10},$$

$$\frac{\text{Res}}{p_{x1}=0}Z(p) = \frac{p^2 + 4}{3p^2 + 9}\Big|_{p_{x1}=0} = \frac{4}{9},$$

$$\frac{\text{Res}}{p_{x2,3}=\pm j3}Z(p) = \frac{p^2 + 4}{3p^2 + 9}\Big|_{p_{x2}=3=\pm j3} = \frac{5}{18},$$

то можна впевнитись, що вони є дійсними додатними числами.

6. Визначимо значення дійсної частини фінкції Z(p) на уявній осі

$$\operatorname{Re}\left[Z(p)\right]_{p=j\omega} = \operatorname{Re}\left[\frac{4-\omega^2}{j\omega(9-\omega^2)}\right] = 0.$$

Як видно, це значення не є від'ємним, що задовольняє останню з вимог до фізично реалізовних функцій.

Таким чином, задана операторна функція Z(p) є фізично реалізовною як операторна вхідна характеристика лінійного пасивного кола.

На другому етапі синтезу кола покажемо, що функцію (6.21) можна реалізувати як операторний вхідний опір реактивного двополюсника. Це виходить із того, що аналізована операторна функція є дійсною додатною функцією комплексної частоти р, у якої поліном у чисельнику є парним, а поліном у знаменнику – непарним.

На третьому етапі здійснимо безпосередньо синтез шуканого двополюсника. Оскільки в знаменнику функції (6.21) множник р можна винести за дужки і, окрім того, вона має одну пару комп-лексно-спряжених полюсів,

то синтезований двополюсник являє собою послідовне з'єднання ємності C_0 та одного паралельного LC-кола (рис. 6.4). Розкладемо задану операторну функцію на прості дроби і згідно зі співвідношенням (6.9) отримаємо



Рис. 6.4. Схема синтезованого двополюсника

$$Z(p) = \alpha_0 / p + 2\alpha_1 p / (p^2 + \omega_1^2),$$

(6.22)

де α_0 та α_1 – дійсні додатні коефіцієнти, що визначаються зі співвідношень (6.12) та (6.15). Отже маємо

$$\alpha_0 = \operatorname{Res}_{p=p_{x1}} Z(p) = \operatorname{Res}_{p=0} Z(p) = 4/9,$$

$$\alpha_1 = \operatorname{Res}_{p=p_{x2,3}} Z(p) = \operatorname{Res}_{p=\pm j\omega_1} Z(p) = \operatorname{Res}_{p=\pm j3} Z(p) = 5/18, \quad \omega_1^2 = 9.$$

Після цього, користуючись виразами (6.14) і (6.15), знайдемо параметри елементів синтезованої схеми:

$$C_0 = 1/\alpha_0 = 2,25 \Phi; C_1 = 1/2\alpha_1 = 1,8 \Phi; L_1 = 2\alpha_1/\omega_1^2 \approx 0,062 \Gamma_{H.2}$$

Зрозуміло, що синтезована схема хоча і є фізично реалізовною, але має надзвичайно великі значення номіналів ємностей.

6.4.3. Метод розкладання на ланцюговий дріб (метод Кауера)

У відповідності з методом Кауера реактивний двополюсник, що має операторну вхідну характеристику К(р), реалізується у вигляді драбинного кола, яке будується за першою або другою канонічною схемою.

Перша канонічна схема Кауера (рис. 6.5, а) містить індуктивності в поздовжніх ланках та ємності в поперечних. Друга канонічна схема Кауера (рис. 6.5, б) містить ємності в поздовжніх ланках, а індуктивності в поперечних. Перша та остання чарунки кано-нічних



схем Кауера можуть бути неповними. Вони можуть не мати елементів, яким на схемах надані номери 1 та N.

Перша канонічна схема Кауера містить індуктивність L₁ лише у тому випадку, коли операторний вхідний опір кола має полюс в нескінченності. Дру-

Рис. 6.5. Перша (а) та друга (б) канонічні схеми Кауера

га канонічна схема Кауера містить ємність C_1 , якщо операторний вхідний опір кола має полюс при p = 0.

У загальному випадку операторний вхідний опір або операторну вхідну провідність можна представити у вигляді ланцюгових дробів. Для схем, структура яких наведена на рис. 6.5, вхідний опір у вигляді ланцюгового дробу запишеться таким чином:

$$Z(p) = Z_{1}(p) + \frac{1}{Y_{2}(p) + \frac{1}{Z_{3}(p) + \dots + \frac{1}{Z_{N-1}(p) + 1/Y_{N}(p)}}}.$$
 (6.22)

З виразу (6.22) видно, що кількість елементів ланцюгового дробу дорівнює кількості ідеалізованих двополюсних елементів, які утворюють драбинне коло. При цьому елементами ланцюгового дробу є операторні опори двополюсників, що утворюють поздовжні вітки драбинної схеми, та операторні провідності двополюсників, що утворюють поперечні вітки цієї схеми.

Якщо ж драбинне коло не має у своєму складі першого поздовжнього елемента, то у вигляді ланцюгового дробу можна представити його вхідну провідність:

$$Y(p) = Y_{1}(p) + \frac{1}{Z_{2}(p) + \frac{1}{Y_{3}(p) + \dots + \frac{1}{Y_{N-1}(p) + 1/Z_{N}(p)}},$$
(6.23)

де $Y_1(p), Y_3(p), ..., Y_{N-1}(p)$ – операторні провідності поперечних віток схеми; $Z_2(p), Z_4(p), ..., Z_N(p)$ – операторні опори поздовжніх віток схеми.

Отже, якщо в першій канонічній схемі Кауера є індуктивність L₁, то операторний вхідний опір можна записати у вигляді ланцюгового дробу з елементами типу ра₁, тобто

$$Z(p) = pL_1 + \frac{1}{pC_2 + \frac{1}{pL_3 + \ldots + \frac{1}{pL_{N-1} + \frac{1}{pC_N}}}.$$
 (6.24)

Якщо в першій канонічній схемі Кауера немає першого поздовжнього елемента, то у вигляді ланцюгового дробу з елементами типу рα_i можна представити операторну вхідну провідність кола –

$$Y(p) = pC_{1} + \frac{1}{pL_{2} + \frac{1}{pC_{3} + \dots + \frac{1}{pC_{N-1} + \frac{1}{pL_{N}}}}.$$
(6.25)

Для кола, що побудоване за другою канонічною схемою Кауера і має у своєму складі ємність C_1 , вираз для операторного вхідного опору записується у вигляді ланцюгового дробу з елементами виду $1/p\beta_i$, а саме

$$Z(p) = \frac{1}{pC_1} + \frac{1}{\frac{1}{pL_2}} + \frac{1}{\frac{1}{pC_3}} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{pC_{N-1}}} + \frac{1}{\frac{1}{1/pL_N}}}.$$
(6.26)

Якщо ж така схема не має у своєму складі ємності C_1 , то у вигляді ланцюгового дробу з елементами виду $1/p\alpha_i$ можна записати вхідну операторну провідність

$$Y(p) = \frac{1}{pL_1} + \frac{1}{\frac{1}{pC_2}} + \frac{1}{\frac{1}{pL_3} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{pL_{N-1}} + \frac{1}{1/pC_N}}}.$$
(6.27)

Таким чином, якщо задана вхідна операторна характеристика К(р) може бути записана у вигляді ланцюгового дробу –

$$K(p) = K_{1}(p) + \frac{1}{K_{2}(p) + \frac{1}{K_{3}(p) + \dots + \frac{1}{K_{N-1}(p) + 1/K_{N}(p)}}}$$
(6.28)

з елементами виду $p\alpha_i$ або $1/p\beta_i$, де α_i та β_i є постійними додатними коефіцієнтами, то такій характеристиці можна поставити у відповідність реактивний двополюсник, побудований за першою або другою канонічною схемою Кауера. Отже, реалізація реактивного двополюсника за допомогою розглянутого методу зводиться до розкладання заданої реактансної функції К(р) в ланцюговий дріб з елементами виду $p\alpha_i$ або $1/p\beta_i$.

Задану функцію K(p) = M(p)/N(p) розкладають в ланцюговий дріб виду (6.28) шляхом послідовного виділення елементів дробу $K_i(p)$ в результаті ділення полінома M(p) на поліном N(p), потім полінома N(p) на остачу від першого ділення $O_1(p)$, потім остачі від першого ділення $O_1(p)$ на остачу від другого ділення $O_2(p)$ і таким же чином далі до тих пір, поки остача від останнього ділення не буде дорівнювати нулю. Цей алгоритм можна записати в аналітичній формі –

$$K(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = K_1(p) + \frac{O_1(p)}{N(p)} = K_1(p) + \frac{1}{N(p)/O_1(p)} = K_1(p) + \frac{1}{K_2(p) + \frac{1}{O_1(p)/O_2(p)}} = K_1(p) + \frac{1}{K_2(p) + \frac{1}{K_3(p) + \frac{1}{O_2(p)/O_3(p)}}} = \dots (6.29)$$

Для реалізації першої канонічної схеми Кауера вибирають такі вхідні операторні характеристики, які мають полюси в нескінченності, причому члени поліномів M(p) та N(p) при діленні розташовують у порядку зменшення степенів комплексної змінної величини p.

Для реалізації другої канонічної схеми Кауера використовують ті вхідні операторні характеристики, які мають полюси при p = 0, а поліноми M(p) та N(p) при їх діленні один на одного розташовують у порядку зростання степенів величини p. В обох випадках при виконанні операції ділення треба слідкувати, щоб отримувані коефіцієнти α_i та β_i були додатними. Якщо ж в процесі виконання операції ділення будь-який з коефіцієнтів α_i виявиться меншим за нуль, то необхідно перейти від розташування поліномів, коли степені зменшуються, до розташування, коли степені поліномів збільшуються. І навпаки, якщо меншим за нуль виявиться будь-який з коефіцієнтів β_i , то не-

обхідно перейти від розташування поліномів, коли їх степені збільшуються, до розташування, при якому ці степені зменшуються.

Як і метод Фостера, розглянутий метод можна застосовувати для синтезу RC-, RL-, LC- та RLC- кіл, нулі і полюси операторних вхідних характеристик яких розташовані на уявній осі та від'ємній дійсній напівосі. Однак необхідно врахувати, що область застосування методу Кауера дещо вужча, ніж методу Фостера. Це обумовлено тим, що цілий ряд операторних вхідних характеристик, що реалізуються за допомогою методу Фостера, не можна представити у вигляді операторного вхідного опору або операторної вхідної провідності деякого драбинного кола.

6.4.4. Синтез реактивного двополюсника методом Кауера

Для прикладу здійснимо синтез методом Кауера реактивних двополюсників, що мають вхідний операторний опір

$$Z(p) = \frac{2p^4 + 5p^2 + 2}{p^3 + p}.$$
 (6.30)

Задана функція Z(p) має полюс і в нескінченності, і при p = 0, тому може бути реалізована за допомогою будь-якої з двох канонічних схем Кауера.

Розташовуючи поліноми чисельника та знаменника функції Z(p) в порядку зменшення степенів змінної величини p, виділимо елементи ланцюгового дробу pa_i шляхом реалізації алгоритму (6.29) –

$$\begin{split} \underline{\mathrm{M}(\mathrm{p}) \to \mathrm{2p}^4 + \mathrm{5p}^2 + 2} \left| \frac{\mathrm{p}^3 + \mathrm{p} \to \mathrm{N}(\mathrm{p})}{\mathrm{2p} \to \mathrm{Z}_1(\mathrm{p})} \right| \\ \underline{\mathrm{N}(\mathrm{p}) \to \mathrm{p}^3 + \mathrm{p}} \left| \frac{\mathrm{3p}^2 + 2 \to \mathrm{O}_1(\mathrm{p})}{\mathrm{p}/3 \to \mathrm{Y}_2(\mathrm{p})} \right| \\ \underline{\mathrm{O}_1(\mathrm{p}) \to \mathrm{3p}^2 + 2} \left| \frac{\mathrm{p}/3 \to \mathrm{O}_2(\mathrm{p})}{\mathrm{9p} \to \mathrm{Z}_3(\mathrm{p})} \right| \\ \underline{\mathrm{O}_2(\mathrm{p}) \to \mathrm{p}/3} \left| \frac{2 \to \mathrm{O}_3(\mathrm{p})}{\mathrm{p}/6 \to \mathrm{Y}_4(\mathrm{p})} \right| \\ \mathrm{0} \to \mathrm{O}_4(\mathrm{p}). \end{split}$$

Після цього у відповідності зі співвідношенням (6.22) запишемо вираз для операторного вхідного опору синтезованого кола у вигляді ланцюгового дробу –

$$Z(p) = Z_{1}(p) + \frac{1}{Y_{2}(p) + \frac{1}{Z_{3}(p) + \frac{1}{Y_{4}(p)}}} = 2p + \frac{1}{p/3 + \frac{1}{9p + \frac{1}{p/6}}}.$$
 (6.31)

Якщо порівняти вирази (6.31) та (6.24), то можна встановити, що синтезована схема відповідає першій канонічній схемі Кауера і має у своєму складі дві індуктивності та дві ємності (рис. 6.6). Параметри елементів цієї схеми можна розрахувати, скориставшись такими виразами:



Рис. 6.6. Схема, що синтезована на основі першої канонічної схеми Кауера

$$Z_1(p) = pL_1 = 2p; \quad Y_2(p) = pC_2 = p/3;$$

 $Z_3(p) = pL_3 = 9p; \quad Y_4(p) = pC_4 = p/6.$

(6.32)

3 виразів (6.32) виходить, що $L_1 = 2 \Gamma H$, $C_2 \approx 0.33 \Phi$, $L_3 = 9 \Gamma H$, $C_4 \approx 0.17 \Phi$.

Якщо ж розташувати поліноми чисельника та знаменника операторної функції Z(p) в порядку зростання степенів комплексної змінної величини p, то можна в результаті їх ділення один на одного виділити члени виду 1/рВ_і драбинного дробу і отримати реалізацію реактивного двополюсника на основі другої канонічної схеми Кауера –

$$\begin{split} \underline{\mathrm{M}(\mathrm{p}) \to 2 + 5\mathrm{p}^2 + 2\mathrm{p}^4} & \left| \frac{\mathrm{p} + \mathrm{p}^3 \to \mathrm{N}(\mathrm{p})}{2/\mathrm{p} \to \mathrm{Z}_1(\mathrm{p})} \right. \\ & \frac{\mathrm{N}(\mathrm{p}) \to \mathrm{p} + \mathrm{p}^3}{\left| \frac{3\mathrm{p}^2 + 2\mathrm{p}^4 \to \mathrm{O}_1(\mathrm{p})}{1/3\mathrm{p} \to \mathrm{Y}_2(\mathrm{p})} \right. \\ & \frac{\mathrm{O}_1(\mathrm{p}) \to 3\mathrm{p}^2 + 2\mathrm{p}^4}{\left| \frac{\mathrm{p}^3/3 \to \mathrm{O}_2(\mathrm{p})}{9/\mathrm{p} \to \mathrm{Z}_3(\mathrm{p})} \right. \\ & \frac{\mathrm{O}_2(\mathrm{p}) \to \mathrm{p}^3/3}{\left| \frac{2\mathrm{p}^4 \to \mathrm{O}_3(\mathrm{p})}{1/6\mathrm{p} \to \mathrm{Y}_4(\mathrm{p})} \right. \\ & 0 \to \mathrm{O}_4(\mathrm{p}). \end{split}$$

Скористаємося співвідношенням (6.26) і запишемо вхідну операторну характеристику Z(p) у вигляді ланцюгового дробу з елементами виду 1/p_β –

$$Z(p) = Z_1(p) + \frac{1}{Y_2(p) + \frac{1}{Z_3(p) + \frac{1}{Y_4(p)}}} = \frac{2}{p} + \frac{1}{\frac{1}{3p} + \frac{1}{\frac{9}{p} + \frac{1}{1/6p}}}.$$
 (6.33)

Очевидно, що схема, яка синтезується, так само, як і попередня, має у своєму складі дві ємності та дві індуктивності (рис. 6.7). При цьому парамет-



ри елементів цієї схеми можна знайти з таких виразів: $\mathbf{Z}_{(n)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} \cdot \mathbf{Y}_{(n)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{Y}_{(n)} = \frac{1}{2} \cdot$

$$Z_{1}(p) = \frac{1}{pC_{1}} = \frac{1}{p}, \quad I_{2}(p) = \frac{1}{pL_{2}} = \frac{1}{3p},$$

$$Z_{3}(p) = \frac{1}{pC_{3}} = \frac{9}{p}; \quad Y_{4}(p) = \frac{1}{pL_{4}} = \frac{1}{6p}.$$
(6.34)

Рис. 6.7. Схема, що синтезована на основі другої канонічної схеми Кауера

Отже параметри елементів реалізованої схеми набувають таких значень: $C_1 = 0.5 \Phi$; $L_2 =$

3 Гн; $C_3 \approx 0,11 \Phi$; $L_4 = 6 \Gamma$ н.

Таким чином, дійсно розв'язання задачі синтезу лінійного кола на основі його вхідної операторної характеристики не є однозначним, оскільки обидві одержані за допомогою методу Кауера схеми з однаковими характеристиками, реалізовані у вигляді двох різних схемних рішень, які мають елементи з різними параметрами. Одночасно ці схеми мають однакову кількість однотипних елементів. Ця кількість є мінімальним набором елементів, за допомогою якого можна реалізувати задану вхідну операторну функцію в заданому елементному базисі.

6.5. Основи синтезу лінійних чотириполюсників

Задача синтезу чотириполюсників також розв'язується в два етапи: на першому етапі перевіряють умови фізичної реалізовності заданих характеристик; на другому визначають конфігурацію схеми шуканого кола та параметри її елементів.

Найчастіше синтез чотириполюсників здійснюють за його передатними операторними характеристиками, які так само, як і вхідні, можна представити у вигляді раціональних функцій комплексної частоти р (6.1). Ці характеристики є вільними від деяких обмежень, що властиві операторним опорам та провідностям двополюсників, тобто мають дещо спрощені критерії фізичної реалізовності.

Так, передатні операторні опори та провідності можуть мати від'ємні дійсні частини, нулі передатних характеристик чотириполюсників можуть 199 знаходитися як в лівій, так і в правій напівплощині комплексної площини, а степені поліномів M(p) і N(p) у чисельнику та знаменнику передатної функції K(p) = M(p)/N(p) можуть відрізнятися більш ніж на одиницю.

Можливі різні варіанти постановки задачі синтезу чотириполюсника, наприклад, синтез по передатній операторній характеристиці в режимі холостого ходу на виході та синтез по передатній операторній характеристиці при узгодженому чисто активному або довільному навантаженні.

Розглянемо один з найбільш простих методів синтезу чотириполюсника по заданому операторному коефіцієнту передачі відносно напруги в режимі холостого ходу $K_{\rm U}(p)$.

Для реалізації такого підходу скористаємося Т- або П-подібними схемами заміщення чотириполюсника (рис. 4.9, б та рис. 4.10, б). При цьому необхідно так підібрати вирази для їх Y- або Z-параметрів, щоб цей вибір забезпечував реалізацію заданої передатної операторної характеристики

 $K_U(p) = M(p)/N(p) = -Y_{21}(p)/Y_{22}(p) = Z_{21}(p)/Z_{11}(p),$ (6.35) яка була б фізично реалізовною.

Задану операторну характеристику можна реалізувати і за допомогою Г-подібного чотириполюсника (рис. 6.8), який є напівланкою симетричного Т-подібного чотириполюсника. Передатна операторна характеристика відносно напруги такого чотириполюсника в режимі холостого ходу запишеться таким чином:





Для визначення операторних вхідних опорів двополюсників, що утворюють поздовжну та поперечну вітки Г-подібного чотириполюсника, приведемо вираз для заданої операторної характеристики (6.35) до вигляду, який відпові-

Рис. 6.8. Г-подібна напівланка Т-подібного чотириполюсника

дає (6.36). Це досягається шляхом ділення поліномів M(p) і N(p) на деякий третій поліном Q(p) –

$$K_{U}(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{M(p)/Q(p)}{N(p)/Q(p)} = \frac{M(p)/Q(p)}{M(p)/Q(p) + [N(p) - M(p)]/Q(p)},$$

вибраний таким чином, щоб операторні функції

$$Z_{a}(p) = M(p)/Q(p), \quad Z_{b}(p) = (N(p) - M(p))/Q(p)$$

були фізично реалізовними.

Слід пам'ятати, що нулі операторного коефіцієнта передачі відносно напруги Г-подібного чотириполюсника збігаються з нулями опору $Z_b(p)$ та полюсами опору $Z_a(p)$ і, як наслідок, знаходяться в лівій напівплощині. Отже, Г-подібну схему можна використовувати лише для реалізації операторних передатних характеристик мінімально-фазових чотириполюсників, особливості яких були розглянуті в розділі 2.6.2.

Використаємо Г-подібну схему чотириполюсника (рис. 6.8) для синтезу кола, передатна операторна характеристика відносно напруги якого в режимі холостого ходу має вигляд

$$K_{\rm U}(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{10p^2}{180p^4 + 37p^2 + 1}$$

Поділимо чисельник та знаменник цього виразу на поліном $Q(p) = 30p^3 + 2p$, вибраний таким чином, щоб операторні вхідні опори поздовжньої $Z_a(p)$ та поперечної $Z_b(p)$ ланок Г-подібного чотириполюсника були б додатними дійсними функціями комплексної частоти p:

$$Z_{a}(p) = \frac{M(p)}{Q(p)} = \frac{5p}{15p^{2} + 1};$$

$$Z_{b}(p) = \frac{N(p) - M(p)}{Q(p)} = \frac{12p^{2} + 1}{2p}.$$
(6.37)

Оскільки поліном у чисельнику першого з виразів (6.37) є непарним, а другого – парним, в той час як поліноми у знаменнику кожного з цих виразів відповідно парний та непарний, то операторні характеристики $Z_a(p)$ і $Z_b(p)$ можна реалізувати як вхідні операторні опори реактивних двополюсників. Причому, як видно з виразів (6.3) і (6.6), опір $Z_a(p)$ можна реалізувати у вигляді паралельного з'єднання ємності та індуктивності, а опір $Z_b(p) - y$ вигляді послідовного з'єднання таких елементів (рис. 6.9).

Щоб визначити параметри елементів синтезованої схеми, достатньо записати операторні вхідні характеристики двополюсників у поперечній та поздовжній її вітках у вигляді драбинних дробів –

$$Z_{a}(p) = \frac{1}{3p + 1/5p}, \quad Z_{b}(p) = 6p + 1/2p.$$



Рис. 6.9. Схема синтезованого пасивного чотириполюсника

З отриманих виразів видно, що операторний опір $Z_a(p)$ може бути реалізований у вигляді паралельного з'єднання ємності $C_1 = 3 \Phi$ та індуктивності $L_1 = 5 \Gamma$ н, а опір $Z_b(p) - y$ вигляді послідовного з'єднання індуктивності $L_2 = 6 \Gamma$ н та ємності $C_2 = 2 \Phi$.

Розділ 7

ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

7.1. Рівняння довгої лінії та їх аналіз

7.1.1. Поняття про кола з розподіленими параметрами

Розглянуті в попередніх розділах електричні кола відносяться до кіл із зосередженими параметрами. Вони мають у своєму складі опори – елементи, в яких розсіюється енергія джерел, а також індуктивності і ємності, що запасають енергію в магнітному та електричному полях відповідно. При цьому вважають, що в усіх елементах послідовної ділянки кола із зосередженими параметрами для будь-якого фіксованого моменту часу струм має однакову величину.

Однак відомо, що електромагнітне збурення в довільній електричній системі розповсюджується зі скінченною швидкістю і тому в реальному послідовному колі миттєвий струм принципово не може бути однаковим в усіх елементах. Тобто дія джерела енергії на коло проявляється в заданій точці не миттєво, а з деяким запізненням, яке визначається відстанню між джерелом та цією точкою. Окрім того, накопичення та розсіювання електромагнітної енергії відбувається на всіх без виключення ділянках реального кола, включаючи і з'єднувальні дроти.

Прийняті для кіл із зосередженими параметрами допущення про концентрацію процесів розсіювання та накопичення енергії в опорах, індуктивностях і ємностях будуть виконуватись лише в тому випадку, коли максимальні геометричні розміри кола будуть набагато меншими порівняно з довжиною хвилі електромагнітного збурення ($\ell_{\rm max} < 0.01\lambda$). В цьому випадку запізненням електромагнітних коливань при їх розповсюдженні в колі можна знехтувати.

Якщо ж геометричні розміри електричного кола сумірні або більші за довжину хвилі електромагнітних коливань, що розповсюджуються в цьому колі, то його не можна віднести до кіл із зосередженими параметрами. Такі кола називаються колами з розподіленими параметрами і вивчаються за допомогою положень теорії поля. У деяких випадках для аналізу кіл з розподіленими параметрами можна скористатися і методами аналізу електричних кіл.

Слід зазначити, що порівняння довжини хвилі з геометричними розмірами є основним, але не єдиним критерієм для віднесення кола до того чи іншого класу. Іншим критерієм є величини напруг, що діють у колі. Якщо напруги дуже великі, то не можна нехтувати струмами зміщення та витікання між дротами кола. Таке коло слід віднести до класу систем з розподіленими параметрами незалежно від співвідношення його розмірів та довжини хвилі електромагнітних коливань.

До електричних систем з розподіленими параметрами, що застосовуються в радіотехніці та електрозв'язку, відносяться лінії зв'язку, лінії електропередачі, фідери, смужкові лінії, антени, хвилеводи, об'ємні резонатори та ін. В подальшому будемо розглядати лише ті з них, які можна об'єднати під загальною назвою "довгі лінії".



Рис. 7.1. Довга лінія

Нехай маємо коло змінного струму, що утворене двома паралельними проводами великої довжини і навантажене на відомий опір \underline{Z}_{H} (рис. 7.1). Якщо довжина проводів цього кола сумірна або більша, ніж довжина електромагнітної хвилі, що в них розпов-сюджується, то таке коло називається дов-гою лінією. Будь-який малий елемент dx такої лінії, оточений електричним та магнітним полем, буде характеризуватися деякими малими ємністю,

індук-тивністю та активним опором одночасно. Це означає, що електричні параметри довгої лінії – ємність, індуктивність та опір – безперервно розподілені вздовж її довжини. Така лінія є класичним прикладом кола з розподіленими параметрами.

Будь-яку ділянку dx довгої лінії можна представити у вигляді еквівалентної схеми, яка складається з елементів із зосередженими параметрами з нескінченно малими значеннями пара-

метрів dL, dC, dR, та dG (рис. 7.2). У цій схемі, для аналізу якої можна застосувати закони Кірхгофа та інші методи аналізу кіл із зосередженими параметрами, величина dL характеризує результу-ючу індуктивність верхнього та нижнього проводів малої ділянки лінії, dC – величину ємності між проводами на діля-



Рис. 7.2. Еквівалентна схема нескінченно малої ділянки довгої лінії

нці dx, a dR – активний опір втрат в проводах цієї ділянки. Провідність dG обумовлена недосконалістю ізоляції між проводами і характеризує процес витікання в колі на ділянці dx.

Повна еквівалентна схема довгої лінії повинна містити в собі нескінченну кількість аналогічних ланок, з'єднаних каскадно. На практиці замість нескінченно малих величин dL, dC, dR та dG зручно використовувати так звані погонні параметри довгої лінії, які розраховуються на одиницю її довжини:

$$L_{1} = \frac{dL}{dx} - \text{погонна індуктивність};$$
$$C_{1} = \frac{dC}{dx} - \text{погонна ємність};$$
$$R_{1} = \frac{dR}{dx} - \text{погонний опір втрат};$$
$$G_{1} = \frac{dG}{dx} \text{ погонна провідність витікання.}$$

Якщо погонні параметри, які ще називають первинними параметрами довгої лінії, вздовж лінії не змінюються, то таку лінію називають однорідною. В протилежному випадку довга лінія є неоднорідною.

Існує велика кількість типів довгих ліній, які мають суттєві конструктивні відмінності і застосовуються в різних діапазонах частот. Коротко розглянемо найчастіше використовувані з них.



Рис. 7.3. Відкрита двопровідна (а), симетрична (б) та коаксіальна (в) довгі лінії

Найбільш простою, однак широко розповсюдженою конструкцією є відкрита двопровідна лінія, що утворена двома паралельними циліндричними провідниками (рис. 7.3, а), які розділені повітряним діелектриком. Ці лінії виготовляються з міді, біметалів або сталі і ви-

користовуються в електрозв'язку на частотах до 150 кГц, а в радіотехніці на значно вищих частотах.

Разом з двопровідною лінією в електрозв'язку на частотах від 0,3 кГц до 1,5 МГц широко застосовується симетричний кабель, конструкція якого може бути достатньо складною. Основним елементом цієї конструкції є два ізольованих скручених один з одним проводи (прямий та зворотний), які утворюють так звану симетричну пару (рис. 7.3, б). Пари скручуються між собою в групи,

а групи – в спільний кабель, який поміщається в металічну або пластмасову оболонку.

Широке розповсюдження мають також коаксіальні довгі лінії, які складаються з двох концентричних циліндричних провідників, простір між якими заповнюється повітрям або будь-яким іншим діелектриком (рис. 7.3, в). В залежності від конструкції коаксіальний кабель застосовується в електрозв'язку на частотах до 25 МГц, а в радіозв'язку – до тисяч мегагерц.

В області надвисоких частот застосовуються так звані смужкові лінії та хвилеводи. Смужкові довгі лінії бувають несиметричними (рис. 7.4, а) та симет-ричними (рис. 7.4, б). Несиметрична смужкова лінія утворюється двома плос-кими провідниками, між якими розташовується діелектрик дуже малої товщи-ни. Симетрична смужкова лінія складається з трьох плоских провідників, причому між центральним та зовнішніми провідниками також розміщується діелектрик. Хвилеводи – це порожнисті металеві труби з круглим або прямокутним перерізом (рис. 7.4, в), в яких розповсюджуються електромагнітні хвилі.

Кола з розподіленими параметрами у вигляді довгих ліній широко використовуються для передачі електромагнітної енергії в заданому напрямку. Окрім того на ультракоротких хвилях відрізки довгих ліній виконують функції пасивних реактивних елементів, високодобротних резонаторів та елементів електрич-них фільтрів.



Рис. 7.4. Несиметрична (а), симетрична (б) смужкові лінії та хвилеводи (в)

7.1.2. Диференціальні рівняння довгої лінії

У загальному випадку напруга та струм у довгій лінії виявляються функціями не тільки часу, як у колах із зосередженими параметрами, але й просторової координати, що визначає положення точки спостереження.

Для визначення напруги та струму в деякій точці довгої лінії розглянемо довільний нескінченно малий елемент dx, віддалений від її початку на відс-

тань x₁ (рис. 7.1). Нехай на вході даного елемента, тобто в точці з координатою x₁, струм та напруга відповідно дорівнюють

$$i = \phi(x_1, t), \quad u = f(x_1, t).$$
 (7.1)

Тоді струм та напруга на виході елемента dx мають значення

$$i_1 = \phi(x_1 + dx, t), \quad u_1 = f(x_1 + dx, t).$$

Якщо вважати струм та напругу в лінії безперервними функціями координати х, то значення струму і₁ та напруги u₁ можна представити у вигляді

$$i_{1} = \varphi(x,t) + \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} dx = i + \frac{\partial i}{\partial x} dx,$$

$$u_{1} = f(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dx = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$
(7.2)

З виразів (7.2) виходить, що

$$i_{1} - i = \frac{\partial i}{\partial x} dx,$$

$$u_{1} - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$
(7.3)

Струм та напругу в колі можна вважати такими, що безперервно змінюються вздовж лінії, якщо погонні параметри останньої ніде не змінюються стрибкоподібно.

Як видно з еквівалентної схеми елемента dx довгої лінії (рис. 7.2), різниця між струмами $i_1(t)$ та i(t) обумовлена відгалуженням частини струму в ємність $dC = C_1 dx$ та активну провідність $dG = G_1 dx$. Тому можна записати

$$\dot{\mathbf{i}} - \dot{\mathbf{i}}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{u}_1 d\mathbf{x} + \mathbf{C}_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} d\mathbf{x} \,. \tag{7.4}$$

Аналогічна різниця між величинами u_1 та и обумовлена спадом напруги на активному опорі $dR = R_1 dx$ та на індуктивності $dL = L_1 dx$. Як наслідок маємо

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \mathbf{i}\mathbf{R}_1 \mathbf{d}\mathbf{x} + \mathbf{L}_1 \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \mathbf{t}} \mathbf{d}\mathbf{x} \,. \tag{7.5}$$

У правій частині рівняння (7.4) величину u₁ з точністю до нескінченно малих величин другого порядку можна замінити величиною u. Це означає, що на еквівалентній схемі елемента лінії dx точку підключення паралельної вітки можна вибирати довільно. Таким чином, на основі (7.4) одержимо

$$i - i_1 \approx G_1 u dx + C_1 \frac{\partial u}{\partial t} dx.$$
 (7.6)

207

Якщо підставити отриману різницю напруг (7.5) та струмів (7.6) в співвідношення (7.3), то матимемо

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}.$$
 (7.7)

Диференціальні рівняння з частинними похідними (7.7) дають можливість визначити миттєві струм та напругу в будь-якій точці довгої лінії і називаються телеграфними рівняннями. Ці рівняння є справедливими в разі будьякого характеру змінювання в часі струмів та напруг, що діють у колі. Розв'язання цієї системи рівнянь в разі конкретних початкових та граничних умов дає можливість знайти струм та напругу як функції відстані від початку або кінця лінії та часу.

7.1.3. Усталений режим роботи однорідної довгої лінії

Розв'язання телеграфних рівнянь довгої лінії в усталеному режимі

Розглянемо усталений режим роботи в довгій лінії, якщо напруга джерела живлення кола має гармонічний характер. В цьому випадку систему рівнянь (7.7) можна переписати в комплексній формі:

$$-\frac{d\underline{I}}{dx} = (G_1 + j\omega C_1)\underline{U} = \underline{Y}_1\underline{U};$$

$$-\frac{d\underline{U}}{dx} = (R_1 + j\omega L_1)\underline{I} = \underline{Z}_1\underline{I},$$
 (7.8)

де $\underline{Y}_1, \underline{Z}_1$ – комплексні провідність та опір довгої лінії одиничної довжини.

Очевидно, що у виразах (7.8) величини \underline{Y}_1 та \underline{Z}_1 не є взаємно оберненими. Окрім того, в цій системі рівнянь частинні похідні відносно змінної величини х замінені на звичайні, оскільки комплексні діючі напруга \underline{U} та струм \underline{I} не є функціями часу, а залежать лише від просторової координати.

Виключимо із системи (7.8) струм <u>I</u> і одержимо рівняння відносно напруги <u>U</u>:

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\underline{\mathrm{U}}}{\mathrm{dx}^{2}} = (\mathrm{R}_{1} + j\omega\mathrm{L}_{1})(\mathrm{G}_{1} + j\omega\mathrm{C}_{1})\underline{\mathrm{U}}.$$
(7.9)

Аналогічно отримаємо рівняння відносно струму І-

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\mathbf{I}}{\mathrm{dx}^{2}} = (\mathbf{R}_{1} + j\omega\mathbf{L}_{1})(\mathbf{G}_{1} + j\omega\mathbf{C}_{1})\mathbf{I}.$$
(7.10)

Позначимо добуток перед напругою та струмом в правих частинах рівнянь (7.9) і (7.10) через

$$\underline{\gamma}^2 = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{j}\omega\mathbf{L}_1)(\mathbf{G}_1 + \mathbf{j}\omega\mathbf{C}_1) \tag{7.11}$$

та назвемо величину $\underline{\gamma}$, що характеризує процес передачі енергії в довгій лінії, комплексним коефіцієнтом поширення або просто коефіцієнтом поширення.

Таким чином, рівняння (7.9) та (7.10) можна переписати у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{\mathrm{U}}}{\mathrm{dx}^2} = \underline{\gamma}^2\underline{\mathrm{U}}; \quad \frac{\mathrm{d}^2\underline{\mathrm{I}}}{\mathrm{dx}^2} = \underline{\gamma}^2\underline{\mathrm{I}},$$

або інакше

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\underline{\mathrm{U}}}{\mathrm{dx}^{2}} - \underline{\gamma}^{2}\underline{\mathrm{U}} = 0; \quad \frac{\mathrm{d}^{2}\underline{\mathrm{I}}}{\mathrm{dx}^{2}} - \underline{\gamma}^{2}\underline{\mathrm{I}} = 0.$$
(7.12)

Отже, в стаціонарному режимі електромагнітні процеси в довгій лінії описуються двома лінійними однорідними диференціальними рівняннями другого порядку.

З рівнянь (7.12) видно, що характеристичне рівняння даного кола має вигляд

$$p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0$$

а це означає, що у відповідності з класичним методом розв'язування диференціальних рівнянь загальний розв'язок першого з двох рівнянь (7.12) має вигляд

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{A}}_{1} \mathbf{e}^{\mathbf{p}_{1}\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{e}^{\mathbf{p}_{2}\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{A}}_{1} \mathbf{e}^{-\underline{\gamma}\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{e}^{\underline{\gamma}\mathbf{x}}, \qquad (7.13)$$

де <u>A</u>₁ та <u>A</u>₂ – комплексні постійні інтегрування розв'язку диференціального рівняння; $p_1 = -\gamma$, $p_2 = \gamma$ – корені характеристичного рівняння кола.

Аналогічно можна отримати і розв'язок другого рівняння (7.12). Однак краще не вводити додаткових постійних інтегрування, тому для визначення струму в лінії можна скористатися другим рівнянням системи (7.8). Тоді отримаємо

$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{1}{\mathbf{R}_1 + \mathbf{j}\omega\mathbf{L}_1} \left(-\frac{\mathbf{d}\underline{\mathbf{U}}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \right) = \frac{1}{\mathbf{R}_1 + \mathbf{j}\omega\mathbf{L}_1} \left(\underline{\mathbf{A}}_1 \underline{\gamma} e^{-\underline{\gamma}\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{A}}_2 \underline{\gamma} e^{\underline{\gamma}\mathbf{x}} \right),$$

а з урахуванням (7.11)

$$\underline{I} = \sqrt{\frac{G_1 + j\omega C_1}{R_1 + j\omega L_1}} \left(\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} \right) = \frac{1}{\underline{Z}_{xB}} \left(\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} \right), \quad (7.14)$$

де $\underline{Z}_{xB} = \sqrt{\underline{Z}_1/\underline{Y}_1}$ – хвильовий опір довгої лінії, який характеризує її опір електромагнітній хвилі, тобто за фізичним смислом принципово відрізняється від раніше введеного поняття комплексного опору для кіл із зосередженими параметрами.

Аналіз розв'язку телеграфних рівнянь довгої лінії

Врахуємо, що комплексний коефіцієнт поширення довгої лінії дорівнює $\gamma = \alpha + j\beta$. Тоді для діючого значення напруги в лінії отримаємо

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{A}}_{1} \mathbf{e}^{-\alpha \mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}^{-j\beta \mathbf{x}} + \underline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{e}^{\alpha \mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}^{j\beta \mathbf{x}}.$$
(7.15)

Миттєве значення напруги u(t) в довільній точці довгої лінії з координатою х можна записати як уявну або дійсну частини миттєвого комплексу напруги в лінії. Причому останній має вигляд

$$\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \sqrt{2} \underline{\mathbf{U}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}.$$

Тобто у випадку синусоїдної напруги

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{t}) = \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}\underline{\mathbf{A}}_{1}e^{-\alpha \mathbf{x}} \cdot e^{-j\beta \mathbf{x}} \cdot e^{j\omega \mathbf{t}} + \sqrt{2}\underline{\mathbf{A}}_{2}e^{\alpha \mathbf{x}} \cdot e^{j\beta \mathbf{x}} \cdot e^{j\omega \mathbf{t}}\right),$$

або з урахуванням того, що $\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}$, а $\underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$, одержимо

$$u(x,t) = \sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x) + \sqrt{2}A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x).$$
(7.16)

Таким чином, при гармонічному характері змінювання зовнішнього збудження миттєве значення напруги в будь-якій точці довгої лінії можна представити у вигляді суми двох гармонічних складових. Розглянемо спочатку першу з них.

Якщо зафіксувати просторову координату х і вважати цю гармонічну складову функцією часу, то вона являтиме собою синусоїду з незмінною амплітудою. Якщо ж, навпаки, зафіксувати момент часу t і аналізувати поведінку миттєвої напруги вздовж лінії, то одержимо згасаючу гармонічну функцію, амплітуда якої $U_{m1} = \sqrt{2}A_1e^{-\alpha x}$ зменшується при зростанні координати x, тобто в разі зміщення точки спостереження від початку лінії до її кінця (рис. 7.5).



Рис. 7.5. Пряма (а) та зворотна (б) хвилі напруги в довгій лінії

Як видно з виразу (7.16), величина α , що дорівнює дійсній частині комплексного коефіцієнта поширення γ , характеризує величину змінювання амплі-туди гармонічної хвилі напруги або струму на одиницю довжини лінії. В той же час величина β , що дорівнює уявній частині коефіцієнта γ і характеризує змінювання фази гармонічної хвилі на одиницю довжини лінії, називається коефіцієнтом фази. Слід зазначити, що зменшення амплітуди напруги вздовж лінії обумовлюється втратами енергії в лінії, а змінювання фази – скінченою швидкістю розповсюдження електромагнітних коливань. Отже, дійсно, вве-дений виразом (7.11) комплексний коефіцієнт поширення γ , складовими части-нами якого є коефіцієнти згасання α та фази β , характеризує процес розповсюдження в довгій лінії хвиль напруги і струму.

З рис. 7.5, а видно, що довжина хвилі напруги в лінії дорівнює мінімальній відстані між двома точками лінії, де фази будь-якої з двох складових напруги (7.16) відрізняються на 2π . У відповідності з цим для даної складової напруги маємо

$$[\omega t + \psi_1 - \beta x] - [\omega t + \psi_1 - \beta (x + \lambda)] = 2\pi,$$

звідки можна отримати рівняння зв'язку між коефіцієнтом фази лінії та довжиною хвилі:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}; \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{7.17}$$

На рис. 7.5, а також зображені дві хвилі напруги, що відповідають різним моментам часу t_1 та t_2 . Очевидно, що з плином часу, та хвиля, що відповідає першій складовій напруги в лінії, зміщується в напрямку від початку лінії до її кінця. Тому ця хвиля називається прямою або падаючою.

Швидкість переміщення прямої хвилі вздовж лінії називається фазовою швидкістю хвилі в лінії і визначається як швидкість переміщення точки, фаза коливань в якій залишається незмінною. Для прямої хвилі ця умова має вигляд

$$\omega t + \psi_1 - \beta x = \text{const},$$

звідки одержимо

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega t + \psi_1 - \beta x) = 0, \quad \omega - \beta \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.$$
(7.18)

Тобто з (7.18) для фазової швидкості прямої хвилі напруги маємо

$$v_{\phi} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$
 (7.19)

Якщо скористатись виразом (7.19), то на основі першого з виразів (7.17) для довжини хвилі отримаємо

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \mathbf{v}_{\phi} = \frac{\mathbf{v}_{\phi}}{\mathbf{f}} = \mathbf{v}_{\phi} \cdot \mathbf{T}.$$
(7.20)

З виразу (7.20) виходить, що за інтервал часу, який дорівнює одному періоду коливань, хвилі напруги та струму переміщуються вздовж лінії на відстань, що дорівнює довжині хвилі.

Аналогічні дослідження другої складової миттєвої напруги у виразі (7.17) показують, що для довільного моменту часу вона являє собою синусоїдну хвилю, амплітуда якої $U_{m2} = \sqrt{2}A_2 e^{\alpha x}$ зростає у разі збільшення значення координати x, тобто при переміщенні точки спостереження від початку лінії до її кінця (рис. 7.5, б). Ця хвиля називається зворотною або відбитою хвилею, а її фазова швидкість дорівнює $v_{\phi} = -\omega/\beta$. Це означає, що зворотна хвиля напруги розповсюджується назустріч прямій, оскільки їх фазові швидкості однакові за величиною, але мають протилежні знаки. Отже, миттєву напругу в довгій лінії можна розглядати як суму двох хвиль, які рухаються в протилежних напрямках і згасають у напрямку свого руху.

На основі викладеного вираз (7.13) можна записати у вигляді

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{np}} + \underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{3B}},\tag{7.21}$$

де $\underline{U}_{np} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x}$, $\underline{U}_{3B} = \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}$ – пряма та зворотна хвилі напруги відповідно.

Результати, отримані при аналізі напруги, що діє в довгій лінії, можна розповсюдити і на струм. Однак в останньому випадку слід звернути увагу на ту обставину, що струм в лінії можна представити у вигляді різниці прямої та зворотної хвиль. Отже, вираз (7.14) набуде вигляду

$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{np}}}{\underline{\mathbf{Z}}_{\mathrm{xB}}} - \frac{\underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{3B}}}{\underline{\mathbf{Z}}_{\mathrm{xB}}} = \underline{\mathbf{I}}_{\mathrm{np}} - \underline{\mathbf{I}}_{\mathrm{3B}}.$$
(7.22)

З виразу (7.22) видно, що хвильовий опір довгої лінії можна трактувати як опір цієї лінії прямій або зворотній хвилі напруги, а саме

$$\underline{Z}_{xB} = \frac{\underline{U}_{np}}{\underline{I}_{np}} = \frac{\underline{U}_{3B}}{\underline{I}_{3B}}.$$
(7.23)

I нарешті слід зазначити, що реально в довгій лінії існують лише результуючі напруга та струм, а їх розкладання на пряму та зворотну хвилі є тільки зручним прийомом, який дозволяє краще зрозуміти фізичні процеси, що відбуваються в лінії.

7.1.4. Рівняння однорідної довгої лінії з гіперболічними функціями

Повторно звернемося до розв'язків (7.13) та (7.14) диференціальних рівнянь однорідної довгої лінії, що працює в усталеному режимі, і знайдемо постійні інтегрування <u>A</u>₁ та <u>A</u>₂ цих розв'язків.

Оскільки в усталеному режимі напруги та струми в довгій лінії є функціями просторової координати х, то для розв'язання поставленої задачі необхідно знати граничні умови, які в даному випадку є аналогом початкових умов, використовуваних при аналізі перехідних процесів.

У найбільш простому випадку аналізу однорідної довгої лінії граничними умовами є значення напруги та струму на початку лінії, коли x = 0 –

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = \underline{\mathbf{U}}(0), \quad \underline{\mathbf{I}}_{1} = \underline{\mathbf{I}}(0), \tag{7.24}$$

або в кінці лінії, коли $x = \ell - \ell$

$$\underline{\mathbf{U}}_2 = \underline{\mathbf{U}}(\ell), \quad \underline{\mathbf{I}}_2 = \underline{\mathbf{I}}(\ell). \tag{7.25}$$

Нехай відомими є напруга \underline{U}_1 та струм \underline{I}_1 на початку лінії. З виразів (7.13) та (7.14) при x = 0 одержимо

$$\underline{\mathbf{U}}_{1} = \underline{\mathbf{A}}_{1} + \underline{\mathbf{A}}_{2}, \quad \underline{\mathbf{I}}_{1} \underline{\mathbf{Z}}_{xB} = \underline{\mathbf{A}}_{1} - \underline{\mathbf{A}}_{2}.$$
(7.26)

З виразів (7.26) для шуканих постійних інтегрування матимемо

$$\underline{\mathbf{A}}_{1} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{U}}_{1} + \underline{\mathbf{I}}_{1} \underline{\mathbf{Z}}_{XB}),$$

$$\underline{\mathbf{A}}_{2} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{U}}_{1} - \underline{\mathbf{I}}_{1} \underline{\mathbf{Z}}_{XB}).$$
(7.27)

Якщо отримані співвідношення підставити у вирази (7.13) та (7.14), то для напруги <u>U</u> та струму <u>I</u> в будь-якій точці лінії отримаємо

213

$$\underline{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{U}}_{1} + \underline{\mathbf{I}}_{1} \underline{\mathbf{Z}}_{XB}) e^{-\underline{\gamma}X} + \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{U}}_{1} - \underline{\mathbf{I}}_{1} \underline{\mathbf{Z}}_{XB}) e^{\underline{\gamma}X} ,$$

$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{\mathbf{U}}_{1}}{\underline{\mathbf{Z}}_{XB}} + \underline{\mathbf{I}}_{1} \right) e^{-\underline{\gamma}X} - \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{\mathbf{U}}_{1}}{\underline{\mathbf{Z}}_{XB}} - \underline{\mathbf{I}}_{1} \right) e^{\underline{\gamma}X} .$$
(7.28)

Згрупуємо подібні члени в правих частинах рівнянь (7.28) і введемо гіперболічні функції chyx та shyx. Тоді матимемо

$$\underline{U} = \underline{U}_{1} \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2} - \underline{I}_{1} \underline{Z}_{xB} \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2} = \underline{U}_{1} \operatorname{ch}\underline{\gamma}x - \underline{I}_{1} \underline{Z}_{xB} \operatorname{sh}\underline{\gamma}x,$$

$$\underline{I} = -\frac{\underline{U}_{1}}{\underline{Z}_{xB}} \cdot \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2} + \underline{I}_{1} \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2} = -\frac{\underline{U}_{1}}{\underline{Z}_{xB}} \operatorname{sh}\underline{\gamma}x + \underline{I}_{1} \operatorname{ch}\underline{\gamma}x.$$
(7.29)

Співвідношення (7.29) дозволяють знайти напругу та струм на будь-якій відстані х від початку лінії, якщо відомими є значення напруги \underline{U}_1 та струму \underline{I}_1 на початку лінії.

Нехай тепер відомими є напруга \underline{U}_2 та струм \underline{I}_2 в кінці лінії, тобто заданим є режим роботи навантаження $\underline{Z}_{\rm H} = \underline{U}_2 / \underline{I}_2$.

У цьому випадку доцільно відраховувати відстань від кінця лінії до її поточної точки. Якщо позначити цю відстань через x', то одержимо, що $x = \ell - x'$, де x – відстань від початку лінії до точки спостереження, а ℓ – довжина всієї лінії. При таких позначеннях з рівнянь (7.13) та (7.14) отримаємо

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{A}}_{1} \mathbf{e}^{-\underline{\gamma}\ell} \cdot \mathbf{e}^{\underline{\gamma}\mathbf{x}'} + \underline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{e}^{\underline{\gamma}\ell} \cdot \mathbf{e}^{-\underline{\gamma}\mathbf{x}'},$$

$$\underline{\mathbf{I}}\underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{x}\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{A}}_{1} \mathbf{e}^{-\underline{\gamma}\ell} \cdot \mathbf{e}^{\underline{\gamma}\mathbf{x}'} - \underline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{e}^{\underline{\gamma}\ell} \cdot \mathbf{e}^{-\underline{\gamma}\mathbf{x}'}.$$
(7.30)

Позначимо у виразах (7.30) <u>А</u>₃ = <u>А</u>₁е^{$-\underline{\gamma}\ell$} та <u>А</u>₄ = <u>А</u>₂е^{$\underline{\gamma}\ell$} і для спрощення відстань від кінця лінії до точки спостереження будемо позначати через x, як і у випадку відрахування координати від початку лінії. В результаті вирази (7.30) набудуть вигляду

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{A}}_{3} e^{\underline{\gamma}x} + \underline{\underline{A}}_{4} e^{-\underline{\gamma}x},$$

$$\underline{\underline{IZ}}_{xB} = \underline{\underline{A}}_{3} e^{\underline{\gamma}x} - \underline{\underline{A}}_{4} e^{-\underline{\gamma}x},$$
(7.31)

де <u>A</u>₃ $e^{\gamma x} = U_{np}$, <u>A</u>₄ $e^{-\gamma x} = U_{3B}$ – пряма та зворотна хвилі напруги відповідно. Зі співвідношень (7.31) в кінці лінії, коли x = 0, матимемо

$$\underline{\mathbf{U}}_{2} = \underline{\mathbf{A}}_{3} + \underline{\mathbf{A}}_{4}, \quad \underline{\mathbf{I}}_{2} \underline{\mathbf{Z}}_{\text{xb}} = \underline{\mathbf{A}}_{3} - \underline{\mathbf{A}}_{4},$$

звідки постійні інтегрування

$$\underline{\mathbf{A}}_{3} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{U}}_{2} + \underline{\mathbf{I}}_{2}\underline{\mathbf{Z}}_{xB}), \quad \underline{\mathbf{A}}_{4} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{U}}_{2} - \underline{\mathbf{I}}_{2}\underline{\mathbf{Z}}_{xB}).$$
(7.32)

Якщо вирази (7.32) підставити в рівняння (7.31), згрупувати подібні члени та ввести гіперболічні функції, то одержимо

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_{2} \operatorname{ch}\underline{\mathbf{\gamma}}\mathbf{x} + \underline{\mathbf{I}}_{2}\underline{\mathbf{Z}}_{xB} \operatorname{sh}\underline{\mathbf{\gamma}}\mathbf{x},$$

$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{2}}{\underline{\mathbf{Z}}_{xB}} \operatorname{sh}\underline{\mathbf{\gamma}}\mathbf{x} + \underline{\mathbf{I}}_{2} \operatorname{ch}\underline{\mathbf{\gamma}}\mathbf{x}.$$
(7.33)

За допомогою рівнянь (7.33) можна розрахувати напругу та струм в будь-якій точці довгої лінії, якщо відомі їх значення в кінці цієї лінії.

Звертає на себе увагу схожість одержаних рівнянь з рівняннями симетричного чотириполюсника (4.89). Співставлення останніх з рівняннями (7.33) довгої лінії дозволяє зробити висновок, що однорідна лінія являє собою симетричний чотириполюсник з коефіцієнтом поширення $\underline{\Gamma} = \underline{\gamma} \ell$ та характеристичним опором $\underline{Z}_x = \underline{Z}_{xB}$.

7.2. Довга лінія в режимі біжучих хвиль

З викладеного вище виходить, що в разі довільного вибору опору навантаження довгої лінії в останній, окрім прямих хвиль напруги та струму, виникають і відповідні зворотні хвилі. Кількісно це явище можна оцінити за допомогою параметрів, які називаються комплексними коефіцієнтами відбиття. Ці коефіцієнти визначаються як відношення комплексних напруг або струмів зворотної та прямої хвиль в довільній точці довгої лінії:

$$\underline{p}_{u} = \underline{U}_{3B} / \underline{U}_{np} = (U_{3B} / U_{np}) e^{j(\psi_{u3B} - \psi_{unp})} = p_{u} e^{j\phi p_{u}} ;$$

$$\underline{p}_{i} = \underline{I}_{3B} / \underline{I}_{np} = (I_{3B} / I_{np}) e^{j(\psi_{i3B} - \psi_{inp})} = p_{i} e^{j\phi p_{i}} ,$$
(7.34)

де ψ_{unp} , $\psi_{u_{3B}}$ – початкові фази прямої та зворотної хвиль напруги; ψ_{inp} , $\psi_{i_{3B}}$ – початкові фази прямої та зворотної хвиль струму; $p_u = (U_{3B}/U_{np})$, $p_i = (I_{3B}/I_{np})$ – модулі комплексних коефіцієнтів відбиття напруги і струму; $\phi_{p_u} = \psi_{u_{3B}} - \psi_{unp}$, $\phi_{p_i} = \psi_{i_{3B}} - \psi_{inp}$ – аргументи комплексних коефіцієнтів відбиття напруги і струму.

Отже, з виразів (7.34) видно, що модуль р комплексного коефіцієнта відбиття характеризує відношення діючих або амплітудних значень напруг та струмів зворотної і прямої хвиль, а аргумент φ_p – фазовий зсув між ними.

Якщо скористатись виразами (7.31) та (7.32), то при відрахуванні координати х від кінця лінії на основі (7.34) отримаємо

$$\underline{\underline{p}}_{u} = \frac{\underline{\underline{A}}_{4}e^{-\underline{\gamma}\underline{x}}}{\underline{\underline{A}}_{3}e^{\underline{\gamma}\underline{x}}} = \frac{\underline{\underline{U}}_{2} - \underline{\underline{I}}_{2}\underline{\underline{Z}}_{\underline{x}\underline{B}}}{\underline{\underline{U}}_{2} + \underline{\underline{I}}_{2}\underline{\underline{Z}}_{\underline{x}\underline{B}}}e^{-2\underline{\gamma}\underline{x}} = \frac{\underline{\underline{Z}}_{\underline{H}} - \underline{\underline{Z}}_{\underline{x}\underline{B}}}{\underline{\underline{Z}}_{\underline{H}} + \underline{\underline{Z}}_{\underline{x}\underline{B}}}e^{-2\underline{\gamma}\underline{x}},$$

$$\underline{\underline{p}}_{i} = -\underline{\underline{A}}_{4}e^{-\underline{\gamma}\underline{x}} / \underline{\underline{A}}_{3}e^{\underline{\gamma}\underline{x}} = -\underline{\underline{p}}_{u}.$$

$$(7.35)$$

Найчастіше коефіцієнт відбиття визначають в тих точках довгої лінії, де мають місце деякі неоднорідності, наприклад, на початку або в кінці лінії.

В кінці лінії, коли координата точки спостереження x = 0, для коефіцієнтів відбиття матимемо

$$\underline{p}'_{u} = \frac{\underline{Z}_{H} - \underline{Z}_{XB}}{\underline{Z}_{H} + \underline{Z}_{XB}} = \left| \frac{\underline{Z}_{H} - \underline{Z}_{XB}}{\underline{Z}_{H} + \underline{Z}_{XB}} \right| e^{j\phi'_{p_{u}}} = p_{u}e^{j\phi'_{p_{u}}} ,$$

$$\underline{p}'_{i} = \frac{\underline{Z}_{XB} - \underline{Z}_{H}}{\underline{Z}_{XB} + \underline{Z}_{H}} = \left| \frac{\underline{Z}_{XB} - \underline{Z}_{H}}{\underline{Z}_{XB} + \underline{Z}_{H}} \right| e^{j\phi'_{p_{i}}} = p_{i}e^{j\phi'_{p_{i}}} ,$$

$$(7.36)$$

де ϕ'_{p_u} , ϕ'_{p_i} – аргументи коефіцієнтів відбиття напруги та струму в кінці лінії.

З виразів (7.36) видно, що величини коефіцієнтів відбиття залежать від співвідношення між опором навантаження лінії \underline{Z}_{H} та її хвильовим опором \underline{Z}_{xB} . Якщо порівняти вирази (7.34) – (7.36) один з одним, то в загальному випадку для довгої лінії, навантаженої на опір, що не дорівнює хвильовому, коефіцієнти відбиття в будь-якій точці з координатою х будуть дорівнювати

$$\underline{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{j}(\mathbf{\phi}_{\mathbf{p}}^{'} - 2\beta\mathbf{x})} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{j}\boldsymbol{\phi}\mathbf{p}}$$

А аргумент коефіцієнта відбиття в точці спостереження має величину

$$\varphi_{\rm p} = \varphi_{\rm p} - 2\beta x. \tag{7.37}$$

У випадку, коли комплексні опори \underline{Z}_{H} та \underline{Z}_{xB} однакові, коефіцієнт відбиття $\underline{p} = 0$, і в довгій лінії існують лише прямі хвилі напруги та струму. Такий режим роботи довгої лінії називається режимом біжучих хвиль або узгодженим, оскільки в лінії існують лише ті хвилі, які розповсюджуються від джерела електромагнітної енергії до приймача (навантаження). Завдяки відсутності в цьому режимі зворотних хвиль напруги і струму, вся енергія, що переноситься прямою хвилею вздовж лінії, поглинається навантаженням. Це типовий режим роботи, що застосовується при використанні довгих ліній для передачі електромагнітної енергії.

Очевидно, що в узгодженому режимі, коли $\underline{Z}_{H} = \underline{Z}_{xB}$, величина

$$\underline{I}_2 \underline{Z}_{xB} = \underline{I}_2 \underline{Z}_H = \underline{U}_2$$
і при відрахуванні координати х від кінця лінії на основі виразів (7.31) та (7.32) для комплексних напруги та струму в лінії одержимо

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_{2} \mathbf{e}^{\underline{\gamma}\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{U}}_{2} \mathbf{e}^{\alpha \mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}^{j\beta \mathbf{x}},$$

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{I}}_{2} \mathbf{e}^{\underline{\gamma}\mathbf{x}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{2}}{\underline{Z}_{\mathbf{x}\mathbf{B}}} \mathbf{e}^{\alpha \mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}^{j\beta \mathbf{x}}.$$
(7.38)

Щоб отримати вирази для напруги та струму в лінії при відрахуванні координати х від початку лінії, спочатку за допомогою (7.38) треба знайти напругу та струм на початку лінії, коли $x = \ell$, і визначити з отриманих співвідношень значення напруги \underline{U}_2 та струму \underline{I}_2 , тобто

$$\underline{\mathbf{U}}_{2} = \underline{\mathbf{U}}_{1} \mathbf{e}^{-\underline{\gamma}\ell}, \quad \underline{\mathbf{I}}_{2} = \underline{\mathbf{I}}_{1} \mathbf{e}^{-\underline{\gamma}\ell}.$$
(7.39)

Якщо у виразах (7.38) зробити заміну $x = \ell - x'$, де $x' - координата точки спостереження, що відраховується від початку лінії, а потім підставити значення <math>\underline{U}_2$ та \underline{I}_2 з (7.39), то матимемо

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_1 \mathbf{e}^{-\underline{\gamma}\mathbf{x}'}, \quad \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{I}}_1 \mathbf{e}^{-\underline{\gamma}\mathbf{x}'}$$

Для спрощення координату х' позначимо х і остаточно вирази для напруги та струму в лінії при відрахуванні координати від її початку запишуться так:

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}_{1} e^{-\underline{\gamma}x} = \underline{\underline{U}}_{1} e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x};$$

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}_{1} e^{-\underline{\gamma}x} = \frac{\underline{\underline{U}}_{1}}{\underline{\underline{Z}}_{xB}} e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x}.$$
(7.40)

Аналіз виразів (7.38) та (7.40) показує, що в режимі біжучих хвиль при русі від початку лінії до її кінця амплітуди напруги та струму зменшуються за експоненціальним законом, а їх початкові фази змінюються лінійно (рис. 7.6).



Рис.7.6. Змінювання амплітуди та початкової фази напруги в лінії в режимі біжучих хвиль

В той же час вхідний опір довгої лінії в узгодженому режимі дорівнює

$$\underline{Z}_{BX} = \underline{U}/\underline{I} = \underline{Z}_{XB}. \qquad (7.41)$$

Тобто в режимі біжучих хвиль вхідний опір довгої лінії не залежить від її довжини і дорівнює хвильовому опору.

В лінії з малими втратами хвильовий опір можна вважати чисто активним $(\underline{Z}_{xB} = Z_{xB} = \sqrt{L_1/C_1})$. Тому для миттєвих напруги та струму, виходячи зі співвідношень (7.40), можна записати

$$u = U_{m1}e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x), \quad i = \frac{U_{m1}}{Z_{xB}}e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x).$$
(7.42)

Таким чином, для амплітуд напруги та струму в кінці довгої лінії довжиною ℓ одержимо

$$U_{m2} = U_{m1}e^{-\alpha\ell}, \quad I_{m2} = I_{m1}e^{-\alpha\ell} = \frac{U_{m1}}{Z_{xB}}e^{-\alpha\ell}.$$

Звідси виходить, що коефіцієнт згасання такої лінії дорівнює

$$A = \alpha \ell = \ln \frac{U_{m1}}{U_{m2}} = \ln \frac{I_{m1}}{I_{m2}}.$$
 (7.43)

При відомій довжині однорідної довгої лінії співвідношенням (7.43) можна скористатися для експериментального визначення коефіцієнта згасання такої лінії.

7.3. Первинні та вторинні параметри однорідної довгої лінії

До первинних параметрів однорідної довгої лінії відносяться погонна індуктивність L₁, погонна ємність C₁, погонний опір втрат R₁ та погонна провід-ність витікання G₁. Вторинними або характеристичними параметрами довгої лінії одиничної довжини є комплексний коефіцієнт поширення $\underline{\gamma}$, коефіцієнт згасання α , коефіцієнт фази β , хвильовий опір \underline{Z}_{xB} та фазова швидкість v_ф, які можна виразити через первинні параметри довгої лінії та частоту.

Комплексний коефіцієнт поширення довгої лінії згідно з виразом (7.11) дорівнює

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(\mathbf{R}_1 + \mathbf{j}\omega \mathbf{L}_1)(\mathbf{G}_1 + \mathbf{j}\omega \mathbf{C}_1)}.$$
(7.44)

Але одночасно коефіцієнт поширення $\gamma = \alpha + j\beta$, тому можна записати

$$(\alpha + j\beta)^2 = (\mathbf{R}_1 + j\omega \mathbf{L}_1)(\mathbf{G} + j\omega \mathbf{C}_1),$$

або інакше

$$\alpha^{2} + 2j\alpha\beta - \beta^{2} = R_{1}G_{1} - \omega^{2}L_{1}C_{1} + j\omega(L_{1}G_{1} + C_{1}R_{1}).$$
(7.45)

На основі виразу (7.45) запишемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів згасання та фази:

$$\alpha^{2} - \beta^{2} = \mathbf{R}_{1}\mathbf{G}_{1} - \omega^{2}\mathbf{L}_{1}\mathbf{C}_{1};$$

$$2\alpha\beta = \omega\mathbf{L}_{1}\mathbf{G}_{1} + \omega\mathbf{C}_{1}\mathbf{R}_{1}.$$
(7.46)

Якщо розв'язати систему рівнянь (7.46) відносно α та β, то отримаємо

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[R_1 G_1 - \omega^2 L_1 C_1 + \sqrt{(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)(G_1^2 + \omega^2 C_1^2)} \right]},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\omega^2 L_1 C_1 - R_1 G_1 + \sqrt{(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)(G_1^2 + \omega^2 C_1^2)} \right]}.$$
(7.47)

Розрахункове співвідношення для хвильового опору можна отримати на основі виразу (7.14) –

$$\underline{Z}_{\rm XB} = \sqrt{\underline{\underline{Z}_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}}, \qquad (7.48)$$

а для знаходження фазової швидкості слід скористатись співвідношенням (7.19), згідно з яким $v_{\phi} = \omega/\beta$.

Вирази (7.19) та (7.47), (7.48) є точними розрахунковими формулами, що справедливі для довгих ліній будь-яких типів в широкому діапазоні частот. Залежність вторинних параметрів від частоти призводить до амплітудночастотних та фазочастотних спотворень сигналів, які супроводжуються спотворенням форми негармонічних сигналів.

7.3.1. Неспотворююча довга лінія

Неспотворюючою називають таку довгу лінію, на опорі навантаження якої зберігається форма сигналу, який надходить в лінію. Для неспотворюваної передачі сигналу треба забезпечити незалежність від частоти і коефіцієнта згасання, і фазової швидкості, і хвильового опору та опору навантаження в узгодженій лінії.

Для виконання цих умов перш за все треба забезпечити, щоб хвильовий опір лінії був активним і не залежав від частоти. Цього можна досягти підбором первинних параметрів довгої лінії. Дійсно, якщо у виразі (7.48), який можна переписати у вигляді

$$\underline{Z}_{xB} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{j\omega L_1}{j\omega C_1}} \cdot \sqrt{\frac{1 + R_1 / j\omega L_1}{1 + G_1 / j\omega C_1}}, \qquad (7.49)$$

підібрати співвідношення між первинними параметрами лінії так, щоб виконувалась рівність

$$\frac{R_1}{L_1} = \frac{G_1}{C_1} , \qquad (7.50)$$

то опір Z_{xB} стає активним і чисельно дорівнює хвильовому опору лінії без втрат, тобто

$$\underline{Z}_{xB} = \sqrt{L_1/C_1} = \sqrt{R_1/G_1}.$$
(7.51)

219

Співвідношення (7.50) вперше було отримане Хевісайдом і носить його ім'я.

Будемо вважати, що умова Хевісайда виконується, і знайдемо вирази для коефіцієнтів згасання та фази, а також фазової швидкості. На основі виразів (7.44) та (7.48) можна записати

$$\underline{\gamma}/\underline{Z}_{xB} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{j}\omega\mathbf{C}_1. \tag{7.52}$$

На основі (7.52) та з урахуванням виразу (7.51) для комплексного коефіцієнта поширення маємо

$$\underline{\gamma} = \underline{Z}_{xB}(G_1 + j\omega C_1) = \sqrt{R_1 G_1} + j\omega \sqrt{L_1 C_1}.$$
(7.53)

Отже, для шуканих параметрів отримаємо такі значення:

$$\alpha = \sqrt{R_1 G_1}; \ \beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}; \ v_{\phi} = 1 / \sqrt{L_1 C_1}.$$
 (7.54)

Таким чином, у разі виконання рівності Хевісайда (7.50) хвильовий опір лінії є чисто активним і може бути легко узгоджений з активним опором навантаження в широкому діапазоні частот, коефіцієнт згасання не залежить від частоти, що дозволяє звести нанівець амплітудно-частотні спотворення сигналу, а коефіцієнт фази є лінійною функцією частоти, що забезпечує незмінність фазової швидкості, а значить, і відсутність фазочастотних спотворень.

На практиці для існуючих типів довгих ліній умова Хевісайда не виконується. Зазвичай має місце нерівність

$$L_1/R_1 < C_1/G_1$$
. (7.55)

Для того, щоб перейти від нерівності (7.55) до умови Хевісайда (7.50), необхідно або збільшувати L_1 чи G_1 , або зменшувати R_1 чи C_1 . Найкращим способом наближення первинних параметрів до оптимальних значень є штучне збільшення погонної індуктивності лінії. В 1903 році американським вченим М. Пупіним було запропоновано включати в жили кабеля через деякі проміжки котушки індуктивності. Цей метод використовується і зараз при передачі сигналів на короткі відстані. В інших випадках використовуються більш сучасні коригуючі пристрої, застосування яких є економічно вигіднішим, ніж пупінізація.

7.3.2. Довга лінія з малими втратами

Сучасні конструкції довгих ліній, які використовуються в радіотехніці та електрозв'язку, на високих частотах ($f > 10^6$ Гц) мають дуже малі втрати, внас-лідок чого виконуються умови

$$\mathbf{R}_1 \ll \omega \mathbf{L}_1, \quad \mathbf{G}_1 \ll \omega \mathbf{C}_1. \tag{7.56}$$

Довгу лінію, для якої в діапазоні робочих частот виконуються умови (7.56), називають лінією з малими втратами. Визначимо вторинні параметри такої довгої лінії.

З виразу (7.48) видно, що в цьому випадку хвильовий опір довгої лінії мож-на наближено вважати незалежною від частоти величиною

$$\underline{Z}_{xB} = Z_{xB} \approx \sqrt{L_1/C_1}. \tag{7.57}$$

Для знаходження коефіцієнтів згасання та фази довгої лінії з малими втратами скористаємося співвідношенням (7.44), яке перепишемо у вигляді

$$\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{L_1C_1} \cdot \sqrt{\left(1 - j\frac{R_1}{\omega L_1}\right) \cdot \left(1 - j\frac{G_1}{\omega C_1}\right)}.$$
(7.58)

Скористаємося відомим з математики розкладанням виду

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \dots,$$
 (7.59)

яке є справедливим, коли x << 1, і обмежимося двома першими членами результату. Тоді на основі (7.58) та з урахуванням (7.59) одержимо

$$\underline{\gamma} \approx j\omega\sqrt{L_1C_1} \cdot \left(1 - j\frac{R_1}{2\omega L_1}\right) \cdot \left(1 - j\frac{G_1}{2\omega C_1}\right)$$

Якщо розкрити дужки, та прийняти до уваги що член $R_1G_1/4\omega^2L_1C_1$ набагато менший, ніж інші складові, то матимемо

$$\underline{\gamma} \approx \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} + j\omega\sqrt{L_1C_1}.$$
 (7.60)

З виразу (7.60) видно, що

$$\alpha \approx \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \quad \beta \approx \omega \sqrt{L_1 C_1}.$$
(7.61)

Фазова швидкість довгої лінії з малими втратами дорівнює

$$\mathbf{v}_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.\tag{7.62}$$

В той же час в теорії електромагнітного поля доводять, що

$$L_1 C_1 = \frac{\varepsilon \mu}{c^2},$$

де с – швидкість світла в пустоті; є та μ – діелектрична та магнітна проникності середовища, яке оточує провідники лінії.

Отже, в довгій лінії з малими втратами фазова швидкість має значення

$$v_{\varphi}=c\!\left/\sqrt{\epsilon\mu}\right.$$

Аналіз виразів (7.61) та (7.62) показує, що лінія з малими втратами є неспотворюючою, оскільки коефіцієнт згасання α та фазова швидкість v_{ϕ} не за-

лежать від час-тоти, а коефіцієнт фази β є лінійною функцією частоти. Дійсно, якщо згідно з виразами (7.47) побудувати залежності від частоти коефіці-єнтів згасання та фази (рис. 7.7), то можна побачити, що насправді існує деяка гранична частота ($\omega \approx 2\pi \cdot 10^6$ рад/с), при перевищенні якої коефіцієнт згасання довгої лінії залишається майже незмінним і визначається першим з виразів (7.61). При цьому коефіцієнт фази зростає практично за лінійним законом. Очевидно, що завдяки цим особливостям частотних залежностей



Рис. 7.7. Частотні залежності коефіцієнтів згасання та фази

 $\alpha(\omega)$ та $\beta(\omega)$, в узгодженій довгій лінії всі складові спектра негар-монічного сигналу мають однакові умови для розповсюдження. Це означає, що в діапазоні високих частот узгоджена довга лінія з малими втратами, так само як і лінія, для якої виконується умова Хевісайда, є неспотворюючою.

7.4. Режим стоячих хвиль в ідеальній довгій лінії

Якщо пряма електромагнітна хвиля при розповсюдженні в довгій лінії зустрічає на своєму шляху "електричну перешкоду", роль якої може виконувати будь-яка неоднорідність, то в такій лінії спостерігається явище відбиття, що супроводжується виникненням зворотної або відбитої хвилі. Дуже часто відбиття виникають в кінці лінії, яка навантажена на опір, що не дорівнює хвильовому, а також в точці з'єднання двох ліній з різними параметрами.

В разі, коли амплітуди прямої та зворотної хвиль напруги і струму виявляються однаковими, в довгій лінії встановлюється так званий режим стоячих хвиль. Строго кажучи, таке явище було б можливим лише в ідеальній лінії, що не має втрат, але в реальних лініях з малими втратами, які мають невелику довжину, можна отримати режими, близькі до режиму стоячих хвиль.

Для повного відбиття прямої хвилі від навантаження необхідно, щоб це навантаження не споживало електромагнітної енергії. Якщо довга лінія втрат не має, тобто є ідеальною, то стоячі хвилі в ній можуть виникати в таких випадках: якщо лінія розімкнена на кінці, тобто її навантаження $\underline{Z}_{H} \rightarrow \infty$;

якщо лінія замкнена на кінці, тобто її навантаження $\underline{Z}_{H} = 0;$

якщо лінія навантажена на реактивний опір, тобто навантаження $\underline{Z}_{\rm H} = j X_{\rm H}$.

Розглянемо детально кожний з перерахованих випадків.

7.4.1. Довга лінія, розімкнена на кінці

Нехай ідеальна довга лінія розімкнена на кінці ($\underline{Z}_{\rm H} \rightarrow \infty$), тобто працює в режимі холостого ходу. В цьому випадку згідно з виразами (7.36) коефіцієнти відбиття відносно напруги та струму в кінці лінії дорівнюють

$$\underline{\mathbf{p}'_{u}} = \lim_{\underline{Z}_{H} \to \infty} \frac{\underline{Z}_{H} - \underline{Z}_{XB}}{\underline{Z}_{H} + \underline{Z}_{XB}} = 1; \quad \underline{\mathbf{p}'_{i}} = -\underline{\mathbf{p}'_{u}} = -1.$$

Це означає, що в розімкненій на кінці лінії пряма та зворотна хвилі напруги і струму мають однакові амплітуди. Однак фазові співвідношення для хвиль напруги та струму в точці відбиття різні: пряма та зворотна хвилі напруги – синфазні, а аналогічні хвилі струму – протифазні. Отже, слід очікувати, що напруга в точці відбиття буде максимальною, а струм матиме нульове значення.

Для знаходження комплексних діючих значень напруги та струму в лінії скористаємося співвідношеннями (7.33). У лінії без втрат коефіцієнт згасання $\alpha = 0$ і тому коефіцієнт поширення $\gamma = j\beta$. В результаті сh $\gamma x = \cos\beta x$, а sh $\gamma x = j\sin\beta x$ і система рівнянь для напруги та струму ідеальної лінії матиме такий вигляд:

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_{2} \cos\beta \mathbf{x} + j\underline{\mathbf{I}}_{2} \mathbf{Z}_{xB} \sin\beta \mathbf{x};$$

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{I}}_{2} \cos\beta \mathbf{x} + j\frac{\underline{\mathbf{U}}_{2}}{\mathbf{Z}_{xB}} \sin\beta \mathbf{x}.$$
(7.63)

Підкреслимо, що у виразах (7.63) координата х відраховується від кінця лінії.

Оскільки лінія, що аналізується, розімкнена, то струм $I_2 = 0$ і на основі виразів (7.63) отримаємо

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_2 \cos\beta \mathbf{x}, \quad \underline{\mathbf{I}} = \mathbf{j} \frac{\underline{\mathbf{U}}_2}{Z_{_{XB}}} \sin\beta \mathbf{x}.$$
(7.64)

Якщо миттєва напруга в лінії $u(t) = \text{Re}\{\underline{u}(t)\} = \text{Re}\{\underline{U}_{m}e^{j\omega t}\}$, то вирази для миттєвих значень напруги та струму матимуть вигляд

223

$$u = U_{m2} \cos \beta x \cdot \cos \omega t,$$

$$i = -\frac{U_{m2}}{Z_{xB}} \sin \beta x \cdot \sin \omega t = \frac{U_{m2}}{Z_{xB}} \sin \beta x \cdot \cos(\omega t + \pi/2).$$
(7.65)

На рис. 7.8 наведено побудовані у відповідності з першим виразом системи (7.65) криві змінювання напруги вздовж лінії для різних моментів часу. З цих графіків видно, що напруга в деяких точках лінії дорівнює нулю при будь-яких значеннях часу t. Положення цих точок, які називаються вузлами напруги, можна знайти з умови $\cos\beta x_k = 0$. Тому для знаходження координат вузлів напруги в лінії маємо

 $\beta x_k = (2k+1)\pi/2, \quad x_k = (2k+1)\lambda/4, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$ (7.66) де x_k – координата k-го вузла напруги.



Рис. 7.8. Змінювання напруги вздовж лінії для різних моментів часу

вздовж лінії показані на рис. 7.9. Тут також спостерігається наявність вузлів та пучностей, однак вони зсунуті в просторі відносно вузлів і пучностей напруги на $\lambda/4$. Тобто координатам вузлів струму відповідають пучності напруги, а координатам пучностей струму – координати вузлів напруги.

З виразів (7.65) видно, що в деякий довільний момент часу амплітуди напруги та струму в лінії дорівнюють Між вузлами та в кінці лінії розташовані точки, в яких амплітуда напруги досягає максимальних значень. Це є так звані пучності напруги, координати яких визначаються з таких виразів

$$\beta x_n = n\pi,$$

 $x_n = n\lambda/2, n = 0, 1, 2, ...,$ (7.67)

де x_n – координата n-ї пучності напруги.

Криві розподілення струму



Рис. 7.9. Змінювання струму вздовж лінії Для різних моментів часу

$$U_{m} = U_{m2} |\cos\beta x|, \quad I_{m} = I_{m2} |\sin\beta x| = \frac{U_{m2}}{Z_{xB}} |\sin\beta x|.$$
 (7.68)

224

При цьому в пучностях напруги $U_m = U_{m2}$, а в пучностях струму $I_m = I_{m2} = U_{m2}/Z_{xB}$.

Початкова фаза миттєвих напруги та струму в проміжках між вузлами залишається незмінною, однак при переході через вузол вона стрибкоподібно змінюється на π , оскільки змінюються на протилежні знаки гармонічних функцій соs β x та sin β x у виразах (7.65).

На рис. 7.10 показані криві розподілу вздовж лінії амплітуд напруги та струму, а на рис. 7.11 – відповідні фазові характеристики. Як вихідний рівень



Рис. 7.10. Розподіл амплітуд напруги (а) та струму (б) вздовж ідеальної лінії, розімкненої на кінці

відліку початкових фаз використовується початкова фаза напруги в кінці лінії. Порівняльний аналіз рис. 7.11, а та рис. 7.11, б показує, що напруга та струм в будь-якій точці лінії мають зсув за фазою, який дорівнює $\pm \pi/2$. Причому на одних ділянках струм випереджає напругу, а на інших відстає від неї. Тобто в залежності від довжини розімкнена на кінці довга лінія може себе поводити або як ємність, або як індуктивність.

Скористаємося виразами (7.64) і запишемо співвідношення для комплексного вхідного опору розімкненої лінії –

$$\underline{Z}_{\rm BX} = -jZ_{\rm XB} ctg\beta x = -jZ_{\rm XB} ctg\frac{2\pi}{\lambda}x.$$
(7.69)

Отже вхідний опір такої лінії чисто реактивний –

 $X_{BX} = -Z_{XB} ctg\beta x = -Z_{XB} ctg\frac{2\pi}{\lambda}x,$

Рис. 7.11. Змінювання початкових фаз напруги (а) та струму (б) вздовж лінії, розімкненої на кінці

а характер цієї реактивності залежить від співвідношення між довжиною лінії та довжиною хвилі електромагнітного коливання в ній (рис. 7.12).

Як видно, характер вхідного опору лінії змінюється через четверть довжини хвилі. Причому в непарних четвертях X_{Bx} має ємнісний характер, а в парних – індуктивний. Підкреслимо, що в першій чверті, коли $0 < x < \lambda/4$, вхідний опір розімкненої довгої лінії має ємнісний характер.



Рис. 7.12. Залежність вхідного опору розімкненої лінії від координати х

Якщо ж відношення ℓ/λ дорівнює цілому числу четвертей довжини хвилі, то вхідний опір буде або нульовим, або нескінченно великим. Тобто в цьому випадку лінія буде еквівалентна або послідовному, коли виконується умова (7.66), або паралельному, коли виконується умова (7.67), коливальному контуру без втрат.

Аналогічні властивості може ма-

ти і лінія фіксованої довжини, якщо змінювати частоту сигналу зовнішнього генератора.

(7.70)

7.4.2. Короткозамкнена довга лінія

Якщо лінія без втрат замкнена на кінці, то опір навантаження $\underline{Z}_{H} = 0$ і, як видно з виразів (7.36), коефіцієнти відбиття $\underline{p}'_{u} = -1$, а $\underline{p}'_{i} = 1$. Отже, в цьому випадку в точці відбиття напруги прямої та зворотної хвиль протифазні, а фази відповідних хвиль струму однакові. В результаті напруга в кінці короткозамкненої лінії дорівнює нулю, а струм досягає максимальної величини.

Оскільки напруга $\underline{U}_2 = 0$, то на основі співвідношень (7.63) одержимо

$$\underline{\mathbf{U}} = \mathbf{j}\underline{\mathbf{I}}_{2}\mathbf{Z}_{xB}\sin\beta\mathbf{x}, \quad \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{I}}_{2}\cos\beta\mathbf{x}.$$
(7.71)

Миттєві значення напруги та струму в лінії дорівнюють

$$u = \operatorname{Re}\left\{\underline{u}(t)\right\} = -I_{m2}Z_{xB}\sin\beta x \cdot \sin\omega t = I_{m2}Z_{xB}\sin\beta x \cdot \cos(\omega t + \pi/2),$$

$$i = \operatorname{Re}\left\{\underline{i}(t)\right\} = I_{m2}\cos\beta x \cdot \cos\omega t.$$
(7.72)

Амплітуди напруги та струму при змінюванні координати х визначаються співвідношеннями

$$U_{m} = I_{m2} Z_{xB} |\sin\beta x|, \quad I_{m} = I_{m2} |\cos\beta x|.$$
 (7.73)

На рис. 7.13 наведені криві змінювання вздовж лінії амплітуд напруги і струму. Як і у випадку розі мкненої лінії розподіл амплітуд характеризується



Рис. 7.13. Розподіл амплітуд напруги (а) та струму (б) вздовж короткозамкненої лінії

наявністю вузлів та пучностей, причому вузли напруги та пучності струму знаходяться в точках з координатами

$$x_k = k \lambda/2, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

а пучності напруги та вузли струму – в точках

$$x_n = (2n+1)\lambda/4, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ця картина діаметрально протилежна до тієї, що мала місце у випадку розімкненої лінії. Що стосується фазових зсувів між напругою і струмом в короткозамкненій лінії, то вони такі самі, як і фазові зсуви між струмом та напругою в розімкненій лінії. Тобто тоді, коли розімкнена лінія поводить себе як ємність, короткозамкнена лінія такої самої довжини буде еквівалентна індуктивності, і навпаки.

Вхідний опір короткозамкненої лінії згідно зі співвідношеннями (7.71) дорівнює

$$\underline{Z}_{\rm BX} = j Z_{\rm XB} t g \beta x = j Z_{\rm XB} t g \frac{2\pi}{\lambda} x. \qquad (7.74)$$

Він так само, як і у випадку розімкненої лінії є чисто реактивним –

$$X_{_{BX}} = Z_{_{XB}} tg \beta x = Z_{_{XB}} tg \frac{2\pi}{\lambda} x$$
(7.75)

і періодично, через інтервал $\lambda/4$ змінює свій характер. Причому тепер в пер-



гис. 7.14. залежність вхідного опору короткозамкненої лінії від значення координати х

шій чверті, коли $0 < x < \lambda/4$, характер вхід-ного опору лінії індуктивний (рис. 7.14), а далі в кожній наступній четверті він змінюється на протилеж-ний. Отже, при однаковій довжині розімкнена та короткозамкнена лінії мають протилежний характер вхідного реактивного опору. І нарешті, якщо у випадку розімкненої лінії властивостями паралельного коливального контура без втрат харак-теризувалися відрізки довжи-

ною $\ell = k \lambda/2$ (k=1, 2, ...), то короткозамкнені відрізки лінії такої довжини поводять себе як ідеалізовані послідовні коливальні контури. Очевидно, що властивостями паралельного коливального контура будуть характеризуватись відрізки короткозамкненої лінії довжиною $\ell = (2n + 1)\lambda/4$ (n = 0, 1, 2,...). Якщо ж довжину використовуваного відрізка лінії змінювати, то можна одержати коливальні контури з розподіленими параметрами, що мають різні резонансні частоти.

7.4.3. Довга лінія, навантажена на реактивний опір

Нехай довга лінія без втрат є навантаженою на чисто реактивний опір $\underline{Z}_{\rm H} = jX_{\rm H}$. Скористаємося першим зі співвідношень (7.36), тобто обмежимося знаходженням лише коефіцієнта відбиття відносно напруги –

$$\underline{p}_{u}^{'} = \frac{-Z_{_{XB}} + jX_{_{H}}}{Z_{_{XB}} + jX_{_{H}}}$$

В показниковій формі $\underline{p}_{u} = p_{u} e^{j\phi_{p_{u}}}$, причому для модуля та аргументу знайденого коефіцієнта відбиття маємо

$$p'_{u} = 1, \quad \phi'_{p_{u}} = \operatorname{arctg} \frac{2X_{H}Z_{xB}}{X_{H}^{2} - Z_{xB}^{2}}.$$
 (7.76)

З аналізу (7.76) виходить, що при реактивному навантаженні модуль коефіцієнта відбиття дорівнює одиниці і в лінії має місце режим стоячих хвиль. При цьому зворотна хвиля напруги в точці відбиття зсунута за фазою відносно прямої хвилі напруги на кут ϕ_{p_u} , величина якого в залежності від співвідношення між значеннями опорів Z_{xB} та X_{μ} лежить в інтервалі від 0 до $\pm \pi/2$. Внаслідок цього при ненульовому реактивному опорі навантаження в кінці лінії тепер не може бути ні вузла, ні пучності напруги. Те ж саме можна стверджувати відносно струму в лінії, оскільки відомо, що $\underline{p}_{\mu} = -\underline{p}_{i}$.

Для розрахунку комплексних амплітуд напруги та струму в лінії врахуємо, що $I_2 = U_2 / jX_{\rm H}$, і скористаємося виразами (7.63). Тоді одержимо

$$\underline{U}_{m} = \underline{U}_{m2} \left(\cos\beta x + \frac{Z_{xB}}{X_{H}} \sin\beta x \right),$$

$$\underline{I}_{m} = \underline{I}_{m2} \left(\cos\beta x - \frac{X_{H}}{Z_{xB}} \sin\beta x \right).$$
(7.77)

Скористаємося відомим тригонометричним співвідношенням $A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\alpha + \psi), \quad \psi = \arctan(A/B)$ і вирази (7.77) запишемо в іншій формі:

$$\begin{split} \underline{U}_{m} &= \underline{U}_{m2} \sqrt{1 + Z_{xB}^{2} / X_{H}^{2}} \sin(\beta x + \psi_{u}); \\ \psi_{u} &= \arctan(X_{H} / Z_{xB}); \\ \underline{I}_{m} &= \underline{I}_{m2} \sqrt{1 + X_{H}^{2} / Z_{xB}^{2}} \sin(\beta x + \psi_{i}); \\ \psi_{i} &= -\arctan(Z_{xB} / X_{H}). \end{split}$$

$$(7.78)$$

Якщо скористатися ще одним тригонометричним співвідношенням

$$\operatorname{arctgx} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$
,

то можна встановити, що $\psi_u = \frac{\pi}{2} + \psi_i$. Приймемо, що $\psi_i = \psi$, і тоді на основі (7.78) для комплексних амплітуд напруги та струму в лінії з реактивним навантаженням остаточно одержимо

$$\underline{\underline{U}}_{m} = \underline{\underline{U}}_{m2}\sqrt{1 + Z_{xB}^{2}/X_{H}^{2}}\cos(\beta x + \psi),$$

$$\underline{\underline{I}}_{m} = \underline{\underline{I}}_{m2}\sqrt{1 + X_{H}^{2}/Z_{xB}^{2}}\sin(\beta x + \psi).$$
(7.79)

Амплітуди напруги та струму в різних точках лінії дорівнюють

$$U_{m} = U_{m2}\sqrt{1 + Z_{xB}^{2}/X_{H}^{2}} |\cos(\beta x + \psi)|,$$

$$I_{m} = I_{m2}\sqrt{1 + X_{H}^{2}/Z_{xB}^{2}} |\sin(\beta x + \psi)|.$$
(7.80)

Скористаємося виразами (7.80) для визначення координат вузлів напруги і струму в лінії. Аналіз першого з цих співвідношень показує, що вузли напруги знаходяться в тих точках лінії, де виконується умова $\cos(\beta x + \psi) = 0$. Звідси виходить, що

$$\beta x_k + \psi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким чином, для координат точок, де знаходяться вузли напруги, з урахуванням того, що коефіцієнт фази $\beta = 2\pi/\lambda$, одержимо

$$\mathbf{x}_{\mathbf{k}} = (2\mathbf{k}+1)\frac{\lambda}{4} - \frac{\Psi}{2\pi}\lambda.$$
 (7.81)

Положення вузлів струму можна знайти з умов

$$in(\beta x_k + \psi) = 0, \quad \beta x_k + \psi = k\pi, \quad k = 0, 1, 2,...$$

Отже, відповідні координати вузлів струму визначаються виразом

$$\mathbf{x}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \frac{\lambda}{2} - \frac{\Psi}{2\pi} \lambda. \tag{7.82}$$

Якщо довга лінія навантажена на індуктивний опір, то реактивний опір навантаження X_н > 0 і величина фазового зсуву

$$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{Z_{xB}}{X_{H}} < 0.$$

Цей фазовий зсув лежить в границях від 0 до $-\pi/2$ і йому відповідає додатний зсув вузлових точок $\Delta x = \frac{\Psi}{2\pi}\lambda$. Тобто в цьому випадку вузли напруги будуть розташовуватись зліва від точок з координатами $x_k = (2k+1)\lambda/4$ (рис. 7.15, а). Якщо ж лінія навантажена на ємнісний опір, то реактивний опір



Рис. 7.15. Розподіл амплітуд напруги та струму вздовж лінії, навантаженої на індуктивність (а) та ємність (б)

 $X_{_{\rm H}} < 0$ і фазовий зсув $\psi > 0$, причому $0 < \psi < \pi/2$. Тепер, як видно з виразу (7.81), вузли

напруги зміщуються відносно тих самих точок вправо, тобто ближче до навантаження (рис. 7.15, б).

Щоб отримати якісне уявлення про розташування вузлів та пучностей напруги і струму вздовж лінії, реактивний опір навантаження X_н можна замінити додатковим відрізком лінії з таким самим вхідним опором. В результаті реальний розподіл напруги та струму в лінії з реактивним навантаженням буде збігатися з розподілом в еквівалентній лінії, короткозамкненій або розімкненій на кінці.

І нарешті слід зазначити, що в режимі стоячих хвиль передача енергії вздовж довгої лінії неможлива. Це обумовлено тим, що при утворенні стоячих хвиль потужність у вузлах напруги і струму дорівнює нулю і електромагнітна енергія через ці точки проходити не може. У цьому випадку в усіх точках лінії, окрім вузлових, має місце лише реактивна потужність, оскільки напруга та струм в лінії зсунуті за фазою на $\pm \pi/2$. Таким чином, енергія не розповсюджується вздовж лінії, а відбувається лише обмін енергією між електричними та магнітними полями на тих ділянках лінії, які обмежені вузлами напруги та струму.

7.5. Режим змішаних хвиль в ідеальній довгій лінії

Якщо активний або комплексний опір навантаження довгої лінії без втрат не дорівнює хвильовому, то виникає так званий режим змішаних хвиль, коли напругу та струм в лінії можна представити як суму біжучої та стоячої хвиль.

У цьому режимі, як і у режимі стоячих хвиль, виникають пряма та зворотна хвилі, однак остання має меншу інтенсивність, ніж пряма. Це обумовлено тим, що частина енергії, яка надходить від джерела, поглинається опором навантаження.

7.5.1. Довга лінія, навантажена на активний опір,що не дорівнює хвильовому

Проаналізуємо особливості роботи ідеальної довгої лінії, навантаженої на активний опір $R_{\rm H} \neq Z_{\rm xB}$. У цьому випадку коефіцієнт відбиття відносно напруги в кінці лінії дорівнює

$$\underline{p}_{u} = p_{u} = \frac{R_{H} - Z_{XB}}{R_{H} + Z_{XB}}.$$
(7.83)

Як видно з виразу (7.83), коефіцієнт відбиття є дійсною величиною, яка менша за одиницю. Знак коефіцієнта відбиття залежить від співвідношення між величинами опору навантаження R_н та хвильового опору Z_{xв}.

Розподіл амплітуд напруг та струмів у лінії

У даному випадку активний опір навантаження $R_{_{H}} = U_{m2}/I_{m2}$. Тому у відповідності із системою рівнянь (7.63) для комплексних амплітуд напруги та струму в лінії одержимо

$$\underline{U}_{m} = \underline{U}_{m2}(\cos\beta x + jm\sin\beta x),$$

$$\underline{I}_{m} = (\underline{U}_{m2}/Z_{xB})(m\cos\beta x + j\sin\beta x),$$
(7.84)

причому

$$m = \frac{Z_{XB}}{\underline{Z}_{H}} = \frac{Z_{XB}}{R_{H}}.$$
(7.85)

З виразів (7.84) для амплітуд напруги та струму матимемо

$$U_{\rm m} = U_{\rm m2} \sqrt{\cos^2 \beta x + m^2 \sin^2 \beta x},$$

$$I_{\rm m} = \frac{U_{\rm m2}}{Z_{\rm xB}} \sqrt{m^2 \cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x}.$$
(7.86)

232

Нехай опір навантаження більший, ніж хвильовий, тобто m <1. Тоді криві розподілу амплітуд напруги та струму вздовж лінії мають вигляд, що



наведений на рис. 7.16. Характерним для цього розподілу є наявність екстремумів, де напруга і струм досягають максимальних та мінімальних значень. Аналіз виразів (7.86) показує, що мінімальних значень напруга досягає при

$$\beta x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

 $x_k = (2k+1)\frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, 1, 2, ...$

Струм в цих умовах навпаки має максимальні значення.



Максимальних значень напруга досягає при умові, що

$$Bx_n = n\pi$$
, $x_n = n\frac{\lambda}{2}$, $n = 0, 1, 2,...$

Струм при цьому приймає мінімальні значення.

В розглянутих точках величини напруги та струму відповідно дорівнюють:

$$U_{max} = U_{m2}; \quad U_{min} = \frac{Z_{xB}}{R_{H}} U_{m2} = mU_{m2};$$

$$I_{max} = \frac{U_{m2}}{Z_{xB}}; \quad I_{min} = \frac{U_{m2}}{R_{H}}.$$
(7.87)

Якщо опір навантаження $R_{_{H}}$ буде збільшуватись, то величини $U_{_{min}}$ та $I_{_{min}}$ будуть зменшуватись, наближаючись при $R_{_{H}} \rightarrow \infty$ до нуля. У цьому випадку режим змішаних хвиль вироджується в режим стоячих хвиль, оскільки в цих умовах лінія є розімкненою на кінці.

На рис. 7.17 зображені криві розподілу амплітуд напруги U_m та струму I_m вздовж лінії для випадку, коли $R_{_H} < Z_{_{XB}}$ і $m = Z_{_{XB}}/R_{_H} > 1$. Ці криві подібні до тих, які отримані при m < 1, однак в кінці лінії тепер маємо максимум струму і мінімум напруги, а не навпаки. При цьому на основі співвідношень (7.86) можна записати:

$$U_{max} = \frac{Z_{xB}}{R_{H}} U_{m2} = mU_{m2}; \quad U_{min} = U_{m2};$$

$$I_{max} = U_{m2}/R_{H}; \quad I_{min} = U_{m2}/Z_{xB}.$$
(7.88)

Якщо опір навантаження $R_{_{H}} \rightarrow 0$, то максимальне значення напруги $U_{_{max}} = \frac{Z_{_{XB}}}{R_{_{H}}} U_{_{m2}}$ має скінченне значення лише при умові, що $U_{_{m2}} = 0$. Отже, і в цьому випадку $U_{_{min}}$ та $I_{_{min}}$ дорівнюють нулю, а в лінії встановиться режим $X = \lambda - 3\lambda - \lambda/2 - \lambda/4$

У випадку, коли опір навантаження наближається за величиною до хвильового, то коефіцієнт $m = Z_{xB}/R_H \rightarrow 1$ і, як результат, $U_{min} \rightarrow U_{max}$, а $I_{min} \rightarrow I_{max} \cdot \overline{x}$ Тобто довга лінія з режиму змішаних хвиль поступово переходить в режим біжучих хвиль.



Рис. 7.17. Розподіл амплітуд напруги та струму вздовж лінії при R_н < Z_{хв}

Отже, слід очікувати, що в режимі змішаних хвиль напругу та струм в довгій лінії можна представити як сукупність біжучої та стоячої хвиль. Дійсно, згідно з першим виразом системи рівнянь (7.84) для комплексної амплітуди напруги в лінії можна отримати

$$\underline{U}_{m} = \underline{U}_{m2}(\cos\beta x + j\sin\beta x + j(m-1)\sin\beta x),$$

або інакше

$$\underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{m}} = \underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{m2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta\mathrm{x}} + \mathrm{j}(\mathrm{m}-1)\underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{m2}}\sin\beta\mathrm{x}. \tag{7.89}$$

Для комплексної амплітуди струму маємо

$$\underline{I}_{m} = \frac{\underline{U}_{m2}}{Z_{xB}} e^{j\beta x} + (m-1)\frac{\underline{U}_{m2}}{Z_{xB}} \cos\beta x.$$
(7.90)

Порівняння виразів (7.89), (7.90) з виразами (7.38) та (7.71) дозволяє зробити висновок, що перші складові отриманих вище співвідношень відповідають біжучим, а другі – стоячим хвилям.

Слід однак зазначити, що запис напруги і струму в змішаному режимі у вигляді сукупності стоячих та біжучих хвиль є лише математичним прийомом, зручним для вивчення фізичних процесів. Стоячі або біжучі хвилі у змішаному режимі неможливо спостерігати або вимірювати окремо. Для того, щоб судити про ступінь близькості режиму змішаних хвиль до режиму біжучих хвиль, вводиться поняття коефіцієнта біжучих хвиль (КБХ), який визначається як відношення мінімального значення напруги або струму в лінії до максимального –

$$k_{\tilde{o}} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}}.$$
(7.91)

В режимі стоячих хвиль, коли $U_{min} = 0$ та $I_{min} = 0$, коефіцієнт біжучих хвиль дорівнює нулю, а для режиму біжучих хвиль, коли $U_{min} = U_{max}$ та $I_{min} = I_{max}$, цей коефіцієнт дорівнює одиниці.

Якщо довга лінія навантажена на активний опір $R_{_{\rm H}} > Z_{_{\rm XB}}$, то як видно з виразів (7.87)

$$k_{0} = m = \frac{Z_{XB}}{R_{H}}.$$
 (7.92)

Якщо ж опір навантаження $R_{\rm H} < Z_{\rm xB}$, то у відповідності з (7.88)

$$k_{\rm f} = \frac{1}{m} = \frac{R_{\rm H}}{Z_{\rm XB}}.$$
 (7.93)

Для практичних розрахунків є важливим встановити зв'язок між коефіцієн-том біжучих хвиль, який можна легко знайти експериментально, та коефіцієн-том відбиття. Для цього треба врахувати, що в точках лінії, де амплітуда нап-руги $U_m = U_{max}$, напруги прямої та зворотної хвиль складаються синфазно, а в точках, де $U_m = U_{min}$, ці напруги складаються протифазно. Отже, можна записати

$$U_{\text{max}} = U_{\text{np}} + U_{_{3B}}, \quad U_{\text{min}} = U_{\text{np}} - U_{_{3B}}.$$
 (7.94)

В результаті на основі (7.34) та з урахуванням (7.94) для коефіцієнта біжучих хвиль одержимо

$$k_{\delta} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{U_{\pi p} - U_{3B}}{U_{\pi p} + U_{3B}} = \frac{1 - U_{3B}/U_{\pi p}}{1 + U_{3B}/U_{\pi p}} = \frac{1 - p_{u}}{1 + p_{u}}.$$
 (7.95)

Оскільки на практиці частіше відомим є коефіцієнт біжучих хвиль, то широко використовуваним є співвідношення зв'язку цього коефіцієнта з модулем коефіцієнта відбиття

$$p_{\rm u} = \frac{1 - k_{\rm d}}{1 + k_{\rm d}}.\tag{7.96}$$

235

Разом з коефіцієнтом біжучих хвиль k_б на практиці іноді використовують обернений до нього коефіцієнт стоячих хвиль (КСХ)

$$k_{c} = \frac{1}{k_{b}} = \frac{U_{max}}{U_{min}}.$$
 (7.97)

Очевидно, що величина КСХ буде змінюватися від одиниці в режимі біжучих хвиль до нескінченно великого значення в режимі стоячих хвиль.

Вхідний опір ідеальної довгої лінії, навантаженої на активний опір

Дуже важливим для практики є розрахунок вхідного опору довгої лінії без втрат, що навантажена на активний опір R_н. Для його визначення можна скористатись співвідношеннями (7.63), якщо врахувати, що комплексний вхідний опір лінії дорівнює

$$\underline{Z}_{\rm BX} = \underline{U}_1 / \underline{I}_1 \,, \tag{7.98}$$

де \underline{U}_1 та \underline{I}_1 – комплексні діючі напруга і струм на вході лінії.

Якщо довжина лінії ℓ , то на основі (7.98) та (7.63) для комплексного вхідного опору лінії з довільним комплексним навантаженням <u>Z</u>_н можна записати

$$\underline{Z}_{BX} = Z_{XB} \frac{\underline{Z}_{H} \cos\beta\ell + jZ_{XB} \sin\beta\ell}{Z_{XB} \cos\beta\ell + j\underline{Z}_{H} \sin\beta\ell}.$$
(7.99)

Оскільки в даному випадку опір навантаження чисто активний, то остаточно отримаємо

$$\underline{Z}_{BX} = Z_{XB} \frac{R_{H} \cos\beta\ell + jZ_{XB} \sin\beta\ell}{Z_{XB} \cos\beta\ell + jR_{H} \sin\beta\ell}.$$
(7.100)

Помножимо чисельник та знаменник виразу (7.100) на величину комплексноспряжену до виразу в знаменнику і виділимо активну та реактивну складові



Рис. 7.18. Залежність складових вхідного опору ідеальної довгої лінії від βℓ при R_н > Z_{хв}

вхідного опору:

$$R_{BX} = \frac{mZ_{XB}}{m^2 \cos^2 \beta \ell + \sin^2 \beta \ell};$$

$$X_{BX} = 0.5Z_{XB} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \frac{\sin 2\beta \ell}{\cos^2 \beta \ell + \frac{1}{m^2} \sin^2 \beta \ell}$$

(7.101)

На рис. 7.18 наведені графіки побудованих у відповідності з ви-

236

ра-зами (7.101) залежностей активної та реактивної складових вхідного комплексного опору лінії без втрат для випадку, коли активний опір навантаження перевищує хвильовий опір лінії ($m = Z_{xB}/R_{H} < 1$). Очевидно, що при наближенні величини опору навантаження R_н до Z_{хв} реактивна складова вхідного опору наближа-ється до нуля, а вхідний опір – до величини R_{вх}, яка, в свою чергу наближається до величини хвильового опору.

При значеннях у виразах (7.101) аргументу $0 < \beta \ell < \pi/2$ реактивна складова вхідного опору від'ємна, і лінію можна еквівалентно представити у вигляді послідовного активно-ємнісного кола. Якщо ж згаданий аргумент $\pi/2 < \beta \ell < \pi$, то реактивна складова вхідного опору додатна і лінія еквівалентна послідовному з'єднанню активного опору та індуктивності. При подальшому зростанні аргументу $\beta \ell$ характер реактивної складової вхідного опору періодично змінює свій знак.

3 рис. 7.18 що також видно, поблизу точок, де аргумент $\beta \ell = k\pi (k = 1, 2, ...)$, властивості лінії будуть аналогічні властивостям паралельного коливального контура з втратами, а поблизу точок, де аргумент $\beta \ell = (2k+1)\pi/2(k=0, 1, 2, ...),$ лінія поводить себе як послідовний коливальний контур з втратами.

На рис. 7.19 наведені залежності складових вхідного комплексного опору лінії без втрат від аргументу $\beta \ell$ для випадку, коли $R_{_{\rm H}} < Z_{_{XB}}$, а коефіцієнт m>1. Ці криві подібні до тих, що отримані в попередньому випадку, однак на інтервалі змінювання аргументу Вє $0 < \beta \ell < \pi/2$ реактивна складова вхідного опору тепер має індуктивний характер, а на інтервалі $\pi/2 < \beta \ell < \pi$ ємнісний. Поблизу де точок, $\beta \ell = k\pi (k = 1, 2, ...)$, тепер лінія себе поводить як послідовний коливальний поблизу контур, a точок, де $\beta \ell = (2k+1)\pi/2$ (k = 0, 1, 2, ...), – як паралельний коливальний контур.



Рис. 7.19. Залежність вхідного опору довгої лінії від $\beta \ell$ при $R_{\rm H} < Z_{\rm XB}$

7.5.2. Довга лінія, навантажена на комплексний опір

З наведених на рис. 7.18 та на рис. 7.19 залежностей видно, що в тих випадках, коли довжина лінії $\ell \neq n \lambda/4$ (n = 0, 1, 2, ...), а опір навантаження лінії чисто активний і не дорівнює хвильовому, її вхідний опір носить комплексний характер.

Нехай в довгій лінії, що наведена на рис. 7.20 і навантажена на активний опір ($R_{_{\rm H}} \neq Z_{_{XB}}$), розташована справа від перерізу x = ℓ_1 ділянка довжиною





них хвиль. Однак на відміну від випадку, коли лінія має активне навантаження, при його комплексному характері на кінці лінії амплітуди напруги і струму не мають ні максимуму, ні мінімуму.

Щоб довести останнє твердження, знайдемо коефіцієнт відбиття для лінії з комплексним навантаженням. На основі першого з виразів (7.36) для коефіцієнта відбиття відносно напруги одержимо

$$\underline{p}_{u} = \sqrt{\frac{(R_{H} - Z_{XB})^{2} + X_{H}^{2}}{(R_{H} + Z_{XB})^{2} + X_{H}^{2}}} \cdot e^{j\phi_{p_{u}}}, \qquad (7.102)$$

причому аргумент цього коефіцієнта відбиття дорівнюватиме

$$\phi'_{p_u} = \operatorname{arctg} \frac{2X_{H}Z_{xB}}{Z_{H}^2 + 2R_{H}Z_{xB} + Z_{xB}^2}.$$
(7.103)

Звідси витікає, що в точці відбиття напруга зворотної хвилі зсунута за фазою відносно напруги прямої хвилі на кут $0 < \varphi_{p_u} < \pm \pi/2$, отже, ні максимуму, ні мінімуму напруги та струму в цій точці бути не може.

Щоб визначити координати точок лінії, де пряма та зворотна хвилі напруги збігаються за фазою і амплітуда цієї напруги максимальна, скористаємося спів-відношеннями (7.31), (7.32) та (7.36). Так, на основі (7.31) з урахуванням (7.32) для напруги в довільній довгій лінії з комплексним навантаженням одержимо

$$\underline{\mathbf{U}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_2 + \underline{\mathbf{I}}_2 \underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{XB}}}{2} \mathbf{e}^{\underline{\gamma}\mathbf{X}} + \frac{\underline{\mathbf{U}}_2 - \underline{\mathbf{I}}_2 \underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{XB}}}{2} \mathbf{e}^{-\underline{\gamma}\mathbf{X}},$$

а якщо лінія ідеальна, то

$$\underline{\mathbf{U}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_2 + \underline{\mathbf{I}}_2 Z_{xB}}{2} e^{j\beta x} + \frac{\underline{\mathbf{U}}_2 - \underline{\mathbf{I}}_2 Z_{xB}}{2} e^{-j\beta x}.$$
 (7.104)

Перепишемо (7.104) в дещо іншій формі –

$$\underline{\mathbf{U}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{2} + \underline{\mathbf{I}}_{2} Z_{xB}}{2} e^{j\beta x} \left(1 + \frac{\underline{\mathbf{U}}_{2} - \underline{\mathbf{I}}_{2} Z_{xB}}{\underline{\mathbf{U}}_{2} + \underline{\mathbf{I}}_{2} Z_{xB}} e^{-j2\beta x} \right)$$
(7.105)

і врахуємо, що згідно з (7.36) та (7.37) коефіцієнт відбиття відносно напруги на кінці лінії без втрат дорівнює

$$\underline{p}'_{u} = \frac{\underline{U}_{2} - \underline{I}_{2}Z_{xB}}{\underline{U}_{2} + \underline{I}_{2}Z_{xB}} = \frac{\underline{Z}_{H} - Z_{xB}}{\underline{Z}_{H} + Z_{xB}} = p'_{u} \cdot e^{j\phi'_{p_{u}}}.$$
(7.106)

Тому після підстановки результату (7.106) в (7.105) остаточно для напруги в лінії отримаємо

$$\underline{\mathbf{U}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{2} + \underline{\mathbf{I}}_{2} Z_{xB}}{2} e^{j\beta x} \left(1 + p'_{u} e^{j(\phi'_{p_{u}} - 2\beta x)} \right).$$
(7.107)

З виразу (7.107) видно, що напруга в лінії буде максимальною, якщо

$$\phi'_{p_u} - 2\beta x = 2n\pi, \ (n = 0, 1, 2, ...).$$
 (7.108)

Як видно з виразу (7.108), при відрахуванні координати лінії від навантаження перший максимум напруги знаходиться в точці

$$\ell_{\pi} = \frac{\phi_{p_{u}}}{2\beta} = \frac{\lambda}{4\pi} \arctan \frac{2X_{H}Z_{xB}}{Z_{H}^{2} + 2R_{H}Z_{xB} + Z_{xB}^{2}}.$$
 (7.109)

Якщо скористатись виразами (7.95) та (7.102), то можна записати співвідношення для знаходження КБХ:

$$k_{\tilde{6}} = \frac{\sqrt{(R_{H} + Z_{XB})^{2} + X_{H}^{2}} - \sqrt{(R_{H} - Z_{XB})^{2} + X_{H}^{2}}}{\sqrt{(R_{H} + Z_{XB})^{2} + X_{H}^{2}} + \sqrt{(R_{H} - Z_{XB})^{2} + X_{H}^{2}}}.$$
 (7.110)

У тому випадку, коли відомі хвильовий опір довгої лінії Z_{xB} , коефіцієнт біжучої хвилі k_{δ} та координата ℓ_{π} першого максимуму напруги в лінії, розв'я-зуючи систему рівнянь (7.109) та (7.110), можна знайти активну і реактивну складові опору навантаження. При цьому визначення величин

 k_6 та ℓ_n здійснюють експериментально шляхом вимірювання розподілу амплітуд напруги вздовж лінії за допомогою спеціальної вимірювальної лінії. Слід однак зазначити, що більш точно можна виміряти відстань не до точки, де спостерігається максимум напруги, а до точки, де є її мінімум. Цей мінімум виражений чіткіше за максимум і розташований на відстані $\lambda/4$ від нього.

За допомогою тієї ж вимірювальної лінії можна знайти і довжину хвилі електромагнітних коливань, яка дорівнює подвоєній відстані між двома сусідніми максимумами або мінімумами напруги (струму) в лінії.

Залежність активної та реактивної складових вхідного комплексного опору лінії з комплексним навантаженням від аргументу $\beta \ell$ має такий самий характер, як і для неузгодженої лінії з активним навантаженням. Однак у цьому випадку нульові значення реактивної складової, а значить, і екстремуми активної скла-дової будуть зміщені відносно точок, на яких має екстремуми активна складова вхідного опору при активному навантаженні. Для підтвердження цього поло-ження знайдемо співвідношення для визначення комплексного вхідного опору лінії з комплексним навантаженням.

Спочатку знайдемо залежність для комплексного діючого струму в лінії, скориставшись тією ж методикою, що й при знаходженні напруги (7.107). При цьому отримаємо

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{2} + \underline{I}_{2} Z_{xB}}{2 Z_{xB}} e^{j\beta x} \left(1 - p'_{u} \cdot e^{j(\phi'_{p_{u}} - 2\beta x)} \right),$$
(7.111)

а потім скористаємося виразами (7.107) та (7.111) і для комплексного вхідного опору лінії довжиною ℓ , що навантажена на комплексний опір, матимемо

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\underline{U}_{1}}{\underline{I}_{1}} = Z_{XB} \frac{1 + \dot{p_{u}}e^{j(\phi_{p_{u}} - 2\beta\ell)}}{1 - \dot{p_{u}}e^{j(\phi_{p_{u}} - 2\beta\ell)}}.$$
(7.112)

Реактивна складова цього опору буде дорівнювати нулю, якщо

$$\phi'_{p_u} - 2\beta\ell = n\pi(n=0, 1, 2, ...).$$

При цьому відповідні точки на лінії мають координати

$$\ell_{n} = \frac{\phi_{p_{u}} - n\pi}{2\beta} = \frac{\phi_{p_{u}}}{4\pi}\lambda - n\frac{\lambda}{4}.$$
(7.113)

Аналіз співвідношення (7.113) з урахуванням (7.103) показує, що напрямок зміщення точок, в яких мають місце екстремуми активної складової вхідного опору, залежить від характеру реактивної складової $X_{\rm H}$ опору навантаження $\underline{Z}_{\rm H}$.

7.5.3. Трансформація опору відрізками ідеальної довгої лінії

У зв'язку з тим, що в загальному випадку комплексний вхідний опір відрізка довгої лінії не дорівнює опору навантаження, такі відрізки ліній мають властивість трансформувати опори. Найбільш цікавими в цьому відношенні є властивості відрізків ліній без втрат довжиною $\lambda/2$, $\lambda/4$ та $\lambda/8$.

Перепишемо вираз (7.99) для вхідного опору лінії довжиною ℓ з урахуванням того, що $\beta = 2\pi/\lambda$, і одержимо

$$\underline{Z}_{\rm BX} = Z_{\rm XB} \frac{\underline{Z}_{\rm H} \cos(2\pi\ell/\lambda) + jZ_{\rm XB} \sin(2\pi\ell/\lambda)}{Z_{\rm XB} \cos(2\pi\ell/\lambda) + j\underline{Z}_{\rm H} \sin(2\pi\ell/\lambda)}.$$
(7.114)

Якщо довжина відрізка лінії $\ell = \lambda/2$, то з виразу (7.114) виходить, що комплексний вхідний опір відрізка ідеальної лінії довжиною $\lambda/2$ дорівнює опору навантаження –

$$\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}_{H}. \tag{7.115}$$

Отже, цей відрізок лінії просто повторює опір навантаження, тобто поводить себе подібно ідеальному трансформатору з коефіцієнтом трансформації n = 1. Можна показати, що такі самі властивості має лінія, довжина якої кратна цілому числу напівхвиль ($\ell = n\lambda/2$, n = 1, 2, ...).

У випадку, коли довжина відрізка $\ell = \lambda/4$, то згідно з виразом (7.114) його вхідний опір дорівнює

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \frac{Z_{\text{XB}}^2}{\underline{Z}_{\text{H}}}.$$
(7.116)

Такий самий вхідний опір матиме і лінія, довжина якої дорівнює непарному числу чвертей довжини хвилі ($\ell = (2k + 1)\lambda/4$, k = 0, 1, 2, ...). Отже, з виразу (7.116) видно, що вхідний опір такого відрізка лінії пропорційний провідності навантаження і може змінюватися в широких межах при змінюванні хвильового опору лінії. При цьому чвертьхвильовий відрізок лінії може перетворювати великий опір в малий та навпаки, а також змінювати характер реактивної складової опору навантаження, що є притаманним трансформатору. Тому такий відрізок довгої лінії називають чвертьхвильовим трансформатором. З виразу (7.116) також видно, що у випадку, коли опір навантаження має чисто активний характер, і вхідний опір чвертьхвильового трансформатора – чисто активний.

Тепер за допомогою виразу (7.114) знайдемо вхідний опір відрізка лінії без втрат довжиною $\ell = \lambda/8$, тобто

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{(\underline{Z}_{H} + j\underline{Z}_{XB})}{Z_{XB} + j\underline{Z}_{H}} \cdot Z_{XB}.$$
(7.117)

Якщо опір навантаження має чисто активний характер ($\underline{Z}_{H} = R_{H}$), то модулі чисельника та знаменника дробу, який входить у вираз (7.117), однакові і, як наслідок, модуль вхідного опору даного відрізка лінії дорівнює Z_{xB} . Таким чином, відрізок лінії довжиною $\lambda/8$ перетворює довільний активний опір в опір, модуль якого дорівнює Z_{xB} . Аналогічні властивості має і відрізок лінії без втрат довжиною $3\lambda/8$.

Трансформуючі властивості відрізків довгих ліній широко використовуються на практиці для побудови пристроїв узгодження реальних ліній передачі з навантаженням. При цьому в усіх трьох розглянутих вище випадках намагаються використовувати відрізки ліній з малими втратами мінімальної довжини, як такі, що мають властивості максимально наближені до властивостей ліній без втрат.

7.6. Особливості режимів роботи реальних довгих ліній

Розглянемо особливості хвильових процесів в довгій лінії з урахуванням реальних втрат в ній енергії. Спочатку проаналізуємо такі процеси в реальній лінії розімкненій та короткозамкненій на кінці, а потім врахуємо отримані результати для визначення особливостей роботи таких ліній при інших варіантах їх навантаження.

7.6.1. Розподіл напруг та струмів вздовж лінії

Якщо режим роботи навантаження заданий і напруга \underline{U}_2 та струм \underline{I}_2 в кінці лінії відомі, то діючі значення напруги і струму в будь-якій точці реальної лінії визначаються виразами (7.33), коли координата точки спостереження відраховується від кінця лінії.

В режимі холостого ходу струм в кінці лінії $\underline{I}_2 = 0$ і співвідношення (7.33) набувають вигляду

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}_2 \mathbf{ch} \underline{\gamma} \mathbf{x}, \quad \underline{\mathbf{I}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_2}{\underline{\mathbf{Z}}_{xB}} \mathbf{sh} \underline{\gamma} \mathbf{x}.$$

Для комплексних амплітуд напруги та струму одержимо

$$\underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{m}} = \underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{m2}} \mathrm{ch} \underline{\gamma} \mathrm{x}, \quad \underline{\mathbf{I}}_{\mathrm{m}} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{m2}}}{\underline{\mathbf{Z}}_{\mathrm{xB}}} \mathrm{sh} \underline{\gamma} \mathrm{x}.$$
(7.118)

З теорії гіперболічних функцій відомо, що

$$ch\gamma x = ch(\alpha x + j\beta x) = ch\alpha x \cdot cos\beta x + jsh\alpha x \cdot sin\beta x,$$

$$sh\gamma x = sh(\alpha x + j\beta x) = sh\alpha x \cdot cos\beta x + jch\alpha x \cdot sin\beta x.$$
(7.119)

Підставимо значення гіперболічних функцій з (7.119) у вирази (7.118) і отримаємо

$$\underline{\underline{U}}_{m} = \underline{\underline{U}}_{m2} ch\alpha x (cos\beta x + jth \alpha x \cdot sin \beta x),$$

$$\underline{\underline{I}}_{m} = (\underline{\underline{U}}_{m2} / \underline{\underline{Z}}_{xB}) ch\alpha x (th \alpha x \cdot cos\beta x + jsin \beta x).$$
(7.120)

Введемо позначення

$$\underline{U}_{m2} = \underline{U}_{m2} ch\alpha x, \quad m' = th\alpha x, \quad (7.121)$$

і тоді система рівнянь (7.120) матиме вигляд

$$\underline{U}_{m} = \underline{U}_{m2}(\cos\beta x + jm'\sin\beta x),$$

$$\underline{I}_{m} = \frac{\underline{U}_{m2}}{\underline{Z}_{xB}}(m'\cos\beta x + j\sin\beta x).$$
(7.122)

Одержані співвідношення для напруги і струму (7.122) аналогічні до виразів (7.84), які отримані для режиму змішаних хвиль в ідеальній довгій лінії, що навантажена на активний опір, який не дорівнює хвильовому. Однак у даному випадку коефіцієнт m' та напруга \underline{U}_{m2} є функціями координати x довгої лінії. Причому у відповідності із законами змінювання функцій th αx та сh αx значення величин m' та \underline{U}_{m2} в разі збільшення відстані від кінця лінії до точки спостереження будуть зростати.

Криві розподілу амплітуд напруги та струму вздовж реальної лінії, яка розімкнена на кінці, наведені на рис. 7.21. З цих графіків видно, що при віддаленні від кінця лінії різниця між максимальними та мінімальними значеннями амплітуд напруги і струму поступово зменшується, а середнє значення цих амплітуд збільшується. Тобто криві напруги та струму при такому русі вздовж лінії поступово згладжуються. З фізичної точки зору ці особливості розподілу амплітуд напруги і струму пояснюються тим, що в довгій лінії з втратами амплітуди прямої та зво-

рот-ної хвиль внаслідок ненульового згасання безперервно змінюються вздовж лінії (рис. 7.22). На великій відстані від кінця лінії зворотна хвиля стає значно слабшою, ніж пряма, і тому при $\alpha x >> 1$ характер розподілення напруги та струму вздовж лінії наближається до такого, що відповідає режиму біжучих хвиль.

В той же час поблизу кінця лінії, коли координата $x \rightarrow 0$, пряма та зворотна хвилі напруги і струму мають майже однакові амплітуди і режим роботи в цій частині довгої лінії буде близьким до режиму стоячих хвиль.

На основі аналогічних міркувань можна зробити висновок, що в реальній довгій лінії, короткозамкненій на кінці, розподіл напруги та струму має подібний характер, однак амплітуда напруги в кінці такої лінії дорівнює нулю, а амплітуда струму сягає максимального значення.

Таким чином, наявність в реальній довгій лінії втрат енергії призводить до того, що як в розімкненій, так і в короткозамкненій лінії встановлюється режим







зворотної хвиль напруги вздовж лінії з втратами

змішаних хвиль, який не змінює свого характеру при будь-якому опорі наванта-ження, що не дорівнює хвильовому. При цьому в усіх варіантах включення лінії, окрім узгодженого, величина коефіцієнта біжучої хвилі змінюється вздовж лінії. Поблизу точки відбиття, тобто в кінці лінії, він буде приймати найменші, а на початку – найбільші значення.

7.6.2. Вхідний опір довгої лінії з втратами

В загальному випадку при заданому режимі роботи навантаження вхідний опір реальної довгої лінії можна визначити за допомогою співвідношень (7.33). Якщо довжина такої лінії дорівнює ℓ , то її комплексний вхідний опір дорівнює

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 ch\underline{\gamma}\ell + \underline{I}_2 \underline{Z}_{XB} sh\underline{\gamma}\ell}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{XB}} sh\underline{\gamma}\ell + \underline{I}_2 ch\underline{\gamma}\ell}$$

а після нескладних перетворень

$$\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}_{XB} \frac{\underline{Z}_{H} ch\underline{\gamma}\ell + \underline{Z}_{XB} sh\underline{\gamma}\ell}{\underline{Z}_{XB} ch\underline{\gamma}\ell + \underline{Z}_{H} sh\underline{\gamma}\ell}.$$
(7.123)

В режимі холостого ходу, коли опір навантаження $\underline{Z}_{\rm H} \rightarrow \infty$, одержимо $\underline{Z}_{\rm BX} = \underline{Z}_{\rm XB} \operatorname{cth} \underline{\gamma} \ell$. (7.124)

Якщо втрати в довгій лінії достатньо малі, то можна вважати, що хвильовий опір є чисто активним ($\underline{Z}_{xb} \approx Z_{xb} = \sqrt{L_1/C_1}$) і тоді матимемо

$$\underline{Z}_{\rm BX} = Z_{\rm XB} \operatorname{cth} \underline{\gamma} \ell = Z_{\rm XB} \frac{\operatorname{ch} \underline{\gamma} \ell}{\operatorname{sh} \gamma \ell} . \qquad (7.125)$$

Підставимо у співвідношення (7.125) значення $ch \underline{\gamma}\ell$ та $sh \underline{\gamma}\ell$ згідно з виразами (7.119) і врахуємо, що $ch^2 \underline{\gamma}\ell - sh^2 \underline{\gamma}\ell = 1$. В результаті для активної та реактивної складових вхідного опору отримаємо

$$R_{BX} = Z_{XB} \frac{\hbar \alpha \ell}{\hbar^2 \alpha \ell \cdot \cos^2 \beta \ell + \sin^2 \beta \ell},$$

$$X_{BX} = 0.5 Z_{XB} \left(1 - \frac{1}{\hbar^2 \alpha \ell} \right) \frac{\sin 2\beta \ell}{\cos^2 \beta \ell + \frac{1}{\hbar^2 \alpha \ell} \sin^2 \beta \ell}.$$
(7.126)

На рис. 7.23 наведені криві, що характеризують змінювання активної та реактивної складових вхідного опору в залежності від довжини лінії і розраховані за допомогою співвідношень (7.126) при деякому постійному значені



Рис. 7.23. Залежності складових вхідного опору розімкненої реальної довгої лінії від її довжини

добутку $\alpha\lambda < 1$.

Якщо довжина лінії невелика, то отримані залежності близькі до аналогіч-них залежностей ідеальної довгої лінії, що працює у змішаному режимі при m < 1(рис.7.18). Різниця між цими залежностями полягає у тому, що в реальній лінії розмах коливань складових вхідного опору при зростанні довжини лінії поступово зменшується. В граничному випадку, коли довжина лінії $\ell \to \infty$, активна складова вхідного опору R_{вх} $\to Z_{xb}$, а реактивна складова $X_{xb} \to 0$.

Для реальної довгої лінії, що короткозамкнена на кінці ($\underline{Z}_{H} = 0$), із співвідношення (7.123) одержимо

$$\underline{Z}_{BX} = Z_{XB} th \underline{\gamma} \ell = Z_{XB} \frac{sh \underline{\gamma} \ell}{ch \gamma \ell}.$$
(7.127)

Активна та реактивна складові вхідного опору дорівнюють

$$R_{BX} = Z_{XB} \frac{1/th\alpha\ell}{\frac{1}{th^2\alpha\ell}\cos^2\beta\ell + \sin^2\beta\ell},$$

$$X_{BX} = 0.5Z_{XB} \cdot \frac{1}{ch^2\alpha\ell} \cdot \frac{\sin 2\beta\ell}{\cos^2\beta\ell + th^2\alpha\ell\sin^2\beta\ell}.$$
(7.128)

Графіки, що ілюструють залежність складових вхідного комплексного опору замкненої на кінці лінії від її довжини, наведені на рис. 7.24. Як і у випадку розімкненої лінії, при зростанні довжини короткозамкненої лінії розмах



Рис. 7.24. Залежності складових вхідного опору короткозамкненої реальної довгої лінії від її довжини

коливань складових вхідного опору поступово зменшується і в граничному випадку, коли $\ell \to \infty$, активна складова $R_{Bx} \to Z_{xB}$, а реактивна $X_{Bx} \to 0$. Однак при будь-якій довжині лінії характер реактивної складової вхідного

опору ко-роткозамкненої лінії завжди протилежний у порівнянні з характером реактивної складової вхідного опору розімкненої лінії.

7.7. Методи розрахунку довгих ліній

7.7.1. Розрахунок вхідного опору довгої лінії

Багато практичних розрахунків кіл із розподіленими параметрами потребують визначення вхідного опору довгої лінії на довільній відстані ℓ від її навантаження. Якщо напруга <u>U</u>₂ та струм <u>I</u>₂ навантаження <u>Z</u>_н відомі, то вхідний комплексний опір лінії можна знайти, скориставшись виразом (7.123) для реальної лінії та виразами (7.99) і (7.100) для лінії без втрат.

Окрім згаданого методу вхідний опір довгої лінії зручно визначати через коефіцієнт відбиття. Для отримання відповідного розрахункового співвідношення скористаємося тим, що вхідний опір лінії в довільній її точці $\underline{Z}_{BX} = \underline{U}/\underline{I}$, а напругу та струм в цій точці згідно з (7.21) і (7.22) можна представити у вигляді алгебраїчної суми прямої та зворотної хвиль:

$$\begin{split} \underline{\mathbf{U}} &= \underline{\mathbf{U}}_{\pi p} + \underline{\mathbf{U}}_{{}_{3B}}; \\ \underline{\mathbf{I}} &= (\underline{\mathbf{U}}_{\pi p} - \underline{\mathbf{U}}_{{}_{3B}}) \big/ \underline{\mathbf{Z}}_{{}_{XB}} \,. \end{split}$$

Якщо скористатись визначенням вхідного опору та виразами (7.34) для коефіцієнтів відбиття, то отримаємо

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_{XB} \frac{\underline{U}_{np} + \underline{U}_{3B}}{\underline{U}_{np} - \underline{U}_{3B}} = \underline{Z}_{XB} \frac{1 + \underline{p}_{u}}{1 - \underline{p}_{u}}, \qquad (7.129)$$

а для лінії без втрат –

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = Z_{\text{XB}} \frac{1 + \underline{p}_{\text{u}}}{1 - \underline{p}_{\text{u}}}.$$
(7.130)

Вирази (7.129) та (7.130) дуже зручні для розрахунків. Ця зручність полягає не тільки в їх надзвичайній простоті, але й у тому, що коефіцієнт відбиття <u>р</u>_u можна легко знайти експериментально. Дійсно, модуль коефіцієнта відбиття відносно напруги р_u можна визначити за допомогою співвідношень

(7.96) та (7.91), якщо наперед виміряти мінімальне і максимальне значення напруги або струму в лінії. Що стосується аргументу комплексного коефіцієнта відбиття, то для довільної точки, яка знаходиться на відстані ℓ від



Рис. 7.25. До визначення аргументу коефіцієнта відбиття в довгій лінії

кінця лінії, за допомогою (7.37) можна записати

$$\phi_{p_{u}} = \phi_{p_{u}} - 2\beta\ell.$$
 (7.131)

При цьому аргумент коефіцієнта відбиття в кінці лінії ф_р можна знайти за допомогою виразу (7.109), який визначає координату найближчого до кінця лінії максимуму напруги (рис. 7.25). Отже, на основі (7.109) маємо

$$\phi'_{p_{n}} = 2\beta \ell_{n}.$$
 (7.132)

I після підстановки (7.132) в (7.131) для шуканого аргументу отримаємо

$$\varphi_{\mathbf{p}_{u}} = 2(\beta \ell_{\pi} - \beta \ell), \qquad (7.133)$$

де ℓ_{n} – відстань від кінця лінії до першої пучності напруги.

Розрахунок довгих ліній за допомогою співвідношень (7.130) – (7.133) буде ще простішим, якщо його здійснювати не аналітичним, а графічним методом за допомогою спеціальних номограм.

7.7.2. Колова діаграма Вольперта-Сміта

Найбільше розповсюдження для графічних рохрахунків довгих ліній знайшли колові діаграми опорів, запропоновані незалежно Вольпертом А. Р. та Смітом Ф. Особливістю цих діаграм є те, що при їх побудові активні та реактивні складові нормованого комплексного вхідного опору виражаються через дійсну та уявну частини коефіцієнта відбиття.

Дійсно, співвідношення (7.130) зручно записати у вигляді

$$\underline{z}_{_{BX}} = r + j_{X} = \frac{1 + \underline{p}_{u}}{1 - \underline{p}_{u}},$$
(7.134)

де $\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}_{BX} / Z_{XB}$ – нормований вхідний опір лінії; $\mathbf{r} = \mathbf{R}_{BX} / Z_{XB}$ – нормована активна складова вхідного опору; $\mathbf{x} = \mathbf{X}_{BX} / Z_{XB}$ – нормована реактивна складова вхідного опору.

Окрім того комплексний коефіцієнт відбиття можна представити в алгебраїчній формі

$$\underline{\mathbf{p}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{j}\mathbf{v} \tag{7.135}$$

і після підстановки (7.135) в (7.134) одержимо

$$\underline{z}_{\text{BX}} = \frac{1+u+jv}{1-u-jv} = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2} + j\frac{2v}{(1-u)^2+v^2}.$$

Отже, активна та реактивна складові нормованого комплексного вхідного опору дорівнюють

$$r = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2}, \quad x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}.$$
 (7.136)

Вирази (7.136) якраз і використовуються при побудові номограм для графічного розрахунку довгих ліній.

Графіки нормованих активних опорів довгої лінії

Здійснимо деякі перетворення виразу для активної складової нормованого вхідного опору, яка представлена першим з виразів (7.136). Спочатку запишемо

$$r - 2ru + ru^2 + rv^2 = 1 - u^2 - v^2$$
,

або інакше

$$u^{2}(1+r) - 2ru + v^{2}(1+r) = 1-r.$$
 (7.137)

Поділимо ліву та праву частини (7.137) на (1+r)

$$u^{2} - \frac{2r}{1+r}u + v^{2} = \frac{1-r}{1+r},$$
(7.138)

і доповнимо перші дві складові в лівій частині рівняння (7.138) до повного квад-рату

$$u^{2} - \frac{2r}{1+r}u + \left(\frac{r}{1+r}\right)^{2} + v^{2} = \frac{1-r}{1+r} + \left(\frac{r}{1+r}\right)^{2}.$$

Тоді після простих перетворень отримаємо

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = R_r^2,$$
 (7.139)

причому

$$R_{\rm r} = \frac{1}{1+r} \,. \tag{7.140}$$

Вираз (7.139) являє собою рівняння сім'ї кіл, що мають радіуси, які ви-



значаються виразом (7.140) і розташовані в площині комплексної змінної величини <u>р</u> (рис. 7.26). Оскільки вигляд цих кіл визначається нормованим активним опором г, то вони називаються г-колами. Центри г-кіл лежать на дійсній осі u, оскільки координати цих центрів дорівнюють

Рис. 7.26. Сім'я г-кіл

$$u_0 = \frac{r}{1+r}, \quad v_0 = 0.$$
 (7.141)

Всі г-кола мають спільну точку з координатами (1, 0), оскільки відстань від цієї точки до центра кола дорівнює радіусу –

$$1 - u_0 = \frac{1}{1 + r} = R_r.$$

Сама точка (1, 0) являє собою вироджене коло, яке відповідає нескінченно великому активному опору $r \to \infty (R_r = 0)$.

Коло, яке відповідає значенню нормованого активного опору r = 1, тобто активному опору, що дорівнює хвильовому опору лінії, проходить через початок координат.

Вся сім'я г-кіл лежить всередині кола одиничного радіуса, яке відповідає нульовому значенню опору г. Частина комплексної площини, що обмежена цим колом, охоплює точки, які відповідають усім можливим значенням активного нормованого опору.

Графіки нормованих реактивних опорів довгої лінії

Друге рівняння системи (7.136), що характеризує реактивну складову вхідного опору лінії, можна записати таким чином:

$$\mathbf{x} - 2\mathbf{x}\mathbf{u} + \mathbf{x}\mathbf{u}^2 + \mathbf{x}\mathbf{v}^2 = 2\mathbf{v}\,,$$

або інакше

$$(u^2 - 2u) + \left(v^2 - 2v\frac{1}{x}\right) = -1.$$
 (7.142)

Доповнимо вирази в дужках співвідношення (7.142) до повних квадратів і одер-жимо

$$(u^{2}-2u+1)+\left(v^{2}-2v\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}\right)=-1+1+\frac{1}{x^{2}},$$

або

$$(u-1)^{2} + \left(v - \frac{1}{x}\right)^{2} = R_{x}^{2},$$

(7.143)

причому

$$R_x = 1/x.$$
 (7.144)

Вираз (7.143) за аналогією з (7.139) також є рівнянням кола з радіусом, що



Рис. 7.27. Сім'я х-дуг

визначається виразом (7.144). Параметри цих кіл на площині комплексної змінної <u>р</u>_u визначаються значенням реактивної складової х комплексного вхід-ного опору лінії і тому вони називаються х-колами. Центри х-кіл лежать на прямій лінії, яка паралельна осі ординат v і розташована на відстані $u = u_0 = 1$ від неї (рис. 7.27). Координати центрів х-кіл мають значення

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 1/x.$$
 (7.145)

Оскільки реальним значенням активної складової нормованого вхід-ного опору відповідає частина комп-лексної площини, яка обмежена колом, що відповідає нормованому активному опору r = 0, то достатньо замість х-кіл побудувати х-дуги, які лежать всередині даного кола (рис. 7.27). Всі х-кола (або х-дуги) мають спільну точку з координатами (1, 0), яка в цьому випадку є виродженим колом, що відповідає значенню $x = \pm \infty (R_x = 0)$. Тобто точка (1, 0) відображає переріз лінії, в якому ця лінія є розімкненою на кінці ($r = \infty$, $x = \pm \infty$).

Таким чином, на рис. 7.27 дійсна вісь відповідає нормованому реактивному опору x, що дорівнює нулю, тобто чисто активному опору лінії. Як наслідок, точка з координатами (-1, 0), в якій перетинаються r-коло при r = 0та x-коло при x = 0, відображає переріз лінії, в якому лінія є короткозамкненою на кінці.

Верхня напівплощина комплексної площини змінної величини <u>p</u>_u відповідає додатнім значенням нормованого реактивного опору, тобто вхідному опору лінії, що має індуктивний характер реактивності, а нижня напівплощина – від'ємним значенням нормованого реактивного опору, тобто вхідному опору лінії, що має ємнісний характер реактивності.

Визначення зв'язку між вхідним опором та коефіцієнтом відбиття лінії

Кожна точка комплексної площини змінної \underline{p}_u , яка знаходиться всередині г-кола одиничного радіуса, відображає переріз довгої лінії з конкретним зна-ченням активної та реактивної складових вхідного опору лінії. Одночасно будь-яка з цих точок характеризує конкретне значення коефіцієнта відбиття \underline{p}_u , який заданий дійсною и та уявною v частинами.

Таким чином, отримані вище графіки на рис. 7.26 та рис. 7.27 зв'язують між собою значення активної і реактивної складових вхідного опору довгої

лінії зі значеннями коефіцієнта відбиття. Однак для здійснення безпосереднього пере-ходу від величин активного г та реактивного х опорів до конкретного значення коефіцієнта відбиття необхідно на комплексній площині нанести значення мо-дуля p_u та аргументу φ_{p_u} цього коефіцієнта. Зробити це неважко, оскільки дані параметри є полярними координатами точок площини комплексної змінної величини <u>p</u>_u. В результаті фіксованим значенням модуля коефіцієнта відбиття p_u на комплексній площині відповідають концентричні кола, а фіксованим зна-ченням його аргументу φ_{p_u} -радіуси, які виходять з початку координат (рис. 7.28).

Використовуючи наведену координатну сітку, можна через задані дійсну та уявну частини коефіцієнта відбиття и та v знайти параметри p_u та ϕ_{p_u} , причому аргумент коефіцієнта відбиття відраховується від додатної півосі и проти стрілки годинника.

Оскільки всі графіки, що зображені на рис. 7.26 – 7.28, побудовані в одній і тій самій системі координат, то їх можна сумістити. При цьому матимемо номограму для безпосереднього перерахування параметрів r, x та p_u , ϕ_{p_u} . Слід також відмітити, що додатна піввісь u, де $\phi_{p_u} = 0$, а значить, пряма та зворотна хвилі напруги синфазні, відображає перерізи пучностей напруги в лінії. І навпаки, від'ємна піввісь u відповідає вузлам напруги в лінії, оскільки на цій півосі $\phi_{p_u} = \pi$, а



Рис. 7.28. Сім'ї p_u -кіл та ϕ_{p_u} -радіусів

це означає, що пряма та відбита хвилі напруги протифазні.

Повна діаграма опорів Вольперта-Сміта

При розрахунках складових вхідного комплексного опору довгої лінії доцільно розглядати їх зв'язок не з модулем та аргументом коефіцієнта відбиття, а з іншими зв'язаними з ними параметрами, які можна визначити експериментально. Такими параметрами є коефіцієнт біжучої хвилі k₆ та кутова
хвильова відстань $\theta = \beta \ell_{\rm B}$ від заданого перерізу лінії до найближчого до її кінця вузла напруги (рис. 7.25).

Зв'язок між модулем коефіцієнта відбиття p_u та коефіцієнтом біжучої хвилі k_6 характеризується співвідношеннями (7.95) та (7.96), а з рис. 7.25 видно, що різниця між кутовими відстанями $\beta \ell$ та $\beta \ell_n$ на величину $\pi/2$ відрізняється від хвильової відстані θ . Тобто маємо

$$\beta \ell - \beta \ell_{\pi} = \theta - \pi/2. \tag{7.146}$$

Отже, з урахуванням виразів (7.133) та (7.146) можна легко встановити зв'язок між аргументом коефіцієнта відбиття ϕ_{p_u} та хвильовою відстанню θ , тобто

$$\varphi_{p_u} = -2(\theta - \pi/2), \quad \theta = \pi/2 - \varphi_{p_u}/2.$$
 (7.147)

Таким чином, на рис. 7.28 координатні лінії p_u можна проградуювати в значеннях k_6 , а координатні лінії ϕ_{p_u} – в значеннях θ . У відповідності з виразом (7.147) відрахунок хвильової відстані здійснюється починаючи від від'ємної дійсної півосі в напрямку руху стрілки годинника. Це пояснюється, по-перше, тим, що нульовому значенню θ відповідає значення $\phi_{p_u} = \pi$, а подруге – наявністю знаку "мінус" в правій частині першого з виразів (7.147) і таким самим знаком перед складовою $\phi_{p_u}/2$ в другому з цих виразів. Слід також зазначити, що змінюванню аргументу ϕ_{p_u} коефіцієнта відбиття на кут 2π відповідає змінювання хвильової відстані θ на π .

Суміщення г-кіл, х-дуг та КБХ-кіл дозволяє отримати колову діаграму дов-гої лінії або діаграму опорів Вольперта-Сміта, яка наведена на рис. 7.29.

На цій діаграмі дійсна вісь комплексної змінної величини <u>p</u>_u розташована вертикально, причому додатна піввісь и спрямована вниз. Всі хвильові відстані $\theta = \beta \ell = \frac{2\pi}{\lambda} \ell$ відраховуються від верхньої від'ємної півосі и не в кутових одиницях, а у відносних одиницях довжини ℓ/λ .

Слід зазначити, що КБХ-кола на коловій діаграмі співпадають з гколами в точках, що лежать на від'ємній (верхній) півосі и, де нормований опір г зміню-ється від 0 до 1. Дійсно, ці точки відповідають вузлам напруги, тобто тим перерізам лінії, де вхідний опір лінії чисто активний ($z_{\text{вх}} = r$), а коефіцієнт від-биття є дійсною величиною ($\underline{p}_u = -p_u$). Якщо ці значення опору та коефіцієнта відбиття підставити в співвідношення (7.134) та врахувати (7.95), то одержимо

$$r = \frac{1 - p_u}{1 + p_u} = k_{\bar{0}}.$$
 (7.148)

Отже, спеціально оцифровувати КБХ-кола потреби немає.

Будь-який переріз довгої лінії, в якому задані параметри г та х або k_{δ} та ℓ/λ , відображається конкретною точкою на діаграмі опорів. Переміщенню вздовж лінії із заданого перерізу в інший на цій діаграмі відповідає переміщення вздовж КБХ-кола на задану відстань ℓ/λ . Дійсно, при переміщенні вздовж ідеальної лінії КБХ не змінюється, а має місце лише змінюван-



Рис. 7.29. Колова діаграма довгої лінії

ня відносної відстані до першого вузла напруги $\ell_{\rm B}/\lambda$.

Слід також зазначити, що переміщенню вздовж лінії від навантаження до генератора відповідає напрямок, який збігається з напрямком руху стрілки годинника, а переміщенню від генератора до навантаження – переміщення на діаграмі проти руху стрілки годинника.

При переміщенні вздовж лінії на відстань, яка кратна половині довжини хвилі, робоча точка на діаграмі опорів описує повне коло і повертається у вихідну точку з попереднім значенням опору. Тому при розрахунках відносної відстані ℓ/λ ціле число півхвиль необхідно відкинути.

Розрахунок вхідної провідності довгої лінії

Якщо на практиці здійснюють паралельне з'єднання декількох відрізків довгої лінії, то необхідно переходити від розрахунку опорів до розрахунку провідностей. При цьому слід користуватися поняттям нормованої комплексної вхідної провідності

$$\underline{y}_{_{BX}} = 1/\underline{z}_{_{BX}} = g + jb$$
, (7.149)

де $g = G/Y_{xB}$, $b = B/Y_{xB}$ – нормовані активна та реактивна складові провідності; $Y_{xB} = 1/Z_{xB}$ – хвильова провідність довгої лінії без втрат.

Для розв'язування задач такого типу можна успішно використовувати колову діаграму опорів.

На основі співвідношень (7.134) та (7.149) можна записати

$$\underline{y}_{_{BX}} = \frac{1}{\underline{z}_{_{BX}}} = \frac{1 - \underline{p}_{_{u}}}{1 + \underline{p}_{_{u}}}.$$
(7.150)

Якщо врахувати, що $e^{j\pi} = -1$, то вираз (7.150) матиме вигляд

$$\underline{y}_{_{BX}} = \frac{1 + \underline{p}_{_{u}} e^{j\pi}}{1 - \underline{p}_{_{u}} e^{j\pi}} = \frac{1 + p_{_{u}} e^{j(\phi_{p_{_{u}}} + \pi)}}{1 - p_{_{u}} e^{j(\phi_{p_{_{u}}} + \pi)}}.$$
(7.151)

Співставляючи вирази (7.134) та (7.151), приходимо до висновку, що при переході від нормованого опору до нормованої провідності відбувається прирощення на π аргументу комплексного коефіцієнта відбиття <u>р</u>и незмінному модулі цього коефіцієнта. Це означає, що в разі зада-



Рис. 7.30. Перерахунок опору в провідність за допомогою колової діаграми

ного на коловій діаграмі нормованого комплексного опору \underline{z}_{BX} відповідну нормовану провідність \underline{y}_{BX} можна визначити переміщенням із заданої точки \underline{z} вздовж КБХ-кола (p_u -кола) на кут π (рис. 7.30). При цьому здійснюється перехід від заданої точки, яка відповідає вхідному опору \underline{z}_{BX} , в діаметрально протилежну симетрич-но розташовану точку \underline{y} . Через цю нову точку проходять деякі г-коло та x-дуга, які і дають значення активної g та реактивної b складових вхідної провідності.

Таким чином, користуючись коловою діаграмою, можна швидко перерахувати комплексний вхідний опір у відповідну провідність та навпаки.

7.7.3. Розрахунок опорів та провідностей за допомогою колової діаграми

При розв'язуванні задач, які стосуються знаходження вхідних опорів та провідностей довгої лінії без втрат, треба керуватися наступними загальними правилами:

1. При заданому опорі $\underline{Z} = R + jX$ або провідності $\underline{Y} = G + jB$ знаходять нормований опір $\underline{z} = r + jx$ або нормовану провідність y = g + jb відповідно.

2. Якщо задана абсолютна відстань ℓ , то розраховують відносну відстань ℓ/λ . При знаходженні відносної відстані від величини ℓ відкидається ціле число півхвиль або від величини відносної відстані відкидається число, кратне числу 0,5.

3. У відповідності з парами параметрів г та x, g та b, а також k_6 та ℓ/λ , які визначають шляхом розрахунків або експериментально, на коловій діаграмі знаходять вихідну точку, що відповідає перерізу лінії з такими параметрами. При цьму вихідна точка визначається як точка перетину відповідних г-кола та x-дуги, g-кола та b-дуги або КБХ-кола та padiyca ℓ/λ .

4. Якщо треба знайти вхідний опір або вхідну провідність в іншому перерізі лінії, то здійснюється перехід з вихідної точки вздовж КБХ-кола на задану відносну відстань ℓ/λ . Це означає, що радіус, який проходить через вихідну точку, треба повернути на кут, що відповідає відносній відстані ℓ/λ . При цьому переміщення на діаграмі опорів здійснюється в напрямку обертання стрілки годинника, якщо перехід вздовж лінії з одного перерізу в інший здійснюється в бік генератора, і проти руху стрілки годинника, якщо перехід вздовж лінії здійснюється в бік генератора, і проти руху стрілки годинника, якщо перехід вздовж лінії здійснюється в бік генератора, і проти руху стрілки годинника, якщо перехід вздовж лінії здійснюється в бік навантаження. Шукана точка на діаграмі визначається як точка перетину КБХ-кола та повернутого радіуса.

Відрахунок нормованих опору або провідності здійснюється за допомогою г-кола та x-дуги або за допомогою g-кола та b-дуги, які проходять через знайдену точку.

5. Перерахування знайдених нормованих опорів або провідностей в абсолютні значення вхідного опору та провідності здійснюється за допомогою таких співвідношень:

$$\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}_{BX} \cdot Z_{XB}; \quad \underline{Y}_{BX} = \underline{Y}_{RX} \cdot Y_{XB}.$$

6. Якщо за умовами задачі необхідно знайти відстань між двома перерізами лінії, де задані вхідні опори або провідності, то згідно з п.п. 3 визначається по-ложення на діаграмі двох вихідних точок. Шукана відносна відстань може бути знайдена як різниця двох значень відносної відстані ℓ_1/λ та ℓ_2/λ , які визна-чають за допомогою двох радіусів, що проходять через вихідні точки. Потім відносна відстань $(\ell_1 - \ell_2)/\lambda$ перераховується у її абсолютне значення $\ell_1 - \ell_2$.

7.8. Практичне застосування реальних довгих ліній

7.8.1. Довга лінія як фідер

Найчастіше довгі лінії застосовують для передачі електромагнітної енергії від генераторів різного призначення до споживачів. У цьому випадку їх називають лініями передачі або фідерами (від англійського слова tu feed – живити).

Існують фідери різних типів. В низькочастотній частині діапазону метрових хвиль та в діапазоні більш довгих хвиль для передачі енергії електромагнітних коливань використовують відкритий двопровідний фідер (рис. 7.3, а). Однак на більш коротких хвилях відкрита лінія починає інтенсивно випромінювати електромагнітне поле. Окрім того одночасно сильно зростають і теплові втрати в провідниках, що значно знижує коефіцієнт корисної дії (ККД) фідера.

У високочастотній частині метрового та в дециметровому діапазоні хвиль найбільше розповсюдження знайшли коаксіальні лінії передачі, які майже не мають втрат на випромінювання. Це обумовлено тим, що електромагнітне поле такої лінії відокремлене від зовнішнього простору оболонкою зовнішнього циліндричного провідника. Такий фідер має також менші теплові втрати, оскільки провідники, що утворюють коаксіальну лінію, мають достатньо великі за площею поверхні. На сантиметрових хвилях в якості фідерів використовуються смужкові лінії та хвилеводи. Завдяки відсутності в хвилеводі внутрішнього провідника зменшуються витрати на нагрівання і, як наслідок, підвищується ККД фідера в порівнянні з коаксіальним.

Для того, щоб електромагнітна енергія з допомогою фідера передавалась з найменшими втратами, він повинен узгоджуватись з навантаженням і працювати в режимі біжучих хвиль. Покажемо, що ККД фідера в цьому випадку найбільший.

Відомо, що коефіцієнт корисної дії визначається виразом

$$\eta = P_{_{\rm H}}/P_0,$$
 (7.151)

де P_н – потужність, що споживається навантаженням; P₀ – потужність, яку джерело енергії віддає у фідер.

Потужність, яка переноситься хвилею вздовж фідера, в будь-якому перерізі лінії можна розглядати як різницю потужностей, що переносяться прямою та зворотною хвилею. Тоді вираз (7.151) запишеться у вигляді

$$\eta = \frac{P_{\pi p2} - P_{_{3B2}}}{P_{\pi p1} - P_{_{3B1}}},$$
(7.152)

де P_{пp2}, P_{пp1} – потужності прямих хвиль на виході та вході фідера;

Р_{3в2}, Р_{зв1} – потужності зворотних хвиль на виході та вході фідера.

Оскільки опір лінії прямій та зворотній хвилі напруги і струму дорівнює хвильовому, то на основі (7.152) отримаємо

$$\eta = \frac{U_{np2}^2 - U_{3B2}^2}{U_{np1}^2 - U_{3B1}^2} = \frac{U_{np2}^2}{U_{np1}^2} \cdot \frac{1 - (U_{3B2}^2 / U_{np2}^2)}{1 - (U_{3B1}^2 / U_{np1}^2)},$$
(7.153)

або з урахуванням виразів (7.34), (7.38) та (7.40) -

$$\eta = e^{-2\alpha\ell} \cdot \frac{1 - p_{u2}^2}{1 - p_{u1}^2} = \frac{1 - p_{u2}^2}{e^{2\alpha\ell} - p_{u2}^2 e^{-2\alpha\ell}},$$
(7.154)

де p_{u1} та p_{u2} – модулі коефіцієнтів відбиття напруги на вході і виході фідера.

З виразу (7.154) видно, що при збільшенні втрат та зростанні коефіцієнта відбиття на виході лінії ККД фідера знижується. Якщо ж коефіцієнт відбиття $p_{u2} \rightarrow 0$, то дійсно із співвідношення (7.154) отримаємо вираз для максимально можливого значення ККД –

$$\eta_{\max} = e^{-2\alpha\ell}. \tag{7.155}$$

У випадку, коли втрати в лінії малі і величина 2 $\alpha \ell \ll 1$, отримаємо

$$\eta_{\rm max} \approx 1 - 2\alpha \ell. \tag{7.156}$$

258

Аналіз виразу (7.154) також показує, що додаткового підвищення ККД фідера можна досягти шляхом кращого узгодження лінії з джерелом сигналу.

7.8.2. Довга лінія як реактивний двополюсник

В діапазоні метрових та більш коротких хвиль пасивні елементи із зосередженими параметрами втрачають свої основні властивості. Наприклад, котушка індуктивності в цьому діапазоні може не мати властивостей індуктивного елемента, оскільки в цьому випадку переважаючий вплив може мати міжвиткова ємність. Так само в конденсаторі на дуже високих частотах суттєвий вплив має індуктивність виводів. Якраз з цієї причини в даному діапазоні хвиль (частот) елементи із зосередженими параметрами замінюються на елементи з розподіленими параметрами. Роль таких елементів відіграють відрізки довгих ліній.

При достатньо малій довжині ℓ_0 відрізка реальної довгої лінії втратами в ньому можна знехтувати. Тому в ролі реактивних хвильових двополюсників можна використовувати відрізки лінії в режимі стоячих хвиль, зокрема короткозамкнені та розімкнені відрізки довгої лінії з малими втратами, вхідні опори яких наближено можна вважати чисто реактивними.

В ролі такого реактивного хвильового двополюсника найбільш зручно використовувати відрізок довгої лінії з рухомою короткозамикаючою перемичкою, так званий реактивний шлейф. При зміщенні цієї перемички вздовж лінії змінюється довжина короткозамкненого відрізка лінії, а значить, і його вхідний опір. Для відрізка лінії довжиною ℓ_0 на основі виразів (7.74) та (7.75) отримаємо

$$\underline{Z}_{BX} \approx X_{BX} = Z_{XB} tg \beta \ell_0 = Z_{XB} tg \frac{2\pi}{\lambda} \ell_0, \qquad (7.157)$$

а з урахуванням того, що фазова швидкість $v_{\varphi} = \omega/\beta$, можна записати

$$X_{BX} = Z_{XB} tg \frac{\omega}{v_{\phi}} \ell_0 = Z_{XB} tg \omega \tau_{\pi}, \qquad (7.158)$$

де $\tau_{\pi} = \ell_0 / v_{\phi} - час розповсюдження прямої або зворотної хвилі вздовж відрі$ зка лінії.

Згідно з виразами (7.157) та (7.158) залежність $X_{Bx}(\beta x)$ одночасно можна розглядати як частотну залежність реактивного опору шлейфа $X_{Bx}(\omega)$ при його фіксованій довжині ($\ell_0 = \text{const}$). При цьому короткозамкнений відрізок лінії може мати як індуктивний, так і ємнісний характер опору (рис. 7.14). Зокрема, якщо довжина відрізка $\ell_0 < \lambda/4$, то даний двополюсник має індуктивний характер реактивного опору. Тому на будь-якій частоті $\omega < \pi/2\tau_{\pi}$ його можна використовувати як пасивний елемент з еквівалентною індуктивністю

$$L_{e_{KB}} = \frac{Z_{xB}}{\omega} tg \frac{2\pi}{\lambda} \ell_0 = \frac{Z_{xB}}{\omega} tg \frac{\ell_0}{v_{\phi}} \omega.$$
(7.159)

При цьому довжина відрізка лінії дорівнює

$$\ell_0 = \frac{\mathbf{v}_{\phi}}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega \mathbf{L}_{e_{KB}}}{\mathbf{Z}_{_{XB}}}.$$
(7.160)

Якщо ж довжина реактивного шлейфа $\lambda/4 < \ell_0 < \lambda/2$, то в діапазоні частот $\pi/\tau_{\pi} < \omega < \pi/2\tau_{\pi}$ він має ємнісний характер опору і може використовуватись замість пасивного елемента з ємністю

$$C_{e_{KB}} = \frac{1}{\omega Z_{xB}} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} \ell_0 = \frac{1}{\omega Z_{xB}} \operatorname{ctg} \frac{\ell_0}{v_{\phi}} \omega.$$
(7.161)

Довжина відрізка лінії при цьому складає величину

$$\ell_0 = \frac{\mathbf{v}_{\phi}}{\omega} \operatorname{arcctg}(\omega \mathbf{C}_{e_{\mathsf{KB}}} \mathbf{Z}_{x_{\mathsf{B}}}).$$
(7.162)

Набагато рідше в якості реактивних елементів із розподіленими параметрами використовуються розімкнені відрізки довгої лінії, оскільки перестроювати їх параметри можливо лише шляхом змінювання довжини такого відрізка. У цьому випадку маємо протилежну картину в порівнянні з попереднім. При довжині відрізка $\ell_0 < \lambda/4$ отримаємо ємнісний характер опору, а якщо $\lambda/4 < \ell_0 < \lambda/2$, то розімкнений відрізок матиме індуктивний характер опору.

7.8.3. Довга лінія як узгоджуючий пристрій

При заданому опорі навантаження \underline{Z}_{H} та відомому хвильовому опорі \underline{Z}_{xB} реальної довгої лінії умова її узгодженої роботи має вигляд

$$\underline{Z}_{\rm H} = \underline{Z}_{\rm XB} \tag{7.163}$$

і дуже часто не виконується. У цьому випадку для одержання у фідері режиму біжучих хвиль підключення навантаження здійснюють через узгоджуючий пристрій.

Найпростішим таким пристроєм є чвертьхвильовий трансформатор опорів, виконаний у вигляді відрізка довгої лінії довжиною $\lambda/4$.



Рис. 7.31. Включення узгоджуючого пристрою при активному навантаженні

Якщо опір навантаження лінії чисто активний, тобто $\underline{Z}_{\rm H} = R_{\rm H}$, то чвертьхвильовий трансформатор можна включати безпосередньо між фідером та навантаженням (рис. 7.31). Зазвичай втрати у фідерах дуже малі і ними можна знехтувати. Тоді умова (7.163) запишеться

$$\underline{Z}_{\rm H} = R_{\rm H} = Z_{\rm xB} \,. \tag{7.164}$$

Згідно зі співвідношенням (7.116) вхідний опір чвертьхвильового трансформатора в схемі на рис. 7.31 є дійсною величиною і дорівнює

$$Z_{\rm BX} = \frac{Z_{\rm XB\,T}^2}{R_{\rm H}},\tag{7.165}$$

де Z_{хв т} – хвильовий опір узгоджуючого пристрою.

Якщо прирівняти опори, що визначаються виразами (7.164) та (7.165), то отримаємо вираз для знаходження хвильового опору трансформатора, що забезпечує узгодження фідера з навантаженням –

$$Z_{XBT} = \sqrt{Z_{XB} \cdot R_{H}}. \qquad (7.166)$$

У цьому випадку вхідний опір чвертьхвильового трансформатора навантажено-го на опір R_{μ} дорівнюватиме Z_{xB} і в основній лінії встановиться режим, близький до режиму біжучих хвиль. Відрізок лінії, що використовується як узгоджуючий пристрій, працює в режимі змішаних хвиль, але внаслідок його малої довжини втрати енергії в ньому незначні.

У тому випадку, коли опір навантаження лінії має комплексний характер, узгоджуючий чвертьхвильовий трансформатор слід включати на деякій відстані від кінця лінії, а саме в такому місці, де вхідний опір останньої чисто активний (рис. 7.32). Якщо вхідний опір відрізка лінії довжиною ℓ_1 між транс-



Рис. 7.32. Включення узгоджуючого пристрою при комплексному навантаженні

форматором та наван-таженням дорівнює R_н, то шуканий хвильо-вий опір узгоджуючого трансформатора дорівнює

$$Z_{xBT} = \sqrt{R_{H} \cdot Z_{xB}}.$$
 (7.167)

При цьому відстань ℓ_1 можна легко визначити за допомогою колової діаграми.

Для розміщення чвертьхвильового трансформатора в схемі на рис. 7.32 треба роз-

різати фідер, що незручно в конструктивному плані. Окрім того, параметри лінії, на базі якої створюється узгоджуючий пристрій, завжди відрізняються від параметрів фідера.

На жаль розглянуті узгоджуючі пристрої мають жорстко фіксовані параметри, які неможливо регулювати.

Вільним від цих недоліків є запропонований В. В. Татариновим метод узгодження за допомогою одного або двох реактивних шлейфів, які конструктивно являють собою короткозамкнені відрізки довгої лінії того самого типу, що й узгоджуваний фідер.

При використанні одного реактивного шлейфа, параметри якого можна легко змінювати шляхом переміщення короткозамикаючої перемички (рис. 7.33), його підключають до основної лінії в тому місці, де активна складо-ва її вхідної провідності дорівнює хвильовій провідності реактивного шлейфа –

$$G_{BX} = Y_{XB III}$$

Z_{XB}

Реактивна складова вхідної провідності лінії $B_{\text{вх}}$ в точці, координату ℓ_1 якої

можна також визначити за допомогою колової діаграми, повинна дорівнювати вхідній провідності реактивного шлейфа B_m за абсолютною величиною, але мати протилежний характер реактивного опору. Тоді результуюча вхідна провідність основної лінії в точках підключення шлейфа дорівнюватиме хвильовій –

$$Y_{_{BX}} = Y_{_{XB}} + j(B_{_{III}} + B_{_{BX}}) = Y_{_{XB}}.$$

Це означає, що в основній частині довгої лінії, яка знаходиться зліва від точок підключення

реактивного шлейфа, буде існувати режим біжучих хвиль і зворотні хвилі напруги та струму будуть відсутні.

Якщо ж опір навантаження буде змінюватись, то настроювання однош-

лейфового узгоджуючого прис-трою потребує переміщення шлейфа вздовж лінії. Від цього недоліку є вільним двошлейфовий узгоджуючий пристрій, схема якого наведена на рис. 7.34. У цьому пристрої і відстань ℓ_2 між реактивними шлейфами, і відстань ℓ_1 між навантаженням <u>Y</u>_н та розташованим ближче до нього шлейфом є фіксованими. При цьому відстань ℓ_2 зазвичай вибирають рів-



Рис. 7.33. Узгоджуючий пристрій з реактивним шлейфом



Рис. 7.34. Двошлейфовий узгоджуючий пристрій

<u>Y</u>_н

ною $\lambda/8$ або $3\lambda/8$, а відстань ℓ_1 задають виходячи з конструктивних міркувань.

За допомогою вибору довжини $\ell_{\rm m2}$ першого реактивного шлейфа, який розташований ближче до навантаження, досягають того, що активна складова вхідні провідності лінії в точках підключення до неї іншого шлейфа дорівнює $Y_{\rm xB}$. Тоді реактивна складова вхідної провідності лінії в точках підключення другого шлейфа повинна компенсуватися реактивною провідністю останнього. Така компенсація досягається регулюванням довжини $\ell_{\rm m1}$ цього реактивного шлейфа.

7.8.4. Довга лінія як резонансний двополюсник

Відомо, що короткозамкнений відрізок довгої лінії без втрат довжиною $\ell = k \lambda/4$ має або нескінченно малий (коли k = 2, 4, ...), або нескінченно великий (коли k = 1, 3, ...) вхідний опір. В той же час аналогічний відрізок реальної лінії в першому випадку має мінімальний чисто активний опір і поводить себе аналогічно до послідовного коливального контура із зосередженими параметрами. Якщо ж довжина відрізка реальної лінії кратна непарному числу четвертей довжини хвилі, то його вхідний опір набуває максимального і також чисто активного значення. Такий відрізок за своїми властивостями аналогічний до паралельного коливального контура із зосередженими параметрами.

Якщо розглянуті відрізки мають мінімально можливу довжину $(\lambda/4 \text{ або } \lambda/2)$, то втрати в таких відрізках дуже малі, а режим їх роботи близький до режиму стоячих хвиль. Щоб визначити добротність резонансних хвильових двополюсників треба врахувати, що в режимі стоячих хвиль напруга та струм в лінії знаходяться в квадратурі, а в цьому випадку передачі електромагнітної енергії вздовж лінії не відбувається. Енергія, що в цьому випадку накопичується в лінії, лише переходить з магнітного поля в електричне та навпаки. Отже, запас енергії у відрізку лінії залишається незмінним у часі і дорівнює або максимальній енергії в магнітному полі, коли струм набуває амплітудного значення, або максимальній енергії в електричному полі, коли амплітудного значення сягає напруга –

$$\mathbf{w} = \mathbf{W}_{\max} = \frac{\mathbf{L}_1}{2} \int_0^\ell \mathbf{I}_m^2 d\ell = \frac{\mathbf{C}_1}{2} \int_0^\ell \mathbf{U}_m^2 d\ell.$$
(7.168)

Потужність втрат в даних резонансних відрізках лінії складається з потужностей втрат на погонних опорі R₁ та провідності G₁, а саме

$$P_{\rm R} = \frac{R_1}{2} \int_0^\ell I_{\rm m}^2 d\ell + \frac{G_1}{2} \int_0^\ell U_{\rm m}^2 d\ell.$$
(7.169)

Відомо, що у відповідності з визначеннями добротності та згасання для будь-якого пасивного резонансного елемента кола можна записати

$$Q_{x} = \frac{1}{d_{x}} = \frac{|P_{Q}|}{P_{R}} = \omega_{0} \frac{|W_{max}|}{P_{R}}.$$
 (7.170)

Отже, використовуючи вирази (7.168) – (7.170), для згасання резонансних відрізків довгої лінії довжиною *ℓ* на резонансній частоті ω_0 одержимо

$$d_{\ell} = \frac{1}{Q_{\ell}} = \frac{R_1}{\omega_0 L_1} + \frac{G_1}{\omega_0 C_1}.$$
 (7.171)

Якщо врахувати співвідношення (7.61) та (7.17) вираз (7.171) можна записати у вигляді, більш зручному для розрахунків –

$$Q_{\ell} = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha\lambda}.$$
 (7.172)

В діапазоні метрових та більш коротких хвиль добротність розглянутих резонансних відрізків довгої лінії складає тисячі і навіть десятки тисяч одиниць, в той час як добротність коливальних контурів із зосередженими параметрами тут різко знижується. Такими самими властивостями характеризуються і ро-зімкнені відрізки довгої лінії.

Розглянуті властивості короткозамкнених та розімкнених відрізків довгих ліній з малими втратами дозволяють використовувати їх в якості коливальних систем в діапазоні надвисоких частот, коли добротність коливальних контурів, складених з дискретних котушок індуктивностей та конденсаторів, стає низькою. На відміну від коливальних систем із зосередженими параметрами число резонансних частот в коливальних системах з розподіленими параметрами є нескінченно великим.

Слід зазначити, що резонансні властивості хвильових двополюсників знаходять й інші застосування. Наприклад, короткозамкнений чвертьхвильовий відрізок лінії, що характеризується високою добротністю, має резонансний опір порядку сотень кілоом та одиниць мегаом. При такому великому



Рис. 7.35. Металеві ізолятори

опорі він може успішно використовуватися як металевий ізолятор. Такі чвертьхвильові ізоля-тори застосовуються для закріплення проводів двопровідного фідера (7.35, а) та внутрішнього проводу коаксіального фідера (рис. 7.35, б).

У коаксіальному фідері металічний ізолятор виконується у вигляді стакана, що являє собою короткозамкнений відрізок коаксіальної лінії, однак довжину цього стакана вибирають дещо більшою, ніж четверть довжини хвилі ($\ell > \lambda/4$). При цьому маємо ємнісний характер вхідної провідності ізолятора, яка компен-сує індуктивну провідність виступаючої частини опорного стержня довжиною ℓ' .

Іще одне застосування знаходить чвертьхвильовий резонансний шлейф в лінійному вольтметрі, який використовується для вимірювання напруг в довгій лінії. У цьому шлейфі замість короткозамикаючої перемички включають вимірювальний пристрій (амперметр), який має практично нульовий вхідний опір (рис. 7.36). Такий пристрій називається вимірювальним шлейфом і є основою для побудови так званих вимірювальних ліній.

Очевидно, що підключення вимірювального шлейфа до фідера практично не впливає на режим роботи останнього, оскільки такий шлейф має дуже великий чисто активний вхідний опір. Якщо вимірювальний шлейф переміщувати вздовж лінії, то можна виміряти напругу в будь-якому її перерізі. Тобто в цьому випадку вимірювальний шлейф виконує функцію лінійного вольтметра.

Якщо короткозамкнений відрізок довгої лінії довжиною $\ell = \lambda/4$ має ду-

же великий вхідний опір, то аналогічний за довжиною розімкнений відрізок має близький до нуля вхідний опір. Ця обставина дозволяє використовувати такі відрізки ліній для безконтактного зчленування нерухомих та рухомих частин антенно-фідерних трактів.

Необхідність такого застосування розімкненого чвертьхвильового відрізка обумовлена тією обставиною, що в рухомих металевих зчле-





нуваннях дуже складно реалізувати надійний електричний контакт. Тому в місці зчленування нерухомої частини фідера та рухомої частини безпосереднього підводу до антенно-фідерного пристрою встановлюють чвертьхвильовий розімкнений відрізок довгої лінії, який має близький до нуля вхідний опір на робочій частоті фідера.

Додаток 1.

	Z		Y		А		В		Н		G	
Z	<u>Z</u> ₁₁	<u>Z</u> ₁₂	$\frac{\underline{\mathbf{Y}}_{22}}{ \mathbf{Y} }$	$-\frac{\underline{\mathbf{Y}}_{12}}{ \mathbf{Y} }$	$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}$	$\frac{ \mathbf{A} }{\underline{\mathbf{A}}_{21}}$	$\frac{\underline{\mathbf{B}}_{22}}{\underline{\mathbf{B}}_{21}}$	$\frac{1}{\underline{B}_{21}}$	$\frac{ \mathbf{H} }{\underline{\mathbf{H}}_{22}}$	$\frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{G}_{11}}$	$-\frac{\underline{G}_{12}}{\underline{G}_{11}}$
	\underline{Z}_{21}	\underline{Z}_{22}	$-\frac{\underline{Y}_{21}}{ Y }$	$\frac{\underline{\mathbf{Y}}_{11}}{\left \mathbf{Y}\right }$	$\frac{1}{\underline{A}_{21}}$	$\frac{\underline{\mathbf{A}}_{22}}{\underline{\mathbf{A}}_{21}}$	$\frac{ \mathbf{B} }{\underline{\mathbf{B}}_{21}}$	$\frac{\underline{B}_{11}}{\underline{B}_{21}}$	$-\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{H}_{22}}$	$\frac{\underline{G}_{21}}{\underline{G}_{11}}$	$\frac{ G }{\underline{G}_{11}}$
Y	$\frac{\underline{Z}_{22}}{ \mathbf{Z} }$ –	$\frac{\underline{Z}_{12}}{ \mathbf{Z} }$	<u>Y</u> ₁₁	$\underline{\mathbf{Y}}_{12}$	$\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}}$	$-\frac{ A }{\underline{A}_{12}}$	$\frac{\underline{B}_{11}}{\underline{B}_{12}}$	$-rac{1}{\underline{B}_{12}}$	$\frac{1}{\underline{H}_{11}}$	$-\frac{\underline{\mathbf{H}}_{12}}{\underline{\mathbf{H}}_{11}}$	$\frac{ \mathbf{G} }{\underline{\mathbf{G}}_{22}}$	$\frac{\underline{G}_{12}}{\underline{G}_{22}}$
	$-\frac{\underline{Z}_{21}}{ \mathbf{Z} }$	$\frac{\underline{Z}_{11}}{ \mathbf{Z} }$	$\underline{\mathbf{Y}}_{21}$	$\underline{\mathbf{Y}}_{22}$	$-\frac{1}{\underline{\mathbf{A}}_{12}}$	$\frac{\underline{\mathbf{A}}_{11}}{\underline{\mathbf{A}}_{12}}$	$-\frac{ \mathbf{B} }{\underline{\mathbf{B}}_{12}}$	$\frac{\underline{\mathbf{B}}_{22}}{\underline{\mathbf{B}}_{12}}$	$\frac{\underline{\mathrm{H}}_{21}}{\underline{\mathrm{H}}_{11}}$	$\frac{ \mathbf{H} }{\underline{\mathbf{H}}_{11}}$	$-\frac{\underline{G}_{21}}{\underline{G}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{G}_{22}}$
A	$\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}$	$\frac{ \mathbf{Z} }{\underline{Z}_{21}}$	$-\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}$	$-\frac{1}{\underline{Y}_{21}}$	<u>A</u> ₁₁	<u>A</u> ₁₂	$\frac{\underline{\mathbf{B}}_{22}}{\left \mathbf{B}\right }$	$\frac{\underline{\mathbf{B}}_{12}}{\left \mathbf{B}\right }$	$-\frac{ \mathbf{H} }{\underline{\mathbf{H}}_{21}}$	$-\frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}}$	$\frac{1}{\underline{G}_{21}}$	$\frac{\underline{G}_{22}}{\underline{G}_{21}}$
	$\frac{1}{\underline{Z}_{21}}$	$\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}$	$-\frac{ \mathbf{Y} }{\underline{\mathbf{Y}}_{21}}$	$-\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}$	$\underline{\mathbf{A}}_{21}$	$\underline{\mathbf{A}}_{22}$	$\frac{\underline{B}_{21}}{ \mathbf{B} }$	$\frac{\underline{\mathbf{B}}_{11}}{\left \mathbf{B}\right }$	$-\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}}$	$-\frac{1}{\underline{H}_{21}}$	$\frac{\underline{G}_{11}}{\underline{G}_{21}}$	$\frac{ G }{\underline{G}_{21}}$

Таблиця відповідностей між первинними параметрами чотириполюсника

266

Продовження додатку

	Z		Y		Α		В		Н		G	
В	$\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{12}}$	$\frac{ \mathbf{Z} }{\underline{Z}_{12}}$	$-\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}$	$-\frac{1}{\underline{Y}_{12}}$	$\frac{\underline{\mathbf{A}}_{22}}{ \mathbf{A} }$	$\frac{\underline{\mathbf{A}}_{12}}{ \mathbf{A} }$	<u>B</u> ₁₁	$\underline{\mathbf{B}}_{12}$	$\frac{1}{\underline{H}_{12}}$	$\frac{\underline{\mathbf{H}}_{11}}{\underline{\mathbf{H}}_{12}}$	$-\frac{ \mathbf{G} }{\underline{\mathbf{G}}_{12}}$	$-\frac{\underline{G}_{22}}{\underline{G}_{12}}$
	$\frac{1}{\underline{Z}_{12}}$	$\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}}$	$-\frac{ \mathbf{Y} }{\underline{\mathbf{Y}}_{12}}$	$-\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}$	$\frac{\underline{A}_{21}}{ A }$	$\frac{\underline{\mathbf{A}}_{11}}{ \mathbf{A} }$	$\underline{\mathbf{B}}_{21}$	<u>B</u> ₂₂	$\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{12}}$	$\frac{ \mathbf{H} }{\underline{\mathbf{H}}_{12}}$	$-\frac{\underline{G}_{11}}{\underline{G}_{12}}$	$-\frac{1}{\underline{G}_{12}}$
Н	$\frac{ \mathbf{Z} }{\underline{\mathbf{Z}}_{22}}$	$\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{Y}_{11}}$	$-\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}$	$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}$	$\frac{ A }{\underline{A}_{22}}$	$\frac{\underline{\mathbf{B}}_{12}}{\underline{\mathbf{B}}_{11}}$	$\frac{1}{\underline{B}_{11}}$	\underline{H}_{11}	\underline{H}_{12}	$\frac{\underline{G}_{22}}{ G }$	$-\frac{\underline{G}_{12}}{ G }$
	$-\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{Z}_{22}}$	$\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}}$	$\frac{ \mathbf{Y} }{\underline{\mathbf{Y}}_{11}}$	$-\frac{1}{\underline{A}_{22}}$	$\frac{\underline{\mathbf{A}}_{21}}{\underline{\mathbf{A}}_{22}}$	$-\frac{ \mathbf{B} }{\underline{\mathbf{B}}_{11}}$	$\frac{\underline{B}_{21}}{\underline{B}_{11}}$	\underline{H}_{21}	$\underline{\mathrm{H}}_{22}$	$-\frac{\underline{G}_{21}}{ G }$	$\frac{\underline{G}_{11}}{ G }$
G	$\frac{1}{\underline{Z}_{11}}$	$-\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{11}}$	$\frac{ \mathbf{Y} }{ \mathbf{Y} _{22}}$	$\frac{\underline{\mathbf{Y}}_{12}}{\underline{\mathbf{Y}}_{22}}$	$\frac{\underline{\mathbf{A}}_{21}}{\underline{\mathbf{A}}_{11}}$	$-\frac{ A }{\underline{A}_{11}}$	$\frac{\underline{\mathbf{B}}_{21}}{\underline{\mathbf{B}}_{22}}$	$-\frac{1}{\underline{B}_{22}}$	$\frac{\underline{\mathbf{H}}_{22}}{ \mathbf{H} }$	$-\frac{\underline{\mathbf{H}}_{12}}{ \mathbf{H} }$	<u>G</u> ₁₁	$\underline{\mathbf{G}}_{12}$
	$\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}}$	$\frac{ \mathbf{Z} }{\underline{Z}_{11}}$	$-\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{\mathbf{Y}}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{\mathbf{A}}_{11}}$	$\frac{\underline{\mathbf{A}}_{12}}{\underline{\mathbf{A}}_{11}}$	$\frac{ \mathbf{B} }{\underline{\mathbf{B}}_{22}}$	$\frac{\underline{\mathbf{B}}_{12}}{\underline{\mathbf{B}}_{22}}$	$-\frac{\underline{\mathbf{H}}_{21}}{ \mathbf{H} }$		$\underline{\mathbf{G}}_{21}$	$\underline{\mathbf{G}}_{22}$
									$\frac{\underline{\mathbf{H}}_{11}}{\left \mathbf{H}\right }$			

Література

- 1. Зернов Н. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей. Л.: Энергия, 1972.
- 2. Попов В. П. Основы теории цепей: Учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 1998.
- Костин Г. А. Электрорадиотехнические цепи и сигналы: Конспект лекций. Часть 1. Основы теории электрорадиотехнических цепей синусоидального тока. – Харьков: ВИРТА, 1979.
- Белов Е. Н. Электрорадиотехнические цепи и сигналы: Конспект лек-ций. Часть 2. Анализ линейных электрорадиотехнических цепей в частотной и временной областях. – Харьков: ВИРТА, 1982.
- 5. Карташов Р. П., Медведев А. П. Теория электрорадиоцепей: Учебник для вузов ПВО. – М.: МО СССР, 1980.
- 6. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В. Основы теории цепей: Учебник для вузов. М.: Энергоатомиздат, 1989.
- 7. Лосев А. К. Линейные радиотехнические цепи: Учебник для радиотехн. специальностей вузов. М.: Высш. шк., 1971.
- 8. Перхач В. С. Теоретична електротехніка: Лінійні кола: Підручник. К.: Вища шк., 1992.
- Афанасьев Б. П., Гольдин О. Е., Кляцкин И. Г., Пинес Г. Я. Теория линейных электрических цепей: Учеб. пособие для радиотехнич. специальностей вузов. – М.: Высш. шк., 1973.
- Мількевич Є. О., Франков В. М., Карлов В. Д., Медведєв М. Ю. Основи теорії кіл. Аналіз простих лінійних кіл в усталеному режимі: Навчальний посібник. – Харків: ХВУ, 2004, Ч. 1.
- Белов Е. Н., Костин Г. А. Электрорадиотехнические цепи и сигналы. Часть
 Учебные задачи. Харьков: 1982.
- Белов Е. Н., Костин Г. А., Фролов С. И. Электрорадиотехнические цепи и сигналы. Часть 2. Учебные задачи. – Харьков: 1983.
- Лосев А. К., Зиемелис Ю. М.Задачник по теории линейных електрических цепей. – М.: Высш. шк., 1989.
- 14. Медведев М. Ю. Основы теории цепей: Сборник задач. Харьков: 1997.
- 15. Мількевич Є. О., Франков В. М. Основи теорії кіл: Керівництво до лабораторних робіт. Харків: 2001.