

621.3(07)
К 65

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

З КУРСУ "ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ"

Частина 1

для студентів спеціальностей 6 090701 "Радіотехніка",
6 090702 "Радіоелектронні пристрої, системи та комплекси", 6.090704
"Апаратура радіозв'язку, радіомовлення та телебачення"

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою "Основи радіотехніки".
Протокол № 1 від 01.09.01

ХАРКІВ 2002

Конспект лекцій з курсу "Основи теорії кіл", ч. 1 для студентів спеціальностей 6.090701 "Радіотехніка", 6.090702 "Радіoeлектронні пристрої, системи та комплекси", 6.090704 "Апаратура радіозв'язку, радіомовлення та телебачення" / Упоряд.: Л.В. Гринченко, І.О. Мілютенко. - Харків: ХНУРЕ, 2002. - 92 с

Упорядники: ГРИНЧЕНКО Людмила Василівна
МІЛЮТЧЕНКО Іван Олександрович

Відповідальний випусковий В.М. Шокало
Редактор О.Г. Троценко

План 2002. поз. 26.

Підп. до друку 13.09.01. Формат 60х84 1/16. Умов.друк арк. 5,4.
Облук. вид. арк. 4,8
Тираж 100 прим. Зам. № 1-2. Ціна договірна.

ХНУРЕ, 61166 Харків, просп. Леніна, 14.

Надруковано в учбово-виробничому
видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ
61166 Харків, просп. Леніна, 14.

ВСТУП

В умовах розвитку та ускладнення принципів роботи радіoeлектронних пристроїв та систем значно збільшується обсяг знань, якими повинен володіти сучасний фахівець. Засвоєння чисельних спеціальних курсів стає можливим лише при наявності фундаментальної теоретичної підготовки, яку студенти одержують, вивчаючи загальнонаукові та загальноінженерні дисципліни.

Однією з таких дисциплін для інженерів за напрямком "Радіотехніка" є "Основи теорії кіл", в якій розглядаються основи електро- і радіотехніки. Вона ґрунтується на дисциплінах "Вища математика", "Фізика" і є основою для засвоєння практично всіх спеціальних курсів у вузі та інженерної діяльності спеціаліста в галузі електрозв'язку та радіотехніки. Опанування основами теорії електричних кіл є запорукою творчих успіхів інженера-радіотехніка.

Метою вивчення дисципліни ОТК є засвоєння основних законів та положень теорії електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами, оволодіння методами аналізу та синтезу електричних кіл.

Внаслідок вивчення курсу ОТК студент має **знати**: класифікацію дво- та чотириполюсників, основні закони і методи розрахунку відгуків кола на постійну, синусоїдну або довільну дію у стаціонарному і перехідному режимах; **вміти**: самостійно виконувати розрахунок відгуків у розгалужених лінійних електричних колах у стаціонарному режимі, визначати частотні та часові характеристики чотириполюсників і застосовувати їх для розрахунку відгуків у перехідному режимі, розраховувати параметри типових ланок радіотехнічної апаратури.

Конспект лекцій першої частини курсу ОТК складено згідно з Освітньо-професійною програмою вищої освіти за напрямком радіотехніки та відповідною робочою програмою курсу. До складу конспекту вміщено 15 лекцій з основних розділів курсу ОТК-1: основні поняття і закони електричних кіл; основні методи розрахунку лінійних електричних кіл; режим синусоїдних коливань в електричних колах; частотні характеристики електричних кіл; розрахунок електричних кіл з індуктивними зв'язками при синусоїдному впливі.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЕЛЕМЕНТИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛ

Електричне коло - сукупність пристроїв чи середовищ, у яких можуть проходити електричні струми.

Затискач - точка електричного кола, призначена для виконання з'єднання.

Елемент кола - складова частина електричного кола, яка не може бути розділена на частини конструктивно без втрати властивих йому характеристик. Ідеальний елемент - абстрактне подання елемента кола, що характеризується одним параметром.

Елементи кола поділяються на активні та пасивні.

1.1 Активні елементи електричного кола

Активний елемент - елемент електричного кола, до схеми заміщення якого входить джерело електричної енергії. Джерела енергії поділяються на: 1) джерела напруги; 2) джерела струму. Ці джерела є активними елементами і подаються у вигляді активного двополосника (рис. 1.1а).

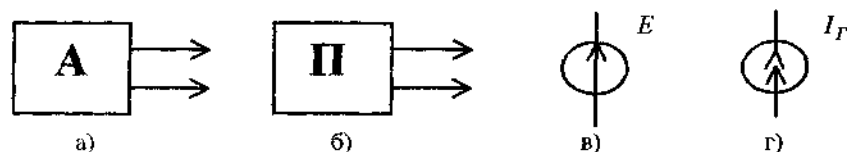


Рисунок 1.1

Двopolосник - частина електричного кола з двома затискачами, що називаються полюсами.

Ідеальне джерело напруги - активний елемент, напруга на затискачах якого не залежить від струму, що в ньому проходить. Якщо зовнішні затискачі розімкнено, маємо режим холостого ходу.

Максимальна напруга виникає на затискачах розімкненого джерела, позначається E (ЕРС) і зветься електрорушійною силою.

Умовне позначення ідеального джерела напруги наведено на рис. 1.1в ($E - const, e(t) - var$).

Миттєве значення ЕРС (напруги, струму) - значення ЕРС (напруги, струму) у даний момент часу. Графік залежності миттєвого значення $e(t)$ за часом зветься часовою діаграмою (рис. 1.2). На рис. 1.2б наведена діаграма постійної ЕРС. Постійний струм (напруга) - струм (напруга), який в усталеному режимі електричного кола не залежить від часу.

Ідеальне джерело струму - активний елемент, струм якого не залежить від напруги на його затискачах. Умовне позначення (на рис. 1.1г): $I - const, i(t) - var$.

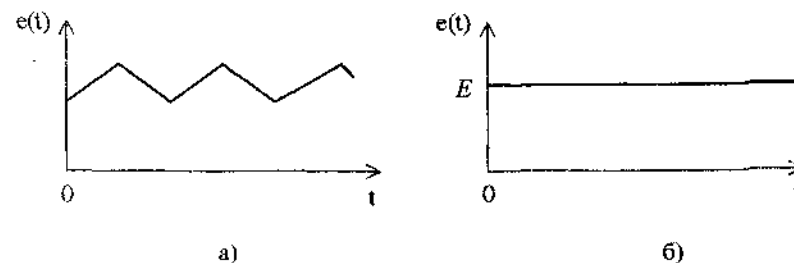


Рисунок 1.2

Вольт-амперна характеристика (ВАХ) - залежність між напругою на затискачах елемента електричного кола та струмом у ньому.

У відповідності з визначенням ВАХ ідеальних джерел постійної напруги та постійного струму мають вигляд, показаний на рис. 1.3.

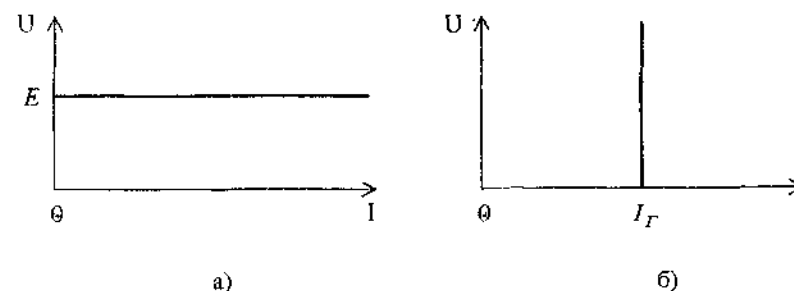


Рисунок 1.3

Частина електричного кола, яка увімкнута до затисків джерела, зветься зовнішнім колом, навантаженням або приймачем електричної енергії. У приймачі енергія електромагнітного поля перетворюється в інші види енергії (теплову, звукову тощо). Приймачі енергії є пасивними елементами.

Пасивний елемент електричного кола - елемент, в якому електрична енергія може бути тільки позитивною чи дорівнювати нулю. Умовне позначення пасивного двополосника наведено на рис. 1.1б.

Електричні кола класифікують за різними ознаками: за кількістю виводів - дво-, чотири- та багатополосні; за типом елементів - активні та пасивні; дисипативні або резистивні (містять резистори R) та реактивні (містять індуктивності L та ємності C).

1.2 Струми і напруги в електричних колах

1 Електричний струм - явище напрямленого руху носіїв зарядів i (чи) явище зміни електромагнітного поля в часі. Позитивним напрямом струму вважається напрям руху позитивно заряджених часток (рис.1.4). Струм проходить від точки з більш високим потенціалом до точки з меншим потенціалом ($\varphi_a > \varphi_b$). Напруга u визначається як різниця потенціалів $\varphi_a - \varphi_b$. Позитивний напрям напруги збігається з позитивним напрямом струму у зовнішньому колі

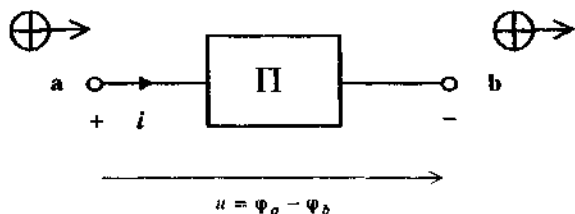


Рисунок 1.4

Сила електричного струму (або струм) визначається кількістю зарядів, які переміщуються крізь поперечний переріз провідника за одиницю часу

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (1.1)$$

Одиниці виміру струму - [Ампер (А), мА, мкА].

2. Електричний потенціал φ деякої точки електричного кола - величина, яка дорівнює відношенню потенційної енергії w , яку має заряд q , що знаходиться в даній точці, до цього заряду

$$\varphi = \frac{dw}{dq}$$

3 Електрична напруга u між двома точками кола - різниця потенціалів φ_a та φ_b цих точок $u = \varphi_a - \varphi_b$.

Одиниці виміру потенціалу та напруги - [Вольт (В), мВ, мкВ].

4 Основні енергетичні величини. Електричні процеси у колі характеризуються також енергетичними величинами. Нехай, наприклад, між точками a і b діє напруга $u(t)$. Тоді при переміщенні від точки a до точки b елементарного заряду dq витрачається енергія $dw = udq$. Підставляючи значення $i(t)$ з (1.1), отримуємо

$$dw = uidt = pdt,$$

$$\text{де } p(t) = \frac{dw(t)}{dt} = u(t)i(t) = ui - \text{миттєва потужність, яка витрачається в еле-}$$

ктричному колі при проходженні в ньому струму i під впливом напруги u .

Таким чином, миттєва потужність - це добуток миттєвих значень напруги та струму, що стосуються одного й того самого входу.

Вхід (пара затискачів) - сукупність таких двох затискачів схеми, що величина струму, який входить в один із них, дорівнює величині струму, що виходить із другого

Одиниці виміру потужності - [Ват (Вт), мВт, мкВт]. Потужність можна розглядати також як швидкість змінювання енергії за одиницю часу.

1.3 Пасивні елементи електричного кола

1 Дисипативний (резистивний) елемент - елемент, що повністю розсіює електричну енергію. Цьому визначенню задовольняє елемент, властивості якого описуються законом Ома. Закон Ома може бути подано у двох формах:

$$u = Ri; \quad i = Gu,$$

де R [Ом, кОм, МОм] та G [Сименс(См), мСм, мкСм] - опір і провідність резистивного елемента, які пов'язані співвідношенням $R = 1/G$.

Ідеальний резистор - ідеальний двополюсник, в якому миттєве значення напруги прямо пропорційне миттєвому значенню струму (рис.1.5а).

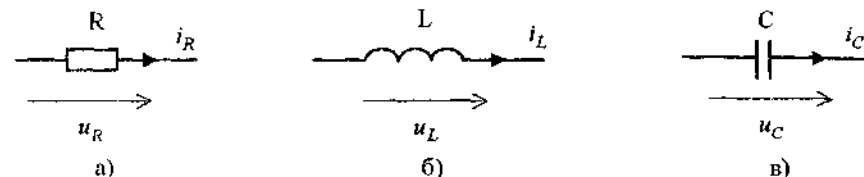


Рисунок 1.5

Існують лінійні ($R = const$) та нелінійні дисипативні елементи (рис 1.6а). Реальний фізичний елемент, властивості якого наближаються до властивостей лінійного дисипативного елемента, зветься резистором.

Потужність, яка розсіюється у резисторі $p = ui = Ri^2 = Gu^2$, зветься миттєвою активною потужністю. Активна потужність може бути тільки позитивною. Вимірюється у [кВт, Вт, мВт, мкВт].

Миттєва енергія $w = \int_{-\infty}^t p dt$ - енергія в даний момент часу, також є позитивною величиною.

2 Індуктивний елемент (індуктивність) - ідеальний реактивний елемент кола, в якому накопичується енергія магнітного поля (рис.1.5б). Властивості індуктивного елемента визначаються можливістю появи у ньому магнітного потоку Φ при проходженні через цей елемент струму.

Подамо індуктивний елемент у вигляді одного витка проводу, який пронизується змінним магнітним потоком $\Phi(t)$. Тоді за законом електромагнітної індукції у цьому витку виникає ЕРС самоіндукції $e_B(t)$, яка врівноважує підведену напругу $u_B(t)$: $-e_B(t) = u_B(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}$.

Для котушки з N витків

$$u(t) = -e_L(t) = \frac{Nd\Phi(t)}{dt} = \frac{d\Psi(t)}{dt}, \quad (1.2)$$

де $\Psi(t) = N\Phi(t) = Li(t)$ - потокозчеплення.

Одиниці виміру магнітного потоку та потокозчеплення - [Вебер (Вб)].

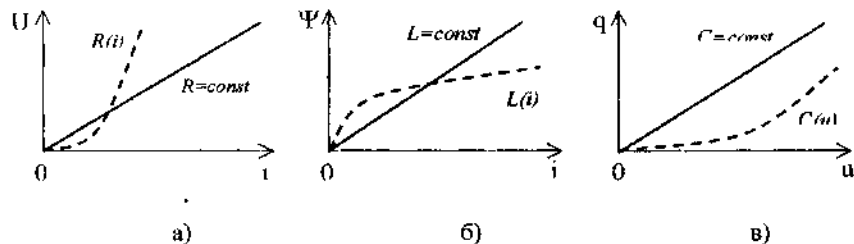


Рисунок 1.6

Коефіцієнт пропорційності між Ψ та $i(t)$ зветься індуктивністю і позначається L . Одиниці виміру індуктивності - [Генрі (Гн), мГн, мкГн]. З формули (1.2) одержуємо вираз для напруги на індуктивному елементі:

$$u_L = L \frac{di}{dt}; \quad i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t) dt.$$

Таким чином, індуктивність - це частка від ділення потокозчеплення котушки на струм, що його зумовлює. Індуктивний елемент характеризується вебер-амперною характеристикою. Це - залежність потокозчеплення елемента електричного кола від струму в ньому (рис.1.6б). Залежність при $L = const$ відповідає лінійному індуктивному елементу; якщо $L = L(i)$ чи $L = L(i)$ маємо нелінійну та параметричну індуктивність відповідно.

Енергія, яка накопичується в лінійному індуктивному елементі, обчислюється за формулою: $w_L = \int_{-\infty}^t u_L i_L dt = \frac{Li^2}{2}$.

Примітка: 1) для постійного струму I напруга $u_L = L \cdot 0 = 0$, тобто індуктивність еквівалентна короткому замиканню; 2) реальний фізичний елемент, близький до індуктивності - котушка індуктивності (рис.1.7а). Згідно з

ДСТУ 2815-94 індуктивна котушка - пристрій, основною властивістю якого є індуктивність (крім індуктивності, є ще опір втрат R_L).

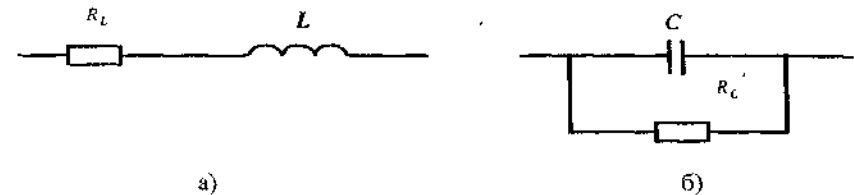


Рисунок 1.7

3. Ємнісний елемент (ємність) - ідеальний реактивний елемент, в якому накопичується енергія електричного поля (рис.1.5в). Властивості ємнісного елемента обумовлені можливістю накопичення у ньому електричного заряду q , пропорційного напрузі u на елементі

$$q = Cu. \quad (1.3)$$

Коефіцієнт пропорційності $C = q/u$ зветься ємністю, вимірюється у [Фарадах (Ф), мкФ, нФ, пФ].

З формул (1.1) та (1.3) знаходимо зв'язок між струмом та напругою для лінійної ємності ($C = const$):

$$i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt}; \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt$$

Таким чином, ємність - це частка від ділення заряду конденсатора на напругу на ньому, ємнісний елемент характеризується кулонвольтовою характеристикою (КВХ). КВХ - залежність заряду конденсатора від прикладеної до нього напруги (рис 1.6в). Значення $C = const$ відповідає лінійній, $C = C(u)$ - нелінійній, $C = C(t)$ - параметричній ємності.

Енергія, яка накопичується в лінійній ємності, обчислюється за формулою: $w_C = \frac{Cu^2}{2}$. На відміну від дисипативного елемента ідеальні реактивні елементи не розсіюють, а накопичують електричну енергію і можуть повертати її у коло. Потужність реактивних елементів $p_C = u_C i_C$; $p_L = u_L i_L$ зветься миттєвою реактивною потужністю, вимірюється у Вольт-амперах реактивних (ВАр).

Примітка: 1) для постійної напруги U струм $i_C = C \cdot 0 = 0$, тобто ємність еквівалентна розриву кола (холостому ходу); 2) реальний фізичний аналог ємності - конденсатор - пристрій, основною властивістю якого є електрична ємність; крім ємності є ще опір витікання R_C (рис.1.7б).

2 ОСНОВНІ ЗАКОНИ ТА МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

2.1 Елементи топологічної структури кола

Реальні електричні кола подаються у вигляді моделей, в яких всі елементи є ідеальними.

Схема - графічна модель електричного кола, яка зображає його за допомогою ідеальних елементів.

Топологія схем - розділ, що вивчає з'єднання між собою ідеальних елементів, які входять до електричного кола. Основні елементи топологічної структури кола - вітка, вузол, контур - розглянемо на прикладі кола (рис. 2.1а).

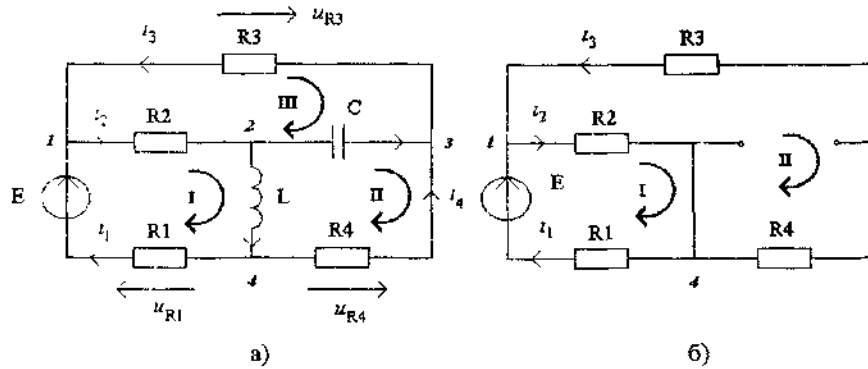


Рисунок 2.1

Вітка - частина схеми кола, по якій проходить один і той самий струм. Вузол - точка схеми кола, в якій збігаються не менше трьох струмів. Якщо кількість віток дорівнює двом, вузол зветься простим (його можна усунути).

Контур - замкнене окреслення, що проходить через вузли та вітки. Кількість вузлів схеми позначається M , кількість віток - N . Для схеми (рис. 2.1а) - $M = 4$, $N = 6$.

Граф схеми - графічне подання електричного кола із зосередженими параметрами, в якому вітки зображені відрізками ліній - дугами (ребрами), а вузли - точками (вершинами). Граф, який може бути зображений на площині без перетину дуг (ребер), зветься планарним графом.

Дерево графа схеми - підграф як сукупність дуг графа, що сполучають усі його вершини, не утворюючи контурів. На рис. 2.2 показано планарний граф схеми (рис. 2.1а) та дерева графа.

Хорди графа (головні вітки) - підграф як сукупність дуг графа, що не входять до вибраного дерева

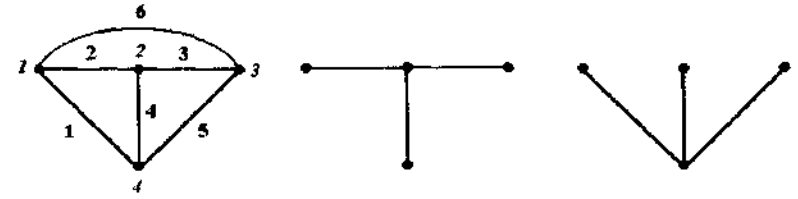


Рисунок 2.2

$$N_{B.D.} = M - 1 - \text{кількість віток дерева графа};$$

$$N_{H.B.} = N_{B.D.} = N - M + 1 - \text{кількість головних віток дерева}.$$

2.2 Задачі аналізу та синтезу електричних кіл.

Основні закони електричних кіл

Аналіз кола - визначення електричного стану кола (напруг, струмів), тобто визначення струмів і напруг у вітках кола за відомими значеннями параметрів кола.

Синтез кола - визначення топології кола та значень параметрів ідеальних елементів, з яких складається коло, що дають змогу отримати задану характеристику.

Розглянемо три основні закони теорії електричних кіл.

1. **Закон Ома:** величина струму в замкненому електричному колі прямо пропорційна електрорушійній силі і обернено пропорційна опору електричного кола: $i = u / R$

2. **Перший закон Кірхгофа:** алгебраїчна сума струмів, які збігаються у вузлі, в будь-який момент часу дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

При цьому струми, які входять у вузол, треба брати з одним знаком (наприклад, з "плюсом"), а ті, що виходять з вузла, - з протилежним ("мінусом"). Тоді перший закон Кірхгофа можна сформулювати так: сума струмів, які збігаються у вузлі, дорівнює сумі струмів, що виходять з вузла. Для кожного з вузлів схеми (рис. 2.1а) одержимо такі рівняння:

$$\begin{aligned} 1. \quad i_1 - i_2 + i_3 &= 0; & 3. \quad i_C + i_4 - i_3 &= 0; \\ 2. \quad i_2 - i_L - i_C &= 0; & 4. \quad i_L - i_1 - i_4 &= 0. \end{aligned}$$

Кількість незалежних рівнянь, які складаються на підставі першого закону Кірхгофа, дорівнює кількості віток дерева: $n - M - 1$. У даному випадку $n = 3$.

3. **Другий закон Кірхгофа:** алгебраїчна сума електрорушійних сил, діючих у замкненому контурі електричної схеми, дорівнює алгебраїчній сумі спадів напруг на всіх ділянках цього контуру в будь-який момент часу:

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{l=1}^m u_l.$$

Спади напруг та ЕРС, напрям яких збігається з напрямом обходу контуру, беруть із знаком "плюс", а всі напруги та ЕРС протилежного напрямку - із знаком "мінус". Значення напруг записуються в одній частині рівняння, а значення ЕРС - в іншій. Для схеми (рис.2.1) маємо такі рівняння

$$1\text{-й контур: } u_{R1} + u_{R2} + u_L = e;$$

$$2\text{-й контур: } -u_L + u_C - u_{R4} = 0;$$

$$3\text{-й контур: } -u_{R2} - u_{R3} - u_C = 0.$$

Кількість незалежних рівнянь (контурів), які складаються на підставі другого закону Кірхгофа, дорівнює кількості головних віток дерева і становить $m = N - M + 1$

Додавки розглянутої системи рівнянь визначають із співвідношень:

$$u = Ri; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

Якщо врахувати взаємну відповідність напрямів ЕРС і спадів напруг (рис.2.3), другий закон Кірхгофа можна сформулювати так: алгебраїчна сума спадів напруг у замкненому контурі дорівнює нулю.

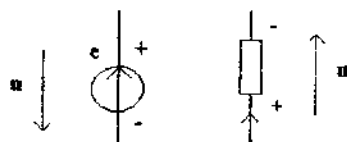


Рисунок 2.3

2.3 Основні методи розрахунку електричних кіл

Метод рівнянь Кірхгофа. Метод базується на розв'язанні рівнянь, які складено для заданого кола за першим і другим законами Кірхгофа. Попередньо слід визначити кількість віток у даному колі, задати передбачувані напрями струмів у всіх вітках і напрями обходів у контурах. Якщо N - кількість віток, M - кількість вузлів схеми, то здобута система рівнянь буде містити N незалежних рівнянь:

$$\begin{cases} M - 1 = n \\ N - M + 1 = m \end{cases}$$

Розв'язок системи знайдемо підстановкою напруг у першу групу рівнянь чи струмів - у другу. В обох випадках одержимо n струмів або m напруг.

Розглянемо приклад для схеми (рис.2.1а) при $E = const$, тобто розрахуємо режим схеми за постійним струмом (рис.2.1б):

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ i_1 R_1 + i_2 R_2 = E \\ -i_2 R_2 - i_3 R_3 - i_3 R_4 = 0 \end{cases}$$

З першого рівняння знайдемо $i_3 = i_2 - i_1$ та підставимо до третього:

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 = E;$$

$$-i_2 R_2 - (i_2 - i_1)(R_3 + R_4) = 0$$

Виразимо $i_1 = (E - i_2 R_2) / R_1$ та знайдемо струм i_2 з останнього рівняння:

$$-i_2 R_2 - i_2 (R_3 + R_4) + \frac{E - i_2 R_2}{R_1} (R_3 + R_4) = 0;$$

$$i_2 = \frac{E(R_3 + R_4)}{R_1[(R_2 + R_3 + R_4 + R_2(R_3 + R_4)/R_4)]}$$

Метод еквівалентних перетворень Перетворення зветься еквівалентними, якщо при заміні однієї частини схеми на іншу, простішу, струми та напруги в частині схеми, яка не була перетворена, залишаються незмінними.

1. **Послідовне з'єднання елементів кола** - з'єднання кількох елементів, за якого в них проходить один і той самий струм (рис.2.4).

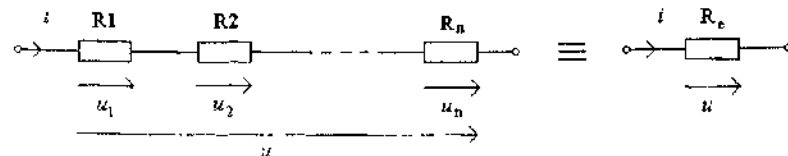


Рисунок 2.4

У відповідності з принципом еквівалентного перетворення при переході від послідовно з'єднаних опорів R_k до еквівалентного опору R_E , зовнішні струми і напруги не змінюються, тобто

$$i = i; \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n = u.$$

З останнього рівняння за законом Ома можна записати

$$iR_1 + iR_2 + \dots + iR_n = iR_E.$$

Скоротивши обидві частини цього рівняння на i , матимемо $R_E = \sum_{k=1}^n R_k$.

Розглянемо послідовне з'єднання індуктивностей. Розмірковуючи аналогічно, матимемо:

$$u = u_1 + u_2;$$

$$L_E \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt}$$

Скоротивши на похідну струму за часом, одержимо: $L_E = \sum_{k=1}^n L_k$

2. Паралельне з'єднання елементів - з'єднання кількох елементів так, щоб усі вони були під однією й тією самою напругою (рис.2.5а).

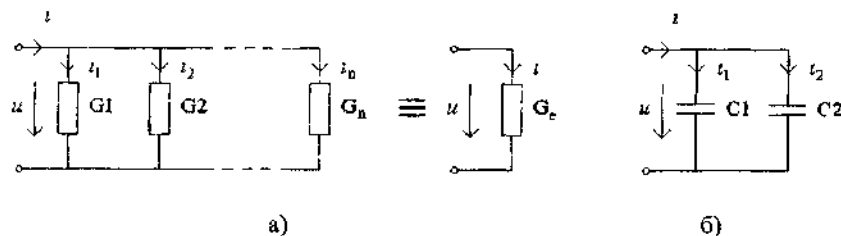


Рисунок 2.5

У відповідності з принципом еквівалентного перетворення при переході від паралельно з'єднаних провідностей G_k до еквівалентної провідності G_E , зовнішні струми та напруги не змінюються, тобто

$$u = u, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_n = i$$

З останнього рівняння за законом Ома можна записати

$$uG_1 + uG_2 + \dots + uG_n = uG_E.$$

Скоротивши обидві частини цього рівняння на u , матимемо

$$G_E = \sum_{k=1}^n G_k. \quad (2.1)$$

Розглянемо послідовне з'єднання ємностей (рис.2.5б). Розмірковуючи аналогічно, матимемо.

$$i = i_1 + i_2,$$

$$C_E \frac{du}{dt} = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt}.$$

Скоротивши на похідну напруги за часом, одержимо. $C_E = \sum_{k=1}^n C_k$.

Розглянемо паралельне з'єднання двох опорів. Згідно з (2.1) $G_E = G_1 + G_2$. Оскільки $R_1 = 1/G_1$, $R_2 = 1/G_2$, $R_E = 1/G_E$,

$$R_E = \frac{1}{G_1 + G_2} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Знайдемо струм у кожній з паралельних віток $I_1(I_2)$, якщо відомий загальний струм I та значення опорів R_1, R_2 . За законом Ома $I_1 = U/R_1$; $U = IR_E$.

$$\text{Тоді } I_1 = \frac{IR_E}{R_1} = I \cdot \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) R_1} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Здобутий вираз має назву формули розподілу струмів: струм в одній з паралельних віток дорівнює загальному струму, помноженому на опір протилежної вітки і поділеному на суму опорів обох віток.

3. Змішане з'єднання - це поєднання послідовної та паралельної ділянок електричного кола. Різних варіантів злучень може бути багато, тому загальної формули для визначення еквівалентного опору (провідності) немає. При розрахунках таких електричних кил розглядають окремі ділянки кола з послідовним та паралельним з'єднанням і застосовують відповідні формули

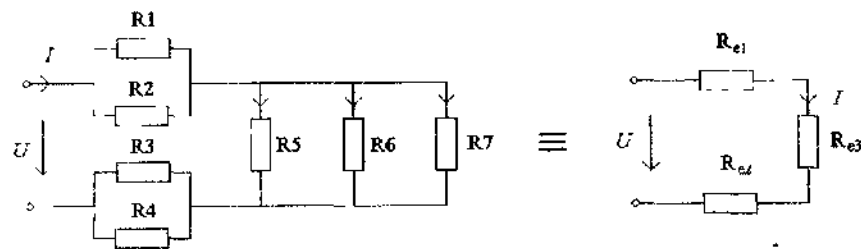


Рисунок 2.6

Наприклад, для схеми (рис.2.6) матимемо

$$R_{e1} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)}; \quad R_{e2} = \frac{R_3 R_4}{(R_3 + R_4)}; \quad R_{e3} = \frac{1}{\frac{1}{G_5} + \frac{1}{G_6} + \frac{1}{G_7}}, \quad R_e = R_{ex} = R_{e1} + R_{e2} + R_{e3}.$$

Цю схему можна подати також як пасивний двополосник з входним опором R_{BX} , до якого увімкнено джерело ЕРС (Е). Тоді $I = U/R_{BX} = E/R_{BX}$.

3 ЕКВІВАЛЕНТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТРИКУТНИКА ОПОРІВ У ЗІРКУ І НАВПАКИ. ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СХЕМ З ДЖЕРЕЛАМИ

Розглянемо схему (рис. 3.1а). У даному колі немає груп опорів, з'єднаних послідовно чи паралельно відносно один одного.

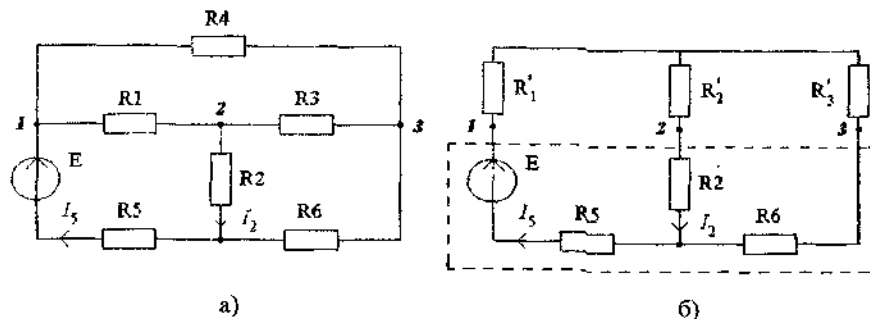


Рисунок 3.1

Якщо коло з чотирма і більше вузлами не може бути відображено схемою із змішаним з'єднанням елементів, то воно зветься складнорозгалуженим колом. Такі кола містять вітки, які входять до складу так званих зірок ($R_1, R_2, R_3; R_3, R_4, R_6$) і трикутників ($R_1, R_3, R_4; R_2, R_3, R_6$) тощо. Такі з'єднання іноді створюють труднощі у розрахунках електричних кіл, і виникає необхідність перетворення трикутника опорів в еквівалентну зірку і навпаки.

3.1 Перетворення трикутника опорів у зірку

Нехай відомі опори R_{12}, R_{23}, R_{31} , які утворюють між вузлами 1-2-3 трикутник опорів. Визначимо опори R_1, R_2, R_3 , з'єднані в еквівалентну зірку між тими ж самими вузлами (рис. 3.2).

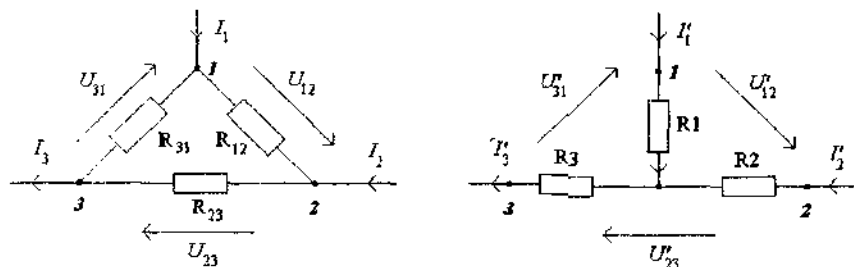


Рисунок 3.2

У відповідності з принципом еквівалентних перетворень зовнішні струми та напруги не повинні змінюватися:

$$I_1 = I'_1; I_2 = I'_2; I_3 = I'_3; U_{31} = U'_{31}; U_{12} = U'_{12}; U_{23} = U'_{23}.$$

Аби отримати формули переходу від трикутника до зірки, скористаємось таким прийомом. Припустимо, що струм $I_3 = I'_3 = 0$. Тоді вхідний опір з боку вузлів 1-2 для трикутника складе

$$R_{BX}^T = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad \text{а для зірки } R_{BX}^3 = R_1 + R_2.$$

Оскільки $U_{12} = U'_{12}$, то $R_{BX}^T = R_{BX}^3$. Аналогічно запишемо вхідні опори з боку інших вузлів

$$I_3 = 0[1-2], \quad \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_1 + R_2; \quad (3.1)$$

$$I_1 = 0[2-3]; \quad \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_2 + R_3; \quad (3.2)$$

$$I_2 = 0[3-1]; \quad \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_3 + R_1. \quad (3.3)$$

Аби визначити значення R_1 , віднімемо з (3.1) рівняння (3.2) і додамо рівняння (3.3):

$$\frac{R_{12}(R_{23} + R_{31}) - R_{23}(R_{31} + R_{12}) + R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_1 + R_2 - R_2 - R_3 + R_3 + R_1;$$

$$\frac{R_{12}R_{23} + R_{12}R_{31} - R_{23}R_{31} - R_{23}R_{12} + R_{31}R_{12} + R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = 2R_1.$$

З останнього рівняння отримуємо $R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$. Проводячи заміну

індексів по колу 1-2-3-1, можна отримати формули для опорів зірки R_2 та R_3 :

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (3.4)$$

Таким чином, опір "променя" зірки, з'єднаного з деяким вузлом, дорівнює добутку опорів сторін трикутника, з'єднаних з тим самим вузлом, поділеному на суму опорів всіх його сторін.

3.2 Перетворення зірки опорів у трикутник

Для знаходження формул відповідності розв'яжемо систему (3.4) відносно опорів R_{12} , R_{23} , R_{31} . Поділимо третє рівняння на перше і друге, а потім підставимо до першого

$$(3) \cdot \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_{23}}{R_{12}}; \quad R_{23} = \frac{R_{12}R_3}{R_1};$$

$$(3) \cdot \frac{R_3}{R_2} = \frac{R_{31}}{R_{12}}; \quad R_{31} = \frac{R_{12}R_3}{R_2}.$$

Підставимо значення R_{23} та R_{31} до першого рівняння, попередньо перетворивши його таким чином: $R_1 R_{12} + R_1 R_{23} + R_1 R_{31} = R_{12} R_{31}$.

Тоді матимемо

$$R_1 R_{12} + \frac{R_1 R_{12} R_3}{R_1} + \frac{R_1 R_{12} R_3}{R_2} = \frac{R_{12} R_{12} R_3}{R_2};$$

$$R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} = R_{12} \frac{R_3}{R_2}; \quad R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}.$$

Формули для R_{23} , R_{31} одержують аналогічно:

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}.$$

Таким чином, опір сторони трикутника, прилеглої до двох вузлів, дорівнює сумі опорів променів зірки, прилеглих до тих самих вузлів, плюс добуток цих опорів, поділений на опір протилежного променя зірки.

Приклад. Виконати розрахунок струмів у схемі (рис.3.1), користуючись перетворенням трикутника опорів до зірки. Замінімо трикутник опорів між вузлами 1-2-3 еквівалентною зіркою (рис.3.1б). Частина схеми, позначена пунктиром, залишається без змін. Згідно з (3.4) матимемо

$$R_1' = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_3 + R_4}; \quad R_2' = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_4}; \quad R_3' = \frac{R_3 R_4}{R_1 + R_3 + R_4}.$$

Таким чином, здобута еквівалентна схема (рис.3.1б) має тільки змішане з'єднання елементів. У такому разі розрахунок струмів спрощується. Наприклад,

$$I_5 = \frac{E}{R_1' + R_5 + R_E}; \quad R_E = \frac{(R_2' + R_2)(R_3' + R_6)}{R_2' + R_2 + R_3' + R_6}.$$

Струм I_2 можна знайти за формулою розкиду струмів

$$I_2 = I_5 \cdot \frac{R_3' + R_6}{R_2' + R_2 + R_3' + R_6} \quad \text{і так далі.}$$

3.3 Еквівалентні перетворення схем з джерелами

1. Закон Ома для ділянки кола з джерелом.

Розглянемо поняття одноконтурної (рис.3.3а) та одновузової схем (рис.3.3б). Ці схеми характерні тим, що мають один контур та один незалежний вузол відповідно.

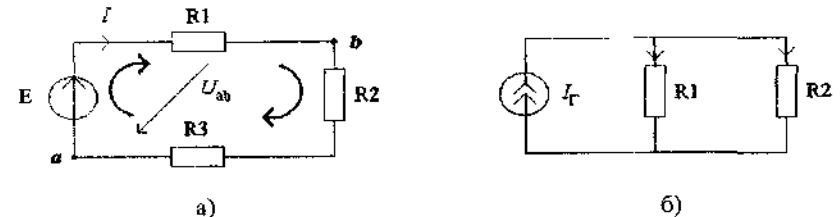


Рисунок 3.3

Знайдемо струм у першій схемі. Згідно з другим законом Кірхгофа маємо одне рівняння: $E = IR_1 + IR_2 + IR_3$, звідки $I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$.

Але для даної схеми струм можна знайти інакше. Позначимо напругу між точками a і b U_{ab} . Тоді для двох умовних контурів матимемо два рівняння:

$$E = IR_1 + U_{ab}; \quad IR_2 + IR_3 - U_{ab} = 0.$$

З першого отримуємо закон Ома для ділянки кола з джерелом напруги:

$$I = \frac{E - U_{ab}}{R_1}.$$

2. Реальні джерела електричної енергії та їх еквівалентні схеми.

Вище (лекція 1) було визначено ідеальне джерело напруги, напруга на застискачах якого не залежить від струму, що в ньому проходить і дорівнює E .

Реальне джерело напруги - активний елемент, який можна подати у вигляді ідеального джерела напруги та послідовно з'єднаного з ним пасивного елемента

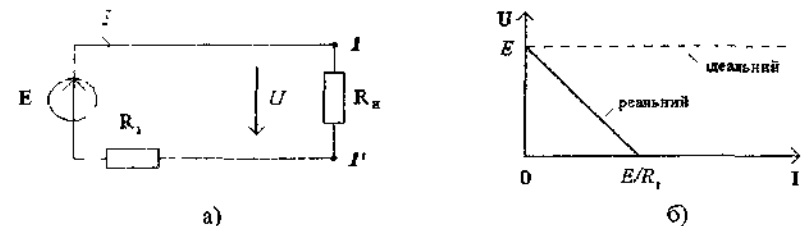


Рисунок 3.4

Знайдемо напругу на записках реального джерела, до якого підключиться опр навантаження (рис 3.4а):

$$U = IR_H = \frac{ER_H}{R_i + R_H} = \frac{E}{1 + R_i/R_H} \quad (3.5)$$

Крім (3.5) за законом Кірхгофа можна записати $E = IR_i + U$, звідки одержуємо вираз для вольт-амперної характеристики реального джерела напруги. $U = E - IR_i$ (рис.3.4б). Характерні точки ВАХ: $I = 0, E = U; U = 0, I = E/R_i$. Штриховою лінією зображено ВАХ ідеального джерела напруги: $E = const$.

З'ясуємо, за яких умов реальне джерело наближається до ідеального. З (3.5) видно, що $U \approx E$, якщо відношення $R_i/R_H \gg 1$. Таким чином, щоб джерело напруги можна було розглядати як ідеальне, необхідно щоб $R_i \ll R_H$.

Реальне джерело струму - активний двополіусник, що складається з ідеального джерела струму та паралельно з'єднаного з ним пасивного елемента. Знайдемо струм в опрі навантаження, який увімкнено до реального джерела струму (рис 3.5а). За формулою розкиду струмів

$$I = \frac{I_G R_i}{R_i + R_H} = \frac{I_G}{1 + R_H/R_i} \quad (3.6)$$

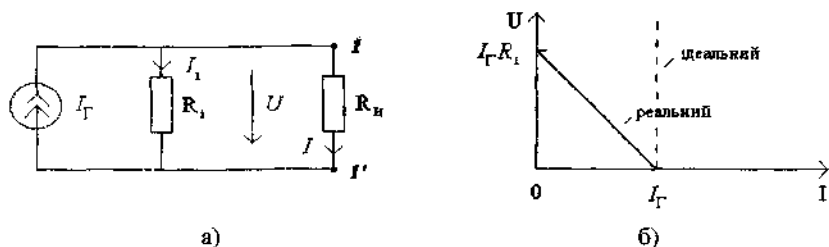


Рисунок 3.5

Згідно з першим законом Кірхгофа можна записати: $I_G = I + I_i = I + U/R_i$. Цей вираз описує ВАХ реального джерела струму (рис.3.5б). Характерні точки ВАХ такі: $R_H = 0, U = 0, I_G = I; R_H = \infty, I = 0, U = I_G R_i$. На тому ж рисунку штриховою лінією показано ВАХ ідеального джерела струму $I_G = const$.

Виходячи з формули (3.6), реальне джерело струму наближається до ідеального за умови $R_i \gg R_H$.

За деяких співвідношень схеми реальних джерел напруги (рис.3.4а) та струму (рис 3.5а) еквівалентні. З'ясуємо, за яких саме? Відповідно до принципу еквівалентних перетворень, напруга у зовнішньому колі (тобто, на опрі навантаження) не має змінюватися при переході від схеми (рис.3.4а) до схеми (рис.3.5а) $U = U'$

$$\text{Для першої схеми: } U = \frac{ER_H}{R_i + R_H}, \text{ для другої: } U' = \frac{I_G R_i R_H}{R_i + R_H}.$$

$$\text{Якщо } U = U', \text{ то } \frac{ER_H}{R_i + R_H} = \frac{I_G R_i R_H}{R_i + R_H}, \text{ звідки}$$

$$E = I_G R_i; R_i = R_i' \quad (3.7)$$

Таким чином, схеми джерел струму та напруги еквівалентні, якщо виконуються умови (3.7). Такий самі висновок можна отримати інакше, схеми джерел є еквівалентними, якщо їх ВАХ збігаються.

Порівнюючи ВАХ джерела напруги $U = E - IR_i$ та ВАХ джерела струму $I_G = I + U/R_i'$ (або $U = I_G R_i' - IR_i'$), маємо: $E = I_G R_i', R_i = R_i'$. Аналізуючи (3.7), робимо висновок: внутрішні опори джерел напруги та струму при еквівалентній заміні мають дорівнювати один одному.

4. Послідовне з'єднання реальних джерел (рис 3.6). На підставі другого закону Кірхгофа та еквівалентного перетворення послідовно з'єднаних резисторів матимемо: $E_e = \sum_{k=1}^n E_k; R_{ie} = \sum_{k=1}^n R_{ik}$

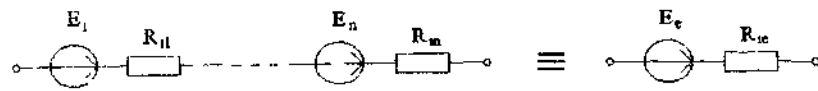


Рисунок 3.6

5. Паралельне з'єднання реальних джерел (рис.3.7). На підставі першого закону Кірхгофа підсумуємо (алгебраїчно) струми джерел і замінимо паралельно з'єднані резистори R_i еквівалентним резистором R_{ie} . Тоді можна записати

$$I_e = \sum_{k=1}^n I_{Gk}; G_{ie} = \sum_{k=1}^n G_{ik}. \text{ Якщо перейти від джерела струму } I_e \text{ до джерела}$$

$$\text{напруги } E_e, \text{ тоді } R_{ie} = 1/G_{ie}; E_e = I_e R_{ie} = \frac{\sum E_k G_{ik}}{\sum G_{ik}}.$$

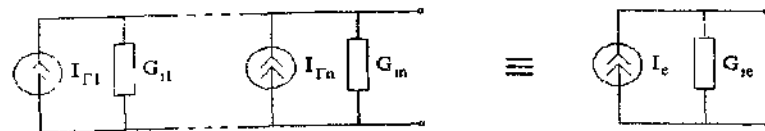


Рисунок 3.7

4 МЕТОДИ КОНТУРНИХ СТРУМІВ І ВУЗЛОВИХ НАПРУГ

Для розгалужених електричних кіл метод рівнянь Кірхгофа приводить до необхідності розв'язання великої кількості рівнянь. Зменшити кількість рівнянь дозволяють потужніші методи аналізу електричних кіл, зокрема, методи контурних струмів (МКС) і вузлових напруг (МВН).

4.1 Метод контурних струмів

Розглянемо цей метод на прикладі схеми (рис.4.1). Пронумеруємо вузли і визначимо кількість незалежних контурів: $M-N+1 = 6-4+1 = 3$. Оберемо для аналізу як незалежні контури I, II, III. Задамо довільно напрям струмів у вітках і напрям обходу контурів.

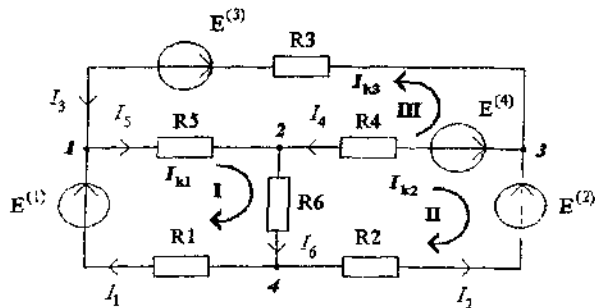


Рисунок 4.1

За другим законом Кірхгофа складемо рівняння для першого контуру

$$R_1 I_1 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = E^{(1)}.$$

Виразимо струми "внутрішніх" віток I_5, I_6 через струми "зовнішніх" віток I_1, I_2, I_3 . За першим законом Кірхгофа для вузлів 1 та 4 запишемо:

$$I_1 + I_3 - I_5 = 0; \quad -I_1 - I_2 + I_6 = 0, \quad \text{звідки } I_5 = I_1 + I_3; \quad I_6 = I_1 + I_2.$$

Тоді рівняння для першого контуру прийме вигляд

$$R_1 I_1 + R_5 (I_1 + I_3) + R_6 (I_1 + I_2) = E.$$

Згрупувавши доданки, матимемо

$$(R_1 + R_5 + R_6) I_1 + R_6 I_2 + R_5 I_3 = E^{(1)}. \quad (4.1)$$

Введемо поняття контурних струмів, контурних ЕРС та опорів. Контурний струм I_k - струм у вітці зв'язку, яка визначає контур.

Іншими словами, це струми зовнішніх віток, які замикаються у відповідних контурах. Для зручності вважатимемо, що напрям контурного струму збігається з напрямом обходу відповідного контуру. Взагалі контурні струми - це умовні величини, але в окремих випадках вони можуть збігатися із струмами віток схеми. Для прикладу, що розглядається, $I_{k1} = I_1, I_{k2} = I_2, I_{k3} = I_3$.

Контурна ЕРС k -го контуру E_k - дорівнює алгебраїчній сумі всіх ЕРС, які входять до цього контуру. Для розглядуваного прикладу

$$E_1 = E^{(1)}; \quad E_2 = E^{(2)} - E^{(4)}; \quad E_3 = E^{(4)} - E^{(3)}.$$

Власний опір k -го контуру R_{kk} - дорівнює сумі всіх опорів, які складають цей контур. $R_{11} = R_1 + R_5 + R_6; R_{22} = R_2 + R_4 + R_6; R_{33} = R_3 + R_4 + R_5$.

Взаємний опір k -го та s -го контурів R_{ks} - дорівнює опорів вітки, яка входить у ці контури, із знаком "плюс", якщо напрями контурних струмів збігаються, та зі знаком "мінус", якщо вони протилежні. Для схеми (рис.4.1) маємо $R_{12} = R_{21} = R_6; R_{13} = R_{31} = R_5; R_{23} = R_{32} = -R_4$.

З урахуванням введених позначень рівняння (4.1) буде таким:

$$R_{11} I_{k1} + R_{12} I_{k2} + R_{13} I_{k3} = E_1.$$

Записавши аналогічно рівняння для другого та третього контурів, одержимо систему рівнянь, з якої можна визначити будь-який контурний струм

$$\begin{cases} R_{11} I_{k1} + R_{12} I_{k2} + R_{13} I_{k3} = E_1 \\ R_{21} I_{k1} + R_{22} I_{k2} + R_{23} I_{k3} = E_2 \\ R_{31} I_{k1} + R_{32} I_{k2} + R_{33} I_{k3} = E_3 \end{cases} \quad (4.2)$$

або у матричній формі

$$[R][I_k] = [E]. \quad (4.3)$$

Таким чином, МКС дозволяє розв'язати задачу аналізу кола з кількістю рівнянь $n = N-M+1$. Знайдемо з (4.2) перший контурний струм

$$I_{k1} = \frac{\begin{vmatrix} E_1 & R_{12} & R_{13} \\ E_2 & R_{22} & R_{23} \\ E_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\Delta_R} (\Delta_{11} E_1 + \Delta_{21} E_2 + \Delta_{31} E_3),$$

де $\Delta_R, \Delta_{11}, \Delta_{21}, \Delta_{31}$ - визначник та алгебраїчні доповнення матриці опорів

Аналогічно можна знайти будь-який (m -й) контурний струм у схемі:

$$I_{km} = \frac{1}{\Delta_R} \sum_{s=1}^n \Delta_{sm} E_s, \quad (4.4)$$

де $n = N-M+1$ - кількість незалежних контурів; $m = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, n$;

Δ_R , Δ_{sm} - визначник та алгебраїчні доповнення матриці опорів;

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} - \text{квадратна симетрична матриця, кількість рядків}$$

та стовпців якої дорівнює n ;

E_s - елемент матриці-стовпця контурних ЕРС.

Струми внутрішніх віток визначаються як лінійна комбінація контурних струмів. Для схеми (рис.4.1)

$$I_5 = I_{k1} + I_{k2}; \quad I_4 = I_{k2} - I_{k3}; \quad I_6 = I_{k1} + I_{k2}.$$

4.2 Метод вузлових потенціалів

Розподіл струмів та напруг в електричному колі не зміниться, якщо один з вузлів (будь-який) заземлити, тобто зробити його потенціал нульовим.

Базисним зветься вузол, потенціал якого дорівнює нулю. Напруги інших вузлів схеми, які відраховуються відносно базисного вузла, зветься *вузловими* напругами. Прийнято вузлові напруги спрямовувати до точки заземлення (рис.4.2а). Струм у вітці, яка з'єднує вузол з базисним вузлом, визначається за законом Ома: $I_1 = U_1/R_1 = U_1 G_1$; $I_2 = U_2/R_2 = U_2 G_2$. Напруга U_{12} між вузлами, які не є базисними, визначається за другим законом Кірхгофа (рис.4.2б):

$$U_{12} + U_2 - U_1 = 0; \quad U_{12} = U_1 - U_2 = I_{12}/G_{12}.$$

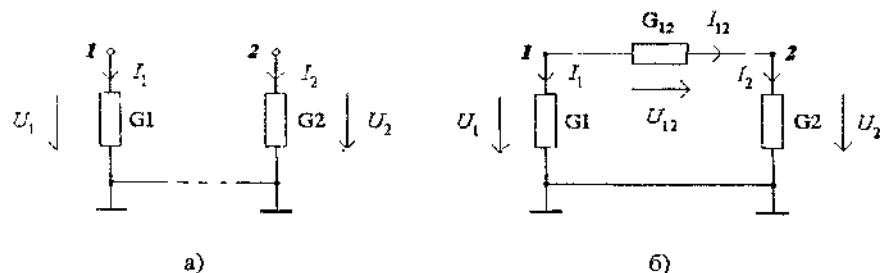


Рисунок 4.2

Якщо аналізуючи електричне коло за методом МКС бажано попередньо всі джерела струму замінити джерелами ЕРС, то за методом МВН необхідно провести еквівалентну заміну джерел ЕРС джерелами струму. Проведемо таку

заміну для електричного кола (рис.4.1). Позначимо струми джерел $I^{(k)}$, а струми у вітках - I_k (рис.4.3).

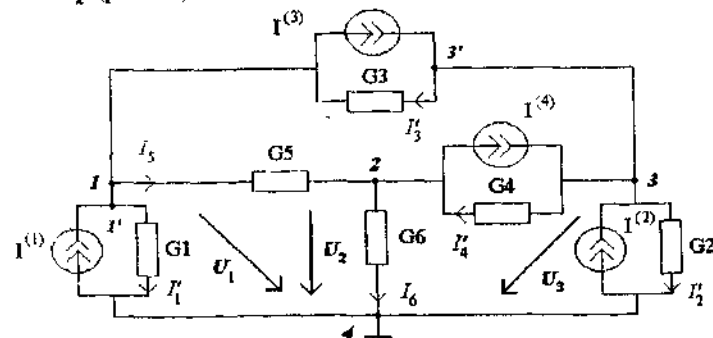


Рисунок 4.3

Оберемо як базисний вузол 4 та запишемо за першим законом Кірхгофа рівняння для вузла 1:

$$I^{(1)} - I'_1 - I_5 + I'_3 - I^{(3)} = 0, \quad (4.5)$$

або
$$I'_1 + I_5 - I'_3 = I^{(1)} - I^{(3)}.$$

Скористаємось законом Ома та виразимо струми через вузлові напруги:

$$I'_1 = U_1 G_1; \quad I_5 = G_5 U_{12} = G_5 (U_1 - U_2); \quad I'_3 = G_3 U_{31} = G_3 (U_3 - U_1) = -G_3 (U_1 - U_3).$$

Підставивши ці значення до останнього рівняння, маємо

$$\begin{aligned} G_1 U_1 + G_5 (U_1 - U_2) + G_3 (U_1 - U_3) &= I^{(1)} - I^{(3)}, \\ G_1 U_1 + G_5 U_1 - G_5 U_2 + G_3 U_1 - G_3 U_3 &= I^{(1)} - I^{(3)}. \end{aligned}$$

Згрупувавши доданки, запишемо

$$(G_1 + G_3 + G_5) U_1 - G_5 U_2 - G_3 U_3 = I^{(1)} - I^{(3)}. \quad (4.6)$$

Позначимо G_{kk} - власна провідність k -го вузла, яка дорівнює сумі провідностей віток, прилеглих до k -го вузла ($G_{11} = G_1 + G_3 + G_5$, $G_{22} = G_4 + G_5 + G_6$, $G_{33} = G_2 + G_3 + G_4$);

G_{ks} - взаємна провідність k -го та s -го вузлів, яка дорівнює сумі провідностей віток, що з'єднують ці вузли, із знаком "мінус" ($G_{12} = G_{21} = -G_5$, $G_{13} = G_{31} = -G_3$; $G_{23} = G_{32} = -G_4$);

$I_{Гк}$ - вузловий струм (будь-якого) k -го вузла, який дорівнює алгебраїчний сумі струмів незалежних джерел, які збігаються у k -му вузлі ($I_{Г1} = I^{(1)} - I^{(3)}$, $I_{Г2} = -I^{(4)}$, $I_{Г3} = I^{(2)} + I^{(3)} + I^{(4)}$).

Враховуючи ці позначення, запишемо рівняння (4.6) у вигляді:

$$G_{11}U_1 + G_{12}U_2 + G_{13}U_3 = I_{Г1}.$$

Записавши аналогічні рівняння для вузлів 2 та 3, отримуємо систему:

$$\begin{cases} G_{11}U_1 + G_{12}U_2 + G_{13}U_3 = I_{Г1} \\ G_{21}U_1 + G_{22}U_2 + G_{23}U_3 = I_{Г2} \\ G_{31}U_1 + G_{32}U_2 + G_{33}U_3 = I_{Г3} \end{cases} \quad (4.7)$$

або в матричній формі

$$[G][U] = [I_{Г}],$$

$$\text{де } [G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}, [I_{Г}] = \begin{bmatrix} I_{Г1} \\ I_{Г2} \\ I_{Г3} \end{bmatrix} - \text{матриці провідностей та вузлових струмів, відповідно}$$

Визначимо з системи (4.7) вузлову напругу U_1 :

$$U_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_{Г1} & G_{12} & G_{13} \\ I_{Г2} & G_{22} & G_{23} \\ I_{Г3} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\Delta_G} (\Delta_{11}I_{Г1} + \Delta_{21}I_{Г2} + \Delta_{31}I_{Г3}).$$

Аналогічно отримуємо будь-яку вузлову напругу за формулою

$$U_m = \frac{1}{\Delta_G} \sum_{s=1}^n \Delta_{sm} I_{Гs}, \quad (4.8)$$

де Δ_G, Δ_{sm} - визначник та алгебраїчні доповнення матриці провідностей $[G]$; $n=M-1$ - кількість незалежних вузлів; $m = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, n$.

Напруги між незалежними вузлами визначаються як лінійна комбінація вузлових напруг. Для схеми (рис.4.3)

$$U_{12} = U_1 - U_2, U_{23} = U_2 - U_3, U_{13} = U_1 - U_3.$$

Струми віток визначаються за законом Ома: $I_1' = U_1 G_1$, $I_2' = U_3 G_2$; $I_6 = U_2 G_6$, $I_5 = U_{12} G_5$; $I_4' = U_{32} G_4 = -U_{23} G_4$; $I_3' = U_{31} G_3 = -U_{13} G_3$.

Струми віток вихідної схеми (рис.4.1) $I_1 + I_4$, визначаються за першим законом Кірхгофа з урахуванням обраних напрямів. Наприклад, для вузла 1'

(рис.4.3) маємо: $I^{(1)} - I_1 - I_1' = 0$, звідки $I_1 = I^{(1)} - I_1' = I^{(1)} - U_1 G_1$; для вузла 3': $I^{(3)} - I_3' + I_3 = 0$, звідки $I_3 = I_3' - I^{(3)} = -G_3 U_{13} - I^{(3)}$.

Приклад. Для схеми (рис.4.4) за методом МКС знайти струм I_1 , якщо $R_1 = R_4 = R_5 = 1$ кОм, $R_2 = R_3 = 2$ кОм; $E^{(1)} = 1$ В; $E^{(2)} = 4$ В, $E^{(3)} = 2$ В.

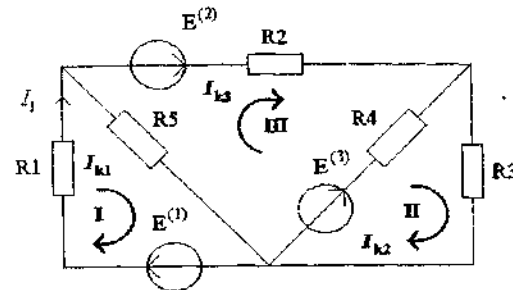


Рисунок 4.4

Позначивши контури та обравши їх обхід за годинниковою стрілкою, запишемо матриці $[R]$ та $[E]$:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 + R_5 & -R_5 & 0 \\ -R_5 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E^{(1)} \\ E^{(2)} - E^{(3)} \\ E^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

За формулою (4.4) визначасмо перший контурний струм, який буде одночасно й струмом у вітці I_1 .

$$I_{k1} = \frac{1}{\Delta_R} (\Delta_{11}E_1 + \Delta_{21}E_2 + \Delta_{31}E_3) = \frac{1}{19} (1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2) = 1 \text{ мА}.$$

5 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

5.1 Вхідні та передатні опори і провідності

У попередній лекції було отримано формули для розрахунку контурних струмів та вузлових напруг:

$$I_{km} = \frac{1}{\Delta_R} \sum_{s=1}^n \Delta_{sm} E_s, \quad n = N - M + 1; \quad U_m = -\frac{1}{\Delta_G} \sum_{s=1}^n \Delta_{sm} I_s, \quad n = M - 1.$$

Нехай до якоїсь вітки контуру електричного кола увімкнено незалежне джерело ЕРС E_1 (рис.5.1а), причому ця вітка не є спільною, а належить тільки контуру m (незалежне - це таке джерело, яке не залежить від усіх інших струмів і напруг електричного кола).

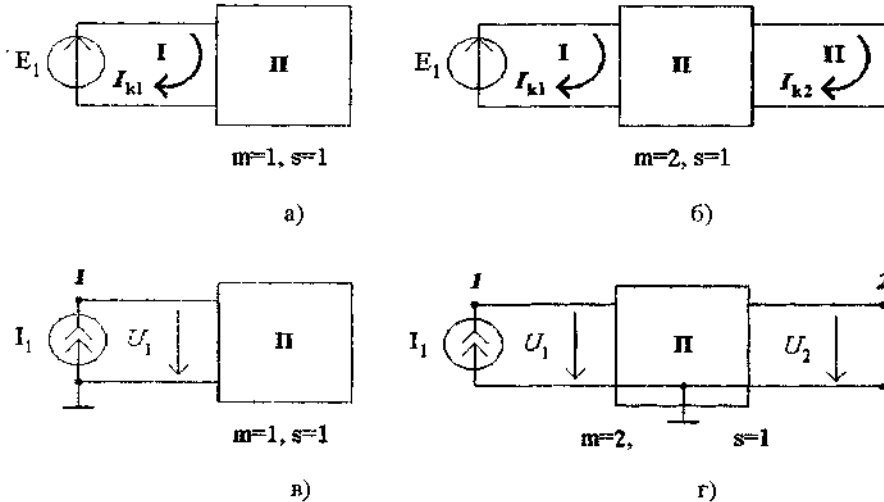


Рисунок 5.1

Якщо інша частина електричного кола не має незалежних джерел електричної енергії, то за формулою (4.4) надана ЕРС E_1 викличе в даному контурі ($m=1, s=1$) струм

$$I_{k1} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} E_1 = g_{ax} E_1 = \frac{E_1}{R_{ax}},$$

де $g_{ax} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_R}$ - вхідна провідність, $r_{ax} = r_{11} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{11}}$ - вхідний опір

Таким чином, вхідна провідність m -го контуру

$$g_{mm} = \frac{\Delta_{mm}}{\Delta_R} \quad (5.1)$$

це відношення m -го контурного струму до ЕРС, яка діє в цьому контурі при відсутності джерел в інших контурах. Вона показує, який саме струм у m -му контурі викличе єдина ЕРС, що дорівнює 1 В, яку увімкнено до цього контуру.

У разі $m=2, s=1$ (рис.5.1б) надана ЕРС E_1 викличе у контурі 2 струм

$$I_{k2} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_R} = g_{21} E_1,$$

де g_{21} - передатна провідність 1-го та 2-го контурів.

Таким чином, передатна провідність m -го та s -го контурів

$$g_{ms} = \frac{\Delta_{sm}}{\Delta_R} \quad (5.2)$$

показує, який саме струм викличе в m -му контурі єдина ЕРС, що дорівнює 1 В, яку увімкнено до s -го контуру (індекс m вказує струм, який визначається). Передатна провідність також може бути знайдена за формулою

$$g_{ms} = \frac{I_{km}}{E_s}; \quad g_{21} = \frac{I_{k2}}{E_1}.$$

Аналогічні міркування достовірні також відносно вузлів m та s , якщо припустити, що до вузла m увімкнено незалежне джерело струму I_1 , а інша частина схеми не містить незалежних джерел (рис.5.1в,г). Відповідно до (4.8), вузловий струм I_1 обумовить появу вузлових напруг для вузлів m та s :

$$U_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_G} I_1 = r_{11} I_1, \quad U_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_G} I_1 = r_{21} I_1$$

де $r_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_G}$ - вхідний опір першого вузла ($m=1, s=1$);

$r_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_G}$ - передатний опір першого та другого вузлів ($m=2, s=1$).

Таким чином, вхідний опір m -го вузла

$$r_{mm} = \frac{\Delta_{mm}}{\Delta_G} \quad (5.3)$$

показує, яку саме вузлову напругу викличе єдине джерело струму величиною 1 А, яке увімкнено між m -м та базисним вузлами.

Передатний опір m -го та s -го вузлів

$$r_{ms} = \frac{\Delta_{sm}}{\Delta_G} \quad (5.4)$$

показує, яку саме вузлову напругу викличе єдине джерело струму величиною 1 А, яке увімкнено до s -го вузла.

Зауважимо, що вхідним опором може також називатися величина, обернена до виразу (5.1), а вхідною провідністю - величина, обернена до (5.3). Оче-

$$I_1' = -\frac{E}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}}; \quad I_3' = I_1' \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4}.$$

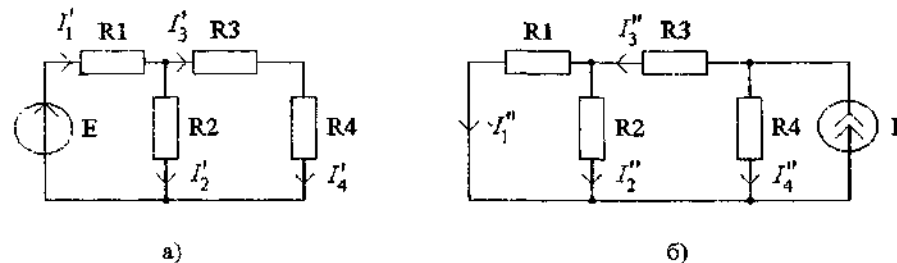


Рисунок 5.4

2. Припустимо, що $E = 0$, $I \neq 0$. Виключаємо джерело ЕРС (закорочуємо) та знаходимо частковий струм I_3^* (рис.5.4б): $I_3^* = \frac{IR_4}{R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$.

3. Знаходимо повний струм $I_3 = I_3' - I_3^*$. Знак "мінус" струму I_3^* пояснюється тим, що його напрям не збігається з позитивним напрямом струму I_3 у поданій схемі.

5.4 Теорема компенсації

Теорема формулюється таким чином: струми в електричному колі не зміняться, якщо будь-який опір замінити джерелом ЕРС, величина якої дорівнює спаду напруги на цьому ж опорі, а напрям є протилежним напрямку струму в опорі.

Слушність теореми компенсації впливає з того, що будь-який з доданків (спадів напруг), які складають рівняння за другим законом Кірхгофа, може бути перенесений до іншого боку рівняння з протилежним знаком, тобто розглядатися як додаткова ЕРС, напрямлена назустріч струму. Наприклад, для схеми (рис.5.3а) можна записати таке рівняння:

$$I_3 R_3 + I_4 R_4 - I_2 R_2 = 0, \quad \text{або} \quad I_4 R_4 - I_2 R_2 = -I_3 R_3.$$

Відповідно до останнього рівняння, схема виглядатиме інакше (рис.5.3б), тобто додаткове джерело E_3 можна розглядати як залежне джерело напруги. Залежне джерело напруги - джерело ЕРС, в якому величина ЕРС залежить від струму чи напруги іншої ділянки кола.

6 ТЕОРЕМА ПРО ЕКВІВАЛЕНТНЕ ДЖЕРЕЛО

Теорема про еквівалентне джерело (генератор) застосовується тоді, коли треба визначити струм в одній вітці складного кола. За допомогою цієї теореми складне електричне коло з довільною кількістю джерел електричної енергії приводиться до схеми з єдиним джерелом, завдяки чому розрахунок кола спрощується. Існує два варіанти теореми

6.1 Теорема про еквівалентне джерело напруги (теорема Тевенена)

Будь-який лінійний активний двополюсник можна замінити еквівалентним джерелом напруги з ЕРС, яка дорівнює напрузі холостого ходу на зажимах двополюсника, і внутрішнім опором, який дорівнює вхідному опору пасивного двополюсника.

Схематично активний і пасивний двополюсники показано на рис.6.1а. Робота у режимі холостого ходу (кола або генератора) означає роботу у навантаженому стані, коли вихідний струм дорівнює нулю.

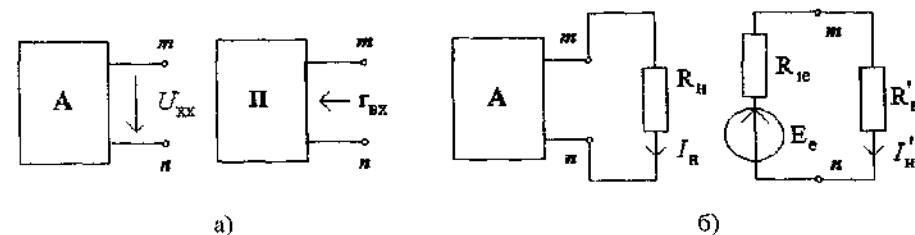


Рисунок 6.1

Отже, згідно з теоремою, є доцільною еквівалентна заміна (рис.6.1б), причому $E_e = U_{xx}$, $R_{ie} = r_{вх}$. За принципом еквівалентності зовнішні струми (напруги) не змінюються: струм у навантаженні однаковий для обох схем $I_H' = I_H$. Для другої схеми

$$I_H' = \frac{E_e}{R_{ie} + R_H}. \quad (6.1)$$

Розглянута теорема доводиться у такий спосіб: до вітки mn вводяться дві рівні та протилежно напрямлені ЕРС E_e , які дорівнюють напрузі холостого ходу (рис.6.2). Застосування методу накладання згідно з рис.6.2 приводить до висновку: $I_H = I_H^{(1)} + I_H^{(2)}$. Для першої схеми за другим законом Кірхгофа складемо рівняння $U_{xx} + I_H^{(1)} R_H - U_{xx} = 0$, з якого матимемо значення першого часткового струму навантаження $I_H^{(1)} R_H = 0$; $I_H^{(1)} = 0$.

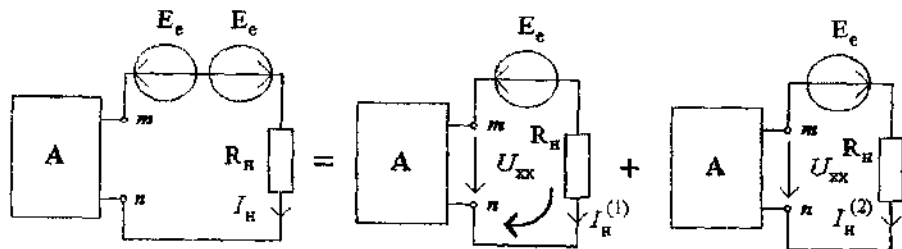


Рисунок 6.2

Для другої схеми за законом Ома з урахуванням заміни пасивного двополюсника входним опором r_{ex} , матимемо $I_H^{(2)} = \frac{U_{xx}}{r_{ex} + R_H}$. Таким чином,

$$I_H = I_H^{(2)} = \frac{U_{xx}}{r_{ex} + R_H}. \quad (6.2)$$

Порівнюючи (6.1) та (6.2), отримуємо значення параметрів еквівалентного генератора напруги: $E_e = U_{xx}$; $R_{ie} = r_{ex}$.

Приклад 1. За теоремою Тевенена визначити струм в опорі R_3 (рис.6.3а).

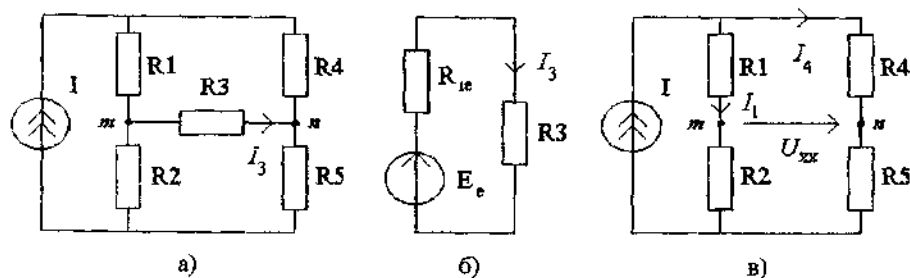


Рисунок 6.3

Розв'язання задачі складається з таких етапів:

1) замінюємо активний двополюсник відносно вузлів m, n еквівалентним джерелом напруги E_e (рис.6.3б);

2) визначаємо значення ЕРС $E_e = U_{xx}$ для схеми (рис.6.3в):

$$R_4 I_4 - U_{xx} - I_1 R_1 = 0; \quad U_{xx} = R_4 I_4 - I_1 R_1;$$

$$I_1 = I \frac{R_4 + R_5}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5}; \quad I_4 = I - I_1;$$

3) розраховуємо входний опір пасивного двополюсника з боку вузлів m, n (нагадаємо, що для переходу від активного до пасивного двополюсника необхідно ідеальні джерела ЕРС розімкнути, а ідеальні джерела струму замкнути):

$$r_{ex} = \frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5}; \quad R_{ie} = r_{ex};$$

4) розраховуємо шуканий струм I_3 за законом Ома за схемою (рис.6.3б):

$$I_3 = \frac{E_e}{R_{ie} + R_3}.$$

6.2 Теорема про еквівалентне джерело струму (теорема Нортена)

Будь-який лінійний активний двополюсник можна замінити еквівалентним джерелом струму, задавальний струм якого дорівнює струму короткого замикання між затискачами двополюсника, та внутрішнім опором, який дорівнює входному опору пасивного двополюсника.

Режим короткого замикання (кола або генератора) означає роботу у ненавантаженому стані, коли вихідна напруга дорівнює нулю, а вихідні затискачі замкнені.

Таким чином, за теоремою Нортена повинні бути еквівалентними дві схеми (рис.6.4а). За умови $I_e = I_k$, $R_{ie} = r_{ex}$ відповідно до принципу еквівалентності повинна виконуватися рівність $I'_H = I_H$.

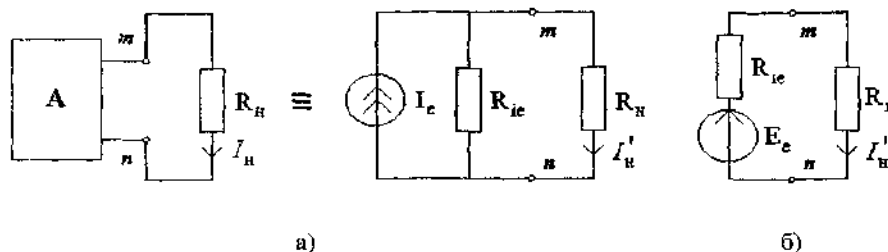


Рисунок 6.4

Доведення. Скористаємось результатами теореми Тевенена. Для цього замінимо джерело струму джерелом напруги (рис.6.4б). Нехай $E_e = U_{xx}$; $R_{ie} = r_{ex}$. Тоді згідно з (3.7)

$$I_e = \frac{E_e}{R_{ie}} = \frac{U_{xx}}{r_{ex}}. \quad (6.3)$$

Ця формула визначає не що інше, як струм, який проходить між виводами m та n , що замкнуті накоротко (струм короткого замикання):

$$I_k = \frac{U_{xx}}{R_{ax}}$$

Шуканий струм I'_H у колі дорівнюватиме: $I'_H = I_k \frac{R_{ie}}{R_{ie} + R_H}$. Із доведення теореми виходить, що величину вхідного опору r_{ax} можна визначити, маючи експериментальні значення U_{xx} , I_k : $r_{ax} = U_{xx} / I_k$.

Приклад 2. Для схеми (рис.6.3а) визначити струм I_3 , користуючись теоремою Нортон.

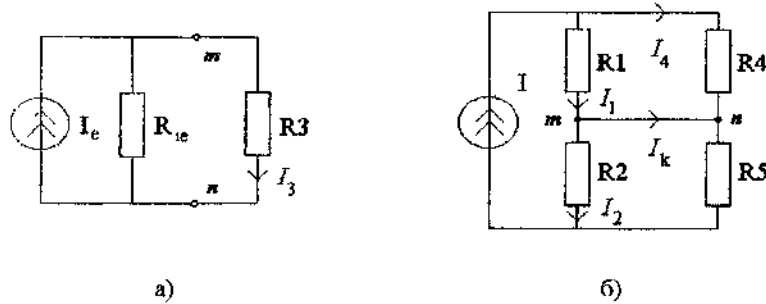


Рисунок 6.5

1. За схемою (рис.6.5б) струм короткого замикання дорівнюватиме:

$$I_1 - I_2 - I_k = 0; \quad I_k = I_1 - I_2; \quad I_e = I_k;$$

$$I_1 = I \frac{R_4}{R_1 + R_4}; \quad I_2 = I \frac{R_5}{R_2 + R_5}$$

2. Вхідний опір пасивного двополюсника з боку вузлів m становитиме:

$$r_{ax} = \frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5}; \quad R_{ie} = r_{ax};$$

3. За схемою (рис.6.5а) знаходимо $I_3 = I_e \frac{R_{ie}}{R_{ie} + R_3}$.

6.3 Енергетичні співвідношення у колі постійного струму

1. **Баланс потужностей.** Розглянемо схему, яка складається з послідовно з'єднаних реального джерела напруги E та опору навантаження. Згідно з другим законом Кірхгофа $E = IR_1 + IR_H$. Помножимо це рівняння на I .

$$EI = I^2 R_1 + I^2 R_H \quad (6.4)$$

Згідно з визначенням миттєвої потужності (лекція 1), запишемо

$$p = ui = UI = I^2 R = U^2 G.$$

Для постійного струму вираз (6.4) можна записати:

$$P = P_1 + P_H, \quad (6.5)$$

де $P = EI$ - потужність енергії, яка виробляється джерелом;

$P_1 = I^2 R_1$ - потужність енергії, яка споживається в резисторі R_1 ;

$P_H = I^2 R_H$ - потужність енергії, яка споживається в опорі навантаження R_H .

Таким чином, вираз (6.5) являє собою рівняння балансу потужностей: алгебраїчна сума потужностей, що віддають всі джерела енергії у колі, дорівнює арифметичній сумі потужностей, витрачених на опорах схеми.

Більш розгорнута форма запису балансу потужностей може бути подана у такому вигляді:

$$\sum_{m=1}^n E_m I_m + \sum_{l=1}^{n_2} I_l U_l = \sum_{k=1}^{n_3} I_k^2 R_k, \quad (6.6)$$

де n_1 , n_2 , n_3 - кількість джерел ЕРС, джерел струму і резисторів.

Знак потужності джерела залежить від напрямку струму через джерело ЕРС або напруги на затискачах джерела струму. Правило визначення знаку проілюстроване на рис.6.6.

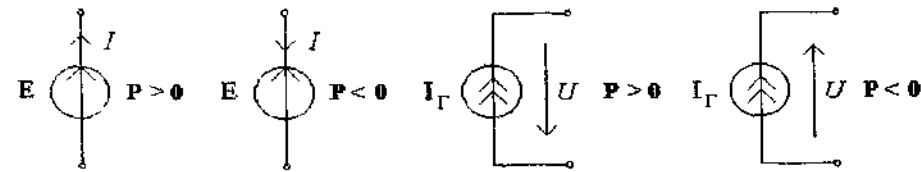


Рисунок 6.6

2. **Умова узгодження джерела з навантаженням за активною потужністю.** Умова узгодження повинна забезпечити максимальну потужність $P_{H \max}$, яка споживається у навантаженні.

Розглянемо довільний лінійний двополюсник. Замінімо його за теоремою Тевенена еквівалентним джерелом напруги. З'ясуємо, при якому значенні опору навантаження R_H потужність P_H , що витрачається у ньому, буде максималь-

$$\text{ною } P_H = I^2 R_H = \left(\frac{E_e}{r_{ax} + R_H} \right)^2 R_H.$$

Аби знайти екстремум, розв'яжемо рівняння $\frac{dP_H}{dR_H} = 0$:

$$E_e^2 \frac{(r_{ax} + R_H)^2 - 2R_H(R_H + r_{ax})}{(r_{ax} + R_H)^2} = 0.$$

Оскільки знаменник є додатною величиною і не може дорівнювати нулю, прирівняємо нулю чисельник. Тоді $(r_{ax} + R_n)(r_{ax} + R_n - 2R_n) = 0$;

$$r_{ax} = R_n. \quad (6.7)$$

Формула (6.7) відповідає умові узгодження. При цьому максимальна потужність становитиме

$$P_{H \max} = \left(\frac{E_e}{2r_{ax}} \right)^2 r_{ax} = \frac{E_e^2}{4r_{ax}} = \frac{E_e^2}{4R_n}. \quad (6.8)$$

Стосовно активного двополюсника формула (6.8) прийме вигляд

$$P_{H \max} = \frac{U_{sc}^2}{4r_{ax}}. \quad (6.9)$$

При цьому потужність, яка генерується джерелом, буде такою.

$$P = E_e I_c = E_e \frac{E_e}{2R_n} = \frac{E_e^2}{2R_n},$$

де $I_c = E_e / 2R_n$ - струм у режимі узгодження.

Розглянемо поняття коефіцієнта корисної дії (ККД). ККД - це відношення корисної потужності до повної потужності:

$$\eta = \frac{P_H}{P} = \frac{P - P_t}{P} = 1 - \frac{I^2 R_n}{E_e I} = 1 - I \frac{R_n}{E_e}.$$

Якщо $R_n = R_n$, значення ККД буде таким: $\eta = 1 - I_c \frac{R_n}{E_e} = 1 - 0,5 = 0,5$.

За умови $E_e = const$, залежності ККД і потужностей P , P_H від струму у навантаженні зображено на рис.6.7а, а залежність $P_H = f(R_n)$ на рис.6.7б.

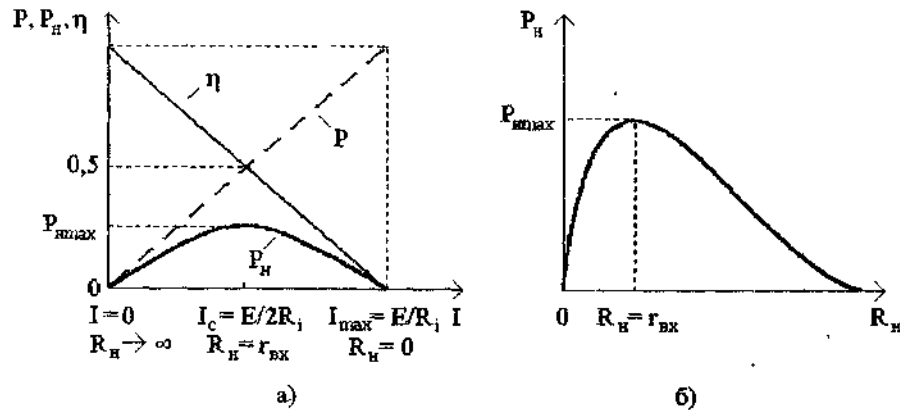


Рисунок 6.7

7 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПРИ СИНУСОЇДНІЙ ДІЇ

7.1 Змінний струм та його основні характеристики

На рис 7.1 зображено часові діаграми миттєвих значень струму, значення якого змінюються за часом. Друга та третя діаграми відповідають періодичному струму.

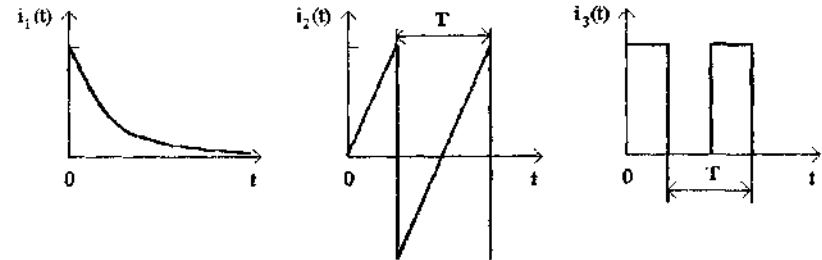


Рисунок 7.1

Періодичний струм (напруга, ЕРС) - електричний струм, миттєві значення якого повторюються через однакові інтервали часу.

Період T - найменший інтервал часу, через який миттєві значення періодичного електричного струму (ЕРС, напруги) повторюється.

Частота електричного струму f - величина, обернена до періоду електричного струму. Одиниці виміру - $1/s$ (Гц), кГц, МГц.

Змінний струм (напруга) - періодичний струм (напруга), середнє значення якого за період дорівнює нулю:

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt.$$

Пульсний струм - періодичний струм, середнє значення якого за період не дорівнює нулю. На рис.7.1 на другій діаграмі показано змінний струм, на третій - пульсний струм.

Діюче (ефективне) значення періодичного струму - середньо-квадратичне значення струму за період. Аби з'ясувати це поняття, розглянемо вплив періодичного струму i та постійного струму I на один і той самий постійний резистор R за час $t = T$.

Енергія, що виділяється постійним струмом на опорі R за час періоду змінного струму T , визначається за формулою:

$$W = PT = I^2 RT.$$

При змінному струмі за період T витрачається енергія $w = \int_0^T i^2 R dt$. Діюче значення струму знайдемо за умови рівності $W = w$:

$$R \int_0^T i^2 dt = RI^2 T; \quad \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = I^2;$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}, \quad (7.1)$$

де i - миттєве значення періодичного струму, I - діюче значення.

Отже, діючим значенням періодичного струму називається таке значення постійного струму, яке за період змінного струму при даному опорі виділяє стільки ж тепла, скільки виділяє періодичний струм за той самий час.

7.2 Синусоїдний струм та його основні параметри

Синусоїдний струм (напруга, ЕРС) - це електричний струм, який є синусоїдною функцією часу. У літературі також застосовується назва гармонічний струм - який змінюється за синусоїдним чи косинусоїдним законами. На рис.7.2 показано часову діаграму синусоїдного струму, миттєве значення якого визначається за формулою:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

де I_m - амплітуда; $f = \frac{1}{T}$ - частота, Гц; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ - кутова частота, Рад/с; ψ_i - початкова фаза, Рад.

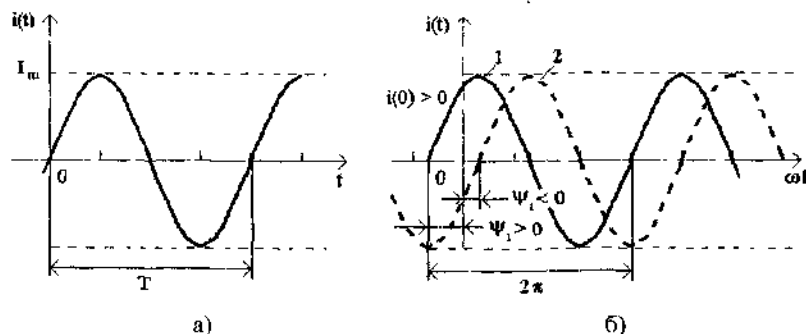


Рисунок 7.2

Початкова фаза синусоїдного електричного струму - значення фази синусоїдного струму в початковий момент часу ($t=0$). Інакше, початкова фаза

відповідає абсцисі найближчої точки переходу з від'ємної півхвилі до додатної. На рис.7.2а початкова фаза коливання дорівнює нулю, на рис.7.2б перша крива має початкову фазу $\psi_i > 0$ ($i(0) > 0$), а друга крива - $\psi_i < 0$ ($i(0) < 0$).

Якщо розглядати змінний струм, який змінюється за косинусоїдним законом $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$, то як початкова фаза використовується абсциса найближчого додатного максимуму (рис.7.3а). Рис.7.3б ілюструє співвідношення початкових фаз при синусоїдній та косинусоїдній формах запису:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t + \psi_i).$$

Таким чином, при переході від синусоїдної до косинусоїдної форми запису початкова фаза зменшується, при зворотньому переході - збільшується.

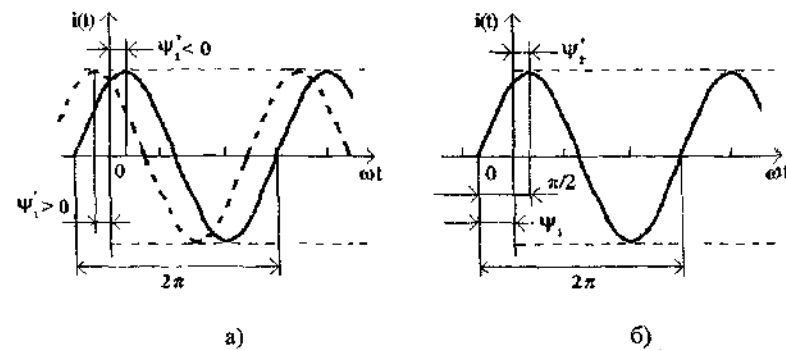


Рисунок 7.3

Нехай для деякої ділянки електричного кола струм та напруга становлять: $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$; $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$, тоді величина $\varphi = \psi_u - \psi_i$ зветься зсувом фаз між напругою та струмом. Це поняття встановлюється для характеристики двох коливань однакової частоти.

Отже, зсув фаз між напругою та струмом - це алгебраїчна величина, що дорівнює різниці фаз напруги та струму.

Якщо $\varphi = 0$, коливання (тобто струм і напруга) синфазні;

$\varphi = \pm\pi$, коливання протифазні;

$\varphi > 0$, $\psi_u > \psi_i$ - напруга випереджає струм на величину φ ;

$\varphi < 0$, $\psi_u < \psi_i$ - напруга відстає від струму на величину φ .

Ці співвідношення справедливі також і для синусоїдної форми запису. Аргумент синуса (косинуса) являє собою миттєву або поточну фазу $\theta(t)$: $\theta(t) = \omega t + \psi$. Зв'язок між кутовою частотою ω та поточною фазою $\theta(t)$ встановлюється співвідношеннями:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}; \quad \theta = \int \omega dt.$$

На рис. 7.4а показано залежність $\theta(t)$ при $\omega = const$ та $\omega = var$.

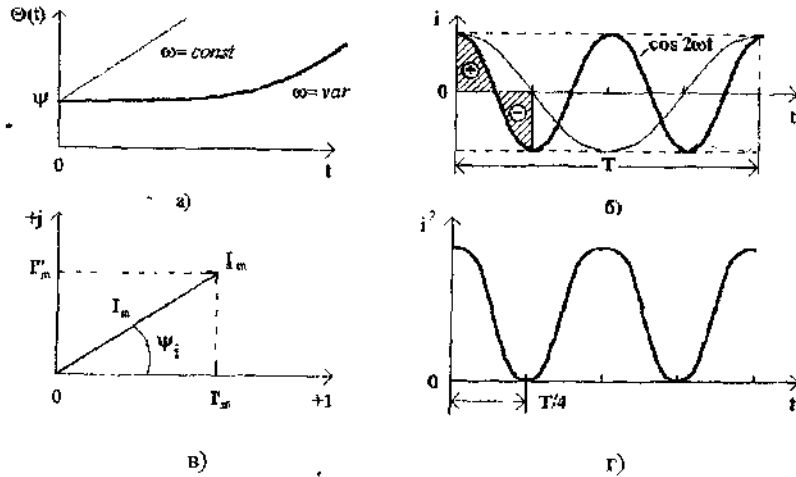


Рисунок 7.4

Аби визначити діюче значення синусоїдного струму, скористаємось формулою (7.1) та косинусоїдною формою запису $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt.$$

Замінімо $\cos^2 \omega t$ на $(1 + \cos 2\omega t)/2$ та проінтегруємо здобутий вираз:

$$I^2 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} I_m^2 \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{4I_m^2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{1}{2} dt + \frac{4I_m^2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{\cos 2\omega t}{2} dt = \frac{2I_m^2}{T} \left[t + 0 \right]_0^{\frac{T}{4}} = \frac{I_m^2}{2}.$$

Другий інтеграл дорівнює нулю, оскільки функція $\cos 2\omega t$ на інтервалі $0 \leq t \leq T/4$ має однакові додатну та від'ємні площі (рис. 7.4б).

Таким чином, діюче значення пов'язане з амплітудним: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$, тобто амплітудне значення завжди більше, ніж діюче. Для діючих значень також виконується закон Ома:

$$I = \frac{U}{R}; \quad U_L = L \frac{di}{dt}; \quad U_C = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Діюче значення синусоїдного струму характеризує його енергетичну дію. Вольтметри та амперметри у колах змінного струму показують діюче значення ЕРС, напруги та струму. Наприклад, якщо амплітуда напруги у колі $U = 311$ В, то вольтметр на затискачах кола покаже $U_V = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{311}{1,41} = 220$ В.

7.3 Подання синусоїдних коливань у вигляді проекцій векторів, що обертаються

Для розрахунку електричних кіл синусоїдного струму застосовують метод комплексних амплітуд (або символічний метод), який дозволяє розраховувати ці кола алгебраїчним способом, аналогічно колам постійного струму. Комплексний метод оснований на заміні синусоїдних функцій часу векторами, що обертаються.

Відомо, що кожна точка на комплексній площині визначається вектором, початок якого знаходиться в т.О, а кінець - у точці, що відповідає даному комплексному числу. Комплексне число можна виразити в трьох формах: у показниковій -

$$I_m = I_m e^{j\psi_i},$$

де I_m - модуль комплексного числа; ψ_i - аргумент (рис. 7.4г);

у тригонометричній - $I_m = I_m \cos \psi_i + j I_m \sin \psi_i$;

в алгебраїчній -

$$I_m = I_m' + j I_m'',$$

де $I_m' = \text{Re}[I_m] = I_m \cos \psi_i$ - дійсна частина;

$I_m'' = \text{Im}[I_m] = I_m \sin \psi_i$ - уявна частина комплексного числа.

Очевидно, що

$$I_m = \sqrt{I_m'^2 + I_m''^2}, \quad \psi_i = \arctg \left(\frac{I_m''}{I_m'} \right).$$

Вектор, який обертається у додатному напрямі (тобто проти годинникової стрілки) з кутовою швидкістю ω , можна подати як

$$i(t) = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}, \quad (7.2)$$

де $I_m = I_m e^{j\psi_i}$ - комплексна амплітуда, $e^{j\omega t}$ - оператор повороту (обертання).

Отже, комплексна амплітуда синусоїдного струму (напруги) - це комплексна величина, модуль та аргумент якої дорівнюють відповідно амплітуді та початковій фазі синусоїдного струму (напруги).

Комплексна амплітуда не залежить від часу, тобто є нерухомим вектором. Множення комплексної амплітуди $\underline{I}_m$ на $e^{j\omega t}$ означає поворот вектора $\underline{I}_m$ на комплексній площині у позитивному напрямі.

Записуючи комплексно-часову функцію (7.2) у тригонометричній формі

$$i(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I'_m + j I''_m,$$

бачимо, що синусоїдна функція $i(t)$ може розглядатися як уявна частина (7.2) або як проекція вектора $\underline{I}_m$ на уявну вісь:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \text{Im}\{I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}\}$$

Позначення Im означає, що застосовується уявна частина ("image").

Аналогічно косинусоїдна функція може розглядатися як дійсна частина або проекція на дійсну вісь:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \text{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}\}.$$

Символ Re означає операцію взяття дійсної частини ("real").

Подання синусоїдної функції за допомогою векторів та їх проекцій ілюструється на рис 7.5

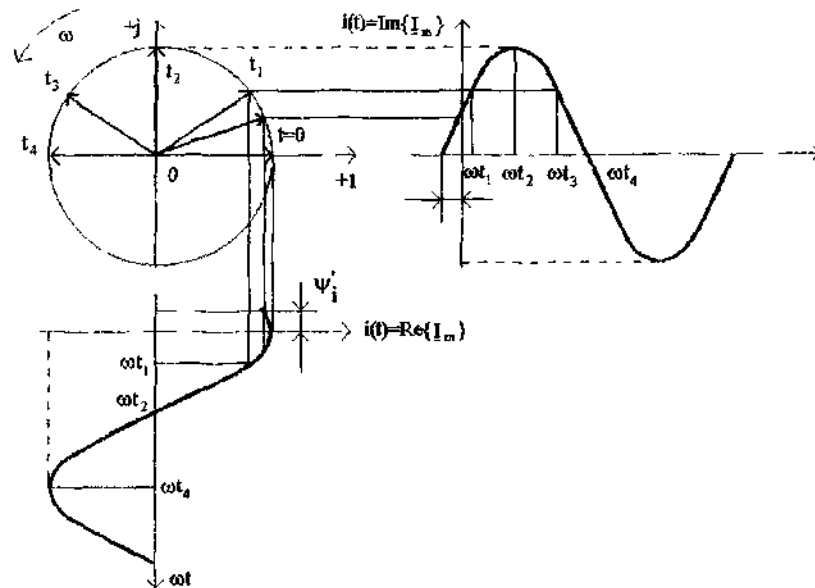


Рисунок 7.5

8 СИНУСОЇДНИЙ СТРУМ В ЕЛЕМЕНТАХ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

8.1 Синусоїдний струм в опорі

Розглянемо коло з резистором, який має активний опір R . Нехай у колі протікає струм $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$. Тоді за законом Ома напруга на затискачах резистора становить:

$$u = Ri = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = U_m \cos(\omega t + \psi_u).$$

Як бачимо, $\psi_u = \psi_i$; $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$, тобто напруга і струм у колі з активним опором збігаються за фазою. Крім того, при проходженні синусоїдного струму крізь опір не тільки миттєві значення, але й амплітуди та діючі значення пов'язані за законом Ома.

$$\underline{U}_m = R \underline{I}_m; \quad U = RI$$

Подамо миттєві значення напруги та струму через комплексні амплітуди:

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi_u) = \text{Re}\{U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}\} = \text{Re}\{U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{\underline{U}_m e^{j\omega t}\},$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \text{Re}\{\underline{I}_m e^{j\omega t}\}.$$

Підставимо ці значення до виразу $u = RI$.

$$\text{Re}\{\underline{U}_m e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{\underline{I}_m e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{R \underline{I}_m e^{j\omega t}\}.$$

Якщо рівні між собою реальні частини, то рівні й вектори: $\underline{U}_m e^{j\omega t} = R \underline{I}_m e^{j\omega t}$. Скоротивши на множник $e^{j\omega t}$, маємо

$$\underline{U}_m = R \underline{I}_m. \quad (8.1)$$

закон Ома в комплексній формі.

Запишемо комплексні діючі значення струму та напруги:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} = 0,707 I_m e^{j\psi_i} = I e^{j\psi_i}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = 0,707 U_m e^{j\psi_u} = U e^{j\psi_u}.$$

На рис 8.1 зображено вектори $\underline{I}$, $\underline{U}$, $\underline{I}_m$, $\underline{U}_m$ на комплексній площині.

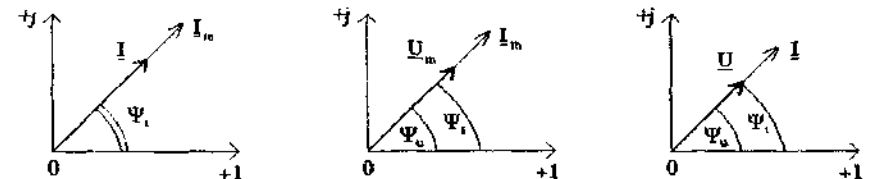


Рисунок 8.1

Визначимо миттєву потужність, яка витрачається в опорі. При цьому врахуємо, що $\psi_u = \psi_i$.

$$p = ui = U_m \cos(\omega t + \psi_u) I_m \cos(\omega t + \psi_i) = U_m I_m \cos^2(\omega t + \psi_i) = \frac{U_m I_m}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)]$$

Оскільки $\frac{U_m I_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} = UI$, отримуємо $p = UI[1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)]$.

Залежність миттєвих значень u , i , p від t (або ωt) показано на рис.8.2. Визначимо активну потужність P , яка дорівнює середньому за період значенню миттєвої потужності:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos 2(\omega t + \psi_i) dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI dt + \frac{1}{T} \int_0^T \cos 2(\omega t + \psi_i) dt = \frac{UI}{T} t \Big|_0^T = UI.$$

Другий інтеграл дорівнює нулю, оскільки на інтервалі часу, що кратний періоду, додатні та від'ємні площі синусоїдальної функції однакові.

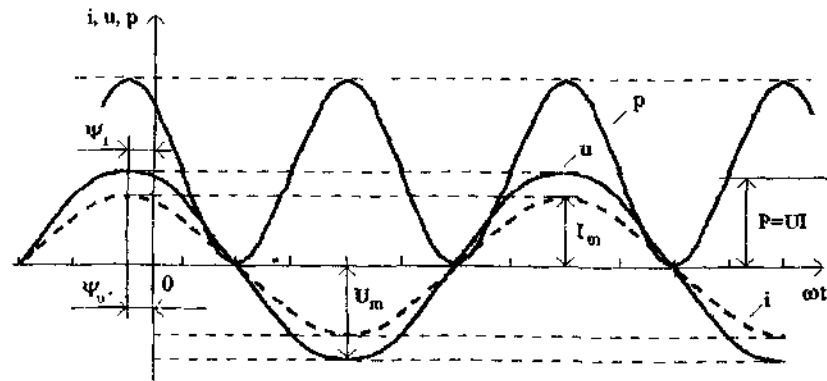


Рисунок 8.2

8.2 Синусоїдний струм в індуктивності

Нехай через індуктивність протікає струм $i_L(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$. ЕРС самоіндукції визначається за формулою

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di_L}{dt}.$$

Оскільки $u_L = -e_L$, матимемо

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) = U_m \cos(\omega t + \psi_u).$$

Цей вираз дозволяє зробити такі висновки:

1) $\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}$; $\phi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2} > 0$, отже напруга випереджає струм в індуктивності на кут $\pi/2$;

2) амплітуди, так само як і дійсні значення напруги та струму, пов'язані законом Ома $U_m = \omega L I_m = X_L I_m$; $U = X_L I$.

Величина $X_L = \omega L$, яка має розмірність опору, зветься індуктивним опором; обернена до неї величина $B_L = 1/\omega L$ зветься індуктивною провідністю. Тоді $I_m = B_L U_m$; $I = B_L U$.

Миттєва потужність, яка надходить до індуктивності, становить:

$$p = ui = -I_m \cos(\omega t + \psi_i) U_m \sin(\omega t + \psi_i) = -\frac{U_m I_m}{2} \sin 2(\omega t + \psi_i) = -UI \sin 2(\omega t + \psi_i).$$

Очевидно, що активна потужність $P = 0$ (як середнє значення синусоїдальної функції на інтервалі часу T). Визначимо енергію магнітного поля в індуктивності:

$$w_L = \int_{-\infty}^t p_L dt = \int_{-\infty}^t u_L i_L dt = \int_{-\infty}^t L i_L \frac{di_L}{dt} dt = \int_0^{i_L} L i_L di_L = \frac{L i_L^2}{2}.$$

(Заміна змінних у межах: при $t = -\infty$, $i_L = 0$; при $t = t$, $i_L = i_L$).

$$\text{Отже, } w_L = \frac{L I_m^2}{2} \cos^2(\omega t + \psi_i) = \frac{L I^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)].$$

Залежності миттєвих значень u , i , p , w_L в індуктивності за часом зображено на рис.8.3. Проаналізуємо ці часові діаграми: протягом першої чверті періоду (відлік від точки t^*), коли струм у колі збільшується, має місце заряд індуктивності, тобто накопичення енергії в магнітному полі за рахунок джерела. Миттєва потужність при цьому додатна і досягає максимального значення $P = UI$.

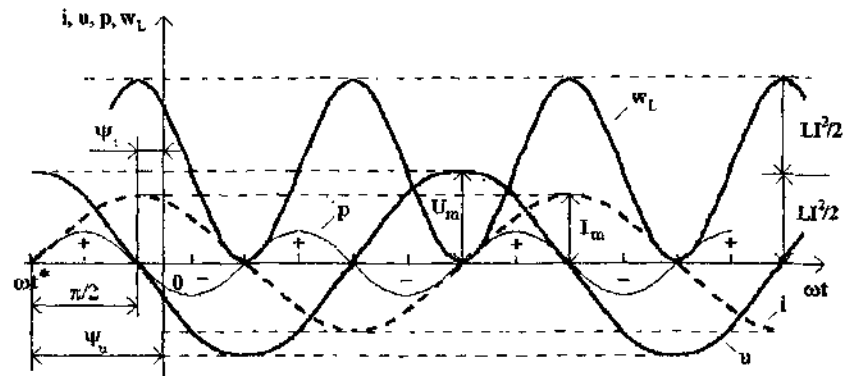


Рисунок 8.3

У момент часу $t = T/4$ ($\omega t = \pi/2$) енергія, накопичена в магнітному полі, також досягає максимального значення $w_{MAX} = LI^2$. Після цього впродовж другої чверті періоду відбувається зменшення струму та миттєвої енергії, тобто розряд індуктивності; миттєва потужність у ці моменти від'ємна. Оскільки енергія в системі не витрачається ($P = 0$), то зменшення w_L означає, що енергія повертається до джерела. Далі процес повторюється. Таким чином, відбувається коливання енергії між джерелом та індуктивністю, причому активна потужність, яка надходить до індуктивності, дорівнює нулю.

Подано миттєві значення струму та напруги через комплексні амплітуди:

$$i = \operatorname{Re}\{I_m e^{j\omega t}\}, \quad U_m = I_m e^{j\psi_i}.$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{d \operatorname{Re}\{I_m e^{j\omega t}\}}{dt} = \operatorname{Re}\left\{L \frac{d I_m e^{j\omega t}}{dt}\right\} = \operatorname{Re}\{j\omega L I_m e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{U_m e^{j\omega t}\}.$$

З останнього виразу можна зробити такі висновки:

1) операція диференціювання дійсної функції часу за t еквівалентна множенню на величину $j\omega$ комплексно-часової функції,

2) оскільки рівні між собою реальні частини, рівні також і вектори:

$j\omega L I_m e^{j\omega t} = U_m e^{j\omega t}$. Тоді маємо закон Ома в комплексній формі:

$$U_m = j\omega L I_m = Z_L I_m, \quad (8.2)$$

де $Z_L = jX_L$ - комплексний опір індуктивності.

Розглянемо фазові співвідношення комплексних амплітуд струму та напруги в індуктивності. Для цього запишемо U_m у показниковій формі:

$$U_m = j\omega L I_m = e^{j\pi/2} \omega L I_m e^{j\psi_i} = \omega L I_m e^{j(\pi/2 + \psi_i)}.$$

Цей вираз підтверджує висновок щодо фазового зсуву між комплексними амплітудами U_m та I_m на кут $\pi/2$ (рис.8.4а). Нагадаємо, що фазові кути відраховують від осі +1 проти ходу годинникової стрілки.

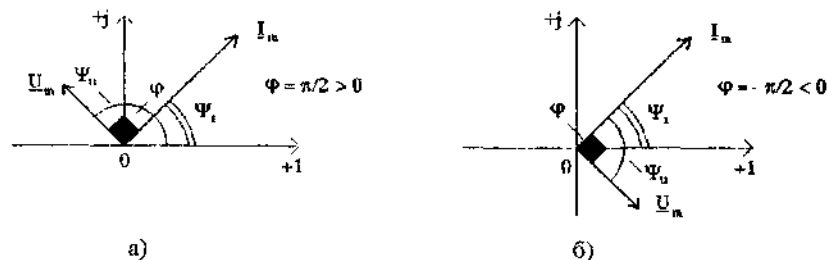


Рисунок 8.4

Знайдемо вираз для комплексної амплітуди струму, користуючись співвідношенням:

$$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt.$$

$$i_L = \operatorname{Re}\{I_m e^{j\omega t}\} = \frac{1}{L} \int \operatorname{Re}\{U_m e^{j\omega t}\} dt = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{L} \int U_m e^{j\omega t} dt\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{j\omega L} U_m e^{j\omega t}\right\}.$$

Скоротивши вираз на множник $e^{j\omega t}$, отримуємо ще один запис закону Ома в комплексній формі:

$$I_m = \frac{1}{j\omega L} U_m = Y_m U_m,$$

де $Y_m = 1/Z_L = -j/(1/\omega L) = -jB_L$ - комплексна провідність індуктивності.

Зазначимо, що операція інтегрування дійсної функції часу при переході до комплексно-часової функції замінюється операцією ділення на $j\omega$.

8.3 Синусоїдний струм в ємності

Нехай через ємність протікає струм $i_L(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$. Миттєві значення струму та напруги в ємності пов'язані співвідношеннями:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt.$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int I_m \cos(\omega t + \psi_i) dt = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \psi_i) = U_m \sin(\omega t + \psi_i) = \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}) = U_m \cos(\omega t + \psi_u).$$

Аналіз останнього виразу показує:

1) $\psi_u = \psi_i - \frac{\pi}{2}$; $\phi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2} < 0$, отже напруга в ємності відстає від

струму за фазою на кут $\frac{\pi}{2}$;

2) амплітуди, так само як і діючі значення напруги та струму, пов'язані законом Ома. $U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I$; $U = X_C I$. Величина $X_C = 1/\omega C$, яка має розмірність опору, зветься ємнісним опором, обернена до неї величина $B_C = \omega C$ зветься ємнісною провідністю. Тоді $I_m = B_C U_m$; $I = B_C U$.

Миттєва потужність, яка надходить до ємності, становить:

$$p = u_C i_C = I_m \cos(\omega t + \psi_i) U_m \sin(\omega t + \psi_i) = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2(\omega t + \psi_i) = UI \sin 2(\omega t + \psi_i).$$

Активна потужність $P = 0$, так само як і для індуктивності. Енергія електричного поля в ємності визначається за формулою:

$$w_C = \int_{-\infty}^t p_C dt = \int_{-\infty}^t u_C i_C dt = \int_{-\infty}^t C u_C \frac{du_C}{dt} dt = \int_0^{u_C} C u_C du_C = \frac{C u_C^2}{2};$$

$$w_C = \frac{C U_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi_u) = \frac{C U_m^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi_u)].$$

Залежності миттєвих значень u , i , p , w_C в ємності за часом зображено на рис 8.5. Так само як і в індуктивності, відбувається коливання енергії між джерелом та ємністю, причому активна потужність дорівнює нулю.

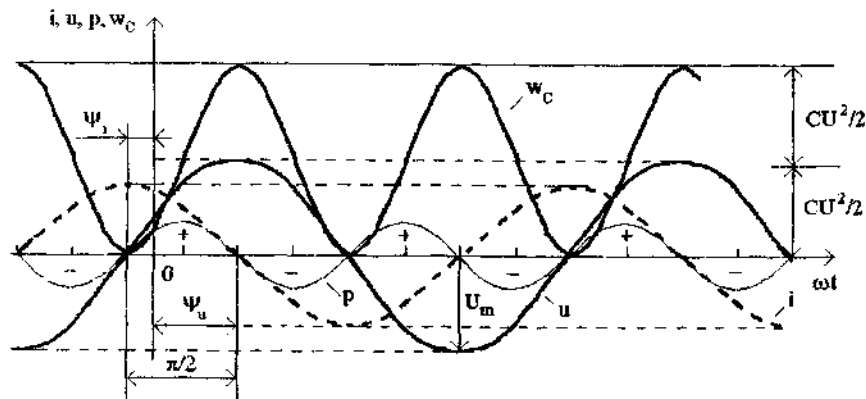


Рисунок 8.5

Якщо перейти до комплексно-часових функцій $i = \text{Re}\{I_m e^{j\omega t}\}$, $u = \text{Re}\{U_m e^{j\omega t}\}$ та подати за їх допомогою миттєві значення, можна знайти вирази для комплексних амплітуд струму та напруги:

$$I_m = j\omega C U_m = Y_C U_m; \quad U_m = \frac{1}{j\omega C} I_m = Z_C I_m, \quad (8.3)$$

де $Z_C = jX_C$, $Y_C = jB_C$ - комплексні опір та провідність ємності.

Здобуті вирази - це закон Ома в комплексній формі для ємності. Аби розглянути фазові співвідношення, запишемо U_m та множник $-j$ в показниковій формі: $U_m = U_m e^{j\psi_u} = -j \frac{1}{\omega C} I_m e^{j\psi_i} = \frac{I_m}{\omega C} e^{-j\pi/2} e^{j\psi_i} = \frac{I_m}{\omega C} e^{j(\psi_i - \pi/2)}$

Цей вираз підтверджує висновок, що в ємності напруга відстає за фазою від струму на кут $-\frac{\pi}{2}$ (рис.8.4б).

9 ЗАКОНИ ОМА ТА КІРХГОФА В КОМПЛЕКСНІЙ ФОРМІ

Розглянемо застосування методу комплексних амплітуд для електричних кіл з послідовним та паралельним з'єднанням елементів R , L і C .

9.1 Послідовне з'єднання елементів R , L , C

Розглянемо електричне коло, яке складається з послідовно з'єднаних елементів R , L , C . Запишемо згідно з другим законом Кірхгофа рівняння для миттєвих значень спадів напруг: $u = u_R + u_L + u_C$, або

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (9.1)$$

Якщо перейти до комплексно-часових функцій $i = \text{Re}\{I_m e^{j\omega t}\}$, $u = \text{Re}\{U_m e^{j\omega t}\}$ та підставити їх значення до рівняння (9.1), знайдемо вираз для комплексних амплітуд:

$$U_m = RI_m + j\omega LI_m + \frac{1}{j\omega C} I_m. \quad (9.2)$$

З урахуванням виразів (8.1)-(8.3) отримуємо другий закон Кірхгофа в комплексній формі:

$$U_m = U_{mR} + U_{mL} + U_{mC}. \quad (9.3)$$

Якщо винести за дужки значення I_m , матимемо

$$U_m = I_m (R + jX_L - jX_C) = I_m [R + j(X_L - X_C)] = I_m (R + jX),$$

де $X = X_L - X_C$ - реактивний опір кола; R - активний опір;

$Z = R + jX$ - комплексний опір кола.

З урахуванням введених означень матимемо рівняння

$$U_m = Z I_m, \quad I_m = U_m / Z, \quad (9.4)$$

які подають закон Ома в комплексній формі.

Отже, комплексний опір кола Z - це комплексна величина, яка дорівнює частці від ділення комплексної амплітуди на затисках двополосника на комплексний струм. Комплексний опір можна подати у тригонометричній і показниковій формах:

$$Z = R + jX = Z e^{j\varphi}, \quad Z = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi, \quad (9.5)$$

де $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ - модуль комплексного опору Z (повний електричний опір кола), $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ - аргумент комплексного опору; $R = Z \cos \varphi$ - активний опір, який дорівнює дійсній частині Z ; $X = Z \sin \varphi$ - реактивний опір, який дорівнює уявній частині Z .

Згідно з (9.4) комплексний опір становить:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{I_m e^{j\psi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z e^{j\varphi},$$

де Z - повний опір, $\varphi = \psi_u - \psi_i$ - аргумент комплексного опору.

Таким чином, повний опір кола (модуль $\underline{Z}$) встановлює зв'язок між амплітудами (дійсними значеннями) струму та напруги, а аргумент комплексного опору збігається зі зсувом фаз між напругою та струмом.

Розглянемо геометричну інтерпретацію закону Ома та другого закону Кірхгофа в комплексній формі за допомогою векторної діаграми.

Векторна діаграма - зображення векторів на комплексній площині для одного й того ж самого моменту часу з дотриманням фазових співвідношень. Момент часу може бути будь-який, оскільки взаємна орієнтація векторів не змінюється.

Розглянемо векторні діаграми для двох випадків.

1) $X_L > X_C$, $X > 0$. Позначимо в рівнянні (9.3) $\underline{U}_{mX} = \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC}$ - напругу на реактивній ділянці кола. Напруга на активному опорі $\underline{U}_{mR}$ збігається за фазою зі струмом $\underline{I}_m$, напруга на індуктивності $\underline{U}_{mL}$ випереджає струм на кут $\frac{\pi}{2}$, а напруга на ємності $\underline{U}_{mC}$ відстає від струму на кут $\frac{\pi}{2}$ (рис.9.1а). Таким чином, загальна напруга $\underline{U}_m$ випереджає струм $\underline{I}_m$ за фазою на кут $\varphi > 0$. Додатний фазовий зсув відповідає індуктивному характеру опору кола $\underline{Z}$.

2) $X_L < X_C$, $X < 0$ (рис.9.1,б). У цьому випадку реактивний опір кола має ємнісний характер ($X < 0$), отже загальна напруга відстає за фазою від струму на кут $\varphi < 0$. Від'ємний фазовий зсув відповідає ємнісному характеру опору $\underline{Z}$.

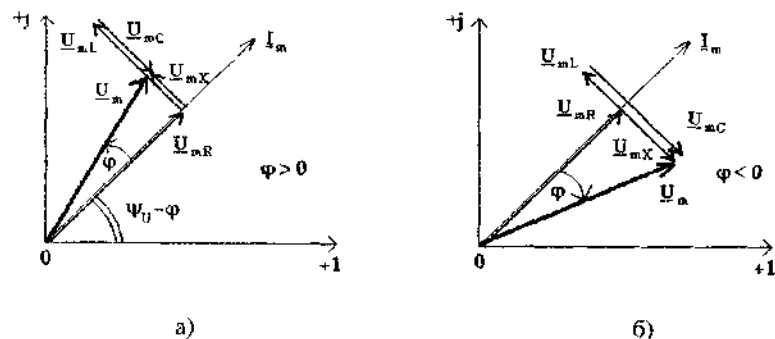


Рисунок 9.1

Висновок. Геометрична сума векторів $\underline{U}_{mR}$, $\underline{U}_{mL}$, $\underline{U}_{mC}$ дає вектор прикладеної до кола напруги: $\underline{U}_m = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC} = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mX}$. Прямокутний трикутник, катетами якого є $\underline{U}_{mR}$ і $\underline{U}_{mX}$, а гіпотенуза дорівнює $\underline{U}_m$, звється трикутником напруг.

Якщо всі сторони-вектори цього трикутника поділити на вектор $\underline{I}_m$, отримаємо трикутник опорів, подібний до трикутника напруг і повернений відносно останнього на кут $\psi_u - \varphi$ за ходом годинникової стрілки (рис.9.2). Трикутник опорів є геометричною інтерпретацією рівняння (9.5). Його положення не залежить від початкових фаз $\underline{U}_m$ та $\underline{I}_m$; активний опір R відкладається на комплексній площині у додатному напрямку дійсної осі, а реактивний опір X в залежності від його знака відкладається в додатному ($X > 0$) чи у від'ємному напрямку уявної осі (рис.9.2а,б).

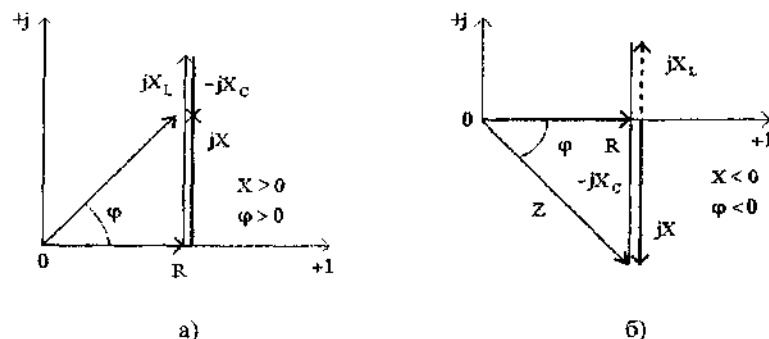


Рисунок 9.2

У трикутнику опорів кут φ відраховується від катета R до гіпотенузи Z аналогічно тому, як відраховується кут φ у трикутнику напруг від напруги $\underline{U}_{mR} = R \underline{I}_m$ до напруги $\underline{U}_m = \underline{Z} \underline{I}_m$.

9.2 Паралельне з'єднання елементів R , L , C

Розмірковуючи аналогічно, знайдемо комплексну форму законів Ома і Кірхгофа для електричного кола, яке складається з паралельно з'єднаних елементів R , L , C . Занишемо рівняння за першим законом Кірхгофа для миттєвих значень струмів:

$$i = i_R + i_C + i_L = Gu + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int u dt. \quad (9.6)$$

Перейдемо від миттєвих значень i , u до комплексно-часових функцій:

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \operatorname{Re}[I_m e^{j\omega t}], \quad u = U_m \cos(\omega t + \psi_u) = \operatorname{Re}[U_m e^{j\omega t}].$$

Підставивши ці значення до (9.6), одержимо рівняння для комплексних амплітуд:

$$I_m = GU_m + j\omega CU_m + \frac{1}{j\omega L}U_m. \quad (9.7)$$

Враховуючи, що $I_{mR} = GU_m$; $I_{mC} = j\omega CU_m$; $I_{mL} = (1/j\omega L)U_m$, знаходимо вираз для першого закону Кірхгофа в комплексній формі:

$$I_m = I_{mR} + I_{mC} + I_{mL}. \quad (9.8)$$

Якщо винести в (9.7) значення U_m за дужки, отримаємо

$$I_m = U_m(G + j\omega C - j/\omega L) = U_m[G + j(B_C - B_L)] = U_m(G + jB),$$

де $B = B_C - B_L = \omega C - 1/\omega L$ - реактивна провідність кола, G - активна провідність кола; $Y = G + jB$ - комплексна провідність кола.

Так само, як і формула (9.4), рівняння

$$I_m = YU_m, \quad U_m = I_m/Y \quad (9.9)$$

подають закон Ома в комплексній формі.

Отже, комплексна провідність кола - комплексна величина, яка дорівнює частці від ділення комплексного струму на комплексну напругу на затискачах пасивного електричного кола.

Комплексна провідність може бути подана у тригонометричній та показниковій формах:

$$Y = Y \cos \varphi_Y + jY \sin \varphi_Y; \quad Y = Ye^{j\varphi_Y}, \quad (9.10)$$

де $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ - модуль комплексної провідності Y або повна електри-

чна провідність, $\varphi_Y = \arctg \frac{B}{G}$ - аргумент комплексної провідності Y ;

$G = Y \cos \varphi_Y$ - активна провідність (дійсна частина комплексної провідності);

$B = Y \sin \varphi_Y$ - реактивна провідність (уявна частина комплексної провідності)

На підставі (9.9) запишемо: $Y = I_m/U_m$. Тоді

$$Ye^{j\varphi_Y} = \frac{I_me^{j\psi_I}}{U_me^{j\psi_U}} = \frac{I_m}{U_m}e^{j(\psi_I - \psi_U)},$$

Отже, повна провідність $Y = I_m/U_m = I/U$ - це скалярна величина, яка дорівнює частці від ділення діючого (амплітудного) значення струму у двополоснику на діюче (амплітудне) значення напруги на його затискачах. Аргумент комплексної провідності $\varphi_Y = \psi_I - \psi_U = -(\psi_U - \psi_I) = -\varphi$ з точністю до знака обумовлює фазовий зсув у колі.

Зобразимо векторні діаграми. На рис.9.3 подана геометрична інтерпретація на комплексній площині рівняння (9.8). Рис. 9.3а відповідає варіанту, коли реактивна провідність кола має індуктивний характер ($B < 0$), струм відстає за фазою від напруги, а напруга випереджає струм за фазою на кут $\varphi > 0$. Рис 9.3б відповідає випадку, коли реактивна провідність кола має

ємнісний характер ($B > 0$), напруга відстає за фазою від струму (струм випереджає напругу) на кут $\varphi < 0$.

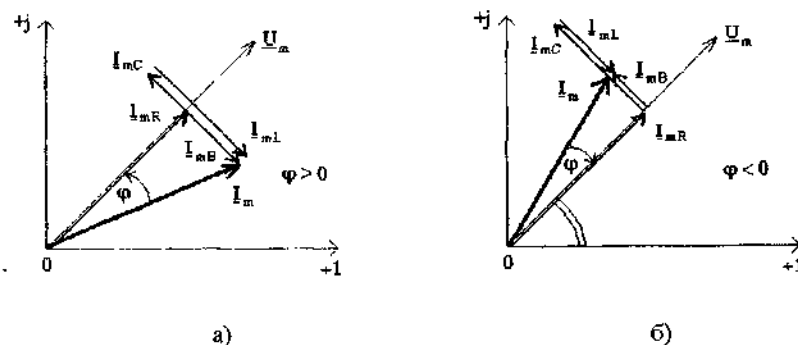


Рисунок 9.3

Прямокутний трикутник з катетами I_{mR} та $(I_{mL} + I_{mC}) = I_{mB}$ і гіпотенузою I_m зветься трикутником струмів; I_{mR} та I_{mB} є відповідно активною та реактивною складовими струму I_m .

Якщо всі сторони цього трикутника поділити на вектор U_m , то одержимо трикутник провідностей, подібний до трикутника струмів і повернений відносно останнього на кут ψ_U за ходом годинникової стрілки. Трикутник провідностей є геометричною інтерпретацією виразу (9.10). Активна провідність G відкладається на комплексній площині у додатному напрямку дійсної осі, а реактивна провідність B у залежності від її знака відкладається у від'ємному ($B < 0$) або в додатному ($B > 0$) напрямку уявної осі (рис.9.4а,б).

У трикутнику провідностей кут φ відраховується від гіпотенузи Y до катета G аналогічно до трикутника струмів, де кут φ відраховується від $I_m = YU_m$ до $I_{mR} = GU_m$.

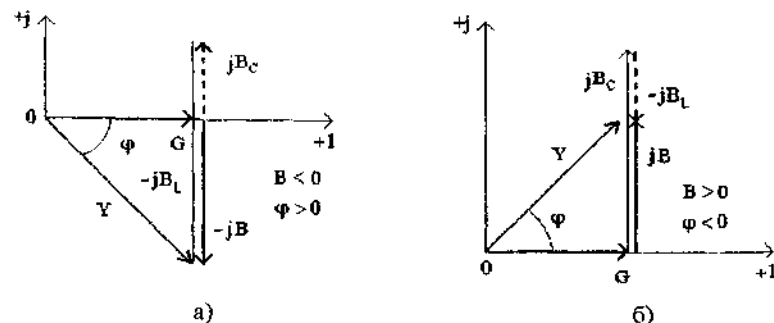


Рисунок 9.4

10 ЗАДАЧА АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА ПРИ СИНУСОЇДНІЙ ДІЇ

Оскільки закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі справедливі для електричних кіл синусоїдного струму, всі методи розрахунку електричних кіл (МКС, МВН, МЕГ тощо) також можна використовувати, але для комплексних значень струмів, напруг та опорів.

Зробимо якісний аналіз електричного кола синусоїдного струму на прикладі схеми (рис.10.1а). Попередньо перейдемо до еквівалентної схеми (рис.10.1б), де позначимо $Z_1 = R_1 + j\omega L$; $Y_2 = G_2 + j\omega C$. Тоді розрахункові формули для розв'язання задачі аналізу будуть такі:

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2}; \quad \underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2; \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}; \quad \underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_e};$$

$$\underline{I}_{mC} = \underline{I}_m \frac{R_2}{R_2 + \underline{Z}_C}; \quad \underline{U}_{m1} = \underline{I}_m \underline{Z}_1; \quad \underline{U}_{m2} = \underline{I}_{mC} \underline{Z}_C.$$

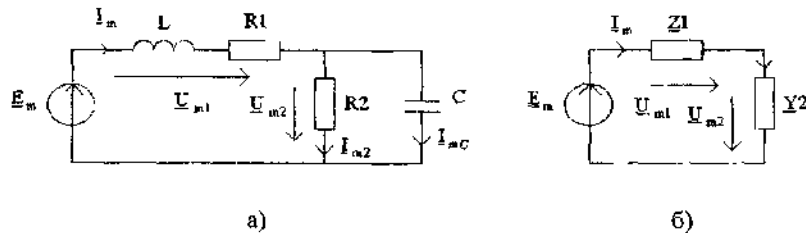


Рисунок 10.1

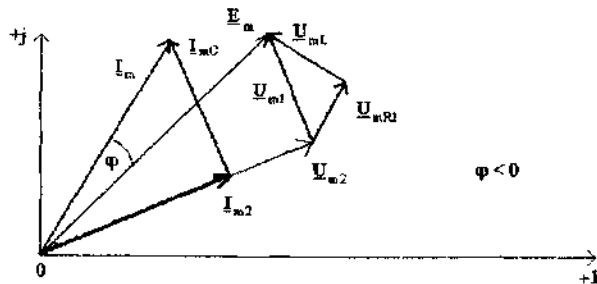


Рисунок 10.2

Розглянутий приклад можна проаналізувати також за допомогою векторної діаграми (рис.10.2). Для цього слід задатися вектором струму (напруги) для найбільш розгалуженої ділянки електричного кола, а потім провести геометричні побудови на підставі законів Ома та Кірхгофа. Послідовність дій може бути такою

- 1) задаємо вектор $\underline{U}_{m2} = \underline{U}_{mC} = \underline{U}_{mR2}$;
- 2) будуємо вектори $\underline{I}_{m2}$ та $\underline{I}_{mC}$, враховуючи, що перший збігається за фазою з вектором $\underline{U}_{mR2}$, а другий випереджає вектор $\underline{U}_{mC}$ на кут $\frac{\pi}{2}$;
- 3) вектор $\underline{I}_m$ знаходимо за першим законом Кірхгофа $\underline{I}_m = \underline{I}_{m2} + \underline{I}_{mC}$;
- 4) знаючи $\underline{I}_m$, будуємо вектор $\underline{U}_{mR1}$, який збігається за фазою з $\underline{I}_m$ (тобто, ці вектори паралельні), і вектор $\underline{U}_{mL}$, який випереджає струм $\underline{I}_m$ за фазою на кут $\frac{\pi}{2}$;
- 5) за другим законом Кірхгофа: $\underline{U}_{m1} = \underline{U}_{mR1} + \underline{U}_{mL}$; $\underline{E}_m = \underline{U}_{m1} + \underline{U}_{m2}$;
- 6) оскільки зсув фаз між вектором $\underline{E}_m$ та струмом $\underline{I}_m$ $\varphi < 0$, робимо висновок, що вхідний опір кола має ємнісний характер.

10.1 Стівідношення між активними і реактивними складовими опорів та провідностей ділянки кола

Розглянемо пасивний двополюсник. Нехай комплексні амплітуди напруги та струму на вході двополюсника дорівнюють:

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}; \quad \underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$$

Знайдемо комплексний вхідний опір:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\psi_u - \psi_i)}$$

Отже, модулі $\underline{Z}$ та $\underline{Y}$ обернено пропорційні, а аргументи протилежні:

$$\underline{Z} = 1/\underline{Y}; \quad \varphi_Z = \varphi_Y.$$

Окрім показникової форми запису $\underline{Z} = Z e^{j\varphi_Z}$ та $\underline{Y} = Y e^{j\varphi_Y}$ широко використовується також алгебраїчна форма запису цих комплексних величин: $\underline{Z} = R + jX$, $\underline{Y} = G + jB$, що відповідає послідовному (R та X) і паралельному (G та B) з'єднанню елементів двополюсника. Встановимо зв'язок між активними і реактивними складовими $\underline{Z}$ та $\underline{Y}$:

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j \frac{B}{G^2 + B^2}.$$

Таким чином,

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}; \quad X = -\frac{B}{G^2 + B^2}. \quad (10.1)$$

У свою чергу, якщо задано комплексний опір двополюсника Z , то комплексна провідність

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}.$$

Таким чином,

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}. \quad (10.2)$$

Висновок. Формули (10.1), (10.2) показують, що:

- 1) реактивний опір X та реактивна провідність B однієї і тієї самої ділянки електричного кола мають однаковий характер;
- 2) кожна складова провідності (G та B) залежить як від активного, так і від реактивного опорів (R та X). Відповідно, кожна складова опору (R та X) є функцією G та B ;
- 3) активні складові R та G також залежать від частоти.

10.2 Енергетичні співвідношення у колі синусоїдного струму

Припустимо, що через ділянку електричного кола, яка має опір Z , проходить струм $i = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$. Спад напруги на цьому опорі дорівнюватиме $u = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$.

Миттєва потужність, яка надходить до кола, становитиме:

$$p = ui = U_m I_m \cos(\omega t + \psi_u) \cos(\omega t + \psi_i) =$$

$$= \frac{U_m I_m}{2} [\cos(\psi_u - \psi_i) + \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)] = UI [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)].$$

Ця потужність складається з двох доданків: постійної величини $UI \cos \varphi$ та синусоїдної величини, що має подвоєну частоту. Середнє значення другого доданку за час T дорівнює нулю. Тому активна потужність, яка надходить до розглядуваної ділянки кола, буде такою:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos \varphi dt + \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) dt = UI \cos \varphi. \quad (10.3)$$

або

$$P = S \cos \varphi, \quad (10.4)$$

де $S = UI$ - повна потужність, яка дорівнює добутку діючих значень напруги та струму, що стосуються одного і того ж самого входу,

$\cos \varphi = P/S$ - коефіцієнт потужності, який дорівнює відношенню активної потужності до повної.

При розрахунках електричних кіл користуються також поняттям реактивної потужності, яка обчислюється за формулою

$$Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi \quad (10.5)$$

і є мірою споживання (або вироблення) реактивного струму.

Вимірюється у Вольт-амперах реактивних [ВАр]. Реактивна потужність є додатною при $\varphi > 0$ (індуктивне навантаження) і від'ємною при $\varphi < 0$ (еміснє навантаження).

Подамо потужність у комплексній формі. Для цього перейдемо від миттєвих значень напруги та струму до комплексних амплітуд:

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}; \quad \underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}.$$

Введемо поняття комплексно-спряженого значення амплітуди струму $\underline{I}_m'' = I_m e^{-j\psi_i}$ і діючого значення $\underline{I}'' = I e^{-j\psi_i}$ (рис. 10.3а). Домножимо комплексне діюче значення $\underline{U}$ на комплексно-спряжене значення $\underline{I}''$:

$$\underline{U} \underline{I}'' = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = UI e^{j\varphi} = \tilde{S}.$$

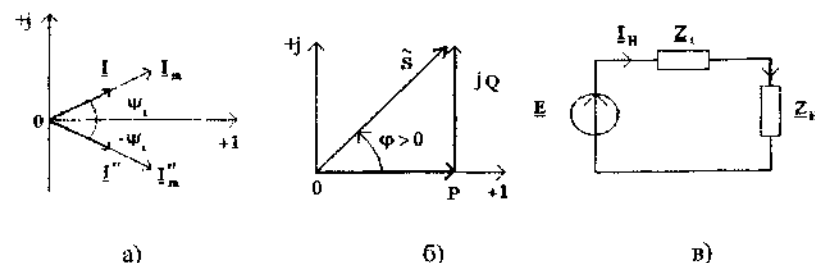


Рисунок 10.3

Величина $\tilde{S} = I''U$, яка дорівнює добутку комплексної напруги на спряжене значення комплексного струму, звється комплексною потужністю. Комплексна потужність може бути записана в показниковій формі:

$$\tilde{S} = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ = S e^{j\varphi}, \quad (10.6)$$

де P - активна потужність, Q - реактивна потужність синусоїдного струму, яка дорівнює уявній частині комплексної потужності. З (10.6) виходить, що модуль комплексної потужності $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ дорівнює повній потужності, а аргумент - зсуву фаз між напругою та струмом. На підставі (10.6) можна побудувати трикутник потужностей (рис. 10.3б). На комплексній площині значення $\tilde{S}$ відповідає гіпотенузі прямокутного трикутника, катетами якого є P та Q .

Знайдемо вираз для балансу потужностей у колі синусоїдного струму. Вище (лекція 6) була знайдена умова балансу потужностей у колі постійного струму (6.5)-(6.6), згідно з якою сума потужностей джерел електричної енергії $P_{дж}$ дорівнює сумі активних потужностей $P_{вт}$, які витрачаються в опорах:

$$\sum P_{дж} = \sum P_{вт}.$$

Можна показати, що у колі синусоїдного струму сума реактивних потужностей, які надходять у коло, дорівнює сумі реактивних потужностей, які споживаються, тобто $\sum Q_{дж} = \sum Q_{вт}$.

Отже, для синусоїдного кола умова балансу потужностей матиме вигляд:

$$\sum P_{дж} = \sum P_{вт}; \sum Q_{дж} = \sum Q_{вт}; \sum \tilde{S}_{дж} = \sum \tilde{S}_{вт}. \quad (10.7)$$

10.3 Умова узгодження джерела з навантаженням у колі синусоїдного струму

Нехай потрібно знайти комплексний опір навантаження $\underline{Z}_H = R_H + jX_H$ таким чином, щоб при заданому комплексному опорі джерела $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$ забезпечувалася передача максимуму активної потужності від джерела до навантаження (рис.10.3в). Активна потужність, яка споживається навантаженням, становить $P = UI \cos \phi$. Враховуючи, що $\underline{U} = I \underline{Z}$; $\underline{Z} = Z \cos \phi + jZ \sin \phi = R + jX$, матимемо $P = I^2 R$

Комплексний та спряжений струм у навантаженні дорівнюватимуть:

$$\underline{I}_H = \frac{\underline{E}_H}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_H} = \frac{E e^{j\omega t}}{R_i + R_H + j(X_i + X_H)}; \underline{I}_H^* = \frac{E e^{-j\omega t}}{R_i + R_H - j(X_i + X_H)}.$$

Тоді

$$I^2 = \underline{I}_H \underline{I}_H^* = \frac{E^2}{(R_i + R_H)^2 + (X_i + X_H)^2}; P_H = \frac{E^2 R_H}{(R_i + R_H)^2 + (X_i + X_H)^2}.$$

Аналізуючи вираз для потужності P_H , робимо висновок, що максимальна активна потужність у навантаженні

$$P_H = P_{H \max} = \frac{E^2 R_H}{(R_i + R_H)^2}$$

має місце за умови $X_H = -X_i$. Це перша умова узгодження. Вище (лекція 6),

було показано, що $P_H = P_{H \max}$ за умови $R_H = R_i$. Тоді $P_H = P_{H \max} = \frac{E^2}{4R_i}$.

Таким чином, умовою передачі максимальної активної потужності до навантаження у колі синусоїдного струму є умова:

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_i^*, \text{ або } \underline{Z}_H = R_i - jX_i.$$

11 ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ. ПОСЛІДОВНИЙ РЕЗОНАНСНИЙ КОНТУР

Аналіз електричних кіл при синусоїдній дії показує, що амплітуди та початкові фази напруг і струмів у колі залежать не тільки від амплітуди та початкової фази вхідної дії, але й від частоти коливань. Аби знайти реакцію електричного кола на сигнал зі змінною частотою, використовують частотні характеристики електричних кіл, до яких належать амплітудно-частотна (АЧХ) і фазо-частотна (ФЧХ) характеристики.

11.1 Комплексні передатні функції електричних кіл

Для аналізу частотних властивостей електричних кіл використовують комплексні передатні функції. Щоб дати визначення передатної функції, подамо електричне коло умовно у вигляді дво- та чотириполюсника і дамо декілька визначень.

Чотириполюсник - схема з двома парами затискачів. Вхідна (вихідна) величина - струм (напруга) на затискачах, що розглядаються як вхід (вихід) кола.

Отже, комплексна передатна функція електричного кола $T(j\omega)$ - відношення вихідної величини до вхідної, виражене в комплексній формі:

$$T(j\omega) = \frac{\underline{F}_{m2}}{\underline{F}_{m1}}, \quad (11.1)$$

де $\underline{F}_{m2}$ - комплексна амплітуда вихідної величини (відгуку);

$\underline{F}_{m1}$ - комплексна амплітуда вхідної величини (дії).

Примітка. 1) у літературі вживається також інше визначення: $T(j\omega)$ - комплексний коефіцієнт передачі; 2) у подальшому, знаходячи $T(j\omega)$, будемо заміняти відношення комплексних амплітуд (11.1) відношенням діючих значень. Це не змінює величини $T(j\omega)$, але дозволяє спростити запис.

Якщо коло є чотириполюсником, то комплексні передатні функції у залежності від типу вхідної та вихідної величини можуть бути такі:

1. Якщо $\underline{F}_{BX} = \underline{U}_{BX}$, $\underline{F}_{ВНХ} = \underline{U}_{ВНХ}$, то $T(j\omega) = K_U(j\omega) = \underline{U}_{ВНХ} / \underline{U}_{BX}$ - комплексний коефіцієнт передачі за напругою.

2. Якщо $\underline{F}_{BX} = \underline{I}_{BX}$, $\underline{F}_{ВНХ} = \underline{I}_{ВНХ}$, то $T(j\omega) = K_I(j\omega) = \underline{I}_{ВНХ} / \underline{I}_{BX}$ - комплексний коефіцієнт передачі за струмом.

3. Якщо $\underline{F}_{BX} = \underline{I}_{BX}$; $\underline{F}_{ВНХ} = \underline{U}_{ВНХ}$, то $T(j\omega) = Z_{пер}(j\omega) = \underline{U}_{ВНХ} / \underline{I}_{BX}$ - комплексний передатний опір.

4. Якщо $\underline{F}_{BX} = \underline{U}_{BX}$, $\underline{F}_{ВНХ} = \underline{I}_{ВНХ}$, то $T(j\omega) = Y_{пер}(j\omega) = \underline{I}_{ВНХ} / \underline{U}_{BX}$ - комплексна передатна провідність.

Якщо коло є двополюсником, комплексна передатна функція набуває змісту комплексної вхідної функції. Вхідна функція - опір або провідність кола з боку входу, виражені в комплексній формі.

Якщо $\underline{E}_{BX} = \underline{U}_{BX}$; $\underline{E}_{ВНХ} = \underline{I}_{BX}$, то $T(j\omega) = Y_{BX}(j\omega) = \underline{I}_{BX} / \underline{U}_{BX}$ - комплексна вхідна провідність.

Якщо $\underline{E}_{BX} = \underline{I}_{BX}$; $\underline{E}_{ВНХ} = \underline{U}_{BX}$, то $T(j\omega) = Z_{BX}(j\omega) = \underline{U}_{BX} / \underline{I}_{BX}$ - комплексний вхідний опір.

Комплексна передатна функція може бути виражена в показниковій формі:

$$T(j\omega) = |T(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (11.2)$$

де $|T(j\omega)|$ - модуль комплексної передатної функції;

$\varphi(\omega)$ - аргумент комплексної передатної функції.

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) - залежність від частоти модуля вхідної, вихідної чи передатної функції кола, виражених у комплексній формі.

Фазо-частотна характеристика (ФЧХ) - залежність від частоти аргумента вхідної, вихідної чи передатної функції кола, виражених у комплексній формі.

При графічному поданні частотних характеристик електричного кола, як правило, зображують окремо графіки АЧХ і ФЧХ. Але іноді АЧХ і ФЧХ подають у вигляді одного графіка. Це можливо завдяки тому, що кожному значенню частоти відповідає деяке значення $T(j\omega)$ у вигляді комплексного числа або вектора на комплексній площині. Із зміною частоти ω кінець вказаного вектора описує деяку криву (рис 11.1)

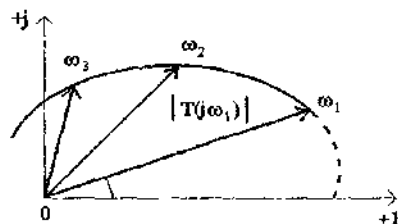


Рисунок 11.1

Крива, яка з'єднує кінці векторів $T(j\omega)$, зветься *годографом* передатної функції (годографом амплітудно-фазової характеристики). Годограф будують при змінюванні частоти від нуля до нескінченності.

Приклад. Визначити комплексний коефіцієнт передачі за напругою $K_U(j\omega)$, АЧХ і ФЧХ для схеми (рис.11.2а).

Згідно з визначенням: $K_U(j\omega) = \underline{U}_{ВНХ} / \underline{U}_{ВХ}$. Задача розв'язується у такій послідовності: 1) задаємося $\underline{U}_{ВХ}$; 2) визначаємо комплексне значення вихідної напруги за законом Ома

$$\underline{U}_{ВНХ} = \underline{I} \frac{1}{j\omega C} = \frac{\underline{U}_{ВХ}}{(1 + 1/j\omega C)j\omega C} = \frac{\underline{U}_{ВХ}}{1 + j\omega CR};$$

$$3) \text{ знаходимо } K_U(j\omega) = \frac{\underline{U}_{ВНХ}}{(1 + j\omega CR)\underline{U}_{ВХ}} = \frac{1}{1 + j\omega CR};$$

4) подаємо $K_U(j\omega)$ в показниковій формі, знаходимо АЧХ і ФЧХ (рис.11.2б,в)

$$K_U(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} e^{j \arctg(\omega CR)}.$$

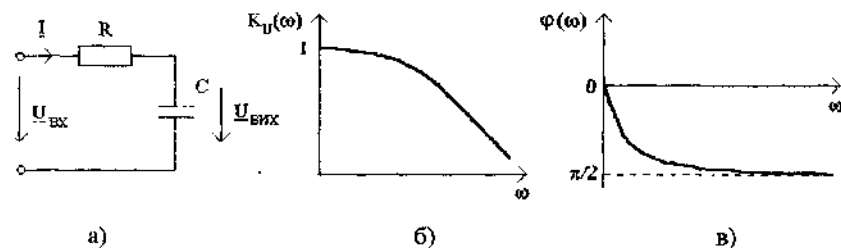


Рисунок 11.2

11.2 Послідовний резонансний контур. Визначення та умови резонансу

Коливальний контур - електричне коло, в якому можливі коливання вільної складової струму. Резонансний контур - електричне коло, в якому має місце явище резонансу (напруг чи струмів).

Послідовний резонансний контур - резонансний контур, що складається з індуктивного та ємнісного елементів, з'єднаних послідовно (рис.11.3а,б). На схемі R, L, C - первинні параметри контуру, причому $R = R_L + R_C + R_{BT}$, де R_L - активний опір котушки індуктивності, R_C - опір витікання конденсатора, перерахований у послідовне з'єднання, R_{BT} - опір проводів (втрат). Аби дати визначення резонансу, знайдемо струм у колі (рис.11.3в):

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + j\omega L - 1/j\omega C} = \frac{\underline{E}}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{\underline{E}}{R + jX},$$

де $X = X_L - X_C$ - реактивний опір контуру.

Запишемо комплексне діюче значення струму в показниковій формі

$$\underline{I} = I e^{j\psi_I} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X^2}} e^{j[\psi_E - \arctg(X/R)]},$$

де $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ - повний опір контуру.

Отже, резонанс - це явище в електричному колі, що має ділянки з індуктивним та ємнісними елементами, за якого різниця фаз напруги і струму на вході кола дорівнює нулю.

З цього визначення випливає, що повний опір контуру має бути активним. Тоді реактивний опір або провідність кола, в якому спостерігається резонанс, дорівнюють нулю.

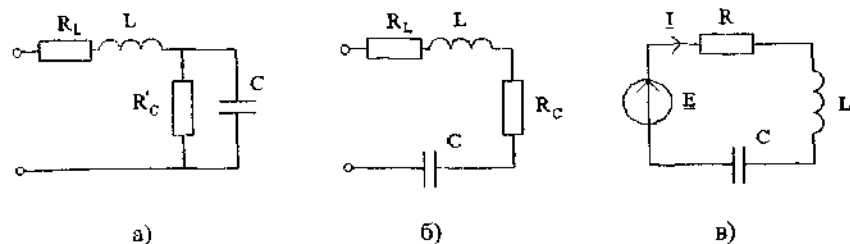


Рисунок 11.3

Таким чином, якщо у загальному випадку сформулювати співвідношення

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X^2}}; \quad \psi_I = \psi_E - \arctg(X/R),$$

то при резонансі $I = E/R$; $\psi_E - \psi_I = \arctg(X/R) = 0$; $X = 0$; $\psi_I = \psi_E$.

Останній вираз є умовою виникнення резонансу.

11.3 Вторинні параметри послідовного резонансного контуру

1. Резонансна частота - частота струму (напруги) під час резонансу в колі. Позначається ω_0 і визначається, виходячи з умови резонансу $X = 0$; $\omega_0 L - 1/\omega_0 C = 0$:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Значенню циклічної частоти f_0 відповідає резонансна довжина хвилі:

$$\lambda_0 = cT_0. \quad T_0 = 1/f_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

де c - швидкість поширення електромагнітних хвиль.

2. Характеристичний (хвильовий) опір контуру - опір кожного з реактивних елементів при резонансі:

$$\rho = \frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

3. Добротність - відношення характеристичного опору до активного опору контуру. $Q = \rho/R = 1/d$, де d - загасання - величина, обернена до добротності, яка характеризує інтенсивність загасання коливань у контурі.

Добротність характеризує тривалість власних коливань у контурі, її можна визначити також як коефіцієнт якості, який дорівнює відношенню абсолютного значення реактивної потужності до активної потужності.

4. Повний опір - модуль вхідного опору контуру Z .

$$Z = R + jX = Ze^{j\varphi},$$

де $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ - модуль Z ;

$$\varphi = \arctg(X/R) = \arctg\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) - \text{аргумент } Z.$$

Частотні залежності повного та реактивного опорів $Z(\omega)$, $X(\omega)$ показано на рис.11.4. З графіка видно, що на резонансній частоті реактивний опір контуру дорівнює нулю, а $Z(\omega_0)$ дорівнює опору втрат R .

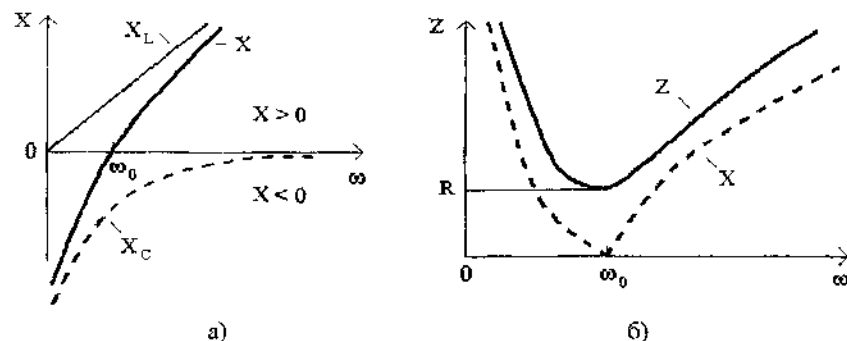


Рисунок 11.4

5. Фазова характеристика - залежність аргумента вхідного опору послідовного контуру від частоти (рис.11.5а): $\varphi = \arctg(X/R)$.

6. Резонансна крива струму - залежність модуля діючого (амплітудного) значення струму від частоти (рис.11.5б):

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X^2}}.$$

Очевидно, що на частоті резонансу $\omega = \omega_0$, виконуються такі співвідношення. $\varphi(\omega_0) = 0$, $I(\omega_0) = E/R$.

11.4 Векторна діаграма напруг при резонансі

Запишемо для послідовного резонансного контуру рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$\underline{E} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C.$$

Якщо частота дорівнює резонансній частоті $\omega = \omega_0$, то

$$\underline{E} = \underline{U}_{R0} + \underline{U}_{L0} + \underline{U}_{C0},$$

де $U_{R0} = I_0 R = (\underline{E}/R)R = \underline{E}$ - напруга на опорі R при резонансі;

$U_{L0} = I_0 j\omega L = (\underline{E}/R)j\rho = j\underline{E}\rho/R = j\underline{E}Q$ - напруга на індуктивності;

$U_{C0} = I_0 / j\omega_0 C = (\underline{E}/R)(-j/\omega_0 C) = -j\underline{E}\rho/R = -j\underline{E}Q$ - напруга на ємності при резонансі.

У відповідності зі здобутими виразами на рис.11.5в зображено векторну діаграму струму та напруг при резонансі. Як видно з рисунку, при $\omega = \omega_0$ виконуються такі співвідношення:

1) напруга на опорі R збігається за фазою зі струмом I , а модуль U_R дорівнює значенню E ; напруги на реактивних елементах рівні між собою за модулем та протилежні за напрямком;

2) за абсолютною величиною напруги на реактивних елементах послідовного резонансного контуру в Q разів перевищують значення ЕРС, яка діє на вході $U_{L0} = U_{C0} = QE$. Таким чином, у послідовному контурі спостерігається резонанс напруг.

Резонанс напруг - явище резонансу на ділянці електричного кола, до якого входять послідовно з'єднані індуктивний та ємнісний елементи.

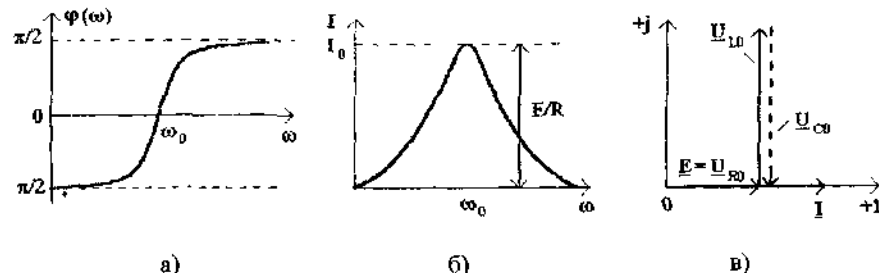


Рисунок 11.5

12 РЕЗОНАНСНІ КРИВІ СТРУМУ ТА НАПРУГИ ПОСЛІДОВНОГО КОНТУРУ

12.1 Резонансна крива струму. Абсолютна, відносна та узагальнена розстройки

Криві залежності струму, напруги і кута зсуву за фазою від частоти генератора називаються *резонансними кривими*. Рівняння резонансної кривої струму має вигляд.

$$I = \frac{E}{\sqrt{X^2 + R^2}}. \quad (12.1)$$

Рівняння (12.1) можна записати інакше:

$$I = \frac{E}{R\sqrt{1 + (X/R)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + (X/R)^2}}$$

Поділивши цей вираз на резонансне значення струму I_0 , матимемо нормовану резонансну криву струму:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (X/R)^2}}. \quad (12.2)$$

На рис.12.1а,б показано резонансні криві струмів відповідно до виразів (12.1) та (12.2) для різних значень добротності $Q_1 > Q_2$.

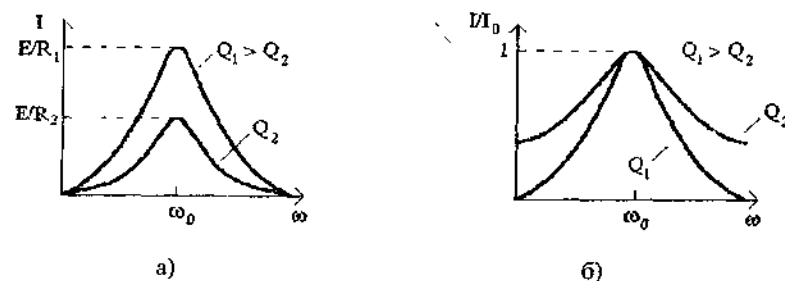


Рисунок 12.1

При розрахунках резонансних контурів у радіотехнічних пристроях досліджують їх поведінку головним чином в області частот, близьких до резонансної частоти ω_0 , тобто коли частота генератора дорівнює:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega; \quad f = f_0 + \Delta f,$$

де $\Delta\omega(\Delta f)$ - абсолютна розстройка є малою величиною порівняно з резонансною частотою. Розстройка може бути як додатною ($\omega > \omega_0$), так і від'ємною ($\omega < \omega_0$).

Відношення $\Delta\omega/\omega_0 (\Delta f/f_0)$ називається відносною розстройкою. Величина $X/R = \xi$ називається узагальненою розстройкою. З урахуванням введених позначень формула (12.2) буде такою:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (12.3)$$

Знайдемо формули для розрахунку узагальненої розстройки:

$$\begin{aligned} \xi = \frac{X}{R} &= \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{\omega L \omega_0}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0 \omega C} \right) = \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 \omega LC} \right) = \\ &= \frac{\rho}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0^2}{\omega_0 \omega} \right) = \frac{\rho}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \end{aligned}$$

Враховуючи, що $\rho/R = Q$, отримуємо точну формулу для обчислення ξ :

$$\xi = \frac{\rho}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Але для частот, близьких до резонансної частоти контуру $\omega = \omega_0$, виконуються такі приблизні співвідношення: $\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0$; $\omega_0 \omega \approx \omega_0^2$

Тоді

$$\xi = Q \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = Q \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0 \omega} \approx Q \frac{\Delta\omega 2\omega_0}{\omega_0^2}.$$

Отже, кінцева формула для знаходження ξ матиме вигляд

$$\xi = Q \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Резонансна крива може бути подана як функція абсолютних, так і функція відносних розстроек $\Delta\omega/\omega_0$ (рис. 12.2а):

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1+(2Q\Delta\omega/\omega_0)^2}}. \quad (12.4)$$

Якщо по осі абсцис відкладати узагальнену розстройку ξ , отримаємо узагальнену частотну характеристику (12.3), яка поєднує всі можливі варіанти контурів з будь-якою величиною Q (рис. 12.2б). Крива (12.3) не залежить від добротності.

Фазова характеристика контуру також може бути виражена як функція відносної чи узагальненої розстройки:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \xi = \arctg \frac{2Q\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (12.5)$$

Фазові характеристики типу (12.5) зображено на рис. 12.3.

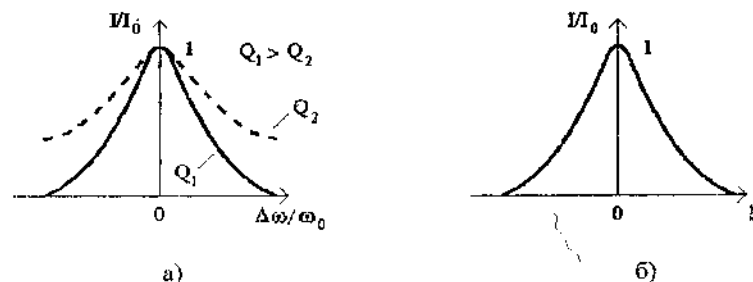


Рисунок 12.2

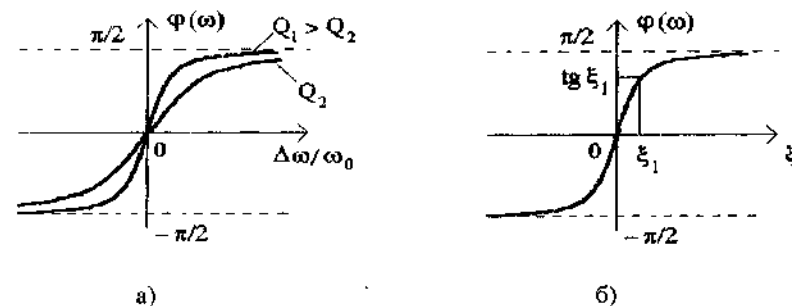


Рисунок 12.3

12.2 Резонансні криві напруг

Резонансна крива напруги - це залежність модуля діючого або амплітудного значення напруги від частоти. Для послідовного резонансного контуру згідно із законом Ома виконуються такі співвідношення для напруг: $\underline{U}_R = \underline{I}R$; $\underline{U}_L = \underline{I}j\omega L$; $\underline{U}_C = \underline{I}/j\omega C$. Підставимо сюди значення струму

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + jX} = \frac{\underline{E}}{R(1 + j\xi)}.$$

Тоді матимемо

$$\underline{U}_R = \frac{\underline{E}}{R(1 + j\xi)} R = \frac{\underline{E}}{(1 + j\xi)}; \quad \underline{U}_L = \frac{\underline{E}j\omega L}{R(1 + j\xi)}; \quad \underline{U}_C = \frac{\underline{E}}{R(1 + j\xi)j\omega C}.$$

Відповідно, модулі здобутих виразів є резонансними кривими напруг послідовного резонансного контуру:

$$U_R = \frac{E}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad (12.6)$$

$$U_C = \frac{E}{R\omega C\sqrt{1+\xi^2}}; \quad (12.7)$$

$$U_L = \frac{E\omega L}{R\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (12.8)$$

Аналізуючи графіки, які побудовані за цими формулами (рис.12.4), можна зробити такі висновки:

1. Крива U_R збігається з резонансною кривою струму з точністю до постійного множника. При $\omega = \omega_0$; $\xi = 0$, $U_R = E$, при $\omega \rightarrow 0, \infty$; $\xi \rightarrow \infty$, $U_R \rightarrow 0$.

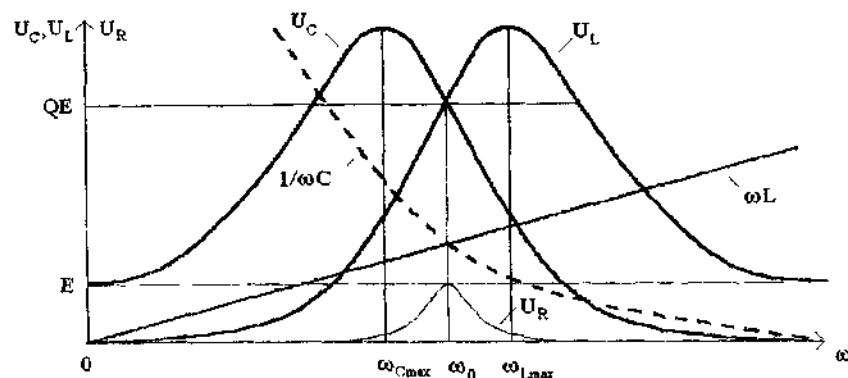


Рисунок 12.4

2. Оскільки крива I є симетричною, а крива напруги U_C здобута множенням кривої струму на коефіцієнт $1/\omega C$, з рисунку видно, що максимум U_C зміщується у бік частот, менших за резонанс.

Можна показати, що $\omega_{C\max} = \omega_0 \sqrt{1-0,5d^2}$, де d - загасання.

При $\omega \rightarrow 0$ напруга $U_C(0) = E$ (рис.12.5а). При $\omega \rightarrow \infty$ напруга $U_C(\infty) = 0$ (рис.12.5б).

3. Оскільки крива U_L здобута множенням симетричної кривої струму I на коефіцієнт ωL , то максимум U_L зміщується у бік частот, більших за резонансну частоту ω_0 . Можна показати, що

$$\omega_{L\max} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-0,5d^2}}.$$

Як видно з рис.12.5, значення напруги на індуктивності для нульової та нескінченної частот дорівнюють: $U_L(0) = 0$; $U_L(\infty) = E$.

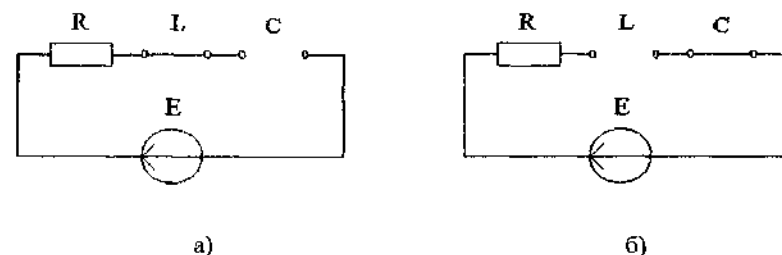


Рисунок 12.5

12.3 Вибірність резонансного контуру. Смуга пропускання

Вибірність або селективність - це властивість контуру з набору коливань різних частот виділяти (пропускати) коливання поблизу резонансної частоти.

Те, наскільки контур є вибірним, можна оцінити за характером резонансних кривих: чим "гостріше" резонансна крива, тим більш вибірним є контур. Формула (12.4) показує, що чим більша добротність Q , тим вища вибірність.

Частотні характеристики резонансного контуру за формою значно відрізняються від ідеальної прямокутної характеристики. Тому частоти, які пропускаються (виділяються) контуром, визначають умовно, вводячи поняття смуги пропускання

Смуга пропускання (Π) - це область частот поблизу резонансної частоти, у межах якої струм (напруга) зменшуються не більш, ніж у $\sqrt{2}$ разів порівняно з резонансним значенням (рис.12.6). Інакше смуга пропускання - це смуга частот, у межах якої загасання залишається меншим за певне значення.

Аби визначити смугу пропускання, скористаємось формулою (12.3). За визначенням смуги пропускання $I/I_0 = 0,707$. Тобто

$$0,707 = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}},$$

звідки знаходимо два значення узагальненої розстройки, які відповідають межах смуги пропускання. $\xi_{\Gamma P} = \pm 1$ (рис.12.6а).

Аби визначити абсолютне значення смуги пропускання $\Pi_\omega = 2\Delta\omega_{0,7} = \omega_2 - \omega_1$ (рис.12.6б), скористаємось формулою $\xi = 2\Delta\omega Q/\omega_0$. Враховуючи, що $\xi = 1$, знаходимо зв'язок між смугою пропускання та добротністю:

$$P_{\omega} = 2\Delta\omega_{0,7} = \omega_0 / Q; \quad P_f = 2\Delta f_{0,7} = f_0 / Q.$$

Для низькодобротних кривих абсолютні розстроїки $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2$ і $2\Delta\omega_{0,7} = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2$. Для високодобротних кривих абсолютні розстроїки приблизно однакові, тому $P_{\omega} = 2\Delta\omega_{0,7} = 2\Delta\omega_1$.

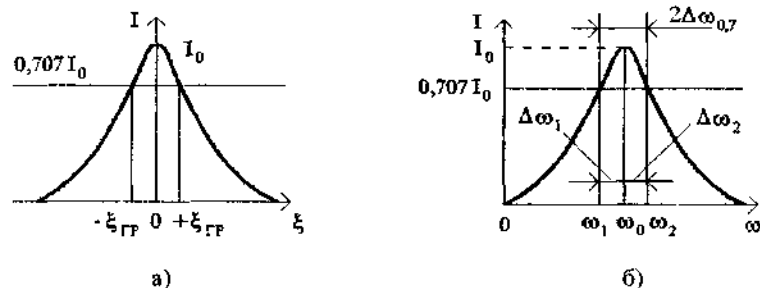


Рисунок 12.6

12.4 Вплив опорів джерела та навантаження на вибірні властивості послідовного контуру

1. Вплив опору джерела (генератора).

Резонансні криві струму та напруги в контурі були знайдені за таких припущень: ЕРС джерела $E = \text{const}$, внутрішній опір $R_i = 0$. З'ясуємо, як впливає опір R_i реального генератора на властивості контуру.

Еквівалентну схему (рис. 12.7а) можна розглядати як резонансний контур, що має активний опір $R_i + R$ і живиться в точках 1-1' незмінною напругою. Для цього контуру можна застосувати усі встановлені вище співвідношення. Зокре-

$$\text{ма } Q_E = \frac{\rho}{R + R_i} = \frac{\rho}{R} \frac{1}{1 + R_i/R} = \frac{Q}{1 + R_i/R}. \quad (12.9)$$

Таким чином, чим більший внутрішній опір R_i , тим менша еквівалентна добротність кола і ширша смуга пропускання. Отже, із збільшенням опору R_i вибірність системи погіршується, тобто з точки зору вибірності послідовний резонансний контур доцільно застосовувати у разі виконання співвідношення $R_i \ll R$.

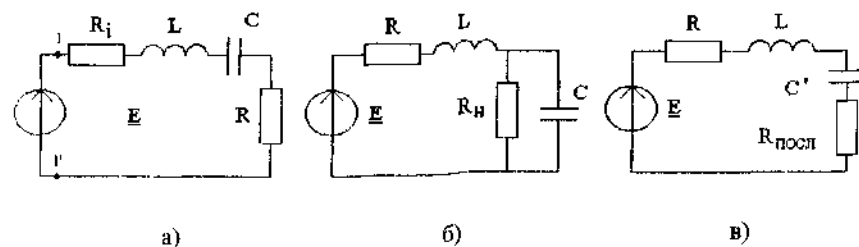


Рисунок 12.7

2 Вплив опору навантаження (рис. 12.7б).

Перетворимо паралельне з'єднання елементів C та R_H (B та G) у послідовне за формулами (10.1): $R_{\text{посл}} = \frac{G}{G^2 + B^2}$; $X_{\text{посл}} = -\frac{B}{G^2 + B^2}$.

З урахуванням співвідношень $G = 1/R_H$, $B = \omega C$, матимемо

$$R_{\text{посл}} = \frac{1/R_H}{1/R_H^2 + (\omega C)^2}.$$

На частоті, близькій до резонансної, одержимо:

$$R_{\text{посл}} = \frac{1/R_H}{1/R_H^2 + (\omega_0 C)^2} = \frac{R_H}{1 + (R_H C \omega_0)^2}.$$

Якщо $Q = \rho/R \gg 1$, на резонансній частоті виконуються співвідношення: $\rho \gg R$, $(R_H C \omega_0)^2 \gg 1$. Тоді значенням $1/R_H$ можна знехтувати:

$$R_{\text{посл}} = \frac{1}{R_H (\omega_0 C)^2} = \frac{\rho^2}{R_H}; \quad X_{\text{посл}} = \frac{\omega_0 C}{1/R_H^2 + (\omega_0 C)^2} = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (12.10)$$

Знаючи параметри послідовної еквівалентної схеми (рис. 12.8в), $C' = C$, $R_E = R + R_{\text{посл}}$, одержуємо

$$Q_E = \frac{\rho}{R_E} = \frac{\rho}{R + R_{\text{посл}}} = \frac{\rho}{R + \rho^2/R_H} = \frac{\rho/R}{1 + \rho^2/RR_H};$$

$$Q_E = \frac{Q}{1 + \rho^2/RR_H}. \quad (12.11)$$

Чим менший опір R_H , тим менша еквівалентна добротність Q_E і тим ширша смуга пропускання. Таким чином, для покращення вибірних властивостей кола необхідно виконати умову: $\rho^2/RR_H \ll 1$; $R_H \gg \rho^2/R$.

13 ПАРАЛЕЛЬНИЙ РЕЗОНАНСНИЙ КОНТУР

Паралельний резонансний контур - резонансний контур, що складається з індуктивного та ємнісного елементів, з'єднаних паралельно (рис.13.1а). Опір виткання конденсатора R'_C може бути перерахований у послідовно з'єднаний опір $R_C = \rho^2 / R'_C$ (рис.13.1б). Так само, як і для послідовного контуру, параметри R, L, C вважаються первинними параметрами паралельного контуру, причому активний опір дорівнює сумі опорів котушки та конденсатора при послідовному обході: $R = R_L + R_C$.

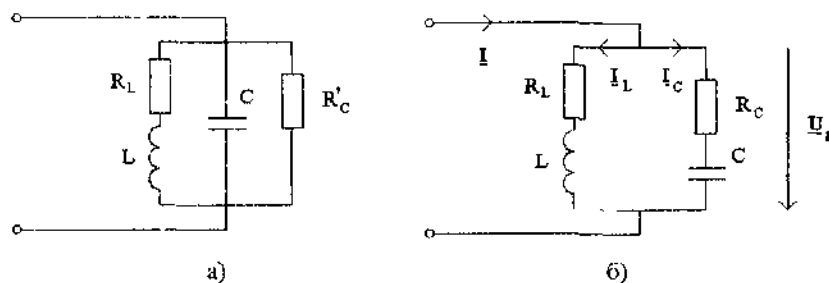


Рисунок 13.1

Позначимо опори паралельних віток $Z_1 = R_L + j\omega L$, $Z_2 = R_C + 1/j\omega C$ та знайдемо еквівалентний опір паралельного контуру

$$Z_E = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(R_L + j\omega L)(R_C + 1/j\omega C)}{R_L + R_C + j\omega L + 1/j\omega C}.$$

Поблизу резонансної частоти $\omega \approx \omega_0$, доданки $1/\omega C$ та ωL дорівнюють характеристичному опору $\rho = \omega_0 L = 1/\omega_0 C$. Оскільки для резонансного контуру виконується співвідношення $\rho \gg R_L$, $\rho \gg R_C$, доданками R_L і R_C у чисельнику можна знехтувати:

$$Z_E = \frac{L/C}{R_L + R_C + j(\omega L - 1/\omega C)}. \quad (13.1)$$

За визначенням, резонанс у колі спостерігається, якщо опір кола є чисто активним. Це стає можливим, якщо $\omega_0 L - 1/\omega_0 C = 0$.

Знайдемо вторинні параметри паралельного контуру.

1. Резонансна частота: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

2. Характеристичний опір: $\rho = \omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C}$.

3. Добротність: $Q = \rho/R$, $R = R_L + R_C$.

4. Еквівалентний резонансний опір

$$Z_{0E} = \rho^2 / R; \quad Z_{0E} = (\rho/R)\rho = Q\rho; \quad Z_{0E} = \frac{\rho^2 R}{RR} = Q^2 R.$$

13.1 Частотні характеристики повного опору паралельного контуру

Аналогічно послідовному контуру повний опір паралельного резонансного контуру визначається як модуль вхідного опору, який позначено вище Z_E .

Згідно з формулою (13.1)

$$Z_E = \frac{\rho^2}{R + jX} = \frac{\rho^2}{R(1 + j\xi)} = \frac{Z_{0E}}{1 + j\xi}, \quad (13.2)$$

де $X = \omega L - 1/\omega C$ - реактивний опір, $\xi = X/R$ - узагальнена розстройка.

Запишемо Z_E у показниковій формі:

$$Z_E = \frac{Z_{0E}}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi} = Z_E e^{j\varphi}, \quad (13.3)$$

де Z_E - модуль Z_E - повний опір контуру;

φ - аргумент Z_E - фазова характеристика.

Знайдемо активну та реактивну складові опору Z_E :

$$Z_E = \frac{Z_{0E}}{1 + j\xi} \frac{1 - j\xi}{1 - j\xi} = \frac{Z_{0E} - j\xi Z_{0E}}{1 + \xi^2} = \frac{Z_{0E}}{1 + \xi^2} - j \frac{Z_{0E}\xi}{1 + \xi^2},$$

звідки

$$R_E = \frac{Z_{0E}}{1 + \xi^2}; \quad X_E = j \frac{Z_{0E}\xi}{1 + \xi^2}. \quad (13.4)$$

Графіки частотних залежностей, які побудовано за (13.2) - (13.4), зображено на рис.13.2. Проаналізуємо ці графіки. Вид кривих $Z_E(\xi)$, $R_E(\xi)$ та $\varphi(\xi)$ безпосередньо впливає з аналітичного запису.

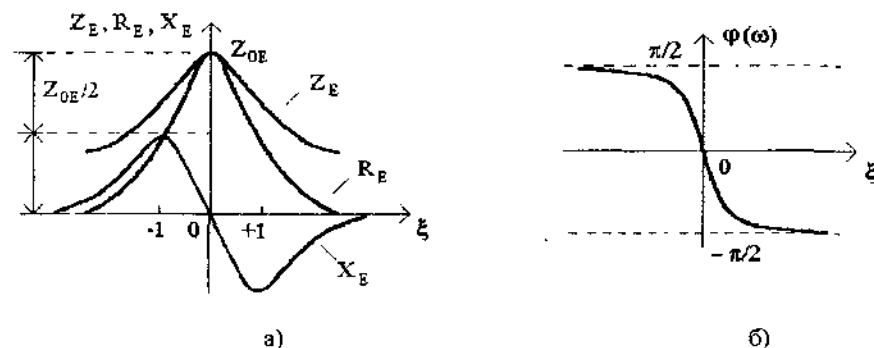


Рисунок 13.2

Розглянемо більш докладно графік $X_E(\xi) \cdot 1$ в області малих розстроєк ($\xi \ll 1$), $X_E \approx -Z_{0E}$, тобто це пряма з від'ємним нахилом, 2) при $\xi = 0$ $X_E = 0$, 3) в області великих розстроєк $X_E = -Z_{0E}/\xi$, тобто це гіпербола; 4) при $\xi < 0$ $X_E > 0$, отже на низьких частотах $\omega < \omega_0$ характер реактивності визначає індуктивна вітка; при $\xi > 0$ $X_E < 0$, отже на частотах $\omega > \omega_0$ характер реактивності опору X_E визначається ємністю.

13.2 Струми та напруги у паралельному контурі.

Векторна діаграма струмів

Розглянемо паралельний контур виду (рис.13.16) Знайдемо струми віток I_L , I_C та напругу на контурі U_K , вважаючи відомим струм загальної вітки I . Розрахунок зробимо для діючих значень.

$$\text{Згідно з законом Ома } U_K = I Z_E; \quad I_L = \frac{U_K}{R_L + j\omega L}; \quad I_C = -\frac{U_K}{R_C - j/\omega C}.$$

На частоті резонансу $\omega = \omega_0$ виконуються співвідношення: $Z_{0E} = \rho^2/R$; $\rho = \omega_0 L = 1/\omega_0 C \gg R_L(R_C)$. Тоді резонансні значення струмів та напруги будуть такими. $U_{K0} = I_0 \rho^2/R$;

$$I_{L0} = \frac{U_{K0}}{R_L + j\rho} \approx I_0 \frac{\rho^2}{R_L \rho} = -jQ I_0; \quad I_{C0} = \frac{U_{K0}}{R_C - j\rho} \approx -I_0 \frac{\rho^2}{R_C \rho} = jQ I_0. \quad (13.5)$$

Оскільки діюче (амплітудне) значення струмів у вітках контуру в Q разів перевищує діюче (амплітудне) значення струму в загальній вітці, резонанс у паралельному контурі зветься резонансом струмів.

Отже, резонанс струмів - явище резонансу на ділянці електричного кола, що має паралельно з'єднані індуктивний та ємнісний елементи.

Відповідно до знайдених виразів на рис.13.3 наведено векторну діаграму струмів і напруги у паралельному контурі.

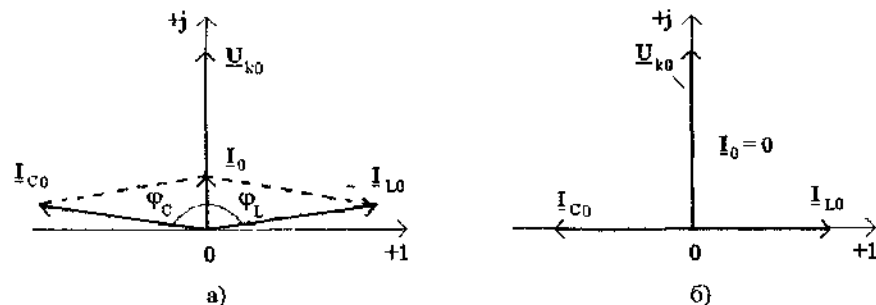


Рисунок 13.3

Діаграма (рис.13.3а) зображена для випадку, коли $R_L = R_C \neq 0$. У такому разі фазові кути ϕ_L та ϕ_C близькі до значення 90° , але не дорівнюють йому: $\phi_L = \arctg(\rho/R_L)$, $\phi_C = \arctg(\rho/R_C)$. Загальний струм за величиною вельми малий, а за фазою збігається з напругою U_{K0} . При резонансі виконується співвідношення $I_{L0} \approx I_{C0} \approx Q I_0 = I_K$. Струм I_K називають струмом контуру.

Векторна діаграма (рис.13.3б) відповідає ідеальному контуру без втрат ($R_L = R_C = 0$), який настроєно в резонанс. У такому випадку струми I_{L0} та I_{C0} точно дорівнюють один одному і протилежні за фазою: $I_{L0} = I_{C0} = I_K = U_{K0}/\rho$. Тому струм у нерозгалуженій ділянці кола дорівнює нулю. Але при цьому в самому контурі циркулює струм I_K .

13.3 Резонансні криві паралельного контуру

Перейдемо від отриманої вище частотної характеристики вхідного опору (13.2) до характеристики напруги на контурі. Будемо вважати, що діюче значення струму, який живить контур, незмінне. $I = const$. Така ситуація еквівалентна живленню контуру генератором струму ($I = I_r$, $R_i \rightarrow \infty$). Комплексне діюче значення напруги на контурі: $U_K = I Z_E = I \frac{Z_{0E}}{1 + j\xi^2}$.

Якщо $I = const$, напруга на контурі залежить від частоти так само, як вхідний опір (з точністю до постійного коефіцієнта). Тоді резонансна крива напруги на контурі буде такою: $U_K = I \frac{Z_{0E}}{\sqrt{1 + \xi^2}}$. (13.6)

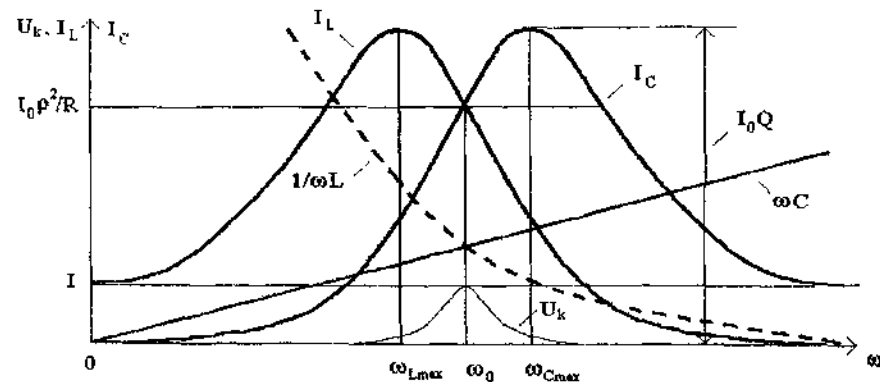


Рисунок 13.4

Рівняння резонансних кривих струмів знаходимо з виразів (13.5) за умови, що добротність контуру достатньо висока ($Q \gg 1$, $\rho \gg R$):

$$I_L = \frac{U_K}{R_L + j\omega L} = -j \frac{U_K}{\omega L}; \quad I_L = \frac{IZ_{0E}}{\omega L \sqrt{1+\xi^2}}; \quad (13.7)$$

$$I_C = \frac{U_K}{R_C - j/\omega C} = j \frac{U_K}{\omega C}; \quad I_C = \frac{I\omega CZ_{0E}}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (13.8)$$

Проаналізуємо здобуті вирази та відповідні графіки (рис. 13.4):

1) оскільки крива $U_K(\omega)$ є симетричною, а крива струму I_L здобута множенням на коефіцієнт $1/\omega L$, то максимум I_L зміщується у бік частот, менших за резонансну $\omega < \omega_0$;

2) при $\omega \rightarrow 0$ $I_L(0) = I$ (рис. 13.5,а); при $\omega \rightarrow \infty$ $I_L(\infty) = 0$ (рис. 13.5б).

3) оскільки крива $I_C(\omega)$ здобута множенням симетричної кривої $U_K(\omega)$ на коефіцієнт ωC , то максимум кривої $I_C(\omega)$ зміщується у бік частот, більших за резонансну $\omega > \omega_0$. Граничні значення струму $I_C(\omega)$ такі: $I_C(0) = 0$ (рис. 13.5а); $I_C(\infty) = I$ (рис. 13.5,б).

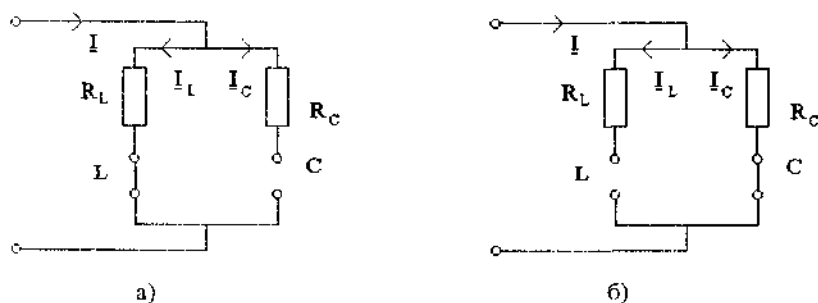


Рисунок 13.5

13.4 Вплив внутрішнього опору генератора та опору навантаження на вибірні властивості паралельного контуру

За реальних умов, коли контур живиться реальним генератором, струм I змінюється із зміною напруги на контурі. Це може суттєво вплинути на вигляд частотних характеристик. У цьому випадку для дослідження вибірних властивостей контуру доцільно замінити джерело живлення еквівалентною схемою з ідеальним джерелом струму (рис. 13.6).

Коло (рис. 13.6б) можна розглядати як деякий контур, що шунтується активним опором $R_{ш} = \frac{R_i R_H}{R_i + R_H}$ і живиться в точках 1-1' незмінним струмом I_Γ .

Якщо опір $R_{ш}$, який увімкнено паралельно контуру, перерахувати у послідовний опір $R_{посл}$ за формулою (12.10), добротність еквівалентного контуру (праворуч точок 1-1') становитиме

$$Q_E = \frac{\rho}{R + R_{посл}} = \frac{\rho}{R + \rho^2 / R_{ш}} = \frac{Q}{1 + \rho^2 / (R R_{ш})} = \frac{Q}{1 + Z_{0E} / R_{ш}}, \quad (13.9)$$

де $R = R_L + R_C$.

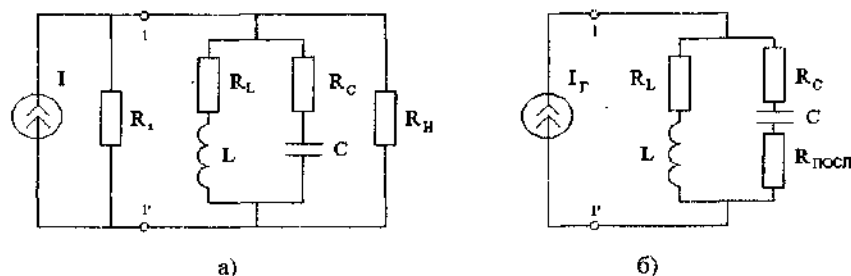


Рисунок 13.6

Еквівалентна добротність Q_E залежить від власної добротності $Q = Z_{0E} / \rho$ та від співвідношення опору Z_{0E} і внутрішнього опору генератора R_i (або опору навантаження або R_H та R_i разом). Із зменшенням R_i (R_H) еквівалентна добротність зменшується, тобто смуга пропускання збільшується: $2\Delta\omega_{0,7E} = \omega_0 / Q_E$.

Рівняння резонансної кривої напруги з урахуванням впливу R_i (R_H) матиме вигляд:

$$U_K = I \frac{Z_{0E}}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{Z_{0E}}{\sqrt{1+(2Q_E \Delta\omega / \omega_0)^2}}.$$

Ця характеристика наближається до ідеальної резонансної кривої (13.6) лише при R_i (R_H) $\rightarrow \infty$. Якщо ж $R_i \rightarrow 0$, напруга на контурі взагалі не залежить від частоти, вона залишається рівною значенню ЕРС джерела E .

Отже, на відміну від послідовного контуру, використання паралельного резонансного контуру доцільно з точки зору вибірності тільки в тому разі, коли внутрішній опір генератора достатньо великий ($R_i \gg Z_{0E}$). При цьому слід мати на увазі, що із збільшенням R_i власне величина напруги на контурі зменшується, оскільки

$$U_{K0} = I_0 Z_{0E} = \frac{E Z_{0E}}{R_i + Z_{0E}}.$$

14 СКЛАДНИЙ ПАРАЛЕЛЬНИЙ КОНТУР. ИНДУКТИВНО-ЗВ'ЯЗАНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

Схема паралельного резонансного контуру може бути подана в узагальненому вигляді (рис 14.1а). Для резонансної частоти $\omega = \omega_0$ повинна виконуватися умова

$$X_1 + X_2 = 0. \quad (14.1)$$

У схемі (рис.14.1б), яку було розглянуто раніше, до однієї вітки (X_1) входить індуктивність, а до іншої (X_2) - ємність. Така схема зветься контуром першого виду (або контуром з повним увімкненням, або простим паралельним контуром). Загалом опори X_1 та X_2 можуть являти собою ті чи інші сполучення індуктивностей та ємностей. Але вони повинні складати схему таким чином, щоб виконувалася умова резонансу (14.1).

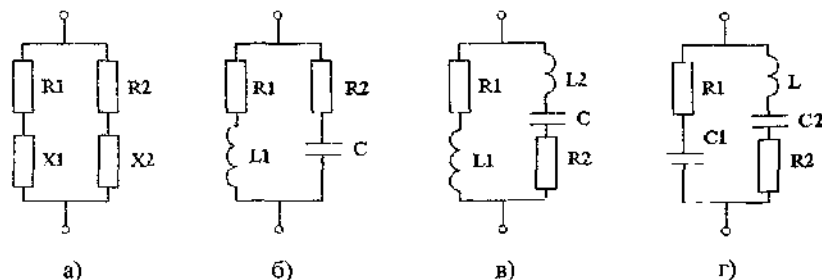


Рисунок 14.1

На рис 14.1в наведено варіант схеми, в якій одна вітка містить тільки індуктивність L_1 , а інша - індуктивність L_2 та ємність C . Таку схему називають контуром другого виду або контуром з розподіленою індуктивністю. В контурі третього виду (з розподіленою ємністю) (рис.14.1г) до однієї вітки увімкнено тільки ємність C_1 , а до іншої - ємність C_2 та індуктивність L . Контури другого та третього видів зветься також складними або контурами з частковим увімкненням.

Знайдемо вхідний (еквівалентний) опір складного контуру

$$\underline{Z}_E^* = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2)}.$$

Для контурів з високою добротністю $\rho \gg R$. Тоді

$$\underline{Z}_E^* \approx \frac{jX_1 jX_2}{R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2)}.$$

Обчислимо еквівалентний резонансний опір. Оскільки при $\omega = \omega_0$ виконується умова (14.1), матимемо

$$\underline{Z}_{0E}^* \approx \frac{jX_{10} jX_{20}}{R_1 + R_2 + j(X_{10} + X_{20})} = \frac{-X_{10} X_{20}}{R} = \frac{-X_{10} X_{20}}{R} = \frac{X_{10}^2}{R},$$

де $R = R_1 + R_2$ - активний опір паралельного контуру при послідовному обході, X_{10} - реактивний опір вітки, яка містить реактивність одного характеру.

Позначимо величину $X_{10}/\rho = p$ - коефіцієнт увімкнення і запишемо вираз для еквівалентного резонансного опору складного контуру:

$$\underline{Z}_{0E}^* = \frac{X_{10}^2}{R} = \frac{X_{10}^2}{\rho^2} \frac{\rho^2}{R} = \rho^2 \frac{p^2}{R} = p^2 \underline{Z}_{0E}. \quad (14.2)$$

Знайдемо формули для розрахунку резонансної частоти та коефіцієнта увімкнення для контурів другого і третього видів.

1. Контур II виду. Резонансна частота визначається з формули (14.1): $\omega_0 L_1 + \omega_0 L_2 - 1/\omega_0 C = 0$, звідки маємо

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (14.3)$$

де $L = L_1 + L_2$ - повна індуктивність контуру.

Знаючи резонансну частоту, знаходимо коефіцієнт увімкнення:

$$p = \frac{\omega_0 L_1}{\omega_0 (L_1 + L_2)} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{L_1}{L} < 1.$$

2. Контур III виду. Формула (14.1) є справедливою і в цьому разі: $\omega_0 L - 1/\omega_0 C_1 - 1/\omega_0 C_2 = 0$. Отже, резонансна частота становитиме

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1 C_2 / (C_1 + C_2)}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (14.4)$$

де $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ - повна ємність контуру.

Коефіцієнт увімкнення дорівнюватиме:

$$p = \frac{1/\omega_0 C_1}{1/[\omega_0 C_1 C_2 / (C_1 + C_2)]} = \frac{1/C_1}{(C_1 + C_2)/C_1 C_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C}{C_1} < 1.$$

Оскільки коефіцієнт увімкнення менший одиниці, робимо висновок, що часткове увімкнення дозволяє у p^2 разів зменшити резонансний опір паралельного контуру порівняно з повним увімкненням.

14.1 Частотні характеристики повного опору складних паралельних контурів

Характерною рисою складних паралельних контурів є те, що поряд з резонансом струмів у контурі можливі резонанси напруг у вітках. Тому на відміну від простого контуру, частотна залежність повного опору складного контуру має два екстремуми (рис. 14.2а відповідає контуру другого, а рис. 14.2б - контуру третього виду).

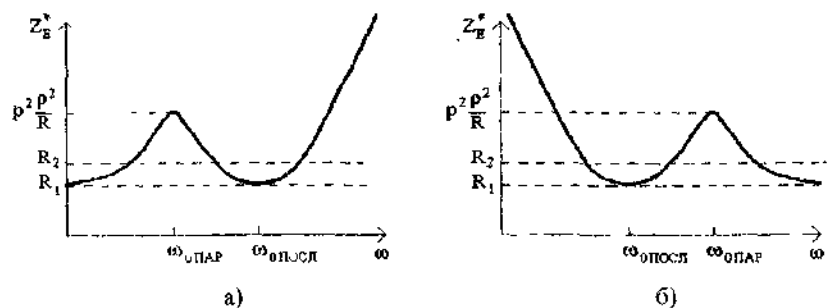


Рисунок 14.2

Для контуру II виду частота паралельного резонансу визначається за формулою (14.3): $\omega_{0ПАР} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}$, а частота послідовного резонансу - за формулою $\omega_{0ПОСЛ} = \frac{1}{\sqrt{L_2C}}$.

З цих співвідношень видно, що оскільки $L_1 + L_2 > L_2$, то $\omega_{0ПОСЛ} > \omega_{0ПАР}$. Для контуру III виду за формулою (14.4) знаходимо

$$\omega_{0ПАР} = \frac{1}{\sqrt{LC_1C_2(C_1 + C_2)}}; \quad \omega_{0ПОСЛ} = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}$$

Оскільки $C_2 > C_1$, то $\omega_{0ПОСЛ} < \omega_{0ПАР}$.

Висновок. Частотні характеристики складного контуру дозволяють використовувати його для пропускання сигналів одних частот та послаблення сигналів інших частот.

14.2 Індуктивно-зв'язані електричні кола

Зв'язані електричні кола - електричні кола, процеси в яких впливають один на одного через спільне магнітне чи електричне поле.

В індуктивно-зв'язаних електричних колах процеси впливають один на одного через спільне магнітне поле.

1. Загальні відомості про індуктивно-зв'язані кола.

Питання щодо магнітного поля котушки та її індуктивності було розглянуто в першій лекції. Нагадаємо, що для індуктивної котушки, яка складається з N витків, потокозчеплення (тобто сума магнітних потоків, зчеплених з провідниками елемента електричного кола) визначається у такий спосіб:

$$\Psi = N\Phi = Li. \quad \text{ЕРС самоіндукції пов'язана з } \Psi: e = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{di}{dt}.$$

Розглянемо дві котушки, які розміщено одна поблизу іншої (рис. 14.3). Можливі два випадки:

- 1) Струм i_1 проходить тільки через котушку 1, котушка 2 розімкнена ($i_2 = 0$). Тоді повний потік самоіндукції становитиме:

$$\Phi_{11} = \Phi_{1S} + \Phi_{12},$$

де Φ_{1S} - потік розсіювання (частина потоку Φ_{11} , який не пронизує витки котушки 2); Φ_{12} - потік взаємодукції (потік струму i_1 , але зчеплений з витками N_2).

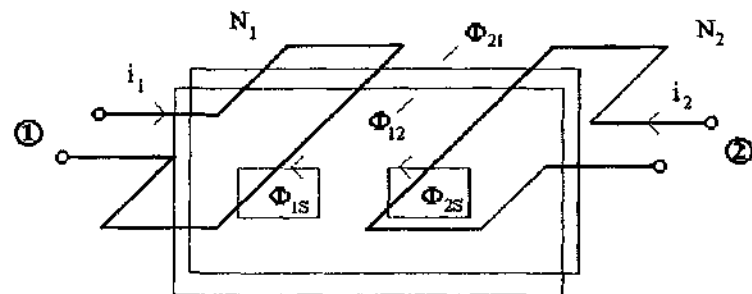


Рисунок 14.3

Потокозчеплення Ψ_{11} , ЕРС самоіндукції e_{11} та напруга u_{11} визначаються за формулами $\Psi_{11} = \Phi_{11}N_1 = L_1i_1$; $e_{11} = -\frac{d\Psi_{11}}{dt} = -L_1\frac{di_1}{dt}$; $u_{11} = -e_{11} = L_1\frac{di_1}{dt}$;

- 2) Струми проходять одночасно через обидві котушки ($i_1 \neq 0, i_2 \neq 0$). У цьому випадку загальний магнітний потік котушки 1 становитиме:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} = \Phi_{1S} + \Phi_{12} + \Phi_{21},$$

де Φ_{21} - потік взаємодукції струму i_2 , зчеплений з витками N_1 .

Повне потокозчеплення котушки 1 становитиме:

$$\Psi_1 = N_1\Phi_1 = N_1\Phi_{11} + N_1\Phi_{21} = \Psi_{11} + \Psi_{21} = L_1i_1 + M_{21}i_2,$$

де Ψ_{21} - потіокзчеплення взаємодуції, L_1 - коефіцієнт самоіндукції (або індуктивність); M_{21} - коефіцієнт взаємодуції (або взаємна індуктивність).

Взаємна індуктивність - відношення значення потіокзчеплення взаємодуції одного електричного кола до значення струму іншого кола, що зумовлює це потіокзчеплення: $M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}$.

Аналогічно можна записати повне потіокзчеплення котушки 2:

$$\Psi_2 = N_2 \Phi_2 = L_2 i_2 + M_{12} i_1.$$

Оскільки для лінійних електричних кіл виконується рівність $M_{21} = M_{12} = M$, для сумарних ЕРС і напруг, які наводяться на затискачах кожної з котушок, можна записати:

$$\begin{aligned} e_1 &= -L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt}; & e_2 &= -L_2 \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt}, \\ u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; & u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Оскільки у загальному випадку потоки само- та взаємодуції можуть як підсумовуватися, так і відніматися, у формулі вказується знак "±". Знак залежить від того, яким чином увімкнено котушки: зустрічно чи узгоджено.

2. *Одноименні затискачі. Зустрічне та узгоджене увімкнення індуктивно-зв'язаних котушок.*

Два затискачі, які належать двом різним, індуктивно-зв'язаним котушкам, звуться одноименими, якщо при однаковому напрямі струмів відносно цих затискачів магнітні потоки само- та взаємодуції підсумовуються.

Узгодженим (зустрічним) називається увімкнення індуктивних котушок, за якого потоки само- та взаємодуції підсумовуються (віднімаються).

На рис.14.4 зображено дві котушки, які розміщено близько одна до одної та з'єднано узгоджено. В кожній з цих котушок при зміні величини струму індукуються як ЕРС самоіндукції, так і ЕРС взаємодуції. Згідно з (14.5) сумарна індукована напруга в кожній котушці визначається за формулами:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

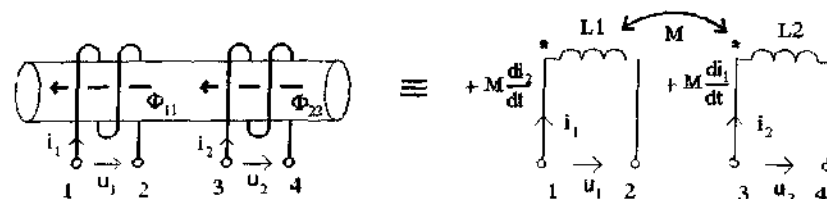


Рисунок 14.4

На рис.14.5 дві котушки з'єднані зустрічно. Їх струми та магнітні потоки мають протилежні напрями, тому й індуковані в них ЕРС та напруги взаємодуції мають протилежні напрями:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

Примітка. Якщо в схемі (рис.14.5) змінити напрям другого струму на протилежний (i_2'), то магнітний потік також змінить напрям (Φ_{22}'), і з'єднання котушок стане узгодженим

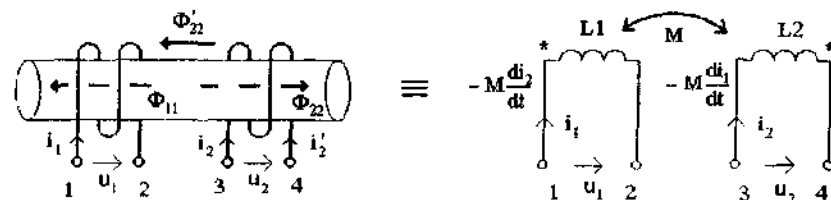


Рисунок 14.5

3. Коефіцієнт зв'язку.

Знайдемо співвідношення між напругами u_1 та u_2 індуктивно-зв'язаних котушок 1 і 2. Розглянемо три варіанти:

1) $i_1 \neq 0, i_2 = 0$ Тоді $u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$; $u_2 = M \frac{di_1}{dt}$; коефіцієнт передачі (або коефіцієнт ступеня зв'язку котушки 1 з котушкою 2 становитиме

$$k_{12} = u_2 / u_1 = M / L_1.$$

2) $i_1 = 0, i_2 \neq 0$; $u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}$; $u_1 = M \frac{di_2}{dt}$. Тоді $k_{21} = u_1 / u_2 = M / L_2$.

3) $i_1 \neq 0, i_2 \neq 0$. У цьому випадку матимемо

$$k = \sqrt{k_{12}k_{21}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Отже, коефіцієнт зв'язку двох котушок - це відношення взаємної індуктивності двох котушок до середнього геометричного значення власних індуктивностей.

Коефіцієнт зв'язку характеризує ступінь індуктивного зв'язку двох котушок (контурів). Розглядають три ступені зв'язку:

дуже слабкий зв'язок, $k = 0,001 \dots 0,01$;

слабкий зв'язок, $k = 0,01 \dots 0,1$;

сильний зв'язок, $k = 0,1 \dots 0,9$.

15 ІНДУКТИВНО-ЗВ'ЯЗАНІ КОЛА ПРИ СИНУСОЇДНІЙ ДІЇ

Припустимо, що до системи з двох індуктивно-зв'язаних котушок підводиться синусоїдна ЕРС. Тоді в кожній з котушок протікатимуть струми: $i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \phi_1)$, $i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \phi_2)$.

Згідно з формулою (14.5) миттєве значення напруги на затискачах першої котушки становитиме.

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

Переходячи до комплексних амплітуд, матимемо

$$u_1 = \operatorname{Im} \{ \underline{U}_{m1} e^{j\omega t} \} = L_1 \frac{d \operatorname{Im} \{ \underline{I}_{m1} e^{j\omega t} \}}{dt} + M \frac{d \operatorname{Im} \{ \underline{I}_{m2} e^{j\omega t} \}}{dt}.$$

Враховуючи комутативність операції взяття уявної частини, отримуємо

$$\operatorname{Im} \{ \underline{U}_{m1} e^{j\omega t} \} = \operatorname{Im} \{ j\omega L_1 \underline{I}_{m1} e^{j\omega t} + j\omega M \underline{I}_{m2} e^{j\omega t} \};$$

$$\underline{U}_{m1} = j\omega L_1 \underline{I}_{m1} + j\omega M \underline{I}_{m2}; \quad \underline{U}_{m2} = \underline{Z}_{L1} \underline{I}_{m1} + \underline{Z}_M \underline{I}_{m2},$$

де $\underline{Z}_{L1} = jX_{L1}$ - комплексний опір котушки L_1 ;

$\underline{Z}_M = j\omega M = jX_M$ - комплексний опір зв'язку; X_M - опір зв'язку.

З урахуванням введених означень коефіцієнт зв'язку визначається за формулою:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{X_M}{\sqrt{X_{L1} X_{L2}}}.$$

Розглянемо послідовне з'єднання двох індуктивно-зв'язаних котушок, до яких підводиться синусоїдна напруга $u = U_m \sin(\omega t + \phi_U)$:

1. Узгоджене увімкнення (рис. 15.1).

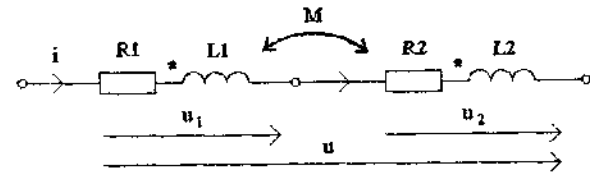


Рисунок 15.1

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень напруг:

$$u = u_1 + u_2;$$

$$u = R_1 I + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 I + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}.$$

Перейдемо до комплексної форми запису:

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{m1} + \underline{U}_{m2} = R_1 \underline{I}_m + j\omega L_1 \underline{I}_m + j\omega M \underline{I}_m + R_2 \underline{I}_m + j\omega L_2 \underline{I}_m + j\omega M \underline{I}_m \quad (15.1)$$

Векторну діаграму, побудовану за рівнянням (15.1), зображено на рис 15.2а. Рівняння (15.1) можна переписати у такому вигляді:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m (R_1 + R_2 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + 2j\omega M) = \underline{I}_m \underline{Z}_E,$$

$$\text{де } \underline{Z}_E = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2) + 2j\omega M = R_E + j\omega L_E.$$

Оскільки еквівалентна індуктивність становить $L_E = L_1 + L_2 + 2M$, робимо висновок, що узгоджене з'єднання дозволяє збільшити загальну індуктивність кола.

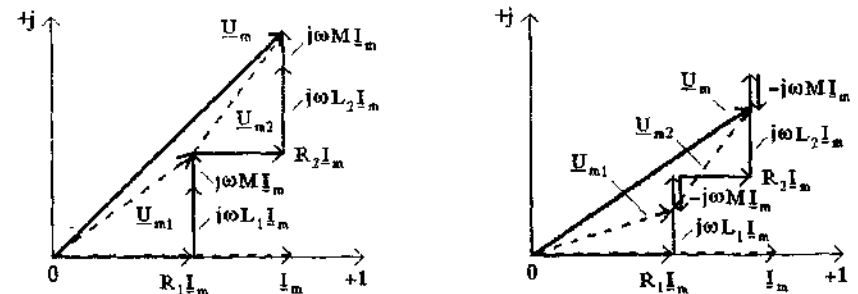


Рисунок 15.2

2. Зустрічне увімкнення (рис. 15.3).

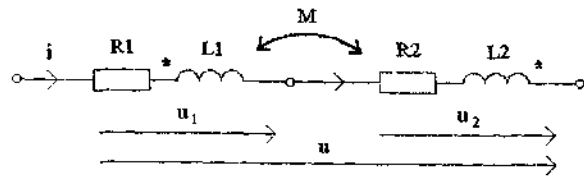


Рисунок 15.3

Розмірковуючи аналогічно, знаходимо:

$$u = u_1 + u_2;$$

$$u = R_1 I + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + R_2 I + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}.$$

Перейдемо до комплексної форми запису:

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{m1} + \underline{U}_{m2} = R_1 \underline{I}_m + j\omega L_1 \underline{I}_m + j\omega M \underline{I}_m + R_2 \underline{I}_m + j\omega L_2 \underline{I}_m + j\omega M \underline{I}_m. \quad (15.2)$$

Векторну діаграму, побудовану за рівнянням (15.2), зображено на рис.15.26. Рівняння (15.2) можна переписати у такому вигляді:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m (R_1 + R_2 + j\omega L_1 + j\omega L_2 - 2j\omega M) = \underline{I}_m Z_E,$$

$$\text{де } Z_E = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2) - 2j\omega M = R_E + j\omega L_E.$$

Оскільки еквівалентна індуктивність становить $L_E = L_1 + L_2 - 2M$, робимо висновок, що зустрічне з'єднання дозволяє зменшити загальну індуктивність кола.

Як бачимо, індуктивність взаємозв'язаних котушок залежить від коефіцієнта зв'язку. На цьому принципі побудовано прилади, призначені для поступової зміни індуктивності, які називаються варіометрами. Варіометр дозволяє змінювати індуктивність за рахунок різного увімкнення двох котушок.

Явище взаємодукції широко застосовується в техніці, на ньому основана робота трансформаторів, індукційних котушок у системі запалювання автомобіля тощо.

15.1 Трансформатор

Трансформатор - це пристрій для перетворення параметрів (амплітуд і фаз) напруг і струмів. Звичайно він використовується для узгодження джерела та приймача електричної енергії (навантаження).

Обмотка - сукупність витків чи котушок, що виконують певну функцію в електротехнічному пристрої, зокрема у трансформаторі.

Обмотка трансформатора, до якої увімкнено джерело, називається первинною; обмотка, до якої увімкнено навантаження, називається вторинною.

Розглянемо трансформатор без феромагнітного осердя (рис.15.4).

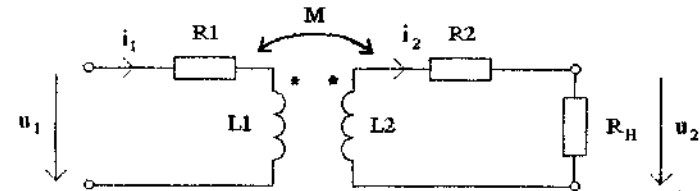


Рисунок 15.4

Вказаний на схемі напрям струмів відповідає зустрічному увімкненню. Отже, за відсутністю джерела у вторинній обмотці, котушки увімкнено зустрічно. Тоді рівняння за другим законом Кірхгофа для первинного і вторинного контурів можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + u_2 \end{cases}, \quad (15.3)$$

або для комплексних амплітуд

$$\begin{cases} \underline{U}_{m1} = \underline{I}_{m1} R_1 + j\omega L_1 \underline{I}_{m1} - j\omega M \underline{I}_{m2} \\ 0 = \underline{I}_{m2} R_2 + j\omega L_2 \underline{I}_{m2} - j\omega M \underline{I}_{m1} + \underline{U}_{m2} \end{cases} \quad (15.4)$$

За рівнянням (15.4) можна здобути еквівалентну схему трансформатора. Для цього додамо і віднімемо доданок $j\omega M \underline{I}_{m1}$ у першому рівнянні та доданок $j\omega M \underline{I}_{m2}$ у другому:

$$\begin{cases} \underline{U}_{m1} = \underline{I}_{m1} R_1 + j\omega L_1 \underline{I}_{m1} - j\omega M \underline{I}_{m1} + j\omega M \underline{I}_{m1} - j\omega M \underline{I}_{m2} \\ 0 = \underline{I}_{m2} R_2 + j\omega L_2 \underline{I}_{m2} - j\omega M \underline{I}_{m2} + j\omega M \underline{I}_{m2} - j\omega M \underline{I}_{m1} + \underline{U}_{m2} \end{cases}$$

або згрупувавши доданки

$$\begin{cases} \underline{U}_{m1} = \underline{I}_{m1} R_1 + j\omega(L_1 - M) \underline{I}_{m1} + j\omega M (\underline{I}_{m1} - \underline{I}_{m2}) \\ 0 = \underline{I}_{m2} R_2 + j\omega(L_2 - M) \underline{I}_{m2} + j\omega M (\underline{I}_{m2} - \underline{I}_{m1}) + \underline{U}_{m2} \end{cases} \quad (15.5)$$

Як бачимо, система (15.5) містить рівняння, які складено за другим законом Кірхгофа для схеми (рис. 15.5), причому різницевий струм $\underline{I}_{m1} - \underline{I}_{m2}$ встановлюється відповідно до першого закону Кірхгофа.

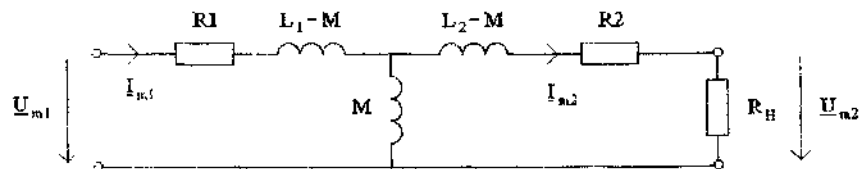


Рисунок 15.5

Таким чином, здобута схема (рис.15.5) еквівалентна схемі (рис.15.4). Це дозволяє зробити висновок: електричні кола з індуктивно-зв'язаними котушками можна замінити еквівалентними колами з безпосередньо зв'язаними елементами. Такий метод перетворення схем називається розв'язкою індуктивних кіл.

15.2 Ідеальний трансформатор

Ідеальний трансформатор характеризується тим, що в нього відсутні втрати ($R_1 = R_2 = 0$) та магнітні потоки розсіювання. Аналіз властивостей ідеального трансформатора дозволяє одержати деякі розрахункові співвідношення, які приблизно виконуються також для реальних трансформаторів.

Зміна напруг та струмів у трансформаторі характеризується коефіцієнтами трансформації за напругою і струмом:

$$n_U = U_{m1} / U_{m2}; \quad n_I = I_{m2} / I_{m1}.$$

В ідеальному трансформаторі потужності первинної та вторинної обмоток однакові: $P_1 \cong P_2$, або $U_1 I_1 \cong U_2 I_2$. Тоді

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = n_I = n_U = n.$$

Визначимо коефіцієнт трансформації ідеального трансформатора в режимі короткого замикання. У цьому режимі $R_2 = 0$, $U_2 = 0$. Тоді з другого рівняння системи (15.4) знайдемо:

$$0 = j\omega L_2 I_{m2} - j\omega M I_{m1},$$

звідки $I_{m2} / I_{m1} = M / L_2$. Ця рівність виконується також для модулів амплітуд і діючих значень: $I_2 / I_1 = M / L_2$.

В ідеальному трансформаторі коефіцієнт зв'язку k наближається до одиниці:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \cong 1, \quad \text{звідки} \quad M \cong \sqrt{L_1 L_2}.$$

З урахуванням останнього виразу коефіцієнт трансформації становитиме:

$$n = \frac{I_2}{I_1} = \frac{M}{L_2} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$$

Відомо, що величина індуктивності пропорційна квадрату кількості витків обмотки: $L_1 \approx N_1^2$; $L_2 \approx N_2^2$. Тоді $n = N_1 / N_2$. Якщо $n > 1$, трансформатор називається *знижувальним*, якщо $n < 1$ - *підвищувальним*.

У відповідності із зміною напруг і струмів у трансформаторі спостерігається також трансформація опорів:

$$|Z_{BX}| = \frac{U_1}{I_1} = \frac{n U_2}{I_2 / n} = n^2 \frac{U_2}{I_2} = n^2 R_H,$$

де R_H - опір навантаження.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для вузов по спец. "Радиотехника". - М.: Высш. школа, 1985. - 496с.
2. Беленский А.Ф. Теория линейных электрических цепей: Учебник для вузов. - М.: Радио и связь, 1986. - 544с.
3. Агасьян М.В., Мартиненко О.Г. Основы электрорадиотехнических кил: Підручник. - К.: Вища шк., 1993. - 486с.
4. Теоретические основы электротехники. В 3-х ч. Ч.1. Атабеков Г.И. Линейные электрические цепи: Учебник для вузов. - М.: Энергия, 1978. - 592с.
5. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. - Л.: Энергия, 1972. - 816с.
6. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей: Учеб. пособие для электротехнич., радиотехнич. спец. вузов. - М.: Высш. шк., 1990. - 544с.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Основні поняття та елементи електричних кіл	4
2 Основні закони та методи розрахунку електричних кіл	10
3 Еквівалентне перетворення трикутника опорів у зірку і навпаки	
Еквівалентні перетворення схем з джерелами	16
4 Методи контурних струмів і вузлових напруг	22
5 Основні теореми теорії електричних кіл	28
6 Теорема про еквівалентне джерело	33
7 Електричні кола при синусоїдній дії	39
8 Синусоїдний струм в елементах електричного кола	45
9 Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі	51
10 Задача аналізу електричного кола при синусоїдній дії	56
11 Частотні характеристики електричних кіл	
Послідовний резонансний контур	61
12 Резонансні криві струму та напруги послідовного контуру	67
13 Паралельний резонансний контур	74
14 Складний паралельний контур	
Індуктивно-зв'язані електричні кола	80
15 Індуктивно-зв'язані кола при синусоїдній дії	86
Перелік посилань	91