ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 15. ЧИСЛОВІ РЯДИ.

Лекція 35. ЧИСЛОВІ РЯДИ.

1. Основні означення.

Нескінченні ряди широко використовуються в теоретичних дослідженнях, мають різні практичні застосування.

Нехай дана нескінченна послідовність чисел $u_1,\ u_2,\ldots,u_n,\ldots$ Вираз

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

називається *числовим рядом*, а числа $u_1,\ u_2,\ldots,u_n,\ldots$– *членами ряду.*

Вираз для n-го члена ряду при довільному n називається *загальним членом* ряду.

Ряд вважається заданим, якщо відоме правило, за яким для будь-якого n можна записати відповідний член ряду.

Наприклад, якщо $u_n = \dfrac{1}{2^n}$, то ряд має вид $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} + \ldots$

Сума n перших членів ряду називається n-ою *частинною сумою* ряду:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Якщо при $n \to \infty$ існує скінчена границя послідовності частинних сум членів даного числового ряду $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд називається *збіжним*, а число S – його *сумою*. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ або границі не існує, то ряд називається *розбіжним*.

Ряд $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ називається n-м *залишком* ряду. Суму числового ряду можна записати в виді:

$$S = S_n + r_n.$$

Як приклад розглянемо суму членів нескінченної геометричної прогресії.

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

Сума n перших членів геометричної прогресії дорівнює

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ і тому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a \lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}.$$

Отже, при $|q| < 1$ нескінченна геометрична прогресія утворює збіжний ряд, сума якого $S = \dfrac{a}{1 - q}$.

Якщо $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, а тому $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$, тобто ряд розбігається.

Нехай тепер $q = 1$. Ряд $a + a + \ldots + a + \ldots$ $(a \neq 0)$ має частинну суму $S_n = na$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

А якщо $q = -1$, то отримаємо ряд $a - a + a - a + \ldots$ Його частинні суми мають такі значення: $S_1 = a$, $S_2 = 0$, $S_3 = a$, $S_4 = 0$, …, отже, S_n – послідовність, що коливається. Вона не наближається ні до якої границі. Цей ряд розбігається, тобто сума такого ряду не існує.

Отже, нескінченна геометрична прогресія являє собою числовий ряд, що збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$.

Розглянемо властивості збіжних числових рядів.

1. Якщо числовий ряд збігається і має суму S, то ряд, утворений множенням всіх членів даного ряду на теж саме число λ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \ldots + \lambda u_n + \ldots$$

теж збігається і має суму λS.

2. Якщо збігаються числові ряди $S' = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ і $S'' = v_1 + v_2 + ... + v_n + ...$, то ряд, утворений додаванням відповідних членів даних рядів:

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + ... + (u_n + v_n) + ...$$

теж збігається і його сума дорівнює $S' + S''$.

3. Якщо числовий ряд збігається, то збігається і ряд, отриманий із даного шляхом приписування або відкидання будь-якої скінченої кількості членів.

2. Необхідна умова збіжності.

Необхідна ознака збіжності. Якщо числовий ряд збігається, то його загальний член прямує до нуля при необмеженому зростанні його номера, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Звідси витікає *достатня ознака розбіжності* числового ряду. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Візьмемо, наприклад, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{3n+4}.$$

Цей ряд розбігається, оскільки

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{3n+4} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Треба пам’ятати, що прямування n-го члена ряду до нуля не є достатнім для збіжності числового ряду.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який називається *гармонічним*.

Тут $u_n = \frac{1}{n} \to 0$, але ряд розбігається. Доведемо, що $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Для цього замінимо деякі члени ряду меншими числами та переконаємось, що навіть сума менших чисел наближатиметься до нескінченності. Випишемо декілька перших членів ряду, розбивши їх на групи таким чином:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

В кожній із дужок замінимо всі доданки останнім, яке залишимо без зміни. Отримаємо (під кожною дужкою підпишемо кількість доданків в ній)

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}\right)}_{4}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{8}+\ldots$$

Очевидно, що від такої заміни сума членів в кожній дужці зменшилась і дорівнює $\frac{1}{2}$. Оскільки таких дужок можна брати як завгодно багато, їх сума наближатиметься до нескінченності.

Отже, сума менших доданків наближатиметься до нескінченності, а тим більше і сума більших доданків, що являють собою гармонічний ряд.

Ще простіше довести розбіжність числового ряду $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$, у якого також $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ при $n\to\infty$. Тут

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\to\infty \text{ при } n\to\infty.$$

3. Достатні ознаки збіжності. Ознаки порівняння.

Необхідна ознака збіжності не дає можливості визначити, чи збігається даний числовий ряд. Збіжність та розбіжність числового ряду в багатьох випадках можна встановити за допомогою достатніх ознак. Розглянемо деякі з них для знакододатних числових рядів, тобто рядів з невід'ємними членами. Знаковід'ємний числовий ряд можна зробити знакододатним шляхом множення всіх його його членів на -1, що не впливає на збіжність ряду.

Ознаки порівняння. Нехай дано два числових ряда з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ і нехай для всіх n виконується нерівність $u_n\le v_n$. Тоді:

1) якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$;

2) якщо розбігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

На практиці ознаку порівняння зручно застосовувати в *граничній формі*: якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ або обидва збігаються, або обидва розбігається.

Складність застосування ознак порівняння полягає в тому, що для даного числового ряду треба підібрати ще інший числовий ряд, з яким його можна було б порівняти. Часто за “еталон” розбіжного ряду беруть гармонічний ряд, а за “еталон” збіжного ряду беруть або нескінченно спадну геометричну прогресію, або *узагальнений гармонічний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $(p > 1)$. Його збіжність буде доведено нижче, при розгляданні інтегральної ознаки Коші.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+10n}$.

Розв’язок.

$$1 + 10n > n \Rightarrow \frac{1}{1+10n} < \frac{1}{n}.$$

Гармонічний ряд $\sum_{\text{n}=1}^{\infty} \frac{1}{\text{n}}$ розбігається, тому даний ряд теж розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Розв’язок. Так як $\frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$ при $n > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ – збіжний ряд, що є нескінченною геометричною прогресією з $q = \frac{1}{2}$. Тоді даний ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$.

Розв'язок. Застосуємо ознаку порівняння в граничній формі. Порівняємо зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. $\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^2}{n^3+1}=1$, отже, початковий ряд теж збігається.

4.Ознаки Даламбера і Коші.

Ознака Даламбера. Нехай для знакододатнього ряду існує $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$. Тоді ряд збігається при $\rho<1$ і розбігається при $\rho>1$, при $\rho=1$ ряд може як збігатись, так і розбігатись, збіжність треба встановлювати за допомогою інших ознак.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

Розв'язок. Запишемо $u_n=\frac{3^n}{n!}$ і $u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n!}{(n+1)!3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0<1,$$

отже, числовий ряд збігається.

Радикальна ознака Коші. Нехай для знакододатнього ряду існує $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$. Тоді ряд збігається при $\rho<1$ і розбігається при $\rho>1$, при $\rho=1$ треба застосовувати інші ознаки.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

Розв'язок. Запишемо $u_n=\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ і застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow$$

даний числовий ряд збігається.

Інтегральна ознака Коші. Нехай дано знакододатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члени якого є значеннями неперервної функції $f(x)$ при цілих значеннях аргументу *x*:

$$u_1 = f(1),\ u_2 = f(2),\ \ldots,\ u_n = f(n), \ldots$$

і нехай $f(x)$ монотонно спадає в інтервалі [1, ∞). Тоді ряд збігається, якщо збігається невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$, і розбігається, якщо цей інтеграл розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Розв'язок. Для цього числового ряду неможливо застосувати ознаку Даламбера, бо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1.$$

Скористаємось інтегральною ознакою Коші. Інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty} = \frac{1}{1-p} \lim_{x\to\infty} \left(x^{-p+1} - 1)\right)$$

збігається при $p > 1$, оскільки в цьому випадку $\lim_{x\to\infty} x^{-p+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{p-1}} = 0$ і $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$. А якщо $p < 1$, то інтеграл розбігається, тому що тепер $\lim_{x\to\infty} x^{-p+1} = \infty$. При $p = 1$ інтеграл теж розбігається: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{\infty} = \infty$. Це ще один доказ розбіжності гармонічного ряду.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ збігається при $p>1$ (узагальнений гармонічний ряд) і розбігається при $p\le 1$.

Навчально-методична література:

1. Мунтян В.К. , Говаленков С.В. Вища математика. Методичні вказівки для самостійних занять. – Х.: НУЦЗУ, 2015.

2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. – Частина 3. – Х.: Фактор-Друк., 2002.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 15. ЧИСЛОВІ РЯДИ.

Лекція 36. ЗБІЖНІСТЬ ЗНАКОЗМІННИХ РЯДІВ.

1. Ознака Лейбніца, оцінка залишку ряду.

Числовий ряд, члени якого можуть бути як додатними, так і від'ємними, називається *знакозмінним*.

Окремим випадком знакозмінного ряду є *знакопочережний* ряд, знаки членів якого строго чергуються:

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^n u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \quad u_n > 0.$$

Теорема Лейбніца. Якщо в знакопочережному ряді абсолютні величини членів ряду спадають $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ і загальний член наближається до нуля $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд збігається, причому його сума за абсолютною величиною менше u_1. Залишок ряду r_n за абсолютною величиною менше абсолютної величини першого із відкинутих членів: $|r_n| \le u_{n+1}$.

Для рядів з довільним розподілом знаків наведемо важливу ознаку збіжності.

Достатня ознака збіжності. Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений із абсолютних величин членів даного ряду, то збігається і даний ряд.

Ця достатня ознака не є необхідною, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ може збігатись і тоді, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбігається.

2. Абсолютна і неабсолютна збіжність.

Розглянемо, наприклад, знакопочережний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots.$$

Для нього виконуються умови теореми Лейбніца:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots;\;\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

тому цей ряд збігається. А гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, складений із абсолютних величин його членів, розбігається.

Ряд, абсолютні величини членів якого утворюють збіжний ряд, називається *абсолютно збіжним*. Якщо ряд збігається, а ряд, утворений із абсолютних величин його членів, розбігається, то даний ряд називається *умовно збіжним*.

Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ – умовно збіжний.

Приклад. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність знакозмінний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}.$$

Розв'язок. Оскільки ряд знакопочережний, то застосуємо теорему Лейбніца.

$$1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\ldots>\frac{1}{2n+1}>\ldots;\quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0.$$

Умови теореми виконуються, отже, ряд збігається.

Розглянемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}.$$

Використаємо ознаку порівняння в граничній формі. Порівнюючи з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

отже, ряд розбігається.

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$ збігається умовно.

Розглянемо признаки Даламбера и Коші для знакозмінних рядів. Нехай $\sum u_n$ - знакозмінний ряд.

Признак Даламбера. Якщо існує границя $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ буде абсолютно збіжним, а при ρ>1 ряд буде розбіжним. При ρ=1 признак не дає відповіді про збіжність ряда.

Признак Коші. Якщо існує границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ буде абсолютно збіжним, а при ρ>1 ряд буде розбіжним. При ρ=1 признак не дає відповіді про збіжність ряда.

Розглянемо декілька теорем, які відображають основні властивості абсолютно збіжних рядів.

ТЕОРЕМА 1. Для абсолютної збіжності ряда $\sum u_n$ необхідно й достатньо, щоб його можно було представити в вигляді різниці двох збіжних рядів з невід'ємними членами.

Наслідок. Умовно збіжний ряд є різницею двох розбіжних рядів з невід'ємними прямуючими до нуля членами.

ТЕОРЕМА 2. В збіжному ряді будь-яка групіровка членів ряда, яка не змінює їх порядок, зберігає збіжність і величину ряду.

ТЕОРЕМА 3. Якщо ряд збігається абсолютно, то ряд, отриманий з нього будь-якою перестановкою членів, також абсолютно збігається й має таку ж суму.

Перестановкою членів умовно збіжного ряда можно отримати умовно збіжний ряд, що має будь-яку наперед задану суму, і даже розбіжний ряд.

ТЕОРЕМА 4. При будь-якій групіровці членів абсолютно збіжного ряда (при цьому число груп може бути як кінцевим, так і нескінченим й число членів в групі може бути як кінцевим, так і нескінченим) отримаємо збіжний ряд, сума якого дорівнює сумі початкового ряда.

ТЕОРЕМА 5. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються абсолютно і їх суми рівні відповідно S и σ, то ряд, складений з всіх добутків виду $u_i v_k, \quad i,k=1,2,...$ взятих в будь-якому порядку, тоже збігається абсолютно і його сума дорівнює $S \cdot \sigma$ - добутку сум перемножуваних рядів.

Якщо перемножувати умовно збіжні ряди, то в результаті можно отримати розбіжний ряд.

Навчально-методична література:

1. Мунтян В.К. , Говаленков С.В. Вища математика. Методичні вказівки для самостійних занять. – Х.: НУЦЗУ, 2015.

2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. – Частина 3. – Х.: Фактор-Друк., 2002.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 16. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ.

Лекція 37. ФУНКЦІОНАЛЬНІ І СТЕПЕНЕВІ РЯДИ.

1. Функціональні ряди.

Якщо членами ряду є функції незалежної змінної *x*, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається *функціональним*. Припускається, що функції $u_n(x)$ визначені та неперервні на тому ж самому інтервалі, скінченому або нескінченному.

Множина значень змінної *x*, при яких цей ряд збігається, називається *областю збіжності* ряду.

Наприклад, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

збігається в інтервалі (-1, 1), оскільки при будь-якому значенні *x* із цього інтервалу відповідний числовий ряд являє собою нескінченно спадну геометричну прогресію. При $x \geq 1$ цей ряд розбігається.

В деяких випадках для знаходження області збіжності ряду можна застосувати відомі ознаки збіжності числових рядів (ознаку Даламбера або Коші), вважаючи *x* фіксованою величиною.

Сума ряду є деякою функцією від *x*, визначеною в області збіжності ряду, позначимо її $S(x)$:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

Так, в наведеному вище прикладі $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Суму *n* перших членів ряду будемо позначати $S_n(x)$, а залишок ряду $r_n(x)$. Якщо ряд збігається при деякому значенні *x*, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \text{ і } \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Приклад. Дослідити на збіжність функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}.$$

Розв'язок. На відрізку [-1,1] виконується нерівність $\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ тобто за ознакою Вейерштраса на цьому відрізку досліджуваний ряд збігається, а на інтервалах $(-\propto, -1) \cup (1, \propto)$ розбігається.

2. Степеневі ряди. Інтервал і радіус збіжності.

Степеневим рядом називається функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots$$

членами якого є добутки коефіцієнтів a_n на степеневі функції з цілими показниками степенів від різниці $x - x_n$.

Зокрема, при $x_0 = 0$ отримаємо степеневий ряд за степенями *x*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Приклад. Дослідити на збіжність степеневий ряд

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots.$$

Розв'язок. Для дослідження на збіжність даного степеневого ряду користуємось признаком Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right| = |x|.$$

Отримуємо, що цей ряд збігається при $|x| < 1$ и розбігається при $|x| > 1$. Тепер визначим збіжність ряду в граничних точках 1 и –1. При $x = 1$: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$

ряд збігається за ознакою Лейбніца. При $x=-1$: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ ряд розбігається (гармонічний ряд).

В подальшому розглядатимемо саме такі ряди, бо будь-який степеневий ряд підстановкою $x-x_0=x'$ перетворюється до ряду вказаного виду.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

збігається в точці $x_0=0$, то він збігається і притому абсолютно в інтервалі $(-x_0, x_0)$, тобто при будь-якому *x*, що задовольняє умові $|x|<|x_0|$.

Наслідок. Якщо степеневий ряд розбігається при $x=x_0$, то він розбігається при будь-якому $|x|>|x_0|$.

Радіусом збіжності степеневого ряду називається таке число *R*, що для всіх *x*, $|x|<R$, степеневий ряд збігається, а для всіх *x*, $|x|>R$, степеневий ряд розбігається. Інтервал $(-R,\, R)$ називається *інтервалом збіжності*.

Для рядів, розбіжних при всіх *x*, окрім $x=0$, вважають $R=0$, а для рядів, збіжних при всіх *x*, $R=\infty$.

Для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду можна дослідити ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |x|^n,$$

оскільки інтервали збіжності досліджуваного степеневого ряду і даного ряду співпадають.

До ряду складеного із абсолютних величин, члени якого додатні, застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|} = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho .$$

Для тих значень $|x|$, для яких $\rho < 1$, ряд збігається, а для тих значень, для яких $\rho > 1$, ряд розбігається. Отже, ті значення $|x|$, при якому $\rho = 1$, і буде радіусом збіжності ряду.

Якщо $\rho = 0$ при будь-якому $|x|$, то ряд збігається при всіх x і $R = \infty$. Навпаки, якщо $\rho = \infty$ при всіх $|x| \neq 0$, то ряд розбігається всюди (окрім точки $x = 0$) і $R = 0$.

Приклади. Знайти область збіжності степеневих рядів:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{n-1} = 1 + 2x + 4x^2 + \dots$$

Розв'язок.

а) Застосовуючи ознаку Даламбера, отримаємо

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

при будь-якому значенні *x*. Отже, ряд збігається при всіх значеннях *x*, тобто радіус збіжності $R = \infty$.

б) Маємо

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{2^n x^n}{2^{n-1} x^{n-1}} \right| = 2|x| < 1.$$

Отже, $|x| < \frac{1}{2}$ або $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ – інтервал збіжності. Радіус збіжності $R = \frac{1}{2}$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях знайденого інтервалу збіжності. При $x = -\frac{1}{2}$ отримаємо ряд $1 - 1 + 1 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$, який розбігається, а при $x = \frac{1}{2}$ маємо ряд $1 + 1 + 1 + \dots$ який теж розбігається.

Таким чином, областю збіжності даного степеневого ряду є $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ або $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

Приклад. Знайти область збіжності степеневого ряду:

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Розв'язок. Знаходимо радіус збіжності

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n-1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}|n| = |\infty|.$$

Отже, даний степеневий ряд збігається при будь-якому значенні x. Загальний член цього ряду наближається до нуля.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0.$$

Розглянемо властивості степеневих рядів.

1. *Сума степеневого ряду* є функція, неперервна в інтервалі збіжності ряду

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (-R < x < R).$$

2. Степеневий ряд можна почленно інтегрувати в його інтервалі збіжності.

3. Степеневий ряд можна почленно диференціювати будь-яку кількість разів в його інтервалі збіжності.

4. *Похідна функції, яка визначається степеневим рядом*, знаходиться зо формулою:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

5. *Сума і різниця степеневих рядів* приводиться до відповідних операцій з їх членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n .$$

6. *Добуток двох степеневих рядів* виражається формулою:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{n}_n x^n .$$

Коефіцієнти c_i знаходяться за формулою:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 .$$

7. *Частка двох степеневих* рядів визначається формулою:

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n .$$

Навчально-методична література:

1. Мунтян В.К. , Говаленков С.В. Вища математика. Методичні вказівки для самостійних занять. – Х.: НУЦЗУ, 2015.

2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. – Частина 3. – Х.: Фактор-Друк., 2002.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 16. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ.

Лекція 38. РЯДИ ТЕЙЛОРА І МАКЛОРЕНА. ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ У НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕННЯХ.

1. Розкладання у ряди Тейлора і Маклорена.

Якщо задану функцію $f(x)$ можна записати як суму деякого степеневого ряду, то кажуть, що ця функція *розкладена* в степеневий ряд. При цьому з'являється можливість наближено замінити функцію сумою декількох перших членів степеневого ряду, тобто многочленом, а також оцінювати точність отриманих наближених значень.

Припустимо, що функція $f(x)$ має похідні всіх порядків в околі точки x_0. Нехай її можна записати як суму степеневого ряду, збіжного в якомусь інтервалі, що містить точку x_0:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots$$

Беручи в цій формулі $x = x_0$, отримаємо $a_0 = f(x_0)$. Диференцюємо степеневий ряд

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots$$

і знову візьмемо $x = x_0$. Тоді $f'(x_0) = a_1$. При наступному диференціюванні отримаємо

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \ldots.$$

Звідси, беручи знову $x = x_0$, знайдемо, що $f''(x_0) = 2a_2$, тобто $a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2!}$.

Після $n-$кратного диференціювання отримаємо $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$, тобто $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Підставляючи отримані коефіцієнти в даний, отримаємо ряд

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...,$$

який називається *рядом Тейлора* функції $f(x)$. Його коефіцієнти називаються *коефіцієнтами Тейлора* функції $f(x)$ в точці x_0.

З'ясуємо, при яких умовах ряд Тейлора, складений для функції $f(x)$, збігається в даному інтервалі і його сума дорівнює $f(x)$.

Позначимо $T_n(x)$ многочлен n-го степеню, що є $n-$ю частинною сумою ряду Тейлора:

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Назвемо *залишковим членом* ряду Тейлора різницю

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x).$$

Збіжність ряду Тейлора до функції $f(x)$ в точці x означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. Величина $R_n(x)$ дає при цьому ту похибку, що робиться при заміні функції $f(x)$ многочленом $T_n(x)$.

ТЕОРЕМА. Якщо функція $f(x)$ в усіх точках деякого інтервалу, що містить точку x_0, має $(n+1)-$у похідну $f^{(n+1)}(x)$, то залишковий член $R_n(x)$ для будь-якої точки цього інтервалу має вид

$$R_n(x)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

де ξ знаходиться між x і x_0.

Вираз для залишкового члену $R_n(x)$ не дає можливості обчислити його величину, оскільки невідома точка ξ, в якій береться $(n+1)-$а похідна. Проте можна оцінити величину $R_n(x)$. Це робиться на основі такого зауваження:

Нехай в інтервалі, в якому вірна формула Тейлора, $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M_{n+1}$. Тоді для будь-якого x із цього інтервалу залишковий член $R_n(x)$ задовольняє нерівності

$$\left|R_n(x)\right| < M_{n+1}\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Дійсно,

$$\left|R_n(x)\right| = \left|f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\left|x-x_0\right|^{n+1} < M_{n+1}\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Розкладання елементарних функцій у степеневі ряди.

Розкладання заданої функції $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 розподіляється на два етапи.

1) Спочатку обчислюються значення функції та її похідних в точці x_0 та складається ряд Тейлора для функції $f(x)$. При цьому припускається, що функція $f(x)$ має нескінченну кількість разів диференціюватися.

2) Знаходиться інтервал, в якому складений ряд Тейлора збігається до функції $f(x)$, тобто встановлюється, при яких значеннях x залишковий член ряду $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Якщо $x_0 = 0$, то отримаємо частинний випадок ряда Тейлора, який називають *рядом Маклорена*.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Наведемо розкладення деяких елементарних функцій в степеневі ряди і укажемо їх області збіжності.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$.

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$.

4. Біноміальний ряд

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1).$$

5. При $m = -1$ маємо:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \ (-1 < x < 1).$$

6. Для розкладення в ряд Маклорена функції $f(x) = \ln(1+x)$ скористуємось властивістю інтегрування степеневого ряду і проінтегруємо ряд 5 від 0 до *x*. Оскільки

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x),$$

то, інтегруючи почленно праву частину ряду 5, отримаємо

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots .\ (-1 < x \le 1).$$

7. Ряд для $\ln(1+x)$ збігається повільно, але можна прискорити збіжність ряду. Замінюючи *x* на $-x$, запишемо ряд для $\ln(1-x)$. Віднімемо із ряду для $\ln(1+x)$ ряд для $\ln(1-x)$:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right) \ (-1 < x < 1).$$

За цією формулою можна обчислити логарифми будь-яких додатних чисел. Дійсно, коли *x* змінюється в інтервалі збіжності ряду, неперервна функція $\frac{1+x}{1-x}$ приймає всі значення від 0 до ∞.

8. Аналогічно функції $\ln(1+x)$, щоб отримати розкладення функції $arctgx$, треба в ряді 5 замість *x* взяти x^2. Отримаємо

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \ (-1 < x < 1).$$

Інтегруючи цей ряд від 0 до *x*, маємо

$$arcgtgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}-1}{2n-1} + \ldots \ (-1 < x < 1).$$

За допомогою наведених розкладень елементарних функцій можна розкладати в ряди інші функції.

Приклад. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y=(x-tg\,x)\cos x$.

Розв'язок. Перетворимо цей вираз

$$\left(x-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x = x\cos x-\sin x.$$

Скористаємось розкладеннями 2, 3 для $\sin x$, $\cos x$. Ці ряди збігаються до даних функцій для $x\in R$. Це дозволяє виконувати над ними арифметичні операції:

$$x\cos x-\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)-$$

$$-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)=-x^3\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+x^5\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)-\ldots=$$

$$=-\frac{2}{3!}x^3+\frac{4}{5!}x^5-\ldots+(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}+\ldots,\text{ де } x\in R.$$

Однак для вихідної функції $(x-tg\,x)\cos x$ областю збіжності будуть усі значення x, окрім $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, де ця функція не існує.

3. Застосування рядів у наближених обчисленнях.

Розкладення функцій в степеневі ряди застосовується для наближеного обчислення значень функцій, інтегрування функцій, розв'язування диференціальних рівнянь.

Припустимо, що відомі значення функції $f(x)$ та її послідовних похідних в деякій точці x_0 і доведено, що функція $f(x)$ в околі точки x_0 розкладається в ряд Тейлора. Тоді наближене значення функції $f(x)$ в будь-якій точці цього окола можна обчислити за частковою сумою цього ряду, Похибку, що виникає при цьому, можна оцінювати або на основі теореми про оцінку залишкового члена ряду, або безпосередньо оцінюючи залишок ряду.

Приклади. Обчислити наближено з точністю до 0,0001:

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt[5]{e^3}};\quad \text{б) } \sqrt[5]{36};\quad \text{в) } \sin 20^\circ.$$

Розв'язок.

а)Для виразу $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^3}}=e^{-\frac{3}{5}}$ запишемо ряд для e^x при $x=-\dfrac{3}{5}$, що належить області збіжності $(-\infty,\infty)$:

$$e^{-\frac{3}{5}}=1-\frac{3}{5}+\frac{3^2}{5^2 2!}-\frac{3^3}{5^3 3!}+\ldots+\frac{(-1)^n 3^n}{5^n n!}+\ldots=1-0{,}6+0{,}18-0{,}036+0{,}0054-$$
$$-0{,}000648+0{,}0000648-\ldots$$

За ознакою Лейбніца $|r_6|\le|u_7|$, тобто $|r_6|\le 0{,}0000648<0{,}0001$. Отже, достатньо взяти шість перших членів розкладення ряду:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}}\approx 1-0{,}6+0{,}18-0{,}036+0{,}0054-0{,}000648+0{,}0000648\approx 0{,}5488\,.$$

б) Запишемо $\sqrt[5]{36}$ в виді $\sqrt[5]{36}=\sqrt[5]{32+4}=2\left(1+\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}}$. Оскільки $x=\dfrac{1}{8}$ належить до області збіжності біноміального ряду $(-1;1)$ то при $x=\dfrac{1}{8}$, $m=\dfrac{1}{5}$ отримаємо

$$\sqrt[5]{36}=2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)-\left(\frac{1}{5}-n+1\right)}{n!}\cdot\frac{1}{8^n}+\ldots\right)=$$
$$=2+0{,}05-0{,}0025+0{,}000188-0{,}000016+\ldots$$

Залишок ряду $|r_4|\le 0{,}000016<0{,}0001$. Отже, беремо чотири члени ряду:

$$\sqrt[5]{36}\approx 2+0{,}05-0{,}0025+0{,}000188\approx 2{,}0477.$$

в) Для обчислення $\sin 20^\circ=\sin\dfrac{\pi}{9}$ запишемо ряд для $\sin x$, $x\in(-\infty,\infty)$.

$$\sin\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{9}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n-1}+\ldots=0{,}34907-0{,}00709+$$
$$+0{,}00004-\ldots$$

Необхідно взяти два члени ряду, оскільки при цьому похибка $|r_2| \le 0{,}00004 < 0{,}0001$. Отже, $\sin 20^\circ = 0{,}34907 - 0{,}00709 \approx 0{,}3420$.

Розглянемо інтегрування функцій. Нехай треба знайти інтеграл

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx,$$

причому відоме розкладення функції $f(x)$ в ряд Тейлора, і границі знаходяться всередині інтервалу збіжності ряду. Тоді можна інтегрувати ряд почленно. В результаті отримаємо ряд Тейлора для функції $F(x)$, яка має той самий інтервал збіжності, що і ряд для функції $f(x)$. Якщо даний інтеграл $\int_0^x f(x)dx$ виражається через елементарну функцію $F(x)$, то ми знаходимо її розкладання в ряд Тейлора. А якщо цей інтеграл в елементарних функціях не виражається, то знайдений ряд є вираженням неелементарної функції $F(x)$ через найпростіші основні елементарні функції – степеневі, але не скінченим вираженням, а нескінченним.

Знаючи оцінку залишкового члена ряду для підінтегральної функції $f(x)$, можна на основі теореми про оцінку інтеграла оцінити і залишковий член ряду для $F(x)$.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx$.

Розв'язок. Запишемо ряд Тейлора для $\sin x$ і поділимо його на *x*:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

Цей ряд, як і ряд для $\sin x$, збігається на всій числовій осі. При інтегруванні отримаємо

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots$$

Цей ряд не збігається ні до якої елементарної функції, він є аналітичним виразом нової функції, але шляхом не скінченого, а нескінченного числа операцій.

Приклад. В теорії ймовірностей важливу роль відіграє функція

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

яка називається функцією Лапласа або інтегралом ймовірностей. Обчислити інтеграл в скінченому вигляді неможливо, оскільки $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ не виражається в елементарних функціях. Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Тейлора, для чого в розкладення для e^x замість x підставимо $-\frac{x^2}{2}$:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 3!} + \ldots.$$

Тоді $F(x)$ буде нескінченним рядом

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^4 \cdot 2!5} - \frac{x^7}{2^6 \cdot 3!7} + \ldots \right),$$

що збігається на всій числовій осі. Обчислювати значення $F(x)$ дуже зручно, оскільки ряд швидко збігається.

Розглянемо розв’язування диференціальних рівнянь використовуючи ряди Тейлора. Нехай задано диференціальне рівняння і початкові умови, що визначають частинний розв’язок. Припустимо, що розв’язок рівняння в околі точки x_0, в якій задані початкові умови, можна розкласти в степеневий ряд за степенями $x - x_0$

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots.$$

Продиференціюємо цей ряд з невизначеними поки що коефіцієнтами стільки разів, який порядок рівняння. Підставляючи далі в рівняння замість невідомої функції та її похідних відповідні ряди, ми отримаємо тотожність, із якої і визначаємо невідомі коефіцієнти ряду. При цьому перші коефіцієнти ряду визначаються не із цієї тотожності, а із початкових умов.

Особливо зручно розв'язувати за допомогою рядів лінійні диференціальні рівняння.

Приклад. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння другого порядку $y'' - xy = 0$ при початкових умовах $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язок шукатимемо у вигляді степеневого ряду:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

Коефіцієнти a_0 і a_1 знаходимо із початкових умов

$$a_0 = y(0) = 0, \quad a_1 = y'(0) = 1.$$

Ряд двічі диференціюємо

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots;$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots$$

Підставляючи в початкове рівняння замість y та y'' їх розкладення, отримаємо тотожність

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots = a_0 x + a_1 x^2 + a_3 x^4 + \ldots + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо

$$a_2 = 0, \; a_3 = 0, \; 4 \cdot 3a_4 = 1, \; \ldots, \; n(n-1)a_n = a_{n-3}.$$

Звідки $a_4 = \dfrac{1}{3 \cdot 4}$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0$, $a_7 = \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$, $a_8 = 0$, $a_9 = 0$, $a_{10} = \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}$, і взагалі $a_{3m-1} = a_{3m} = 0$, $a_{3m+1} = \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \ldots 3m(3m+1)}$.

Отже

$$y = x + \frac{1}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 \ldots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \ldots 3m(3m+1)} x^{3m+1} + \ldots .$$

За допомогою ознаки Даламбера легко переконатись в тому, що цей ряд збігається на всій числовій осі і являє собою шуканий розв'язок при всіх значеннях x.

<u>Навчально-методична література:</u>

1. Мунтян В.К. , Коваленков С.В. Вища математика. Методичні вказівки для самостійних занять. – Х.: НУЦЗУ, 2015.

2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. – Частина 3. – Х.: Фактор-Друк., 2002.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 17. РЯДИ ФУР'Є.

Лекція 39. ОРТОГОНАЛЬНІ ФУНКЦІЇ І РЯД ФУР'Є.

1. Ортогональні системи функцій.

Тригонометричним рядом називається функціональний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

членами якого є тригонометричні функції $\sin nx$ і $\cos nx$ $(n=1,2,3,...)$.

Сталі a_i і b_i називаються *коефіцієнтами* ряду. Вільний член пишеться у вигляді $\frac{a_0}{2}$ для однаковості подальшого вигляду формул.

Тригонометричні функції, як і степеневі, використовуються для розкладання по них функцій.

Нехай $f(x)$ – довільна періодична функція з періодом 2π. Будемо розкладати цю функцію в тригонометричний ряд. Оскільки функція $f(x)$ має період 2π, то її можна розглядати в будь-якому інтервалі довжиною 2π. Оберемо інтервал $(-\pi,\pi)$ за основний, на інших ділянках осі Ox функція $f(x)$ повторюватиме свої значення в основному інтервалі $(-\pi,\pi)$.

Розглянемо одну властивість системи тригонометричних функцій, за допомогою якої в подальшому будемо знаходити коефіцієнти a_i і b_i.

Система функцій $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x),...$, заданих на інтервалі $[a,b]$, називається *ортогональною системою* на $[a,b]$, якщо

$$\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0 \text{ при } n\neq m,$$

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx > 0 \text{ при будь-якому } n.$$

Дана нерівність означає, що ні єдина із функцій системи не є тотожним нулем.

ТЕОРЕМА. Система функцій $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots, \cos nx,\ \sin nx$,… є ортогональною системою на інтервалі $[-\pi, \pi]$.

Доведення. Перевіримо виконування вище написаної рівності для функцій даної системи функцій.

$$\text{а) } \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{\sin n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n} = 0;$$

$$\text{б) } \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\cos n\pi}{n} = 0;$$

в) $n \neq m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

за формулою а), оскільки $(m+n)$ і $(m-n)$ – цілі числа, відмінні від нуля;

г) $n \neq m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx = \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

знову за формулою а);

$$\text{д) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx = 0$$

за формулою б).

Перевіримо тепер виконування нерівності.

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi > 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 0 = \pi.$$

Аналогічно

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2nx)dx = \pi .$$

Таким чином, теорему доведено.

2. Узагальнений ряд Фур'є.

Нехай $f(x)$ – будь-яка функція, задана в інтервалі $(-\pi,\pi)$, відносно якої ми припускаємо, що її в цьому інтервалі можна розкласти в збіжний тригонометричний ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx .$$

Припустимо також, що тригонометричний ряд можна почленно інтегрувати. Інтегруючи від $-\pi$ до π обидві частини цього ряду, отримаємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx = \pi a_0 .$$

Інтеграли від інших членів ряду дорівнюють нулю за формулами а), б) доведення попередньої теореми. Звідси

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx .$$

Щоб знайти коефіцієнт a_m, де m – будь-яке ціле додатне число, помножимо обидві частини рівності тригонометричного ряду на $\cos mx$ і проінтегруємо від $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mxdx \right).$$

Всі інтеграли в правій частині, крім інтегралу при коефіцієнті a_m, дорівнюють нулю за формулами а), в), д). Інтеграл при a_m дорівнює π. Отже,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mxdx = \pi a_m .$$

Звідси

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx.$$

Аналогічно, щоб знайти коефіцієнт b_m, помножимо обидві частини рівняння тригонометричного ряду на $\sin mx$ і проінтегруємо від $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \sin mx dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \sin mx dx\right).$$

За формулами б), г), д) всі інтеграли в правій частині, крім інтегралу при коефіцієнті b_m, дорівнюють нулю. Цей інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx dx = \pi$. Отже,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx = \pi b_m \quad \text{і} \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx.$$

Нехай тепер $f(x)$ – довільна функція, задана в інтервалі $(-\pi,\pi)$, відносно якої тільки припускається, що існує від неї інтеграл в інтервалі $(-\pi,\pi)$. При цьому функція $f(x)$ може мати точки розриву.

Коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$ називаються числа a_n і b_n, що визначаються формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx$$

називається *рядом Фур'є* функції $f(x)$.

ТЕОРЕМА. Якщо функція $f(x)$ кусково-гладка в інтервалі $(-\pi,\pi)$, то її ряд Фур'є збігається до функції $f(x)$ в усіх точках, в яких вона неперервна.

В точках розриву функції $f(x)$ ряд збігається до середнього арифметичного її граничних значень зліва і справа, тобто до значення

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2},$$

де x_0 – точка розриву першого роду.

В обох кінцевих точках інтервалу сума ряду дорівнює середньому арифметичному граничних значень функції при наближенні незалежної змінної до цих точок зсередини інтервалу

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

3. Ряди Фур'є деяких класів функцій.

Розглянемо розкладання в ряд Фур'є парних і непарних функцій. Нехай функція $f(x)$, що розкладається в ряд Фур'є, *парна*. Тоді функції $f(x)\sin nx$ будуть непарними, і всі коефіцієнти b_n, як інтеграли від непарних функцій за інтервалом $(-\pi,\pi)$, симетричним відносно початку координат, дорівнюватимуть нулю. Отже, парна функція має ряд Фур'є, що складається тільки із косинусів:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

де

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

оскільки $f(x)\cos nx$ – парна функція.

Нехай тепер $f(x)$ – *непарна* функція. Тоді $f(x)\cos nx$ будуть непарними функціями, і всі коефіцієнти a_n дорівнюватимуть нулю. Отже, непарна функція має ряд Фур'є, що складається тільки із синусів

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

де

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx,$$

оскільки $f(x)\sin nx$ – непарна функція.

Розглянемо тепер задачу про розкладення в ряд Фур'є функції, заданої в інтервалі $(-l,l)$, де l – довільне число. Якщо в інтервалі $(-l,l)$ функція $f(x)$ задовольняє умовам наведеної вище теореми, то розкладення можна отримати за допомогою заміни незалежної змінної за формулою $x' = \frac{\pi}{l}x$. Тоді функція $f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}x'\right)$, і коли x змінюється в інтервалі $(-l,l)$, x' змінюється в інтервалі $(-\pi,\pi)$. Розкладення цієї функції в ряд Фур'є має вид

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}x'\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx' + b_n \sin nx'\right)$$

або

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

де

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx.$$

Тут сума ряду Фур'є – періодична функція з періодом $T = 2l$. Частоти послідовних гармонік, що складають ряд, дорівнюють $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$, найменша частота $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$

Нехай треба розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$, що задана в інтервалі $(0,\pi)$. Можна довільно продовжити функцію $f(x)$ на інтервал $(-\pi,0)$, але таким чином, щоб утворена в цьому інтервалі функція $F(x)$, що співпадає з $f(x)$ в інтервалі $(0,\pi)$, задовольняла умовам основної теореми.

Зокрема, $f(x)$ можна продовжити *парним чином* на інтервал $(-\pi,0)$, тоді графік функції $f(x)$ продовжиться симетрично відносно осі Oy. При цьому

$F(x)$ буде парною функцією і ряд складатиметься тільки із косинусів.

Якщо $f(x)$ продовжити *непарним чином* на інтервал $(-\pi,0)$, то графік продовжиться симетрично відносно осі початку координат. Тоді $F(x)$ буде непарною функцією і ряд складатиметься тільки із синусів.

Те ж саме вірно і для функції, заданої в інтервалі $(0,l)$.

Приклад. Функцію $f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0;1) \\ 1, & x\in(1;2) \end{cases}$ розкласти в ряд Фур'є за косинусами.

Розв'язок. Продовжимо функцію парним образом на проміжок (-2;0), тобто симетрично відносно осі *Oy*, а потім періодично на всю числову пряму (рис. 16.1).

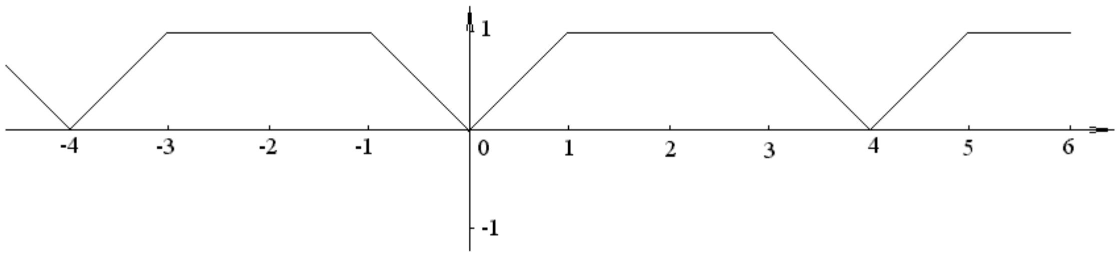

Рис. 16.1.

В цьому випадку $l=2$, $T=4$, ряд Фур'є має вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

Його коефіцієнти обчислюємо за формулами

$$b_n=0,\quad a_n=\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx.$$

$$a_0=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 dx=\frac{3}{2};\quad a_n=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=I_1+I_2.$$

Перший інтеграл обчислимо частинами за формулою:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

$$I_1=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{bmatrix} u=x,\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=dx,\ v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{bmatrix} = \left.\frac{2x\sin\frac{n\pi x}{2}}{n\pi}\right|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\left.\frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right|_0^1=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{(n\pi)^2}(\cos\frac{n\pi}{2}-1);$$

$$I_2=\int_1^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left.\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right|_1^2=\frac{2}{n\pi}(\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2})=\frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$a_n=I_1+I_2=\frac{4}{(n\pi)^2}(\cos\frac{n\pi}{2}-1)\Rightarrow a_1=\frac{-4}{\pi^2},\ \ a_2=\frac{-2}{\pi^2},\ \ a_3=\frac{-4}{9\pi^2},\ \ a_4=0.$$

Ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos\frac{n\pi}{2}-1)}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2},\ x\in(0;2).$$

Приклад. Функцію $f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0;1) \\ 1, & x\in(1;2)\end{cases}$ розкласти в ряд Фур'є по синусах.

Розв'язок. Продовжимо функцію непарним образом на проміжок (-2;0), тобто симетрично відносно початку координат, а потім періодично на всю числову пряму (рис. 16.2).

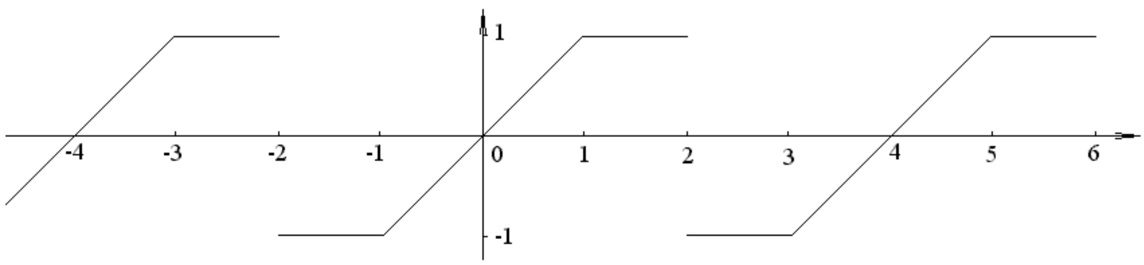

Рис. 16.2.

Тут також $l=2$, $T=4$, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Його коефіцієнти обчислюємо за формулами a_n=0, а

$$b_n=\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=I_1+I_2.$$

Перший інтеграл обчислимо частинами.

$$I_1=\int_0^1 x\sin\frac{n\pi}{2}xdx=\left[\begin{array}{c} u=x,\ dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=dx,\ v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{array}\right]=\left.\frac{-2x\cos\frac{n\pi x}{2}}{n\pi}\right|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\left.\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right|_0^1=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}==\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$I_2=\int_1^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\left.\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right|_1^2=-\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2})=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi};$$

$$b_n=I_1+I_2=\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\Rightarrow b_1=\frac{4}{\pi^2}+\frac{2}{\pi};$$

$$a_2=-\frac{1}{\pi};\ a_3=\frac{-4}{9\pi^2}+\frac{2}{3\pi};\ a_4=-\frac{1}{2\pi}.$$

Ряд Фур’є має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\sin\frac{n\pi}{2}}{(n\pi)^2}+\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\right)\sin\frac{n\pi x}{2},\quad x\in(0;2).$$

<u>Навчально-методична література:</u>

1. Мунтян В.К. , Говаленков С.В. Вища математика. Методичні вказівки для самостійних занять. – Х.: НУЦЗУ, 2015.

2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. – Частина 3. – Х.: Фактор-Друк., 2002.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 18. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ЛЕКЦІЯ 40. ПОДІЯ І ЙМОВІРНІСТЬ

Час: 2 год.

Місце: звичайна аудиторія.

Навчальні питання та розподілення часу:

Вступ.	(5 хвилин)
1. Предмет теорії ймовірностей.	(25 хвилин)
2. Простір елементарних подій.	(25 хвилин)
3. Класичне визначення ймовірності.	(20 хвилин)
Висновки та відповіді на запитання.	(5 хвилин)

Навчально-методичне забезпечення: конспект лекцій.

Навчальна література:

1. Говаленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: АПБУ, 2003.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2002.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.: Высшая школа, 2003.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 18. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ЛЕКЦІЯ 41. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Час: 2 год.

Місце: звичайна аудиторія.

Навчальні питання та розподілення часу:

Вступ.	(5 хвилин)
1. Додавання ймовірностей несумісних подій.	(25 хвилин)
2. Множення ймовірностей незалежних подій.	(25 хвилин)
3. Множення ймовірностей залежних подій.	(20 хвилин)
Висновки та відповіді на запитання.	(5 хвилин)

Навчально-методичне забезпечення: конспект лекцій.

Навчальна література:

1. Говаленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: АПБУ, 2003.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2002.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.: Высшая школа, 2003.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 18. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ЛЕКЦІЯ 42. НАСЛІДКИ ТЕОРЕМ ДОДАВАННЯ І МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Час: 2 год.

Місце: звичайна аудиторія.

Навчальні питання та розподілення часу:

Вступ.	(5 хвилин)
1. Формула повної ймовірності.	(35 хвилин)
2. Формули Байєса.	(35 хвилин)
Висновки та відповіді на запитання.	(5 хвилин)

Навчально-методичне забезпечення: конспект лекцій.

Навчальна література:

1. Говаленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: АПБУ, 2003.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2002.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.: Высшая школа, 2003.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 18. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ЛЕКЦІЯ 43. ФОРМУЛИ БЕРНУЛЛІ, ПУАСОНА, МУАВРА-ЛАПЛАСА

Час: 2 год.

Місце: звичайна аудиторія.

Навчальні питання та розподілення часу:

Вступ.	(5 хвилин)
1. Формула Бернуллі.	(25 хвилин)
2. Формула Пуасона.	(20 хвилин)
3. Локальна та інтегральна теореми Лапласа	(25 хвилин)
Висновки та відповіді на запитання.	(5 хвилин)

Навчально-методичне забезпечення: конспект лекцій.

Навчальна література:

1. Говаленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: АПБУ, 2003.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2002.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.: Высшая школа, 2003.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 18. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ЛЕКЦІЯ 44. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ, ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ

Час: 2 год.

Місце: звичайна аудиторія.

Навчальні питання та розподілення часу:

Вступ.	(5 хвилин)
1. Означення та класифікація випадкових величин.	(25 хвилин)
2.Закон розподілу ймовірностей.	(20 хвилин)
3. Біноміальний закон розподілу.	(25 хвилин)
Висновки та відповіді на запитання.	(5 хвилин)

Навчально-методичне забезпечення: конспект лекцій.

Навчальна література:

1. Говаленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: АПБУ, 2003.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2002.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.: Высшая школа, 2003.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 18. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ЛЕКЦІЯ 45. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Час: 2 год.

Місце: звичайна аудиторія.

Навчальні питання та розподілення часу:

Вступ.	(5 хвилин)
1. Інтегральна функція розподілу.	(25 хвилин)
2. Щільність розподілу.	(20 хвилин)
3. Рівномірний, нормальний та показовий закони розподілу.	(25 хвилин)
Висновки та відповіді на запитання.	(5 хвилин)

Навчально-методичне забезпечення: конспект лекцій.

Навчальна література:

1. Говаленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: АПБУ, 2003.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2002.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.: Высшая школа, 2003.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 18. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ЛЕКЦІЯ 46. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНИХ ТА НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Час: 2 год.

Місце: звичайна аудиторія.

Навчальні питання та розподілення часу:

Вступ.	(5 хвилин)
1. Математичне сподівання.	(35 хвилин)
2.Дисперсія.	(35 хвилин)
Висновки та відповіді на запитання.	(5 хвилин)

Навчально-методичне забезпечення: конспект лекцій.

Навчальна література:

1. Говаленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: АПБУ, 2003.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2002.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.: Высшая школа, 2003.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 18. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ЛЕКЦІЯ 47. ВИБІРКОВИЙ МЕТОД

Час: 2 год.

Місце: звичайна аудиторія.

Навчальні питання та розподілення часу:

Вступ.	(5 хвилин)
1 Статистичний розподіл вибірки.	(25 хвилин)
2. Емпірічна функція розподілу.	(25 хвилин)
3. Полігон і гістограма.	(20 хвилин)
Висновки та відповіді на запитання.	(5 хвилин)

Навчально-методичне забезпечення: конспект лекцій.

Навчальна література:

1. Говаленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: АПБУ, 2003.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2002.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.: Высшая школа, 2003.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 18. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ЛЕКЦІЯ 48. ТОЧКОВІ ТА ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

Час: 2 год.

Місце: звичайна аудиторія.

Навчальні питання та розподілення часу:

Вступ.	(5 хвилин)
1 Точкові оцінки, їх властивості.	(25 хвилин)
2. Оцінки для математичного сподівання і дисперсії.	(25 хвилин)
3. Оцінки параметрів нормального розподілу.	(20 хвилин)
Висновки та відповіді на запитання.	(5 хвилин)

Навчально-методичне забезпечення: конспект лекцій.

Навчальна література:

1. Говаленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: АПБУ, 2003.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2002.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.: Высшая школа, 2003.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 18. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ЛЕКЦІЯ 49. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Час: 2 год.

Місце: звичайна аудиторія.

Навчальні питання та розподілення часу:

Вступ.	(5 хвилин)
1. Гіпотези і критерії.	(25 хвилин)
2. Перевірка гіпотез про вибіркове середнє.	(25 хвилин)
3. Перевірка гіпотез про вибіркову дисперсію.	(20 хвилин)
Висновки та відповіді на запитання.	(5 хвилин)

Навчально-методичне забезпечення: конспект лекцій.

Навчальна література:

1. Говаленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: АПБУ, 2003.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2002.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.: Высшая школа, 2003.

ЛЕКЦІЇ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

МОДУЛЬ 6. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ТЕМА 18. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ САТИСТИКИ

ЛЕКЦІЯ 50. ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ ПРО ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ

Час: 2 год.

Місце: звичайна аудиторія.

Навчальні питання та розподілення часу:

Вступ.	(5 хвилин)
1. Оцінка інтегральної функції розподілу і щільності розподілу.	(35 хвилин)
2. Критерії злагоди.	(35 хвилин)
Висновки та відповіді на запитання.	(5 хвилин)

Навчально-методичне забезпечення: конспект лекцій.

Навчальна література:

1. Говаленков С.В., Комяк В.М., Мігунова Л.В., Сознік О.П. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: АПБУ, 2003.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 2002.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.: Высшая школа, 2003.