АКАДЕМІЯ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ

С.О. Вамболь, В.М. Халипа

Методичні вказівки до самостійного вивчення курсу "ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА".

Розділ "СТАТИКА"

Харків 2005

Схвалено для використання у навчально–виховному процесі
Протокол від 18 лютого 2005 р. № 6
засідання методичної ради АЦЗУ

Рецензенти: Іванов В.І. – професор кафедри прикладної механіки АЦЗУ, доктор техн. наук, професор;

Лавинський В.І. – завідуючий кафедрою опору матеріалів НТУ “ХПІ”, доктор. техн. наук, професор

Методичні вказівки до самостійного вивчення курсу “Теоретична механіка”. Розділ “Сатика”. / Вамболь С.О., Халипа В.М. – Харків: АЦЗУ, 2005 – 56 с.

Викладено питання статики. Наведено теоретичний матеріал і приклади, які мають практичне значення. Видання містить традиційний матеріал зі статики.

Для курсантів, студентів та слухачів вищих навчальних закладів усіх форм навчання. Може бути корисним для самостійного вивчення курсу теоретичної механіки (розділ “Статика”), розв’язання задач рівноваги механічних систем, а також при приведенні складної системи сил до найпростіших видів.

Відповідальний за випуск С.О. Вамболь

ВСТУП

Теоретична механіка – одна з основних наук у підготовці майбутніх фахівців технічного напрямку. Основна мета курсу теоретичної механіки у програмі інженерної підготовки фахівців – є вміння описувати мовою математики процеси механічного руху, рівноваги та інші явища та процеси. Встановити основні закономірності, дати їм належне тлумачення, записати рівняння руху або рівноваги – ось та кваліфікація, яку повинна надати майбутньому інженерну теоретична механіка.

Розвиток сучасній науки і техніки нерозривно зв'язаний з створенням нових видів конструкцій, технічних засобів, пристроїв та ін., які задовольняють вимогам високої надійності та довговічності. На загальних принципах теоретичної механіки та законах міцності побудовані всі існуючи механічні системи. Можна сказати, що сучасна техніка цілком і повністю залежить від знань механіки. Створювати таку техніку, повністю використовувати її можливості може тільки досить підготовлена людина. Знання теоретичної механіки допоможуть зрозуміти основні принципи роботи різних механізмів та вивчати устрій агрегатів в цілому.

Характер задач і питань, що розв'язує теоретична механіка, розподіляють цю науку на окремі розділи: статика, кінематика та динаміка. У цьому посібнику буде розглядатись тільки перший розділ – статика.

Основне призначення посібника – допомогти курсантам, студентам та слухачам самостійно вирішувати задачі рівноваги механічних систем які знаходяться під дією різноманітних навантажень, а також при приведенні складної системи сил до найпростіших видів.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

1.1 ПРЕДМЕТ І ЗАДАЧІ СТАТИКИ

Статика це розділ теоретичної механіки, який вивчає перетворення системи сил та умови рівноваги під дією сил відносно визначеної системи координат. Виходячи а цього статика розглядає дві основні задачі:

1. Складання або розкладання сил і зведення системи сил, що діють на тіло, до найпростішого вигляду.

2. Визначення необхідних і достатніх умов рівноваги тіл під дією прикладених до них сил.

Статика досліджує різні закономірності ідеалізованих об'єктів: матеріальної точки, системи матеріальних точок та абсолютно твердого тіла. Матеріальна точка та абсолютно тверде тіло являють собою деякі абстрактні моделі фізичних тіл. Це вносить значні спрощення при розгляді рівнянь рівноваги.

Матеріальна точка - це фізичне тіло певної маси, розмірами якого можна знехтувати в даних умовах.

Існує і інше визначення матеріальної точки – це, геометрична точка, який приписана певна маса.

Система матеріальних точок - це така сукупність точок, в якій положення і рух кожної окремої точки залежить від положення і руху інших точок системи.

Абсолютно тверде тіло - це тіло, в якому відстані між будь-якими двома його точками залишаються незмінними.

Матеріальна точка й абсолютно тверде тіло називаються вільними, якщо вони можуть займати будь-яке положення у просторі.

1.2 СИЛИ ТА СИСТЕМИ СИЛ.

У статиці основним об'єктом дослідження є сили. Сила - це міра механічної взаємодії між тілами, яка визначає інтенсивність і напрямки цієї взаємодії. Сила - величина векторна, і тому вона характеризується модулем, напрямком та точкою прикладання, або лінією дії (рис. 1.2.1). У системі СІ вона вимірюється у ньютонах. Коли на одне тіло діє кілька сил, то їх сукупність називається системою сил. Ці системи залежно від їх взаємної орієнтації поділяються на такі:

1. Паралельні сили - лінії дії яких паралельні.
2. Збіжні сили - лінії дії яких перетинаються в одній точці.
3. Довільну систему сил, - сили можуть займати будь-яке положення у просторі.

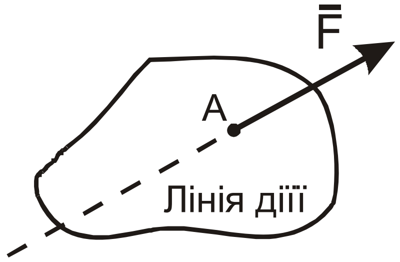


Рис.1.2.1 Сила що діє на тверде тіло

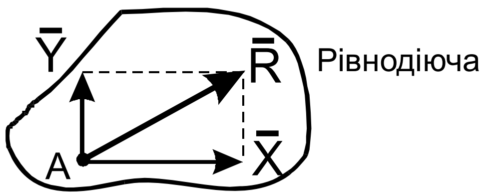


Рис.1.2.2 Рівнодіюча

Крім того, сили поділяються на активні і реакції в’язей, зосереджені та розподілені, внутрішні та зовнішні, а залежно від їх просторової орієнтації - на плоскі та просторові.

Зосередженою силою називається сила, яка прикладена до об’єкта в одній будь-якій точці. *Розподіленими силами* називаються сили, що діють на всі точки поверхні або об’єму тіла. Однак у теоретичній механіці всі розподілені сили замінюються зосередженими, прикладеними у центрі ваги.

Дві системи сил називають еквівалентними, якщо одну систему сил, які діють на вільне тіло, можна замінити іншою, не змінюючи її спокою або руху:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \approx (\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_n) \qquad (1.2.1)$$

Коли система сил еквівалентна одній силі, то ця сила мав назву рівнодіючої:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \approx \vec{R} \qquad (1.2.2)$$

Так, повна сила $\vec{R}$, яка діє на тіло, є рівнодіючою сили $\vec{X}$ та сили $\vec{Y}$ (рис. 1.2.2).

Зрівноваженою називається така система сил, додавання якої до вільного твердого тіла чи її відкидання не змінює стану спокою або руху цього тіла. Зрівноважена система сил еквівалентна нулю.

Під рівновагою тіла розуміють стан спокою цього тіла відносно інших тіл, які відіграють роль системи відліку.

Якщо систему відліку можна вважати нерухомою, то рівновага тіла у цій системі називається абсолютною.

1.3 АКСІОМИ СТАТИКИ

В основу статики покладено декілька очевидних істин, які називаються аксіомами і відображають властивості сил, до діють на тіло (рис. 1.3.1).

Аксіома 1 (про дві сили). Дві сили, що діють на тверде тіло, врівноважуються тільки тоді, коли вони рівні за модулем, протилежні за напрямком і діють вздовж однієї прямої.

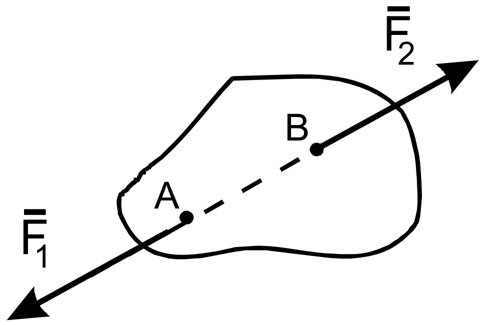
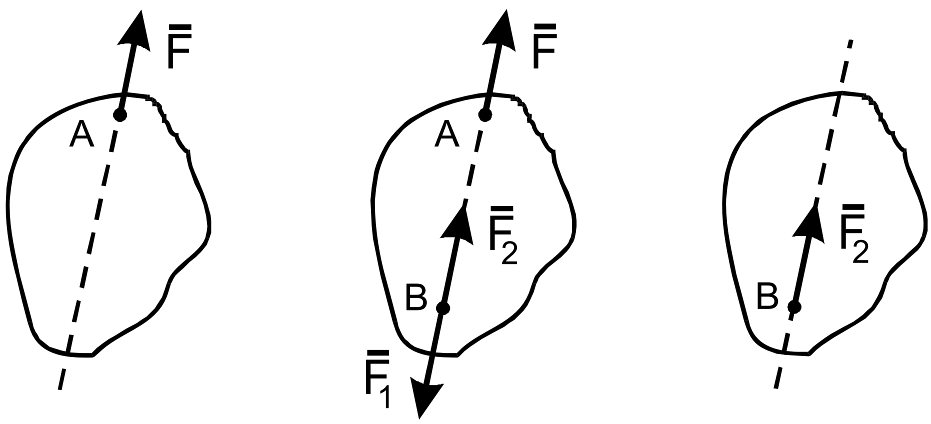


Рис. 1.3.1 Аксіома про дві сили

Аксіома 2 (про ковзний вектор). Дія даної системи сил на тверде тіло не змінюється, якщо до неї додати або від неї відкинути систему сил еквівалентну нулю.

Висновок. Не змінюючи дії даної сили на тверде тіло, точку, де прикладена ця сила, можна перенести вздовж її лінії дії в яку-завгодно точку, що належить тілу.



а) б) в)

Рис. 1.3.2 Аксіома про ковзний вектор

Доказ. Дійсно, на основі аксіом 1 і 2 це твердження легко довести. Хай сила F прикладена уточні А (рис. 1.3.2а). Згідно з аксіомою 2 можна у довільній точці В, взятій на лінії дії сили F, прикласти зрівноважену систему сил, щоб виконувалось співвідношення F= F_2 = - F_1 (рис. 1.3.2б). Тоді відповідно до аксіоми 1 сили F і F_1 будуть взаємно врівноважені та їх можна відкинути. У результаті залишається сила F_2 , еквівалентна F (рис. 1.3.2в). Таким чином, для твердих тіл сила є вектором ковзним.

Аксіома 3 (про паралелограм сил).

Рівнодіюча двох сил. що перетинаються, дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах (рис. 1.3.3).

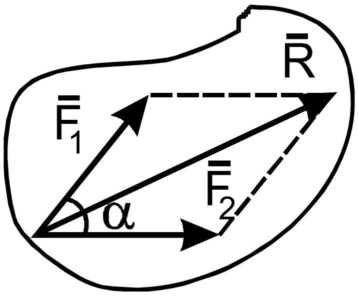


Рис. 1.3.3 Аксіома про паралелограм сил

Таким чином, рівнодіюча двох сил дорівнюватиме

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad (3.1)$$

Модуль рівнодіючої обчислюють за допомогою теореми косинусів:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \qquad (3.2)$$

Напрямок рівнодіючої двох сил визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах, як на векторах.

Аксіома 4 (про дію та протидію).

Сили, з якими діють одне на одне тіла, завжди рівні за модулем і спрямовані по одній прямій у протилежні боки (рис. 1.3.4). Але треба запам'ятати , що сили F_A та F_B не утворюють зрівноважену систему сил, тому що вони прикладені до різних тіл.

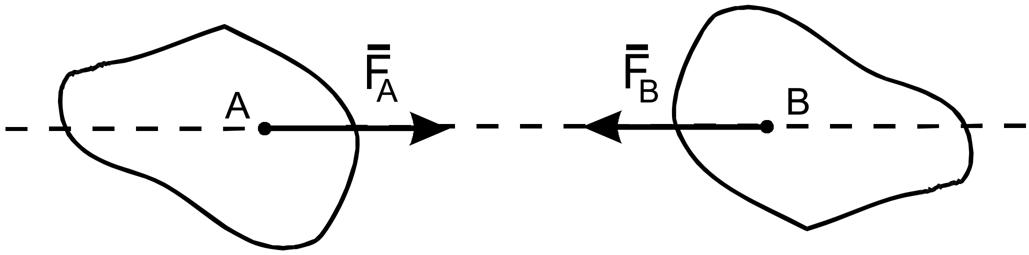


Рис. 1.3.4 Аксіома про дію та протидію

<u>Аксіома 5</u> (про затвердіння).

Якщо тіло, що деформується, перебуває у рівновазі, то його рівновага не порушується, коли воно затвердіє.

<u>Аксіома 6</u> (про звільнення від в'язей).

Механічний стан твердого тіла не зміниться, якщо відкинути в’язи і замінити їх дію реакціями.

<u>Аксіома 7</u> (про накладання нових в’язей).

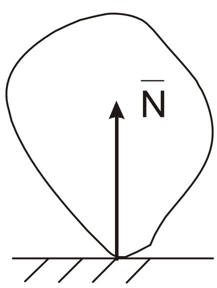
Рівновага твердого тіла не порушаться, якщо накласти на його нові в’язи.

1.4 ОСНОВНІ ТИПИ В’ЯЗЕЙ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ

При розв'язанні задач про рівновагу невільних тіл широко застосовується аксіома про звільнення від в’язей. В’язь - це обмеження, накладене на рух точок матеріальної системи. Відкидаючи в'язь, її дію замінюють силою, яка називається реакцією в’язі, тобто протидією в’язі на дію даного тіла. Таким чином, треба знати характер дії тієї чи іншої в’язі та напрямок її реакції.

Роль в’язей (опор) на практиці виконують різні тіла та конструкції, основними з яких є:

1. Ідеально гладенька поверхня, яка обмежує рух тіла лише у напрямку, перпендикулярному до поверхні, і дозволяє рухатись у всіх інших напрямках. Реакцією гладенької поверхні є одна сила $\bar{N}$, спрямована перпендикулярно до цієї поверхні або до дотичної у точці контакту тіла з поверхнею (рис. 1.4.1).



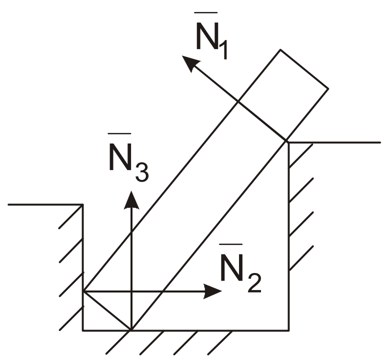


Рис. 1.4.1 Ідеально гладенька поверхня   Рис.1.4.2 Ребро поверхні

2. Ребро (кут, вістря), колі реакція перпендикулярна до тіла або до дотичної до нього в точці контакту (рис. 1.4.2).

3. Рухомий шарнір або коток. У техніці за опору на ідеально гладеньку поверхню править опора на котках (рис. 1.4.3). Реакція котка спрямована перпендикулярно до поверхні, по якій котиться коток.

Рис.1.4.3 Рухомий шарнір   Рис. 1.4.4 Трос (або нитка, шнур)

4. Нитка (шнур, трос, ланцюг, пас), яке утримує тіло лише в напрямку свого натягу (рис. 1.4.4).

5. Циліндричний шарнір або підшипник (рис. 1.4.5).

Шарнір протидіє переміщенню стержня у напрямку осей OX і OY але стержень може обертатись навколо осі 0Z. Тому реакція циліндричного шарніра має дві складові $\vec{R}_x$ і $\vec{R}_y$, які лежать у площині, перпендикулярній до його осі. Схематично циліндричний шарнір зображують у вигляді**,** показаному на рис. 1.4.5б. Модуль реакції визначають за формулою

а)   б)

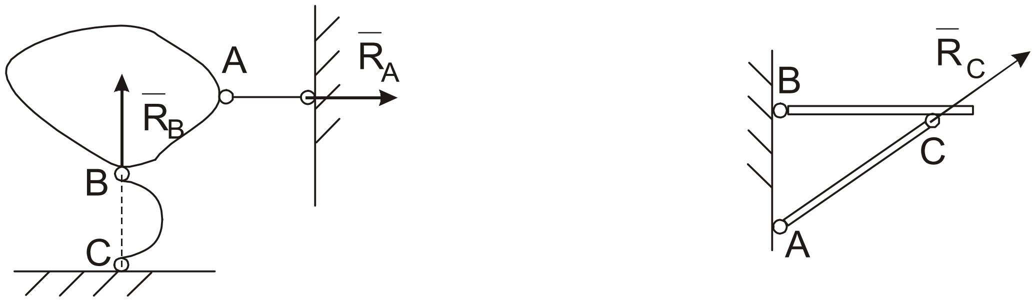
Рис. 1.4.5 Циліндричний шарнір або підшипник

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad (1.4.1)$$

Напрямок реакції знаходять через напрямні косинуси:

$$\cos(R;i)=R_x/R, \qquad \cos(R;j)=R_y/R. \qquad (1.4.2)$$

6. Ідеальний стержень, який є невагомим із шарнірами на кінцях, протидіє лише у напрямку своєї осі (рис. 1.4.6а) або напрямку, що з’єднує шарніри на кінцях стержня у випадку криволінійного стержня (рис. 1.4.6б), тобто має одну реакцію $\vec{R}$.



а) б)

Рис. 1.4.6 Ідеальний стержень

7. Сферичний шарнір (рис. 1.4.7) або підп’ятник розкладають за напрямом трьох взаємно перпендикулярних осей OX, OY, OZ. Модулі та їх напрям визначають з умов рівноваги відповідних систем сил.

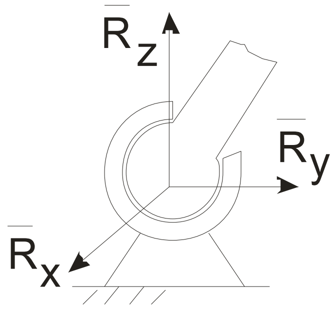


Рис. 1.4.7 Сферичний шарнір

Повна реакція визначається за формулою

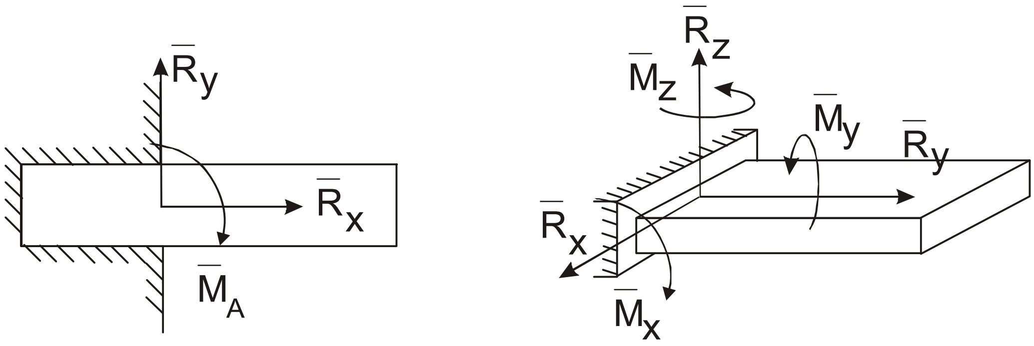
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad (1.4.3)$$

а її напрямок - через напрямні косинуси

$$\cos(R;i)=R_x/R, \qquad \cos(R;j)=R_y/R, \qquad \cos(R;k)=R_z/R. \qquad (1.4.4)$$

8. Нерухоме защемлення балки або консолі (у площині), яке виключає будь-яке переміщення балки у площині (як поступальне, так і обертальне). Реакція нерухомого

защемлення має дві взаємно перпендикулярні складові $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ і момент защемлення $\vec{M}_A$ (рис. 1.4.8а)



а) б)

Рис. 1.4.8 Нерухоме защемлення балки

9. Нерухоме защемлення балки у просторі (рис. 1.4.8б), що виключав всяке переміщення балки у просторі та має три складові реакції $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$, $\vec{R}_z$ і три складові моменти защемлення $\vec{M}_x$, $\vec{M}_y$, $\vec{M}_z$, модулі та напрямок яких визначається наведеними формулами.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{1.4.5}$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \tag{1.4.6}$$

$\cos(R;i)=R_x/R$, $\cos(R;j)=R_y/R$, $\cos(R;k)=R_z/R$. (1.4.7)

$\cos(M;i)=M_x/M$, $\cos(M;j)=M_y/M$, $\cos(M;k)=M_z/M$. (1.4.8)

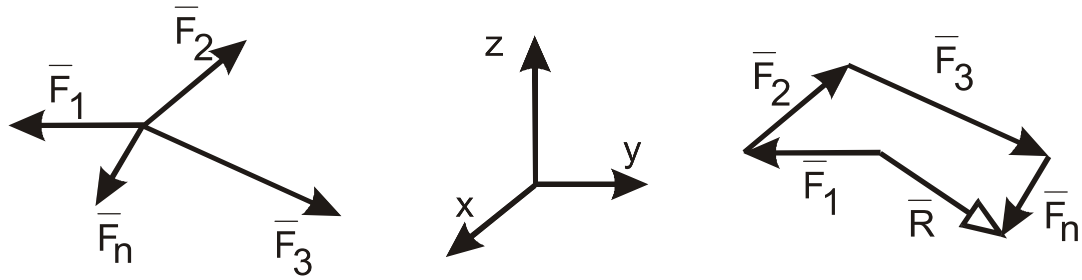
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які оснівні задачі розглядає статика.
2. Дати основні визначення що до об’єктів дослідження статики.
3. Які бувають системи сил в залежності від їх взаємної орієнтації
4. Які бувають типи сил.
5. Які системи сил називають еквівалентними.
6. Що називається зрівноваженою системою сил.
7. Перелічити основні аксіоми статики.
8. Зробити доказ аксіоми про ковзний вектор
9. Дати визначення в’язей
10. Сформулювати аксіому про паралелограм сил та про дію та протидію
11. Сформулювати аксіому про затвердіння, про звільнення від в'язей та про накладання нових в’язей
12. Навести приклади опор та їх в’язей для конструкцій розташованих у площі.
13. Навести приклади опор та їх в’язей для конструкцій розташованих у просторі
14. Записати формули для визначення сумарної реакції та сумарного реактивного моменту для нерухомого защемлення балки у площі.
15. Записати формули для визначення сумарної реакції та сумарного реактивного моменту для нерухомого защемлення балки у просторі.

2. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

2.1 ЗБІЖНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

Однією із задач статики є перетворення систем сил, внаслідок чого дана система сил замінюється іншою системою або силою, еквівалентною даній. Розглянемо у цьому плані збіжну просторову систему сил (рис. 2.1.1а). З аксіоми про рівнодіючу двох сил. лінії дії яках перетинаються, ми зробили очевидний висновок, що коли маємо систему з декількох збіжних сил, то їх рівнодіюча знаходиться за правилом векторного додавання і являє собою замикаючий бік силового многокутника.



а) б)

Рис. 2.1.1 Збіжна просторова система сил

Рівнодіюча $\vec{R}$ для збіжних сил (рис. 2.1.1б) дорівнює

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \tag{2.1.1}$$

де k=1,2…n, n – кількість сил системи.

Отже, збіжна система сил зводиться до однієї сили - рівнодіючої $\vec{R}$, яка дорівнює векторній сумі всіх сил системи.

Для аналітичного розв’язання цієї задачі застосовується метод проекцій, який базується на відомій з векторної алгебри теоремі про проекції рівнодіючої на вісь. Ця теорема формулюється так: проекція рівнодіючої системи збіжних сіл на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на ту ж саму вісь.

Розкладемо вектор рівнодіючої $\vec{R}$ на компоненті по декартових осях координат:

$$\vec{R} = \vec{i} \cdot R_x + \vec{j} \cdot R_y + \vec{k} \cdot R_z \tag{2.1.2}$$

где i, j, k – одиничні орти координатних осей.

R_x, R_y, R_z - проекції вектора $\vec{R}$ на координатні осі.

У проекціях на декартові осі координат вираз (2.1.1) набуває вигляду:

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \\ R_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \end{cases} \qquad (2.1.3)$$

де $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$ - сума проекцій всіх сил на координатні осі.

Для аналітичного визначення модуля рівнодіючої $\vec{R}$ та її напрямку маємо такі формули:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2} \qquad (2.1.4)$$

$$\cos(R;i)=R_x/R, \qquad \cos(R;j)=R_y/R, \qquad \cos(R;k)=R_z/R. \qquad (2.1.5)$$

2.2 УМОВИ РІВНОВАГИ

Другою задачею статики є з’ясування необхідних умов, яким повинна задовольняти система сил, щоб тіло перебувало у стані рівноваги. Визначимо ці умови для збіжної системи сил.

2.2.1 Векторна умова рівноваги

Якщо при побудові силового багатокутника виявиться, до кінець вектора останньої n-ї сили збігається з початком вектора першої сила, тобто силовий багатокутник буде замкнутим, то рівнодіюча такої системи сил дорівнює нулю. У цьому випадку дія збіжної системи сил еквівалентна нулю, і ми можемо записати

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0 \qquad (2.2.1)$$

Таким чином, геометричною (або векторною) умовою рівноваги збіжної системи сил є умова рівності нулю її рівнодіючої. Це правило формулюється так: для рівноваги збіжної системи сил необхідно і достатньо, щоб силовий багатокутник був замкнутим.

2.2.2 Аналітичні умови рівноваги

Проекції виразу (2.2.1) на декартові осі координат дають нам аналітичні умови рівноваги збіжної просторової системи сил:

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \\ F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

Вони читаються так: для рівноваги збіжної просторової системи сил необхідно І достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на осі декартової системи координат дорівнювала нулю.

Якщо сили збіжної системи сил діють в одній площині, то для рівноваги збіжної системи сил необхідна рівність нулю проекцій всіх сил на дві координатні осі:

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

Умови (2.2.2) і (2.2.3) називаються аналітичними умовами рівноваги збіжної системи сил і застосовуються при розв’язуванні задач статика для визначення невідомих сил і реакцій в’язей.

2.3 ТЕОРЕМА ПРО ТРИ СИЛИ

Якщо вільне тверде тіло знаходиться у рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

Цей висновок неважко одержати з першої та третьої аксіом статики (рис. 2.3.1).

Перенесемо дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ вздовж їх лінії дії в точку перетину О і складемо Їх відповідно до третьої аксіоми, а потім зрівноважимо, згідно з першою аксіомою, одержану рівнодіючу третьою силою $\vec{F}_3$:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \qquad \vec{R} = -\vec{F}_3. \qquad (2.3.1)$$

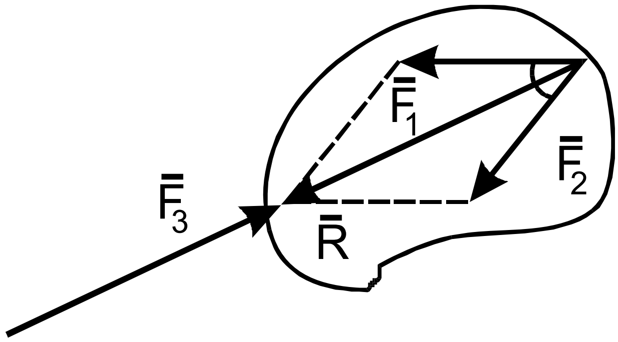


Рис. 2.3.1 Теорема про три сили

<u>Приклад.</u>

Нехай підйомний пристрій вагою G=1кН (балка АВ) пожежного автомобіля, закріплений на нерухомому циліндричному шарнірі А, спирається в точці В на нерухому гладеньку опору (рис. 2.3.2а). Визначити реакції опор, якщо АС=CD=2м; ВС=1м; $\alpha=15°$

Рішення

У нашому випадку маємо систему трьох сил $\vec{G}, \vec{R}_A, \vec{R}_B$, збіжних в точці О, де перетинаються лінії їх дії. Нагадуємо, що $\vec{R}_B \perp AD$. Із прямокутного трикутника ACC_1 маємо $CC_1=AC\sin\alpha$, $AC_1=AC\cos\alpha$; так само із трикутника ВОС, $OC = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$, тоді $OC_1=OC+CC_1=AC\sin\alpha+\dfrac{BC}{\sin\alpha}$. Очевидно, що

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{OC_1}{AC_1} = \frac{AC\sin\alpha + \dfrac{BC}{\sin\alpha}}{AC\cos\alpha} = tg\alpha + \frac{BC}{AC\sin\alpha\cos\alpha} = tg15^\circ + \frac{1}{2\sin15^\circ\cos15^\circ} = 2{,}266$$

Вирішуємо рівняння $tg(\alpha+\beta) = 2{,}266$; звідки $\alpha+\beta = arctg(2{,}266) = 66{,}19^\circ$

$\beta = 66{,}19^\circ - 15^\circ = 51{,}19^\circ$. Кут $\gamma = 90^\circ - (\alpha+\beta) = 90^\circ - 66{,}19^\circ = 23{,}81^\circ$.

Далі будуємо замкнутий силовий многокутник який у нашому прикладі – трикутник (діють три сили). Сторони трикутника паралельні напрямкам векторів сил (рис. 2.3.2б). Із трикутника за допомогою теореми синусів знайдемо модулі реакції опор. Дійсно:

$$\frac{R_A}{\sin\alpha} = \frac{R_B}{\sin\gamma} = \frac{G}{\sin(\alpha+\gamma)}, \text{ звідси}$$

$$R_A = \frac{G\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{1\cdot\sin 15^\circ}{\sin(15^\circ + 23{,}81^\circ)} = \frac{0{,}259}{0{,}627} = 0{,}413\kappa H$$

$$R_B = \frac{G\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{1\cdot\sin 23{,}81^\circ}{\sin(15^\circ + 23{,}81^\circ)} = \frac{0{,}404}{0{,}627} = 0{,}644\kappa H$$

Тепер визначимо невідомі реакції опор за допомогою аналітичних умов рівноваги збіжної системи сил (2.3.3). У цьому прикладі вони записуються так:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad G\cdot\sin\alpha - R_A\cdot\cos\beta = 0$$

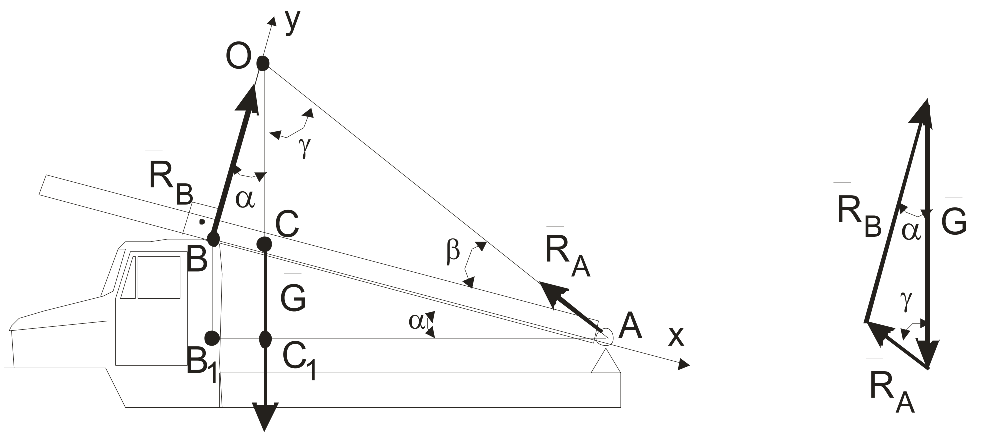
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad R_B - G\cdot\cos\alpha + R_A\cdot\sin\beta = 0$$

Таким чином, маємо:

$$R_A = \frac{G\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{1\cdot\sin 15^\circ}{\cos 51{,}19^\circ} = \frac{0{,}259}{0{,}627} = 0{,}413\kappa H$$

$$R_B = G\cos\alpha - R_A\sin\beta = 1\cdot 0{,}966 - 0{,}413\cdot 0{,}779 = 0{,}644\kappa H$$

Співпадіння результатів розрахунку реакцій опор за двома способами свідчить про правильне рішення.



а) б)

Рис. 2.3.2 Схема дії сил

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Навести приклад збіжної просторової системи сил та звести її до рівнодіючей.
2. Аналітичне рівняння зведення збіжної системи сил до рівнодіючей.
3. Записати векторні умови рівноваги.
4. Записати аналітичні умови рівноваги.
5. Сформулювати теорему про три сили.
6. Зробити доказ теореми про три сили.
7. Навести приклад використання теореми про три сили.

3. МОМЕНТ СИЛИ

3.1 МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ

Момент сили $\vec{F}$ відносно точки О (центра) (рис. 3.1.1) називається вектор, що дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\vec{r}$, проведеного з центра О в точку А прикладання сили, на вектор $\vec{F}$.

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \tag{3.1.1}$$

Модуль цього векторного добутку

$$M_O(\vec{F}) = r \cdot F \cdot \sin\alpha \tag{3.1.2}$$

Опустимо перпендикуляр з точки О на лінію дії сили $\vec{F}$. Довжина цього перпендикуляра $OD = h$ називається плечем сили $\vec{F}$ відносно точки О. Тоді (3.1.2) запишемо у вигляді

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot h \tag{3.1.3}$$

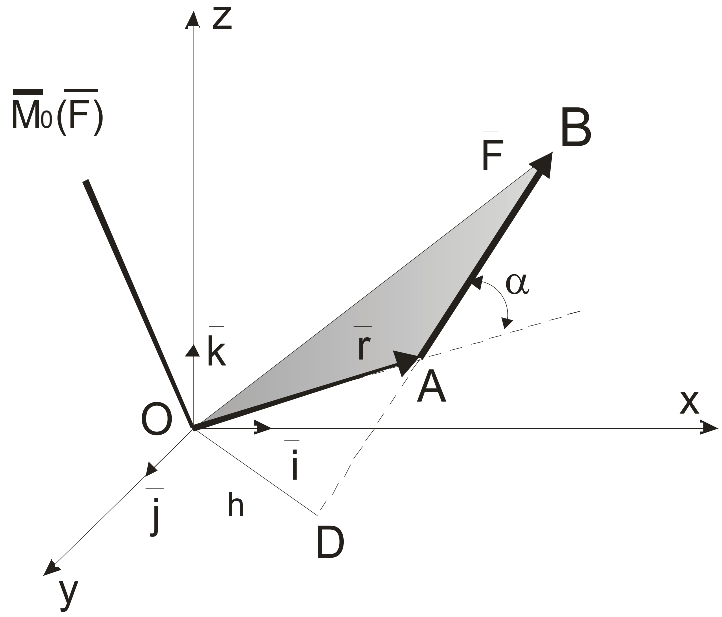


Рис. 3.1.1 Момент сили відносно точки

Очевидно, момент сили має всі властивості векторного добутку. Використовуючи формулу (3.1.1) можна знайти проекції вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ на координатні осі. Як відомо з векторної алгебри,

$$\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix} \qquad (3.1.4)$$

Розкриваючи цей визначник за елементами першого рядка і розкладаючи вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ на складові $M_{ox}(\vec{F})$, $M_{oy}(\vec{F})$, $M_{oz}(\vec{F})$ по осях координат одержимо:

$$\begin{aligned}M_o(\vec{F}) &= (F_z y - F_y z)\vec{i} + (F_x z - F_z x)\vec{j} + (F_y x - F_x y)\vec{k} = \\ &= M_{ox}(\vec{F})\vec{i} + M_{oy}(\vec{F})\vec{j} + M_{oz}(\vec{F})\vec{k}\end{aligned} \qquad (3.1.5)$$

Порівнюємо ліву і праву частини цього рівняння, одержимо:

$$M_{ox}(\vec{F}) = F_z y - F_y z, \quad M_{oy}(\vec{F}) = F_x z - F_z x, \quad M_{oz}(\vec{F}) = F_y x - F_x y \qquad (3.1.6)$$

Модуль і напрям моменту сили відносно точки О можна визначити так

$$M_o(\vec{F}) = \sqrt{M_{ox}^2(\vec{F}) + M_{oy}^2(\vec{F}) + M_{oz}^2(\vec{F})}$$

$$\cos(\vec{M}_o, \vec{i}) = \frac{M_{ox}}{M_o}, \quad \cos(\vec{M}_o, \vec{j}) = \frac{M_{oy}}{M_o}, \quad \cos(\vec{M}_o, \vec{k}) = \frac{M_{oz}}{M_o}$$

Приклад: До точки А(2,-3,5) прикладена сила $\vec{F}$ кінець вектора якої знаходиться в точці В(4,6,-1) знайти модуль і напрям моменту сили відносно точки О.

Розв'язання

Маємо $\vec{F} = \overrightarrow{AB} = \{2, 9, -6\}$, $\vec{r} = \{2, -3, 5\}$

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 5\\ 2 & 9 & -6\end{vmatrix} =$$

$$= ((-6)(-3) - 5\cdot 9)\vec{i} - ((-6)\cdot 2 - 2\cdot 5)\vec{j} + (2\cdot 9 - 2(-3))\vec{k} = -27\vec{i} + 22\vec{j} + 24\vec{k}$$

$$M_o(\vec{F}) = \sqrt{(-27)^2 + (22)^2 + (24)^2} = \sqrt{729 + 424 + 576} = \sqrt{1789} = 42{,}3$$

$$\cos(\vec{M}_o, \vec{i}) = -\frac{27}{42{,}3} = -0{,}638; \quad \cos(\vec{M}_o, \vec{j}) = \frac{22}{42{,}3} = 0{,}52; \quad \cos(\vec{M}_o, \vec{k}) = \frac{24}{42{,}3} = 0{,}567$$

Із визначення моменту сили відносно точки маємо:

1) якщо перемістити силу вздовж лінії її дії, то момент сили відносно точки не зімнеться

2) коли лінія дії сили проходять через точку, то момент сили відносно цієї точки завжди дорівнює нулю

3) модуль моменту сили відносно точки чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника ОАВ (рис 3.2.1), побудованого на силі ($F = AB$) і центрі моменту (О).

3.2 МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ОСІ

Моментом сили відносно осі називається проекція на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки, що лежить на цій осі (рис. 3.2.2)

З цього визначення випливає, що момент сили відносно координатних осей обчислюється за формулами (3.1.6). момент сили не залежить від вибору точки на осі.

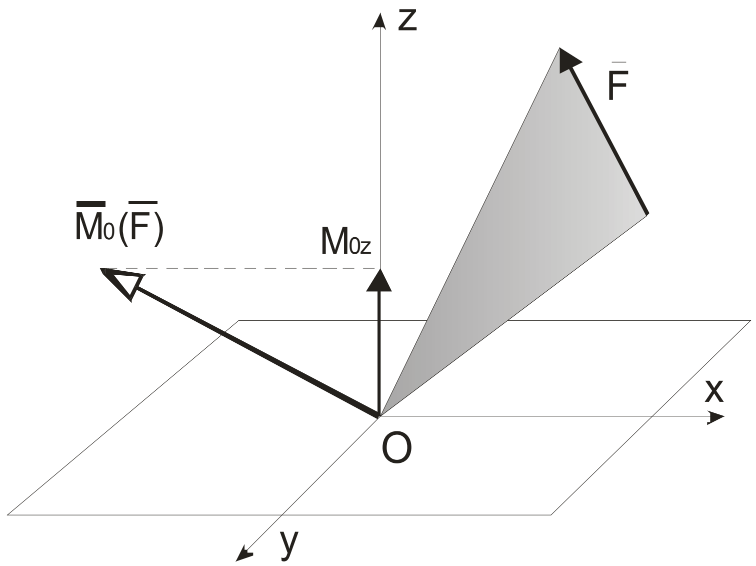


Рис. 3.2.2 Момент сили відносно осі

Якщо момент сили відносно деякого центра О викликає обертальний рух тіла навколо цього центра, то момент сили відносно осі викликає, зрозуміло, обертання тіла навколо даної осі.

При розв’язуванні конкретних задач моменти сили відносно осей зручно обчислювати більш наглядним способом (рис. 3.2.3) за таким правилом.

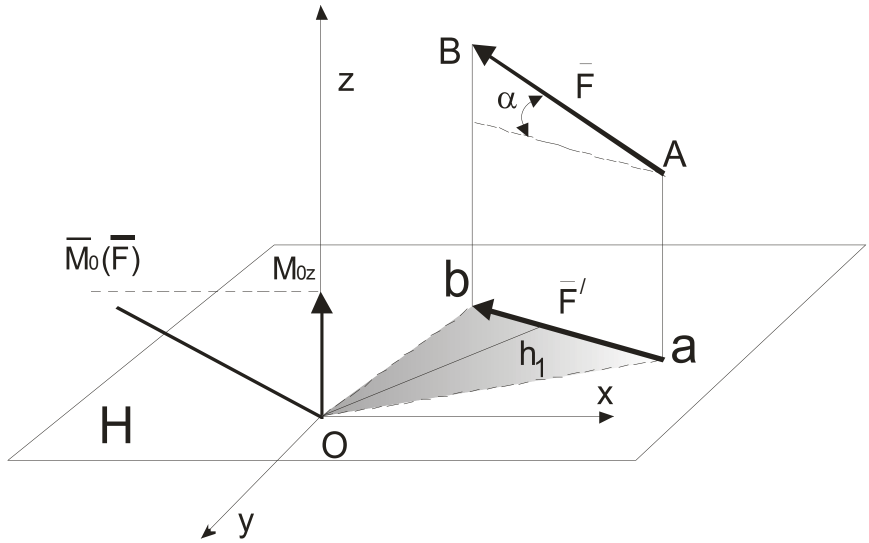


Рис. 3.2.3 Визначення моменту сили відносно осі

1. Проводимо довільну площину H, перпендикулярну до осі OZ, і знаходимо точку O перетину цієї площини з віссю.

2. Проектуємо силу $\vec{F}$ на зазначену площину.

3. Обчислюємо момент проекції $\vec{F}'$ сили $\vec{F}$ на цю площину відносно точки O:

$$\vec{M}_{OZ}(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}')$$

При цьому момент сили відносно осі вважається додатним, якщо спостерігач бачить з боку додатного напряму осі OZ, що сила $\vec{F}'$ намагається обертати тіло навколо осі OZ проти ходу годинникової стрілки.

Чисельне значення моменту відносно осі OZ можна визначити подвоєною площею трикутника Oab, що лежить у площині H.

Позначимо через h_1 довжину перпендикуляра проведеного з точки O до відрізка AB (плече сили $\vec{F}$ відносно осі OZ), тоді модуль моменту сили $\vec{F}$ відносно осі OZ дорівнює:

$$M_z(\vec{F}) = F' \cdot h_1 = F \cdot h_1 \cdot \cos\alpha$$

З визначення моменту сили відносно осі випливає, що він дорівнює нулю, якщо лінія дії сили і вісь лежать в одній площині.

Приклад

Сила прикладена у вершині A куба (рис. 3.2.4) і напрямку по діагоналі AB_1 грані ABB_1A_1. Визначити її моменти відносно координатних осей, якщо довжина ребра куба складає 2м, $\varphi = 45^\circ$.

Розв'язання

Знаходимо проекції сили $\vec{F}$ на координатні осі $F_x = 0$, тому що $\vec{F} \perp OX$. $F_y = F\cos(180 - \varphi) = -F\cos\varphi = -100 \cdot \cos 45^\circ = -50\sqrt{2}$;

$F_z = F\cos(90 - \varphi) = F\sin\varphi = 100 \cdot \cos 45^\circ = 50\sqrt{2}$. Точка A прикладення сили $\vec{F}$ має координати x=2; y=2; z=0. Згідно з формулами (3.1.6) маємо:

$$M_{ox}(\vec{F}) = F_z y - F_y z = 50\sqrt{2} \cdot 2 + 50\sqrt{2} \cdot 0 = 100\sqrt{2} \quad Нм$$

$$M_{oy}(\vec{F}) = F_x z - F_z x = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 50\sqrt{2} = -100\sqrt{2} \quad Нм$$

$$M_{oz}(\vec{F}) = F_y x - F_x y = -50\sqrt{2} \cdot 2 - 2 \cdot 0 = -100\sqrt{2} \quad Нм,$$

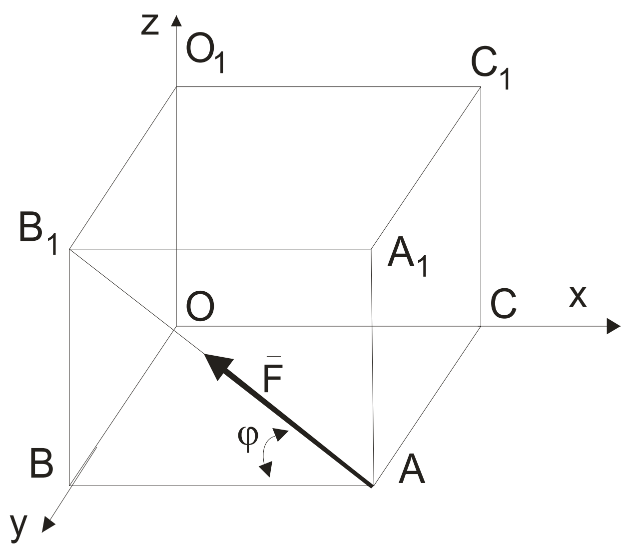


рис. 3.2.4

З другого боку для визначення, наприклад, M_{ox} можна міркувати так: сила $\vec{F}$ лежить у площині, яка перпендикулярна осі OX, B – точка перетину цієї площини з віссю OX. У цьому випадку M_{ox} буде дорівнювати $M_B(\vec{F})$. Плече h сили $\vec{F}$ відносно точки B очевидно дорівнює половині діагоналі BA_1, тобто $h = \sqrt{2}$ м. Остаточно $M_{ox} = F \cdot h = 100\sqrt{2}$ Нм. Цей результат співпав з одержаним вище.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дати визначення моменту сили.

2. Від чого залежить обертальний ефект сили.

3. Дати визначення вектора моменту сили відносно точки як векторного добутку.

4. Записати вектор моменту сили відносно точки у компонентах по декартових осях координат.

5. Дати визначення моменту сили відносно осі.

6. Записати як визначається момент сили відносно осі.

7. У якому випадку момент сили відносно осі дорівнює нулю.

8. Навести приклад визначення вектора моменту сили відносно точки.

9. Навести приклад визначення моменту сили відносно осі.

4. ПАРАЛЕЛЬНІ СИЛИ

4.1 ЗВЕДЕННЯ СИСТЕМИ ДВОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ ДО РІВНОДІЮЧОЇ

Дві паралельні сили можна розглядати як граничний випадок двох збіжних сил, коли точка перетину віддалена у нескінченність. Залежно від просторової орієнтації системи паралельних сил поділяють на плоскі та просторові.

4.1.1 Складання паралельних сил, які спрямовані в один бік

Розглянемо систему двох паралельних сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, прикладених у точках A і B твердого тіла (рис. 4.1.1) і спрямованих в один бік. Для визначення рівнодіючої цих сил і точки її прикладання зробимо так: прикладемо у точках A і B дві сили $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$, рівні за величиною і протилежні за напрямком. Склавши попарно сили $\vec{F}_1$ і $\vec{Q}_1$, та $\vec{F}_2$ і $\vec{Q}_2$, одержимо їх рівнодіючі $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$, лінії дії яких перетинаються у точці O.

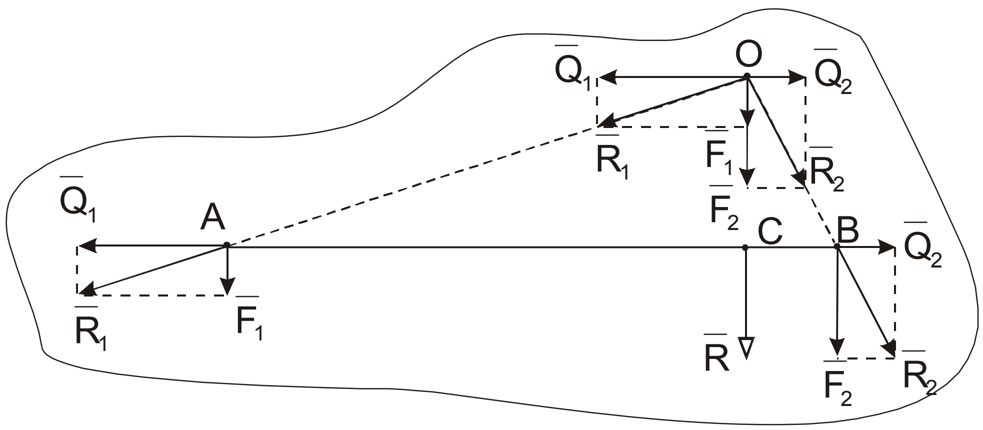


Рис. 4.1.1 Складання паралельних сил

Скориставшись властивістю сили як ковзного вектора, перенесемо сили $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ в точку O, а потім розкладемо їх на дві попередні складові $\vec{F}_1$ і $\vec{Q}_1$, та $\vec{F}_2$ і $\vec{Q}_2$. Отже. прикладені в точці O сили $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$ взаємно врівноважуються, а спрямовані в один бік сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ матимуть рівнодіючу, модуль якої дорівнює сумі модулів цих сил:

$$R = F_1 + F_2 \tag{4.1.1}$$

Лінія дії рівнодіючої $\vec{R}$ перетинав відрізок АВ у точці С, яка ділить цей відрізок на частини, обернено пропорційні модулям сил:

$$\frac{AC}{F_1} = \frac{CB}{F_2} = \frac{AB}{R} \tag{4.1.2}$$

Таким чином, рівнодіюча двох паралельних сил, спрямованих у один бік, за модулем дорівнює сумі модулів цих сил, спрямована у той же бік, що й сили, і ділить відстань між точками прикладання сил на відрізки, обернено пропорційні силам.

4.1.2. Складання паралельних сил, спрямованих у протилежні боки

Для визначення рівнодіючої двох паралельних сил, спрямованих у протилежні боки (рис. 4.1.2), скористаємось попереднім заходом. Звідси матимемо, що модуль їх рівнодіючої дорівнює різниці модулів складових сил:

$$R = F_2 - F_1 \tag{4.1.3}$$

як що $F_2 > F_1$

Лінія дії одержаної рівнодіючої сили $\vec{R}$ перетинає продовження відрізка АВ у точці С, а відстані точок А і Б від точки С обернено пропорційні модулям сил:

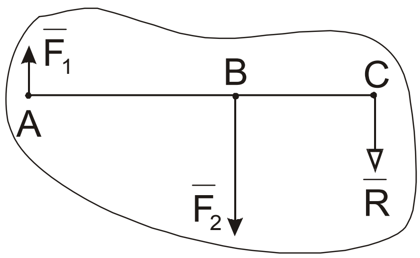


Рис. 4.1.2 Паралельні сили спрямовані у протилежні боки

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{AB}{R} \tag{4.1.4}$$

Такім чином, рівнодіюча двох паралельних сил. спрямованих у різні боки, за модулем дорівнює різниці модулів цих сил, спрямована в бік більшої сили та ділить відстань міх точками прикладання даних сил зовнішнім чином на частини, обернено пропорційні модулям сил.

4.1.3. Система двох рівних, різнонаправлених паралельних сил. Пара сил

Розглянемо випадок визначення рівнодіючої двох паралельних сил, рівних за модулем і спрямованих у різні боки (так званої пари сил);

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2; \qquad \vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2 \tag{4.1.5}$$

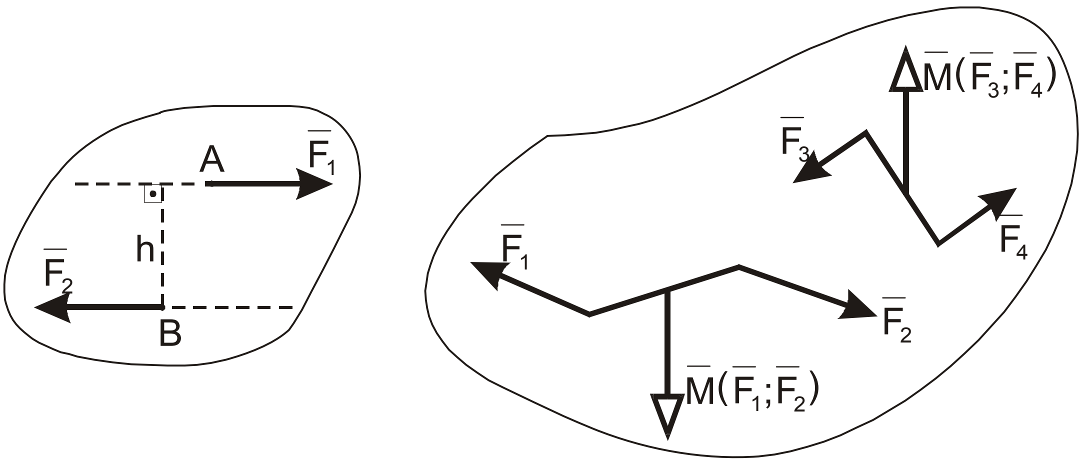
Повторивши всю процедуру попереднього випадку визначення рівнодіючої паралельних сил, ми переконаємося в тому, що одержані сили $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ також рівні та паралельні між собою, лінії Їх дії не перетинаються, а модуль рівнодіючої пари сил дорівнює нулю:

$$R = F_1 - F_2 = 0 \tag{4.1.6}$$

Однак дія пари сил на тіло - ненульова і викликає обертальний рух. Мірою обертальної дії пари сил служить момент пари, величина якого дорівнює добутку модуля однієї із сил пари на плече:

$$M(\vec{F}_1; \vec{F}_2) = F_1 \cdot h = F_2 \cdot h \tag{4.1.7}$$

Плечем називається найкоротша відстань (довжина перпендикуляра) між лініями дії сил пари $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 4.1.3а).



а) б)

Рис. 4.1.3 Пара сил

Напрямок обертання, створеного парою сил, визначає знак моменту пари: якщо пара сил обертає тіло проти годинникової стрілки - момент позитивний, якщо навпаки

- негативний. Отже, момент пари сил має величину, напрямок і площину дії, тобто є векторною величиною.

Площина N, де діє пара сил, називається площиною дії цієї пари (рис. 4.1.3б).

Вектор моменту пари сил перпендикулярний до площини, в якій лежить, і спрямований у той бік, звідки обертання тіла, що здійснюється парою, відбувається проти руху годинникової стрілки. На рис. 4.1.3б показано дві пари сил, які діють в одній площині та мають протилежно - спрямовані вектори моментів.

Визначимо, чому дорівнюватиме момент пари сил, і виявимо його властивості.

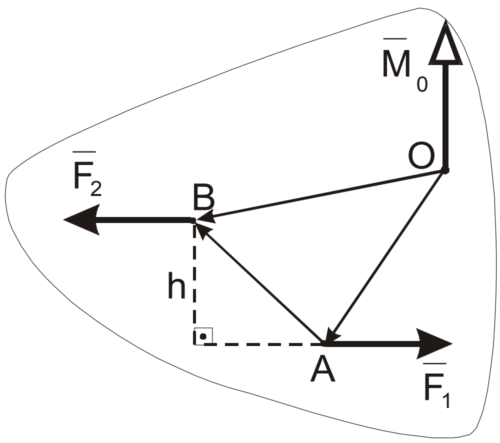


Рис. 4.1.4 Момент пари сил

Нехай O - довільна точка простору (рис. 4.1.4), $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ - сили, що утворюють пару, яка прикладена в точках A і B

З визначення моменту сили відносно точки (3.2.1) маємо:

$$\begin{gathered}\vec{M}(\vec{F}_1)+\vec{M}(\vec{F}_2)=\vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_2\times\vec{F}_2= \\ \vec{r}_1\times(-\vec{F}_2)+\vec{r}_2\times\vec{F}_2=(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{F}_2=\vec{\rho}\times\vec{F}_2\end{gathered} \tag{4.1.7}$$

Обчислена векторна сума не залежить від положення точки O, відносно якої визначаються моменти. Векторний добуток $\vec{\rho}\times\vec{F}$ називається моментом пари сил $(\vec{F}_1;\vec{F}_2)$ і позначається $\vec{M}(\vec{F}_1;\vec{F}_2)$:

$$\vec{M}(\vec{F}_1;\vec{F}_2)=\vec{\rho}\times\vec{F} \tag{4.1.8}$$

Модуль моменту пари сил дорівнює

$$\vec{M}(\vec{F}_1;\vec{F}_2) = F \cdot h \tag{4.1.9}$$

Момент пари сил - вектор вільний.

Висновки:

1. Пару сил, не змінюючи її дії на тіло, можна перенести куди завгодно в площині, в якій лежить пара.

2. Пару сил, не змінюючи її дії на тіло, можна перенести у паралельну площину.

3. У парі сил, не змінюючи величини її моменту, можна відповідно змінювати модулі сил і довжину плеча.

4. Дві пари сил з рівними моментами еквівалентні.

5. Декілька пар сил, що лежать в одній площині, можна замінити однією еквівалентною парою з моментом, що дорівнює векторній сумі моментів цих пар.

4.2 СКЛАДАННЯ ПАР СИЛ У ПРОСТОРІ. УМОВИ РІВНОВАГИ ПАР

Декілька пар сил, що лежать у рівнях площинах, можна замінити однією еквівалентною парою з моментом, що дорівнює векторній сумі моментів цих пар.

Нехай на тіло діє n пар, які лежать в різних площинах. Складаючи ці пари у послідовному порядку та застосовуючи кожний раз аксіому про складання двох векторів, ми встановимо, що ця система пар замінюється одною рівнодіючою парою а вектором-моментом

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k \tag{4.2.1}$$

Вектор $\vec{M}$ (рис. 4.2.1) можна знайти також як замикаючу сторону багатокутника, побудованого із складових векторів-моментів пар.

Однак якщо складові вектори не лежать в одній площі, то обчислювання краще проводити аналітичне.

На основі теореми про проекції суми векторів навісь запишемо (див. рис. 4.2.1):

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} M_{kx}\ , \qquad M_y = \sum_{k=1}^{n} M_{ky}\ , \qquad M_z = \sum_{k=1}^{n} M_{kz}\ . \tag{4.2.2}$$

Модуль моменту пари

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \tag{4.2.3}$$

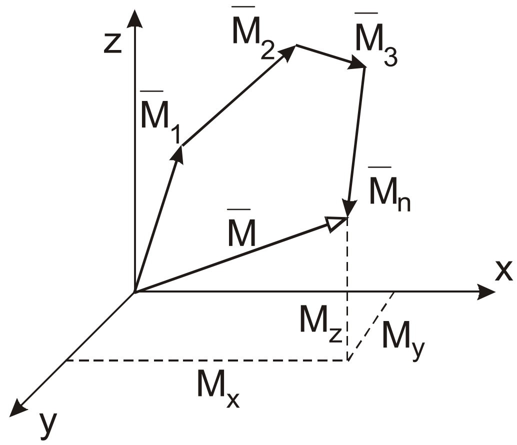


Рис. 4.2.1 Складання моментів пар сил у просторі

Звідси легко знаходяться умови рівноваги системи пар. Для рівновага пар необхідно і достатньо, щоб вектор-момент рівнодіючої пари дорівнював нулю:

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k = 0 \tag{4.2.4}$$

Це означає, що багатокутник, побудований з векторів-моментів, мав бути замкнутим, звідки маємо аналітичні умови рівноваги:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0\,, \qquad M_y = \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0\,, \qquad M_z = \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0\,. \tag{4.2.5}$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Навести алгоритм складання паралельних сил, які спрямовані в один бік.

2. Навести алгоритм складання паралельних сил, спрямованих у протилежні боки.

3. Дати визначення пари сил та моменту пари сил.

4. Як визначається вектор моменту пари сил.

5. Перелічити основні властивості моменту пари сил.

6. Як виконується складання пар сил у просторі геометрично.

7. Як виконується складання пар сил у просторі аналітично.

8. Сформулювати умови рівноваги системи пар сил

9. Записати аналітичні умови рівноваги системи пар сил.

5. ДОВІЛЬНА СИСТЕМА СИЛ

5.1 ЗВЕДЕННЯ ДО ОДНОГО ЦЕНТРУ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ.

Довільною системою сил називається сукупність прикладених до твердого тіла сил, лінії дії яких довільно орієнтовані у просторі (рис. 5.1).

Розглядаючи збіжну систему сил, ми переконалися, що систему можна замінити однією рівнодіючою силою, яка дорівнює векторній сумі всіх сил, що входять до системи. Систему паралельних сил також можливо звести або до рівнодіючої сили, або до пари сил.

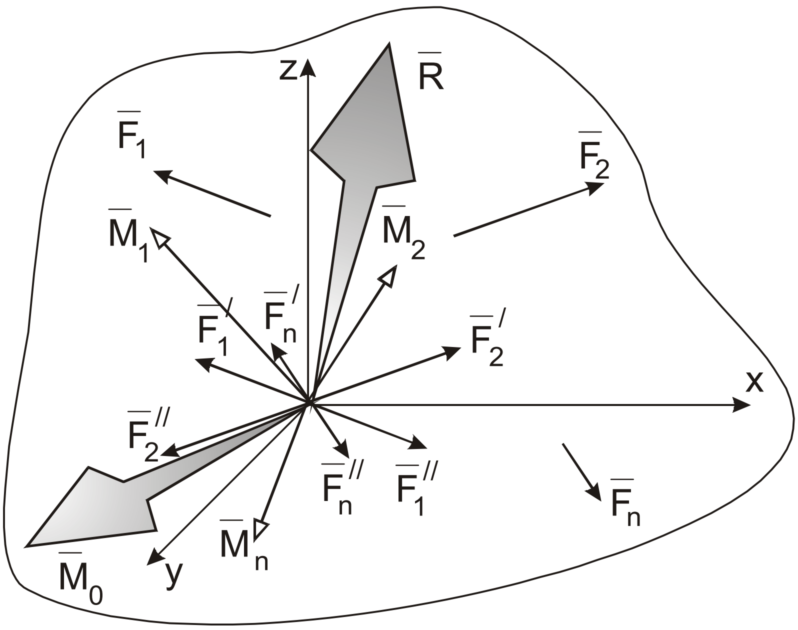


Рис. 5.1.1 Довільна система сил

Спробуємо спростити прикладену до абсолютно твердого тіла довільну систему сил, звівши всі сили до одного заданого центра О (див. рис. 5.1.1). Почнемо із сили $\vec{F}_1$. Прикладемо у центрі О зрівноважену систему сил, щоб виконувалась умова

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1' = -\vec{F}_1'' \qquad (5.1.1)$$

тобто сили, рівні за модулем і паралельні між собою. Дві паралельні, рівні за модулем і протилежні за напрямком сили $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_1''$, ми можемо трактувати як пару сил $(\vec{F}_1; -\vec{F}_1'')$, а силу $\vec{F}_1'$, прикладену в точці О - як перенесену в точку О силу $\vec{F}_1$.

Повторивши аналогічну операцію перенесення до центра О для всіх сил, одержимо систему сил $\vec{F}_1'\ \vec{F}_2'\ \vec{F}_3'\ \ldots\ \vec{F}_n'$, прикладених у точці О (збіжну систему сил), і систему пар сил з моментами M_1, M_2, M_3,…, M_n, (див. рис. 5.1.1), яку одержали внаслідок проведених операцій перенесення. Векторна сума всіх збіжних сил дасть рівнодіючу, або так званий головний вектор $\vec{R}$ системи, прикладений у точці О, а векторна сума моментів усіх приєднаних пар сил - головний момент системи $\vec{M}_O$.

Таким чином, довільну систему сил можна звести до однієї рівнодіючої сили, що дорівнює головному вектору, прикладеному у центрі зведення, та до однієї пари сил, яка дорівнює головному моменту відносно того ж центра:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k', \qquad \vec{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{F}_k; \vec{F}_k'') \tag{5.1.2}$$

Головний момент системи приєднаних пар сил можна розглядати і як векторну суму моментів всіх вихідних сил відносно центра О:

$$\vec{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{F}_k) \tag{5.1.3}$$

Модулі векторів $\vec{R}$ і $\vec{M}_O$ та їх напрямок визначаються а формул:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{5.1.4}$$

$$\cos(R;i)=R_x/R, \quad \cos(R;j)=R_y/R, \quad \cos(R;k)=R_z/R. \tag{5.1.5}$$

$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \tag{5.1.6}$$

$$\cos(M;i)=M_x/M, \quad \cos(M;j)=M_y/M, \quad \cos(M;k)=M_z/M. \tag{5.1.7}$$

З'ясуємо тепер, як позначається на головному векторі та головному моменті зміна положення центра зведення довільної системи сил.

Цілком очевидно, що головний вектор $\vec{R}$ не залежить від положення центра зведення, тому що сили у цей центр переносяться паралельно до самих себе, а це означає, що багатокутник сил залишається незмінним.

Головний момент $\vec{M}_O$ залежатиме від положення центра введення, тому до змінюватимуться його модуль і напрямок. При цьому головний момент сил відносно нового центра зведення зміниться на величину, що дорівнює моменту попереднього головного вектора системи відносно нового центра:

$$\vec{M}_{o1} = \vec{M}_o + \vec{M}_{o1}(\vec{R}) \tag{5.1.8}$$

де $\vec{M}_o$ і $\vec{M}_{o1}$ - головні моменти даної системи сил відносно попереднього центра О і нового O_1, а $\vec{M}_{o1}(\vec{R})$ - момент головного вектора $\vec{R}$ відносно нового центра зведення, який визначається за формулою

$$\vec{M}_{o1}(\vec{R}) = \overrightarrow{OO_1} \times \vec{R} \qquad (5.1.9)$$

При зведенні довільної системи сил до заданого центра повинні мати місто лише такі випадки:

1. Головний вектор $\vec{R} \neq 0$, а головний момент $\vec{M}_o = 0$, тобто система сил зводиться до рівнодіючої, а тіло рухається поступально.

2. Головний вектор $\vec{R} = 0$, а головний момент $\vec{M}_o \neq 0$, тобто система сил зводиться до пари і тіло при цьому обертається.

3. Головний вектор $\vec{R} = 0$ і головний момент $\vec{M}_O = 0$, тобто під дією такої системи сил тіло знаходиться у рівновазі.

4. Головний вектор $\vec{R} \neq 0$ і головний момент $\vec{M}_o \neq 0$, тобто при цьому можуть бути такі три окремі випадки:

а) Коли головний вектор паралельний головному моменту $\vec{R} \parallel \vec{M}_o$ (рис. 5.1.2,а), то це означає, що система зводиться до сили $\vec{R}$ і пари $(\vec{F}; \vec{F}')$, яка лежить у площині, перпендикулярній до сили (рис. 5.1.2,б).

Така сукупність сили і пари називається динамічним гвинтом (динамою).

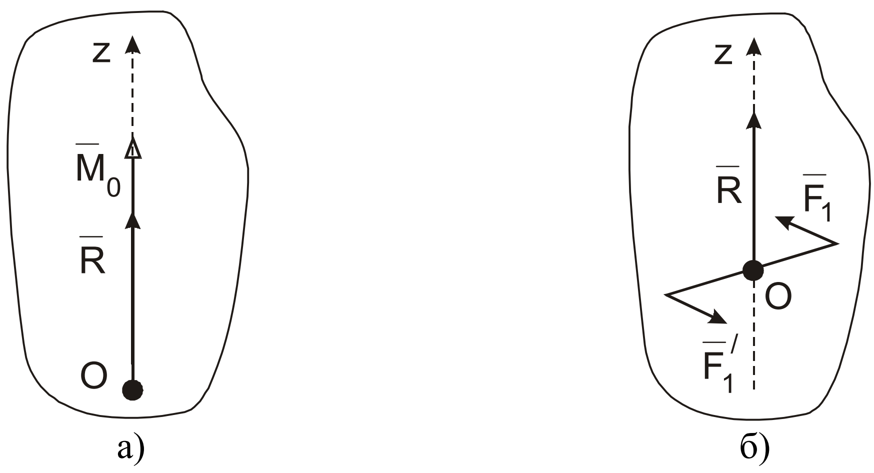


Рис. 5.1.2 Динамічний гвинт

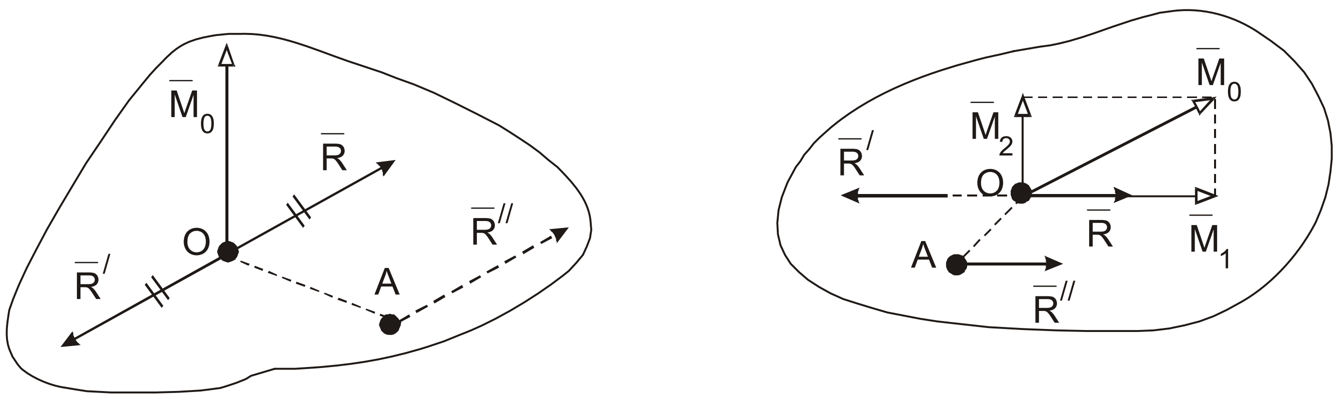
б) Коли головний вектор перпендикулярний до головного моменту $\vec{R} \perp \vec{M}_O$ (рис. 5.1.3а), то така система також зводиться до рівнодіючої $\vec{R}'' = \vec{R}$, але не проходить через центр О. Дійсно, коли $\vec{R} \perp \vec{M}_o$ пара і сила лежать в одній площині. Тоді вибираємо сили пари $(\vec{R}'; \vec{R}'')$ такими, щоб виконувалась умова:

$$\vec{R} = -\vec{R}' = \vec{R}''$$

і у точці О матимемо взаємно зрівноважені сили.

Сила й дорівнюватиме $\vec{R}$ і прикладатиметься у точці А . Відстань О А визначається за формулою

$$OA = \frac{M_o}{R} \tag{5.1.10}$$



а) б)

Рис. 5.1.3 Приведення системи сил до заданого центру

в) Якщо дія даної системи сил і кут між $\vec{R}$ і $\vec{M}_o$ є довільним, то така система сил також приводиться до динами, але вісь останньої не проходитиме через центр О (рис. 5.1.3б). Розкладемо вектор $\vec{M}_o$ на складові $\vec{M}_1$ і $\vec{M}_2$. Пару $\vec{M}_2$ та силу $\vec{R}$ можна, як і в попередньому випадку, замінити рівнодіючою силою $\vec{R}''$, прикладеною у точці А, тому що вони взаємно перпендикулярні: $\vec{R} \perp \vec{M}_2$

В результаті дана система сил заміниться силою $\vec{R}'' = \vec{R}$ і парою з моментом $\vec{M}_1$, тобто динамою з віссю, яка проходить через точку А .

5.2 УМОВИ РІВНОВАГИ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ

5.2.1 Векторна форма.

З результатів зведення довільної системи сил до головного вектора $\vec{R}$ і головного моменту $\vec{M}_o$ ми бачимо, що тверде тіло перебуватиме у рівновазі лише тоді, коли і головний вектор $\vec{R}$, і головний момент $\vec{M}_o$ системи дорівнюватиме нулеві, тобто

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0, \quad \vec{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{F}_k) = 0 \qquad (5.2.1)$$

Геометрично це означає, що багатокутник сил і багатокутник моментів є замкнутими.

5.2.2 Аналітична форма.

Проектуючи рівняння (5.2.1) на декартові осі координат, запишемо аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил у вигляді шести рівнянь (відповідно до шести ступенів вільності тіла у просторі).

Ці умови читаються так: для рівновагі довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні сумі проекцій всіх сил на три взаємно перпендикулярні осі і сумі моментів усіх сил відносно цих осей дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} M_x(F_k) = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} M_y(F_k) = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} M_z(F_k) = 0 \end{cases} \qquad (5.2.2)$$

де F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} - проекції сил на координатні осі;

M_{kx}, M_{ky}, M_{kz} - моменти сил відносно цих осей.

Якщо тіло до прикладання сил знаходилось у стані спокою, то перші три рівняння (5.2.2) виражають необхідні умови відсутності переміщень тіла вздовж осей координат, а три останні - відсутність обертання навколо цих осей.

Якщо всі сили довільної системи діють в одній площині, то аналітичні умова рівноваги довільної плоскої системи сил зводяться до запису трьох рівнянь (відповідно кількості ступенів вільності тіла на площині).

5.2.2.1 Перша форма умов рівноваги

Перша, або основна, умова запису умов рівноваги:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{oz}(F_k) = 0 \tag{5.2.3}$$

де $\sum_{k=1}^{n} M_{oz}(F_k) = 0$ - момент всіх сил відносно осі Oz*,* яка перпендикулярна до площини Oxy, де діють сили, і може бути проведена з будь-якої точки площини. А тому цей вираз ми можемо замінити визначенням суми моментів цих сил відносно будь-якої точки площини.

Таким чином, для рівноваги довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на дві взаємно перпендикулярні осі та алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини дорівнювали нулю.

5.2.2.2 Друга форма умов рівноваги.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно кожної з двох будь-яких точок A і B, взятих в площині системи, 1 алгебраїчна сума проекцій всіх сил на будь-яку вісь Ox , не перпендикулярну до AB , дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_A(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_B(F_k) = 0 \tag{5.2.4}$$

5.2.2.3 Третя форма умов рівноваги. (Рівняння трьох моментів).

Для рівноваги довільної системи плоскої система сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно кожної з трьох будь-яких точок A, B, C, які не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_B(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_C(F_k) = 0 \qquad (5.2.5)$$

Якщо ми маємо справу з системою паралельних сіл, то кількість рівнянь зменшується. Нехай сили паралельні осі Oz. Тоді для просторової системи паралельних сил маємо:

$$\sum_{k=1}^{n} M_x(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_y(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \qquad (5.2.6)$$

Для плоскої системи сил, якщо сили паралельні осі Oy, можна записати:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{oz}(F_k) = 0 \qquad (5.2.7)$$

При розв’язку задач, щоб скласти більш прості рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно:

а) складаючи рівняння проекцій проводить координатну вісь перпендикулярно якій небудь невідомій силі;

б) для складання рівняння моментів, брати центр зведення у точці, де перетинаються більш невідомих сіл.

Приклад. На балку AD (рис. 5.1.4) діє плоска система сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$. Визначити реакції опор нерухомого A і рухомого шарніра B, якщо $F_1 = 50\,H$, $F_2 = 100\,H$, AC=CB=BD=2 м, α=30°.

Розв’язок

Розкладаємо невідому реакцію $\vec{R}_A$ шарніра А на складові $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ направлені по координатним осям OX і OY. Знаходимо проекції всіх сил на координатні вісі і їх моменти відносно точки А і для зручності заносимо ці результати в таблицю 1.

Таблиця 1 Результати розрахунків

Сила	Проекції сили на осі		Момент сили відносно точки А
	OX	OY	
$\vec{F}_1$	0	$-F_1$	$-F_1 \cdot AC$
$\vec{F}_2$	$-F_2\cos\alpha$	$-F_2\sin\alpha$	$-F_2\sin\alpha \cdot AD$
$\vec{R}_1$	R_1	0	0
$\vec{R}_2$	0	R_2	0
$\vec{R}_B$	0	R_B	$-R_B \cdot AB$

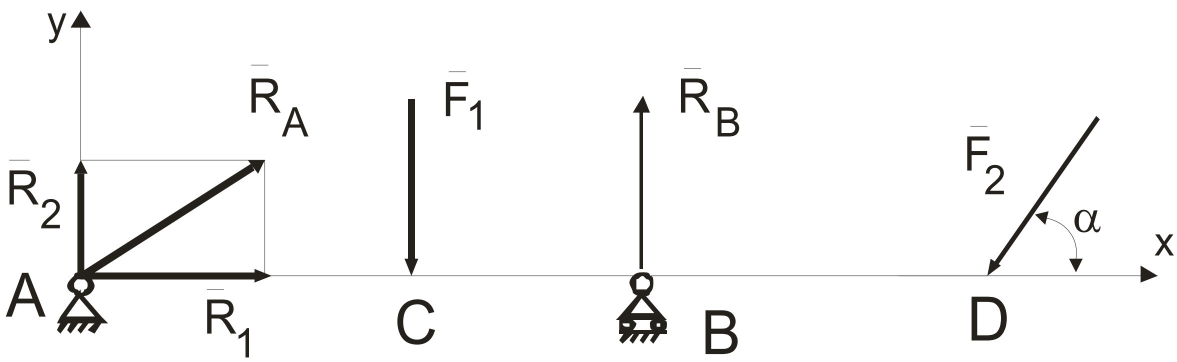


Рис. 5.1.4 Розрахункова схема

Рівняння рівноваги (5.2.4) приймають вигляд

$\sum F_x = -F_2\cos\alpha + R_1 = 0$ (1)

$\sum F_y = F_1 - F_2\sin\alpha + R_2 + R_B = 0$ (2)

$\sum M_A(\vec{F}) = -F_1 \cdot AC - F_2\sin\alpha \cdot AD + R_B \cdot AB = 0$ (3)

Із рівняння (1) знаходимо $R_1 = F_2\cos\alpha = 100 \cdot \cos 30^\circ = 86{,}6\ H$

Рівняння (3) дозволяє знайти

$$R_B = \frac{F_1 \cdot AC + F_2\sin\alpha \cdot AD}{AB} = \frac{50 \cdot 2 + 100\sin 30^\circ \cdot 6}{4} = 100\ H$$

Використовуючи рівняння (3) маємо

$$R_2 = F_2 \sin\alpha - F_1 - R_B = 100 \cdot \sin 30^\circ - 50 - 100 = -100\ H$$

Знак (-) означає, що напрям цієї сили протилежний тому, що зображено на (рис. 5.1.4). Модуль реакції шарнірної опори

$$R_A = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{86{,}6^2 + (-100)^2} = 132{,}3\ H$$

Напрям цієї реакції відносно координатної вісі OX, кут β, знайдемо із силового прямокутного трикутника (рис. 5.1.5)

$$\beta = arctg\,\frac{R_2}{R_1} = arctg\,\frac{100}{86{,}6} = 49{,}11^\circ$$

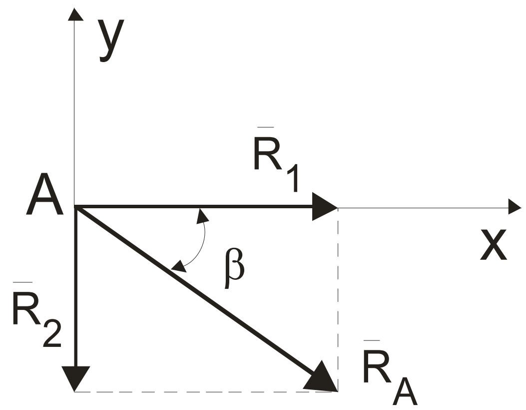


Рис. 5.1.5 Визначення реакції опори А

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дати визначення довільної системи сил.

2. Якими силовими параметрами можна замінити довільну систему сил.

3. Навести алгоритм зведення до одного центру довільної системи сил.

4. Дати визначення головному вектору всіх сил.

5. Дати визначення головному моменту відносно центру приведення.

6. Від чого залежать параметри вектору головного моменту.

7. Як визначається головний момент при зміні точці приведення.

8. Перелічити випадки зведення системи сил до простішого виду.

9. Що називається динамічним гвинтом.

10. Розглянути випадок коли головний вектор $\vec{R} \neq 0$ і головний момент $\vec{M}_o \neq 0$ та $\vec{R} \perp \vec{M}_o$

11. Розглянути випадок коли головний вектор $\vec{R} \neq 0$ і головний момент $\vec{M}_o \neq 0$ та між $\vec{R}$ і $\vec{M}_o$ є довільний кут.

12. Сформулювати умови рівноваги системи сил.

13. Записати векторну форму умови рівноваги системи сил.

14. Записати аналітичну форму умови рівноваги системи сил.

15. Записати першу форму умов рівноваги довільної системи сил, що діють в одній площині. Навести приклад.

16. Записати другу форму умов рівноваги довільної системи сил, що діють в одній площині. Навести приклад.

17. Записати третю форму умов рівноваги довільної системи сил, що діють в одній площині. Навести приклад.

6. РІВНОВАГА СИСТЕМИ ТВЕРДИХ ТІЛ.

6.1 СТАТИЧНО ВИЗНАЧЕНІ ТА НЕВИЗНАЧЕНІ ЗАДАЧІ

До цього ми розглядали рівновагу одного твердого тіла. Однак при статичному розрахунку багатьох інженерних конструкцій доводиться розглядати рівновагу системи твердих тіл, з’єднаних якими-небудь в’язями.

В’язі, які з’єднують тіла даної конструкції, а також сили взаємодії між тілами розглядуваної конструкції називаються внутрішніми.

В’язі, що скріпляють конструкцію з тілами, які до неї не входять, і сили, з якими діють на конструкцію зовнішні тіла, називаються зовнішніми.

Якщо після відкидання зовнішніх в’язей конструкція залишається жорсткою, то для неї задачі статики розв’язуються як для абсолютно твердого тіла.

Іноді доводиться розв’язувати задачі на рівновагу складних конструкцій, які після відкидання зовнішніх в’язей не залишаються жорсткими (рис. 6.1.1а). Якщо відкинути опори A і B, то конструкція не буде жорсткою, а її частини можуть повертатися коло шарніра C (рис. 6.1.1б).

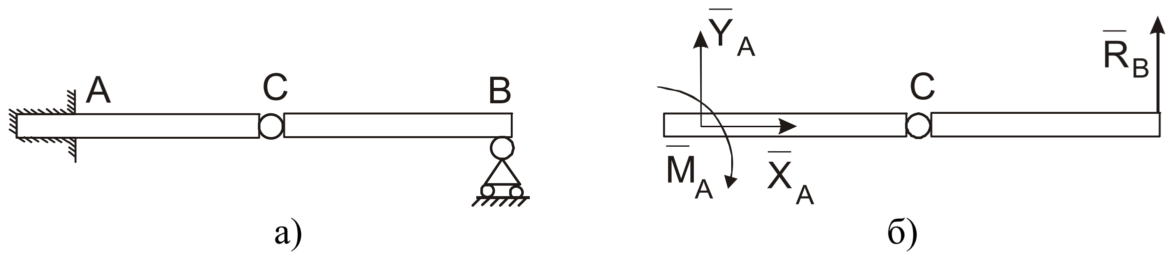


Рис. 6.1.1 Схема складної конструкції

Розглядаючи рівновагу системи тіл на основі принципу затвердіння. можливо побачити всю систему в цілому, вважаючи її затверділою і застосовуючи до неї умови рівноваги як для твердого тіла. Але ці умови, хоча і необхідні, не будуть достатніми, тому що у цьому разі кількість невідомих може бути більше трьох. Крім того, у багатьох задачах треба буде визначити і внутрішні сили системи, які до рівняння рівноваги не входять (рис. 6.1.2).

У цьому разі виконується умова

$$\vec{X}_C = -\vec{X}'_C\ , \quad \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C \tag{6.1.1}$$

Тоді, застосовуючи метод перерізу, необхідно додатково розглянути рівновагу якої-небудь однієї чи кількох частин конструкції як вільного тіла. При цьому до умов рівноваги ввійдуть реакції внутрішніх в'язей. Згідно з аксіомою 4 внутрішні сили рівні за модулем і спрямовані по одній прямій в різні боки**.** Отже. очевидна властивість внутрішніх сил:

головний вектор і головний момент внутрішніх сил відносно будь-якого центра дорівнює нулю.

Звідси випливає важливий висновок:

до всіх рівнянь статики входять тільки зовнішні сили.

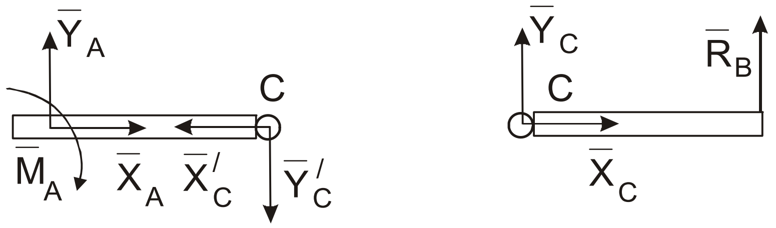


Рис. 6.1.2 Схема конструкції для визначення внутрішніх сил

Якщо конструкція складається із n тіл (рис. 6.1.2), на кожне з яких діє довільна плоска система сил, то можна скласти 3n умов рівноваги, що дозволяють знайти 3n невідомих.

Якщо при цьому число невідомих реакція в'язей дорівнюватиме 3n, то конструкція називається статично визначеною. Але якщо число невідомих реакцій в'язей перевищує 3n, то конструкція буде статично невизначеною. Ці задачі розв'язує дисципліна опору матеріалів.

6.2 РІВНОВАГА ЗА НАЯВНОСТІ СИЛ ТЕРТЯ

На попередніх лекціях, коли ми розглядали рівновагу твердих тіл, які спираються на нерухому площину, припускалося, на опорна поверхня ідеально гладенька. Реакція такої поверхні спрямована по нормалі до цієї площини, тому що вона не перешкоджає руху тіла в дотичній площині. Однак досвід показує, по при намаганні зворухнути одне тіло відносно іншого в площині контакту тіл виникає сіла опору їх відносному ковзанню. Ця сила має назву сила тертя ковзання.

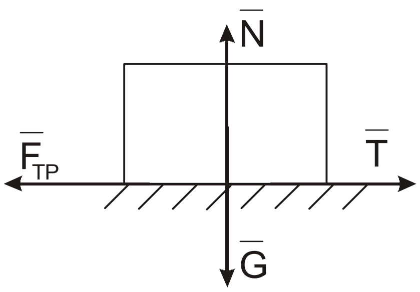
6.2.1 Тертя ковзання

Величина сили сухого тертя $\vec{F}_{TP}$ пропорційна ступеню шорсткості контактуючих поверхонь (пари тертя) і нормальному тиску $\vec{N}$ (тобто силі, яка притискає поверхні тіл одна до одної):

$$F_{TP} = f \cdot N \tag{6.2.1}$$

Ступінь шорсткості характеризується коефіцієнтом тертя f, що визначається експериментально. Тіло (Рис. 6.2.1а) перебуває у граничній рівновазі під дією чотирьох сил: вага тіла $\vec{G}$ врівноважується реакцією опорної поверхні $\vec{N}$, а сила $\vec{T}$, яка намагається зрушити тіло, - силою тертя $F_{TP} = f \cdot N$. Коефіцієнт тертя обчислимо за формулою

$$f = F_{TP} / N, \text{ або } f = T / G \tag{6.2.2}$$



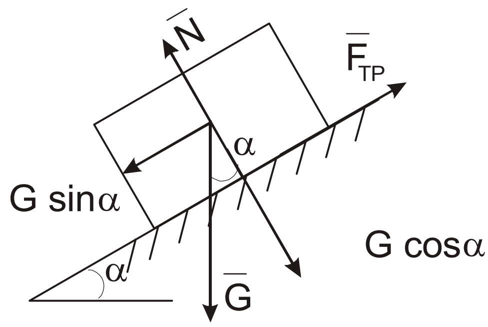


Рис. 6.2.1 тертя ковзання

Тіло вагою $\vec{G}$ (рис. 6.2.16) лежить на нахиленій площині. Якщо цю силу ваги розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові $G \cdot \mathbf{sin}\,\alpha$ і $G \cdot \cos\alpha$, то у випадку граничної рівноваги

$$N = G \cdot \mathbf{cos}\,\alpha\,, \quad F_{TP} = G \cdot \mathbf{sin}\,\alpha \tag{6.2.3}$$

і коефіцієнт тертя

$$f = F_{TP} \,/\, N = G \cdot \mathbf{sin}\,\alpha \,/\, G \cdot \mathbf{cos}\,\alpha = tg\alpha \tag{6.2.4}$$

дорівнюватиме тангенсу кута нахилу площини при граничній рівновазі тіла. Коефіцієнт тертя ковзання f є величиною безрозмірною і лежить у межах $0 < f < 1$. Він залежить від матеріалу поверхонь тертя та їх стану, ступеня обробки, температури, вологості тощо. Розрізняють два коефіцієнти тертя ковзання: спокою та динамічний. Статичний коефіцієнт тертя більший за динамічний.

Задачі з урахуванням сили тертя розв'язують звичайним способом. Складають рівняння рівноваги в положенні рівноваги (на межі ковзання). Тоді сила тертя досягає свого найбільшого значення (6.2.1). Цю величину записують до рівнянь рівноваги.

6.6.2. Тертя кочення

Якщо тверде тіло має форму колеса або котка і котиться по поверхні іншого тіла, то такий рух повинен виключати прослизання в точці контакту, тобто сила тертя ковзання має бути достатньою для того, щоб не допустити прослизання одного тіла (колеса) відносно іншого (дороги). Сила тертя ковзання у цьому випадку відіграє позитивну роль.

Якби коток і поверхня, по якій він котиться, були абсолютно твердими, то такий вид переміщення був би ідеальним і не викликав би ніякого опору. Однак опір рухові котка при його коченні все ж таки виникає, і спричиняється він деформацією котка або поверхні, по якій коток котиться, або їх обома водночас.

Опір, що виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого, називається тертям кочення. Для вивчення цього явища розглянемо кочення абсолютно твердого котка вагою $\vec{G}$ по поверхні, яка деформується (рис. 6.2.2).

Крім ваги $\vec{G}$ на коток діють: тяга $\vec{T}$, сила тертя кочення F_{TP} і вертикальна складова реакції поверхні $\vec{N}$. Система цих сил утворює дві пари сил $(\vec{T}, \vec{F}_{TP})$ і $(\vec{G}, \vec{N})$. Пара сил $(\vec{T}, \vec{F}_{TP})$ створює обертальний момент у напрямку кочення котка, а пара сил $(\vec{G}, \vec{N})$ - обертальний момент, що протидіє коченню. Момент пари $(\vec{G}, \vec{N})$ характеризує момент тертя кочення, який дорівнює добутку нормального тиску її на коефіцієнт тертя кочення δ, що являє собою плече пари:

$$M_{TP.KOЧ} = N \cdot \delta \qquad (6.2.5)$$

Отже, коефіцієнт тертя кочення δ є величиною розмірною [М] і характеризує величину деформації тіл. Сили опору при коченні тіл набагато нижчі, ніж при ковзанні. Тому в техніці, де тільки це можливо, намагаються ковзання замінити коченням (колеса, котки, шарикопідшипники).

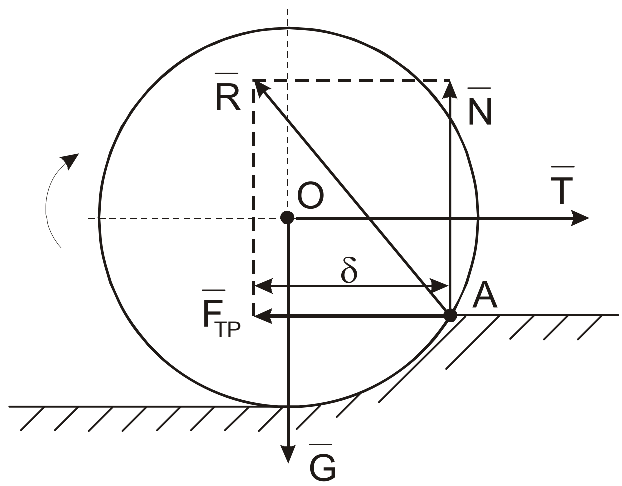


Рис. 6.2.2 Тертя кочення

Близьким за природою як до тертя ковзання, так і до тертя кочення є тертя крутіння (або вертіння), яке виникав при загвинчуванні, свердлінні та являє собою досить складний процес. У цьому курсі це тертя вивчатися не буде.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дати визначення внутрішнім та зовнішнім в’язям.

2. Дати визначення статично визначеним та статично невизначеним задачам.

3. На основі якого принципу розв’язуються статично визначеним задачі.

4. Записати умови рівноваги при застосування методу перерізу.

5. Скільки умов рівноваги можна записати для конструкція що складається з n твердих тіл.

6. Дати поняття про тертя ковзання.

7. Чим характеризується ступінь шорсткості поверхні.

8. Які бувають коефіцієнти тертя.

9. У яких межах лежить коефіцієнт тертя.

10. Навести алгоритм розв’язки задач з урахуванням сил тертя.

11. Дати поняття про тертя кочення.

12. Що є коефіцієнт тертя кочення δ.

7. ЦЕНТР ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ І ЦЕНТР ВАГИ ТІЛА

Сили ваги є розподіленими силами, тобто діють на всі точки по об'єму тіла. Оскільки статика оперує лише зосередженими силами, то розподілені сили ваги замінюємо рівнодіючою силою, яка називається вагою тіла, а точка прикладання рівнодіючої сили ваги - центром ваги тіла. Центр ваги тіла не змінює свого положення при вільному русі тіла у просторі. Ця властивість дозволяє експериментально визначити центр ваги неоднорідних плоских тіл складної конструкції таким чином: достатньо підвісити тіло на нитці в будь-якій його точці та побудувати продовження нитки в тілі (провести вертикаль), а потім повторити цю операцію для декількох інших точок, - і ми одержимо точку перетину побудованих ліній. Це і є центром ваги цього тіла. Центр ваги порожнистих тіл і тіл складної просторової форми може лежати поза межами тіла (наприклад центр ваги обруча).

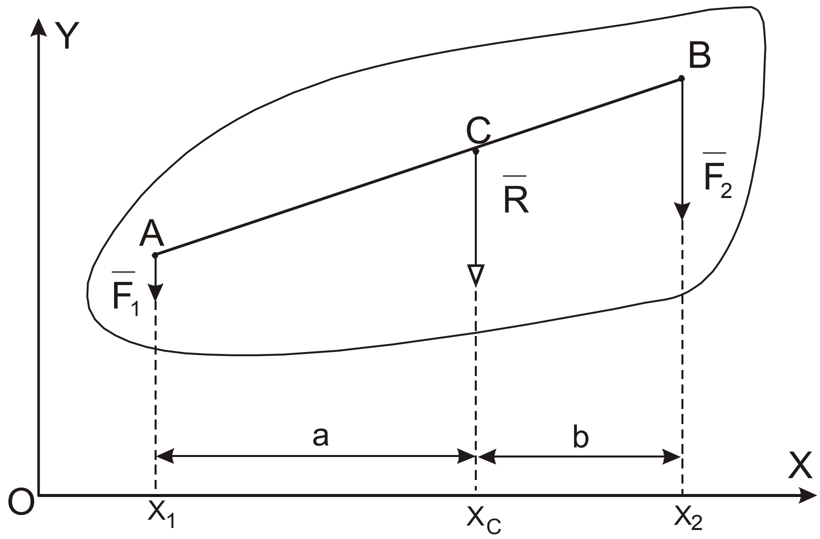


Рис. 7.1.1 Визначення центру ваги

Для аналітичного визначення положення центра ваги скористаємось теоремою Варіньона, яка стверджує, що момент рівнодіючої сили дорівнює сумі моментів складових сил.

Нехай на тіло в точках А і В діють дві паралельні сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 7.1.1), що мають рівнодіючу $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{7.1.1}$$

Рівнодіюча $\vec{R}$ прикладена в точці С, що ділить відстань між силами обернено пропорційно силам:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC} = \frac{b}{a} \qquad (7.1.2)$$

звідки $F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$.

Момент рівнодіючої сили $\vec{R}$ відносно деякої точки О дорівнює

$$M_o(\vec{R}) = R \cdot x_C \qquad (7.1.3)$$

або

$$\begin{aligned} R \cdot x_C &= (F_1 + F_2) \cdot x_C = F_1(x_1 + a) + F_2(x_2 - b) = \\ &= F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + (F_1 \cdot a - F_2 \cdot b) \end{aligned} \qquad (7.1.4)$$

де x_C - координата точки С . Оскільки із рівняння (16.2) маємо $F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$ то вираз в останків дужці залежності (16.4) дорівнює нулю, і ми одержимо

$$R \cdot x_C = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2. \qquad (7.1.5)$$

що і потрібно було довести. Очевидно, що теорема Варіньона справедлива для будь-якого числа сил, тобто

$$R \cdot x_C = \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot x_k \qquad (7.1.6)$$

Центр ваги тіла. Спираючись на залежність (7.1.6), знайдемо виразі для аналітичного визначення координат центра ваги в декартовій системі координат:

$$\begin{aligned} x_C &= \sum_{k=1}^{n} G_k \cdot x_k / G; \\ y_C &= \sum_{k=1}^{n} G_k \cdot y_k / G; \\ z_C &= \sum_{k=1}^{n} G_k \cdot z_k / G; \end{aligned} \qquad (7.1.7)$$

де G - рівнодіюча сил ваги частинок даного тіла;

G_K - вага будь-якої частинки тіла.

Таким чином, центром ваги тіла називається незмінно зв'язана з цим тілом точка, в якій прикладена рівнодіюча сил вага частинок даного тіла і координати якої визначаються формулами (7.1.7).

Центр мас. Якщо позначимо масу тіла через M, а маси його складових частинок через m_K, то маємо:

$$G=Mg; \quad G_k = m_k \cdot g \qquad (7.1.8)$$

де g – - прискорення силі тяжіння.

Підставивши ці значення у вираз (7.1.7), маємо:

$$x_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k / M ;$$

$$y_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k / M ; \qquad (7.1.9)$$

$$z_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot z_k / M .$$

Точка, координати якої знаходяться за формулами (7.1.9), називається центром мас.

Положення центра мас залежить тільки від розподілу мас в тілі і являє собою одну з характеристик цього розподілу.

В той час як поняття про центр ваги мас сенс тільки для тіла, що знаходиться в однорідному полі сили ваги, поняття центра мас не зв’язано з поняттям про силове поле, не залежить від діючих сил і в цьому розумінні в більш загальним. Для твердого тіла, яке розташоване в однорідному волі сили ваги, положення центра вага і центра мас збігаються.

Центр ваги об'ємів. У випадку однорідних тіл вага G_k будь-якої к-ї частинки тіла пропорційна об’єму V_k цієї частинки, а вага тіла - об’єму V тіла.

$$G= V\cdot\gamma; \quad G_k = V_k \cdot \gamma \qquad (7.1.10)$$

де γ - питома вага.

Тоді, підставляючи формулу (16.10) у вираз (16.2), в результаті маємо:

$$x_C = \sum_{k=1}^{n} V_k \cdot x_k / V ; \quad y_C = \sum_{k=1}^{n} V_k \cdot y_k / V ; \quad z_C = \sum_{k=1}^{n} V_k \cdot z_k / V . \quad (7.1.11)$$

Якщо маємо безперервне розподілення маси у твердому тілі тоді маємо інтегральну запис формули (7.1.11):

$$x_C = \frac{1}{V}\iiint x dV ; \quad y_C = \frac{1}{V}\iiint y dV ; \quad z_C = \frac{1}{V}\iiint z dV \qquad (7.1.12)$$

де dV=dx dy dz – елемент об’єму тіла.

Центр ваги площини. Шляхом аналогічних міркувань легко встановити залежність між вагою однорідної пластини та її площею S:

$$x_C = \sum_{k=1}^{n} S_k \cdot x_k / S; \; y_C = \sum_{k=1}^{n} S_k \cdot y_k / S. \qquad (7.1.13)$$

Якщо маємо безперервне розподілення маси у твердому тілі тоді маємо інтегральну запис формули (7.1.13):

$$x_C = \frac{1}{S} \iint x dS; \qquad y_C = \frac{1}{S} \iint y dS. \qquad (7.1.14)$$

де dS=dx· dy – елемент площини.

Центр ваги лінії. Однаково знаходиться залежність міх вагою тонкого стержня (лінії) та його довжиною L :

$$x_C = \sum_{k=1}^{n} L_k \cdot x_k / L; \; y_C = \sum_{k=1}^{n} L_k \cdot y_k / L; \; z_C = \sum_{k=1}^{n} L_k \cdot z_k / L. \qquad (7.1.15)$$

При безперервному розподілі масі твердого тіла формулу (7.1.15) маємо інтегральний запис:

$$x_C = \frac{1}{L} \int x dL; \qquad y_C = \frac{1}{L} \int y dL; \qquad z_C = \frac{1}{L} \int z dL \qquad (7.1.16)$$

де dL – елемент дуги.

Приклад. Визначити центр ваги дуги AB кола радіуса R з центральним кутом 2α (рис. 7.1.2).

Розв’язок

Виберемо початок координат у центрі кола і направимо вісь OX перпендикулярно хорді AB. Внаслідок симетрії фігури відносно осі OX центр ваги її лежить на осі OX, тому y_C=0. Для визначення координати x_C скористаємось формулою 7.1.16 для цієї координати, враховуючи що

$$x = R\cos\varphi, \qquad L = 2R\alpha, \qquad dL = Rd\varphi$$

маємо:

$$x_c = \frac{\int_A^B x dL}{L} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi R d\varphi}{2R\alpha} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

де α - половина центрального кута в радіанах.

Зокрема, для центра ваги дуги півкола $(\alpha = \frac{\pi}{2})$ маємо результат: $x_C = \frac{2R}{\pi}$

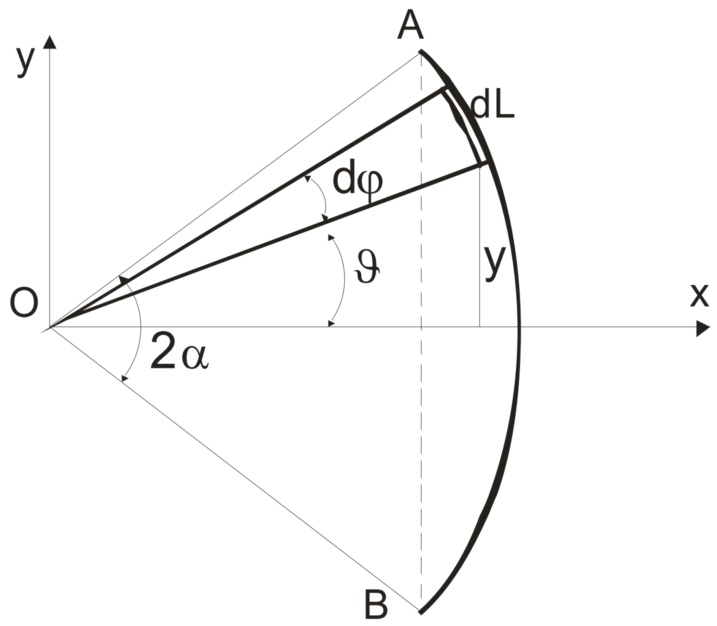


Рис. 7.1.2 визначення центру ваги дуги

Додатково слід вказати деякі способи визначення положення центра ваги, які застосовуються на практиці:

1. Розрахункові:

   а) симетрії;

   б) розбивання,

   в) доповнення;

   г) інтегрування.

2. .Графічні.

3. Експериментальні:

   а) підвішування;

   б) зважування.

Ці способі достатньо висвітлені в літературі і тут вивчатися не будуть.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дати визначення ваги твердого тіла та центру мас.
2. Властивості центру ваги твердого тіла.
3. Сформулювати теорему Варіньона.
4. Записати аналітичні вирази для визначення центру ваги твердого тіла.
5. Записати аналітичні вирази для визначення центру мас твердого тіла.
6. Чим відрізняються між собою центр мас і центр ваги.
7. Записати аналітичні вирази для визначення центру ваги об’ємів.
8. Записати аналітичні вирази для визначення центру ваги площини.
9. Записати аналітичні вирази для визначення центру ваги лінії.
10. Перелічити способи визначення положення центра ваги

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бутенини К.В., Лунц Я.В., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1985. Т. 1
2. Павловский М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002.
3. Павловский М.А., Путята Т.В. Теоретическая механика. – К.: Вища шк., 1985.
4. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 2 т. – М.: Наука, 1973. Т. 1
5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1985.
6. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1972. Т. 1.
7. Яблонский А.А. Сборник задач для курсового проектирования по теоретической механике. М.: Высш. шк., 1985.
8. Добронравов В.В. Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теретической механики. – М.: Высш. шк., 1974.

ЗМІСТ

Стор.

Навчальне видання

Методичні вказівки до самостійного вивчення курсу “Теоретична механіка”. Розділ “Статика”

Укладачі: **Вамболь** Сергій Олександрович
Халипа Віктор Маркович

Відповідальний за випуск С.О. Вамболь

Підписано до друку 25.02.2005 р. Формат 60х84 1/16.
Папір 60 г/м^2. Друк ризограф. Ум.друк. арк. 3,5
Тираж 100 прим. Вид.№ 42/05. Зам.№
Розмножувально-копіювальний сектор
Академії цивільного захисту України
61023, м. Харків, вул. Чернишевського, 94